

Funzione di trasferimento

Sistemi lineari a tempo continuo

Definizione di FdT e proprietà

Trasformata di un vettore

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$



$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

- Proprieta`

$$\mathcal{L}[Ax(t)] = A\mathcal{L}[x(t)]$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$= sX(s) - x(0)$$

- Sistemi dinamici lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Operando la trasf. di L. ad ambo i membri dell'eq. di stato:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$


$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$


$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$


$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

- Quando $x(0) = 0$



$$Y(s) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{p \times n} \overbrace{(sI - A)^{-1} B}^{n \times n} \overbrace{+ D}^{n \times m} \right]}_{\substack{p \times m \\ G(s)}} U(s)$$

Funzione di trasferimento

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(s) & \cdots & G_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(s)U_j(s)$$

$$= G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \cdots$$

- Quando

$$x(0) = 0$$

$$u_k(t) = 0, \quad k \neq j$$

(sovrapposizione effetti)



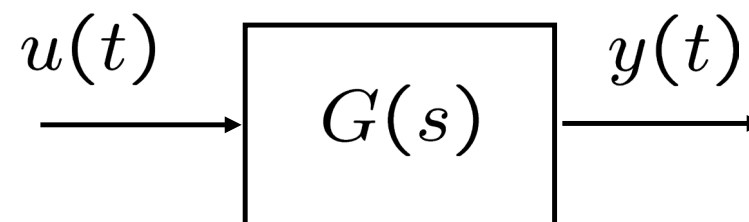
$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

- Sistemi dinamici lineari SISO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R} \quad x(0) = 0$$

$$Y(s) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{1 \times n} \underbrace{(sI - A)^{-1} B}_{n \times n} + \overbrace{D}^{n \times 1} \right]}_{\substack{1 \times 1 \\ G(s)}} U(s)$$

Funzione di trasferimento scalare



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo continuo

Rappresentazione Interna

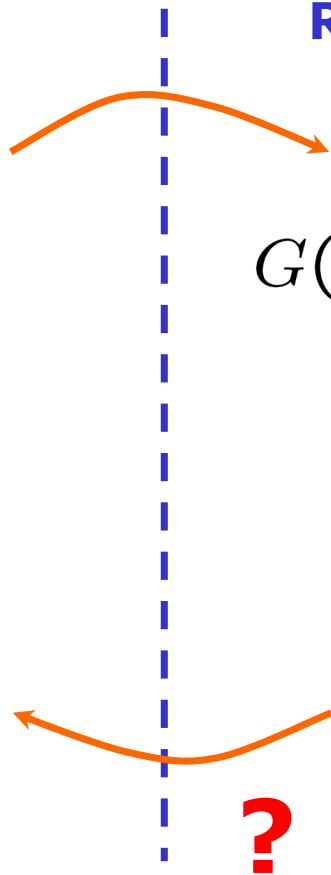
$$(A, B, C, D)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione Esterna

$$G(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

$$Y(s) = G(s)U(s) \\ (\text{con } x(0) = 0)$$

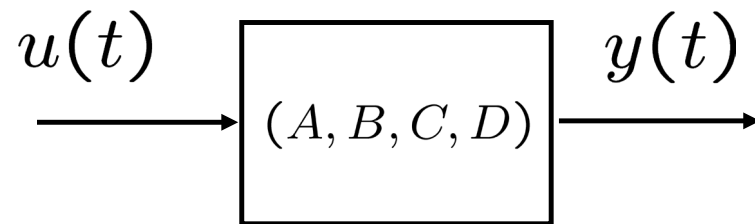


?

“Realizzazione”

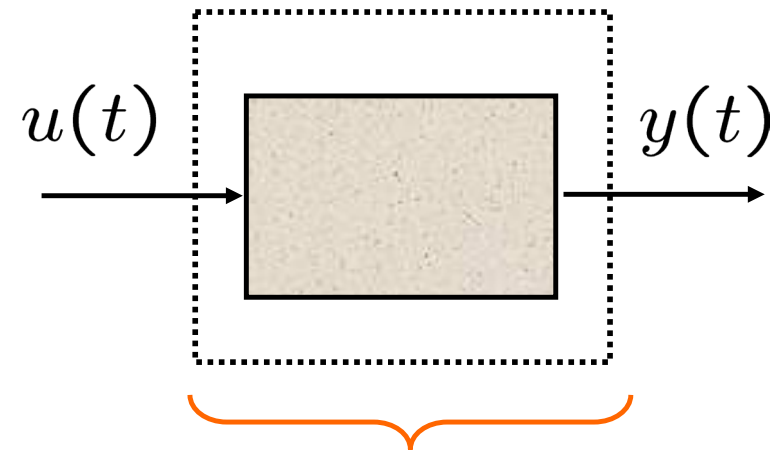
Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo continuo

Rappresentazione Interna



Si tiene conto della struttura
"interna" del sistema

Rappresentazione Esterna



Rappresentazione IN/OUT
del sistema

Funz. di trasferimento di sistemi equivalenti

Ricordiamo:

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

 $\hat{x} = Tx, \quad x = T^{-1}\hat{x}$

 $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = TAT^{-1}\hat{x} + TBu \\ y = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\ &= C \left[T^{-1} (sI - TAT^{-1})^{-1} T \right] B + D \\ &= C \left[T^{-1} (sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1} T \right] B + D \\ &= C \left[T^{-1} (T(sI - A)T^{-1})^{-1} T \right] B + D \\ &= C \left[T^{-1}T (sI - A)^{-1} T^{-1}T \right] B + D \\ &= C \left[(sI - A)^{-1} \right] B + D \\ &= G(s)\end{aligned}$$



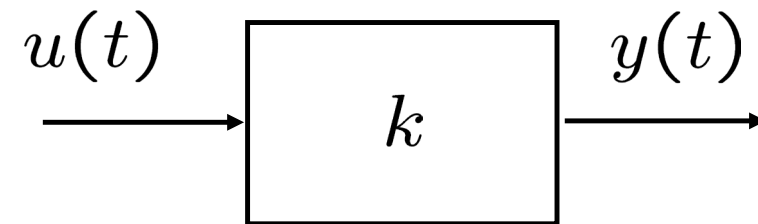
La funzione di trasferimento non dipende dalla particolare scelta di variabili di stato considerata per la rappresentazione interna

- Esempio 1

$$y(t) = ku(t)$$


$$Y(s) = kU(s)$$


$$G(s) = k$$

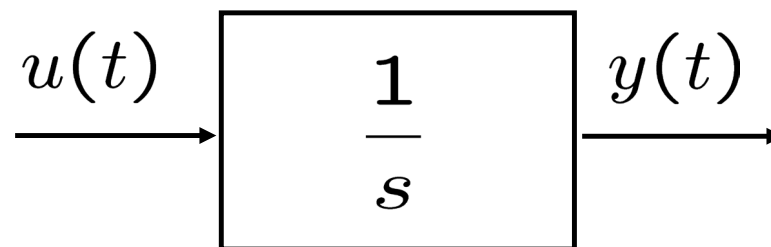


- Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ y = x \end{cases} \quad A = 0; \quad B = 1; \quad C = 1; \quad D = 0$$



$$G(s) = C \left[(sI - A)^{-1} \right] B + D = \frac{1}{s}$$

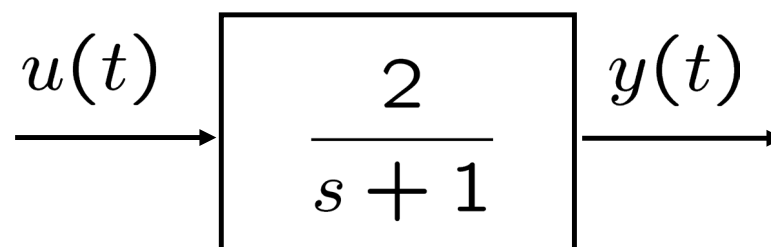


Integratore

- Esempio 3

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = 2x \end{cases} \quad A = -1; \quad B = 1; \quad C = 2; \quad D = 0$$

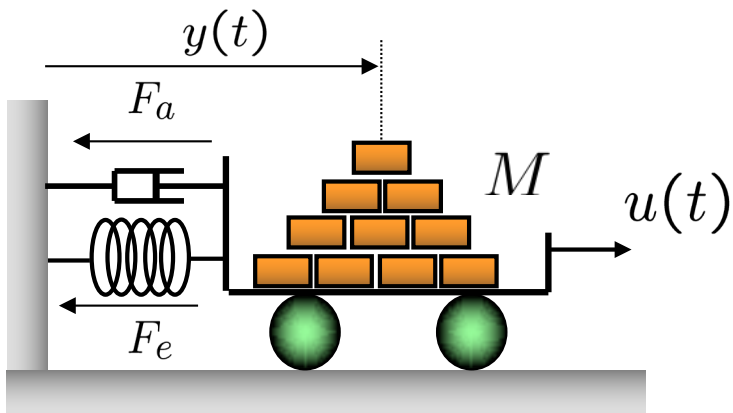
↳ $G(s) = C \left[(sI - A)^{-1} \right] B + D = \frac{2}{s + 1}$



- Esempio 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C \left[(sI - A)^{-1} \right] B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2} \quad \text{Doppio integratore} \end{aligned}$$

- Esempio 5

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{h}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x \end{cases}$$

$$G(s) = C \left[(sI - A)^{-1} \right] B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{h}{M} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} \begin{bmatrix} s + \frac{h}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow G(s) &= \frac{1}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} [1 \ 0] \begin{bmatrix} s + \frac{h}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \frac{1}{Ms^2 + hs + k} \end{aligned}$$

Osservazione:

$$M\ddot{y} = -h\dot{y} - ky + u \quad y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0$$


$$Ms^2Y(s) = -hsY(s) - kY(s) + U(s)$$


$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

- Proprieta` della FDT – Caso LTI SISO a tempo continuo

$$G(s) = C \left[(sI - A)^{-1} \right] B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \textcircled{s} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \textcircled{s} - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & \textcircled{s} - a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

Matrice compl. algebrici

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

- $\det(sI - A) = \varphi(s)$ polinomio di grado n

- $K(s) = [k_{ij}(s), i, j = 1, \dots, n]$

$$k_{ij}(s) \quad \text{polinomio di grado} < n, \quad \forall i, j$$

- $C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{\det(sI - A)} \underbrace{CK(s)B}_{M(s)} = \frac{M(s)}{\varphi(s)}$

$$M(s) \quad \text{polinomio di grado} < n$$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= C (sI - A)^{-1} B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D \\
 &= \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)}
 \end{aligned}$$

- $N(s)$ polinomio di grado n
- se $D = 0$
 - ↳ $N(s)$ polinomio di grado $< n$

- In conclusione (caso SISO):

- $G(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$ funzione razionale (rapporto di polinomi) in s

- $\varphi(s) = \det(sI - A)$ polinomio di grado n

- $N(s)$ ha grado $m \leq n$
 $\quad \quad \quad = n$ solo se $D \neq 0$

salvo cancellazioni

- Se ci sono fattori comuni:

$$G(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{\varphi}(s)}$$

- $\bar{\varphi}(s)$ e' un fattore di $\varphi(s)$ di grado $\nu < n$
- $\bar{N}(s)$ ha grado $m < \nu$
 $= \nu$ solo se $D \neq 0$

- Esempio 1

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1] x \end{cases} \quad n = 2$$

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 1] \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$



$\bar{\varphi}(s) = s+1$ e' un fattore di $\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_1 \quad \longrightarrow \quad x_1(t) = 0, \forall t \geq 0$$



$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \cancel{x_1} - x_2 + u \\ y = \cancel{x_1} + x_2 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$



La parte della dinamica descritta da x_1 e' "nascosta"

- Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1] x \end{cases} \quad n = 2$$

$$\begin{aligned} G(s) &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \ 1] \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$



$\bar{\varphi}(s) = s + 1$ e' un fattore di $\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$



questa parte della dinamica evolve senza essere influenzata dall'evoluzione di $x_1(t)$



la parte della dinamica descritta da x_1 e' "nascosta"

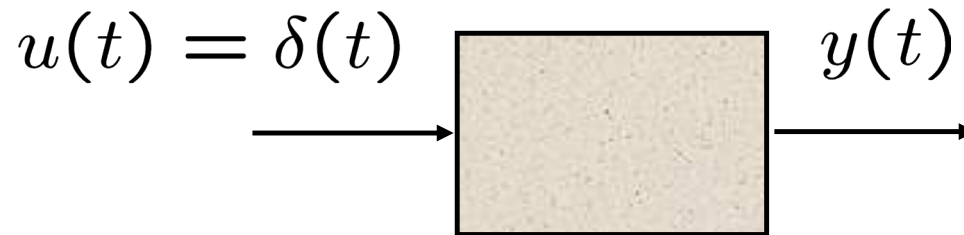
$$G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

- Significato delle cancellazioni?

cancellazioni in $G(s)$  presenza di parti "nascoste"

Sistemi SISO – def. alternativa di FDT

Sistemi a tempo continuo



$$x(0) = 0$$

$$u(t) = \delta(t) \quad \longrightarrow \quad U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

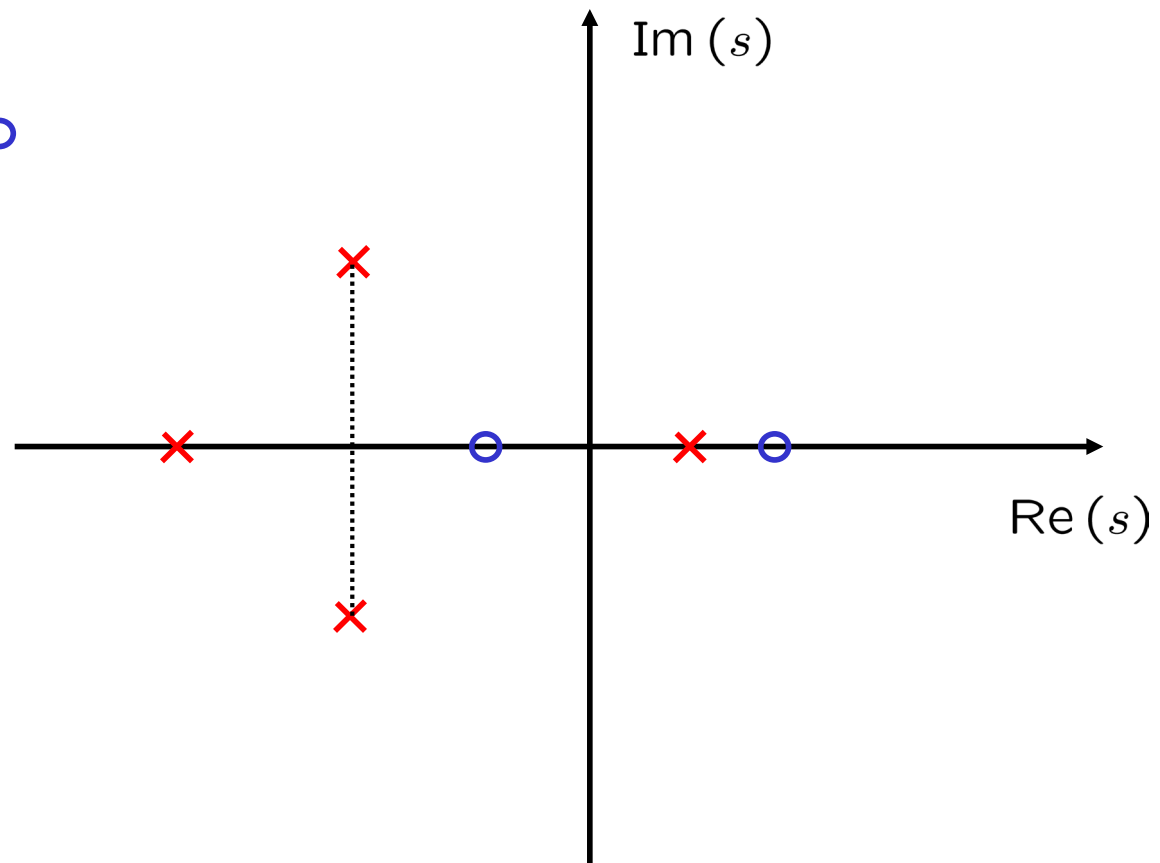
$$\downarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{1} = Y(s)$$

ovvero $G(s) = \mathcal{L} [\text{risposta all'impulso}]$

Poli e zeri di una FDT: sistemi a tempo continuo

$$G(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

- Poli: radici di $\varphi(s)$ $\times$
- Zeri: radici di $N(s)$ $\circ$



- Proprieta`

- I poli sono autovalori
- Un autovalore puo` non essere un polo in caso di cancellazioni (vedi esempi)
- La stabilita` dipende dai poli

As. stabilita`



$\text{Re}(\text{poli}) < 0$

salvo cancellazioni

- $\text{Nr. zeri} \leq \text{Nr. poli}$

Parametrizzazione della FdT: Esempio

$$G(s) = \frac{4s^2 + 12s}{s^4 + 3s^3 + 2s^2}$$

Parametri:

$$\beta_2 = 4, \beta_1 = 12, \beta_0 = 0$$

$$\alpha_4 = 1, \alpha_3 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_1 = \alpha_0 = 0$$

$$= 4 \frac{s(s+3)}{s^2(s+1)(s+2)}$$

Parametri:

$$\varrho = 4, z_1 = -3$$

$$p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$$

$$= \frac{1}{s} \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{(1+s) \left(1 + \frac{s}{2}\right)}$$

Parametri:

$$\mu = 6, T_1 = 1/3$$

$$\tau_1 = 1, \tau_2 = 1/2$$

- Diverse parametrizzazioni di una FDT

- (1) Parametrizzazione secondo i coefficienti dei polinomi al numeratore ed al denominatore

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Parametri: β_i, α_i

(2) Parametrizzazione secondo poli e zeri

$$G(s) = \underbrace{\varrho}_{\text{costante di trasferimento}} \frac{(s + \underbrace{z_1}_{\text{Zeri (col segno cambiato)}})(s + \underbrace{z_2}_{\text{Zeri (col segno cambiato)}}) \cdots (s + \underbrace{z_m}_{\text{Zeri (col segno cambiato)}})}{(s + \underbrace{p_1}_{\text{Poli (col segno cambiato)}})(s + \underbrace{p_2}_{\text{Poli (col segno cambiato)}}) \cdots (s + \underbrace{p_n}_{\text{Poli (col segno cambiato)}})}$$

Parametri: ϱ, z_i, p_i

$$G(s) = \varrho \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

se $z_i, p_i \in \mathbb{R}, \forall i$

$$= \varrho \frac{1}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m z_i \left(\frac{s}{z_i} + 1 \right)}{\prod_{i=1}^n p_i \left(\frac{s}{p_i} + 1 \right)}$$

$$= \frac{1}{s^g} \varrho \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)}$$

$$\frac{1}{z_i} = T_i \quad \frac{1}{p_i} = \tau_i$$

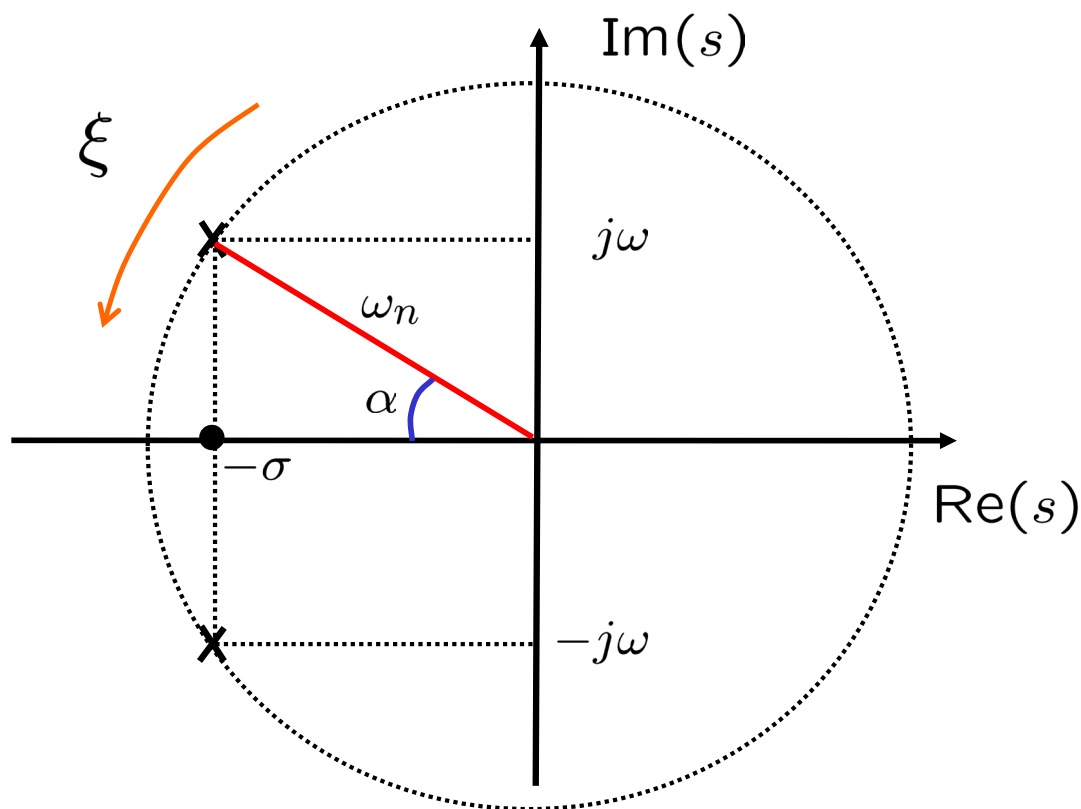
costanti di tempo

g tipo del sistema

μ guadagno

$$g := (\text{Nr. poli in } s = 0) - (\text{Nr. zeri in } s = 0)$$

Rappresentazione alternativa nel caso di poli/zeri complessi:



$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

$$\omega_n \xi = \sigma$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega$$

 ω_n

Pulsazione naturale

$$\cos \alpha = \xi$$

Smorzamento

$$0 \leq \xi \leq 1$$



$$G(s) = \frac{\varrho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Quindi dalla parametrizzazione di tipo (2) si ha:

$$G(s) = \frac{\varrho}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)} = \frac{\varrho}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{\varrho}{s^2 + \underbrace{2\sigma s}_{2\xi\omega_n} + \underbrace{\sigma^2 + \omega^2}_{\omega_n^2}} = \frac{\varrho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\varrho/\omega_n^2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{\mu}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

dove $\mu := \frac{\varrho}{\omega_n^2}$

Pertanto: se alcuni zeri e/o poli sono complessi si può scrivere:

$$G(s) = \frac{1}{s^g} \varrho \frac{\prod_i z_i}{\prod_i p_i} \frac{\prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i \omega_{ni}^2} \frac{\prod_i \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{1}{\alpha_{ni}^2} s^2\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2\right)}$$

g tipo del sistema

μ guadagno

$$\frac{1}{z_i} = T_i \quad \frac{1}{p_i} = \tau_i$$

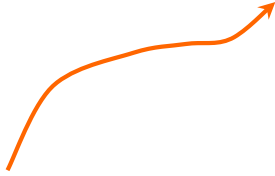
costanti di tempo

$$g := (\text{Nr. poli in } s = 0) - (\text{Nr. zeri in } s = 0)$$

(3) Parametrizzazione secondo costanti di tempo

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + T_i s)}{\prod_i (1 + \tau_i s)} \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{1}{\alpha_{ni}^2} s^2\right)}{\prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2\right)}$$

Parametri: $\mu, g, T_i, \tau_i, \zeta_i, \alpha_{ni}, \xi_i, \omega_{ni}$

Guadagno (?!) 

ha a che fare con il guadagno statico ???

- Guadagno per sistemi a tempo continuo

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$



$$G(s)|_{s=0} = -CA^{-1}B + D$$

- Se $g = 0$



$$\mu = G(0) = -CA^{-1}B + D = \text{guadagno statico } \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

- In generale, se $g \neq 0$



$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) \quad \text{guadagno "generalizzato"}$$

	Guadagno statico $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$	Guadagno della FDT μ
$g = 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D \quad (= G(0))$	$\mu = G(0)$
$g < 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = 0 \quad (= G(0))$	$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$
$g > 0$	NON DEFINITO	$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$

Sistemi lineari a tempo discreto

Definizione di FdT e proprietà

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) & x(0) = \bar{x} \\ y(k) = cx(k) + du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$



$$x(k) = a^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i)$$

... con le Z-trasformate:

$$\mathcal{Z} \{x(k+1)\} = \mathcal{Z} \{ax(k) + bu(k)\}$$



$$zX(z) - z\bar{x} = aX(z) + bU(z)$$



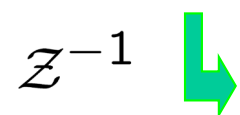
$$(z - a)X(z) = z\bar{x} + bU(z)$$



$$X(z) = \frac{z}{z - a}\bar{x} + \frac{b}{z - a}U(z)$$

usando la proprietà $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$

e la trasformata notevole $\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \frac{z}{z - a}$



$$\mathcal{Z}^{-1} \quad x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = a^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i), k \geq 0$$

Movimento dello stato: caso generale

$$x(k) = A^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)$$



Come determino questa espressione?
Posso utilizzare anche in questo caso
la Z—trasformata?

Movimento dell'uscita: caso generale

$$y(k) = C A^k \bar{x} + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) + D u(k)$$



Come determino questa espressione?
Posso utilizzare anche in questo caso
la Z—trasformata?

Z-Trasformata di un vettore

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$


$$X(z) = \mathcal{Z} \{x(k)\} \triangleq \begin{bmatrix} X_1(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix}$$

- Proprietà

$$\mathcal{Z} \{A x(k)\} = A \mathcal{Z} \{x(k)\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{x(k+1)\} &= \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \{x_1(k+1)\} \\ \vdots \\ \mathcal{Z} \{x_n(k+1)\} \end{bmatrix} = \dots \\ &= \begin{bmatrix} z (X_1(z) - x_1(0)) \\ \vdots \\ z (X_n(z) - x_n(0)) \end{bmatrix} = \dots \\ &= z [X(z) - x(0)] \end{aligned}$$

- Sistemi dinamici lineari stazionari

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Operando la Z-trasformata ad ambo i membri dell' eq. di stato:

$$z[X(z) - x(0)] = AX(z) + BU(z)$$

$$\downarrow (zI - A)X(z) = \underbrace{zx(0)}_{\text{NB!}} + BU(z)$$

$$\downarrow \begin{cases} X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1}zx(0)}_{\text{NB!}} + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$Y(z) = \underbrace{C(zI - A)^{-1}zx(0)}_{\text{NB!}} + [C(zI - A)^{-1}B + D]U(z)$$

In generale (m ingressi, p uscite)

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \cdots & G_{1m}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(z) & \cdots & G_{im}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(z) & \cdots & G_{pm}(z) \end{bmatrix}$$

$$Y_i(z) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(z)U_j(z)$$

$$= G_{i1}(z)U_1(z) + G_{i2}(z)U_2(z) + \cdots$$

- Quando

$$x(0) = 0$$

$$u_h(k) = 0, \quad h \neq j$$

sovrapposizione degli effetti



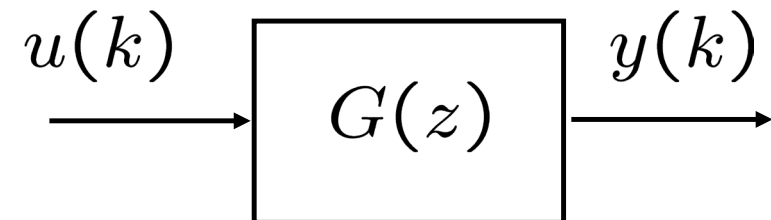
$$G_{ij}(z) = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)}$$

- Sistemi dinamici lineari SISO

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad u(k), y(k) \in \mathbb{R} \quad x(0) = 0$$

$$Y(z) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{1 \times n} \underbrace{(zI - A)^{-1} B}_{n \times n} + \overbrace{D}^{n \times 1} \right]}_{\substack{1 \times 1 \\ G(z)}} U(z)$$

Funzione di trasferimento scalare



$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo discreto.

Rappresentazione Interna

$$(A, B, C, D)$$

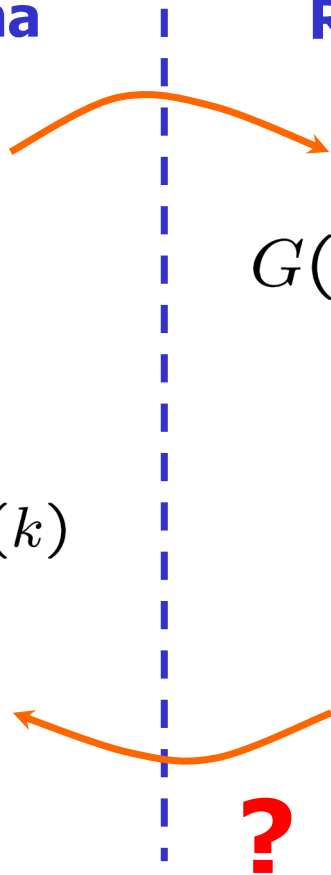
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Rappresentazione Esterna

$$G(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]$$

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

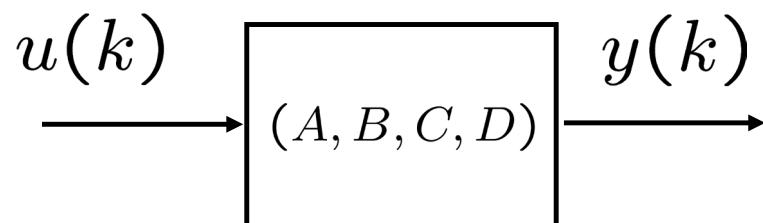
$$(\text{con } x(0) = 0)$$



“Realizzazione”

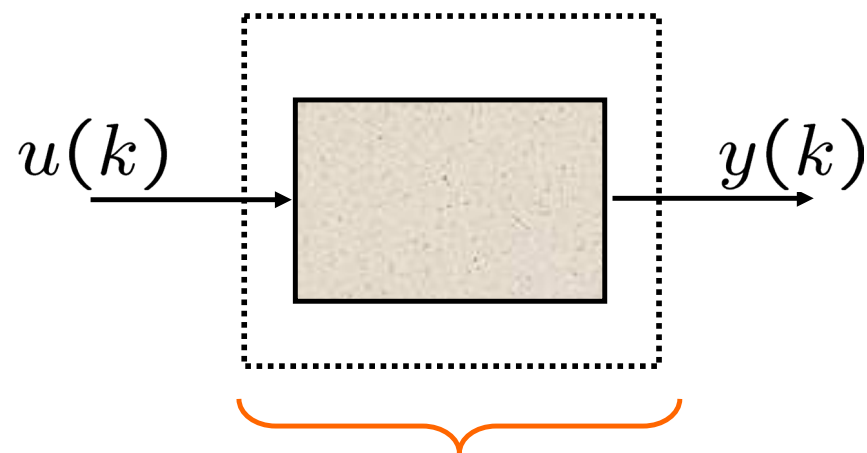
Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo discreto.

Rappresentazione Interna



Si tiene conto della struttura
“interna” del sistema

Rappresentazione Esterna



Rappresentazione IN/OUT
del sistema

Funzioni di trasferimento di sistemi equivalenti

Ricordiamo: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$



$$\hat{x}(k) = Tx(k), \quad x(k) = T^{-1}\hat{x}(k)$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = TAT^{-1}\hat{x}(k) + TBu(k) \\ y(k) = CT^{-1}\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\hat{G}(z) &= \hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + D \\&= C \left[T^{-1} (zI - TAT^{-1})^{-1} T \right] B + D \\&= C \left[T^{-1} (zTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1} T \right] B + D \\&= C \left[T^{-1} (T(zI - A)T^{-1})^{-1} T \right] B + D \\&= C \left[T^{-1}T (zI - A)^{-1} T^{-1}T \right] B + D \\&= C \left[(zI - A)^{-1} \right] B + D \\&= G(z)\end{aligned}$$



La funzione di trasferimento non dipende dalla particolare scelta di variabili di stato considerata per la rappresentazione interna!

- Esempio 1

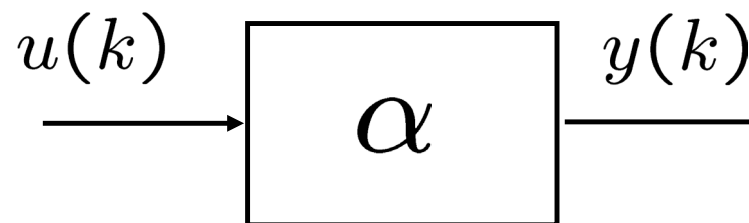
“Le spese nell'anno k
sono proporzionali al
reddito nell'anno k ”



$$y(k) = \alpha \cdot u(k)$$



$$Y(z) = \alpha \cdot U(z)$$



$$G(z) = \alpha$$

Sistema algebrico

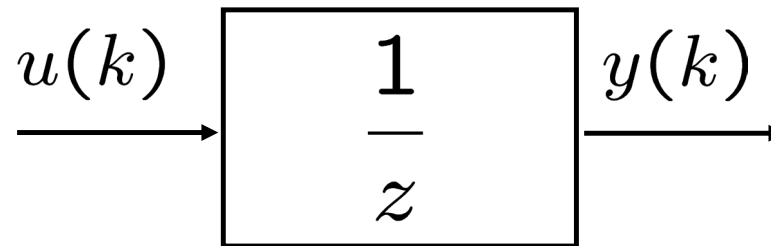
Funzione di trasferimento puramente algebrica

- Esempio 2

$$\begin{cases} x(k+1) = u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases} \quad A = 0; \quad B = 1; \quad C = 1; \quad D = 0$$



$$G(z) = C \left[(zI - A)^{-1} \right] B + D = \frac{1}{z}$$

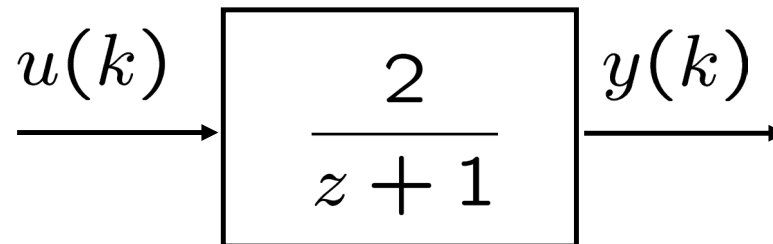


Ritardo finito (pari ad 1 passo)

- Esempio 3
$$\begin{cases} x(k+1) = -x(k) + u(k) \\ y(k) = 2x(k) \end{cases}$$

$$A = -1; \quad B = 1; \quad C = 2; \quad D = 0$$

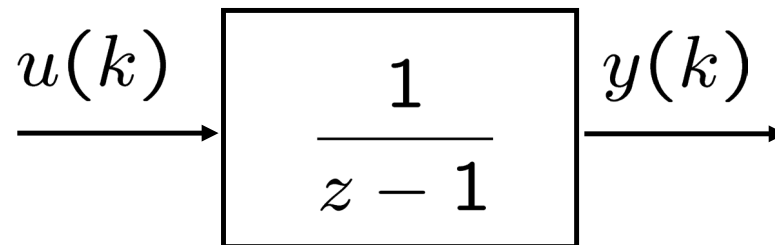
↳
$$G(z) = C \left[(zI - A)^{-1} \right] B + D = \frac{2}{z + 1}$$



- Esempio 4

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

↳ $G(z) = C \left[(zI - A)^{-1} \right] B + D = \frac{1}{z - 1}$



Integratore a tempo discreto (formula di Eulero “in avanti”)

Osservazione: funzione di trasferimento ed equazioni alle differenze

Partiamo da $y(k+n) = -a_1 y(k+n-1) - a_2 y(k+n-2) + \dots$
 $-a_n y(k) + b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \dots + b_m u(k)$

Siano nulle tutte le condizioni iniziali ed applichiamo la Z-Trasformata ad entrambi i membri dell'espressione

$$z^n Y(z) = -a_1 z^{n-1} Y(z) - \dots - a_n Y(z) +$$

$$+ b_0 z^m U(z) + \dots + b_m U(z)$$

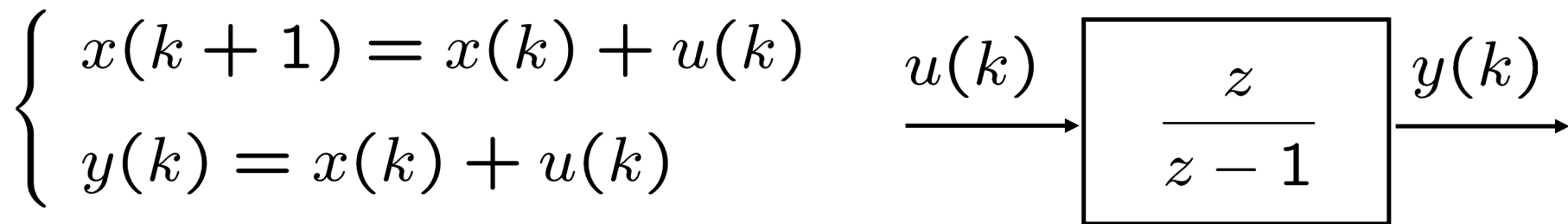


$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

- Esempio 5

$$y(k+1) = y(k) + u(k+1)$$


$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z-1}$$



Integratore discreto (formula di Eulero “all’ indietro”)

- Proprietà della FDT – Caso SISO

$$G(z) = C \left[(zI - A)^{-1} \right] B + D$$

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \textcircled{z} - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \textcircled{z} - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & \textcircled{z} - a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo.

Matrice compl. algebrici

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI - A)} K(z)$$

- $\det(zI - A) = \varphi(z)$ polinomio di grado n

- $K(z) = [k_{ij}(z), i, j = 1, \dots, n]$

$$k_{ij}(z) \quad \text{polinomio di grado} < n, \quad \forall i, j$$

- $C(zI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det(zI - A)} \underbrace{CK(z)B}_{M(z)} = \frac{M(z)}{\varphi(z)}$

$$M(z) \quad \text{polinomio di grado} < n$$

$$\begin{aligned} G(z) &= C (zI - A)^{-1} B + D = \frac{M(z)}{\varphi(z)} + D \\ &= \frac{M(z) + D\varphi(z)}{\varphi(z)} = \frac{N(z)}{\varphi(z)} \end{aligned}$$

- $N(z)$ polinomio di grado n
- se $D = 0$
 $N(z)$ polinomio di grado $< n$

- In conclusione (caso SISO):

- $G(z) = \frac{N(z)}{\varphi(z)}$ funzione razionale (rapporto di polinomi) in z

- $\varphi(z) = \det(zI - A)$ polinomio di grado n

- $N(z)$ ha grado $m \leq n$
 $= n$ solo se $D \neq 0$

salvo cancellazioni

- Se ci sono fattori comuni:

$$G(z) = \frac{\bar{N}(z)}{\bar{\varphi}(z)}$$

- $\bar{\varphi}(z)$ è un fattore di $\varphi(z)$ di grado $\nu < n$
- $\bar{N}(z)$ ha grado $m < \nu$
 $= \nu$ solo se $D \neq 0$

Valgono le medesime considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo!

- Esempio 1

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \ 2] x(k) \end{cases} \quad n = 2$$

$$G(z) = [0 \ 2] \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 0 & z+\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \ 2] \frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} z+\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2 \cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)} (z+\frac{1}{2})} = \frac{2}{z+\frac{1}{2}}$$

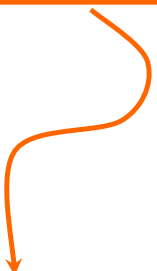
 $\bar{\varphi}(z) = z + \frac{1}{2}$ è un fattore di $\varphi(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right) (z-1)$
di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - 2x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + u(k) \\ y(k) = 2x_2(k) \end{cases}$$

questa parte della dinamica evolve senza essere influenzata dall'evoluzione di $x_1(k)$



la parte della dinamica descritta da x_1 è "nascosta"

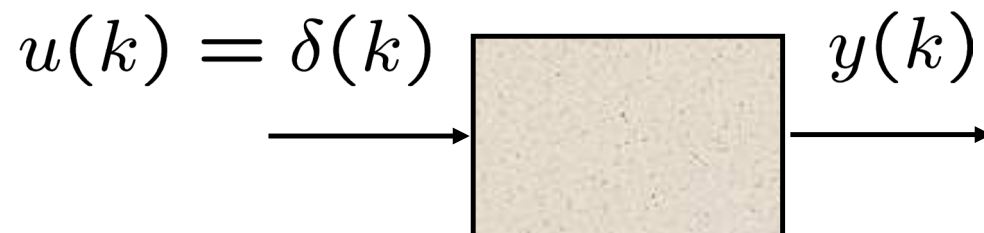

$$G(z) = \frac{2}{z+1}$$

- Significato delle cancellazioni?

cancellazioni in $G(z)$  presenza di parti "nascoste"

Sistemi SISO

definizione alternativa di FDT



$$x(0) = 0$$

$$u(k) = \delta(k) \quad \rightarrow \quad U(z) = \mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$$

$$\rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{1} = Y(z)$$

ovvero $G(z) = \mathcal{Z} [\text{risposta all'impulso}]$

- Esempio 2

Dato il sistema descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k+2) = 1.5 y(k+1) - 0.5 y(k) + u(k+1)$$

si determini la sua risposta impulsiva, a partire da condizioni iniziali tutte nulle.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

$$U(k) = \mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$$


$$Y_{\text{imp}}(z) = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

$$Y_{\text{imp}}(z) = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 1)}$$

$$\frac{Y_{\text{imp}}(z)}{z} = \frac{1}{(z - 0.5)(z - 1)} = \frac{C_{1,1}}{z - 0.5} + \frac{C_{2,1}}{z - 1}$$

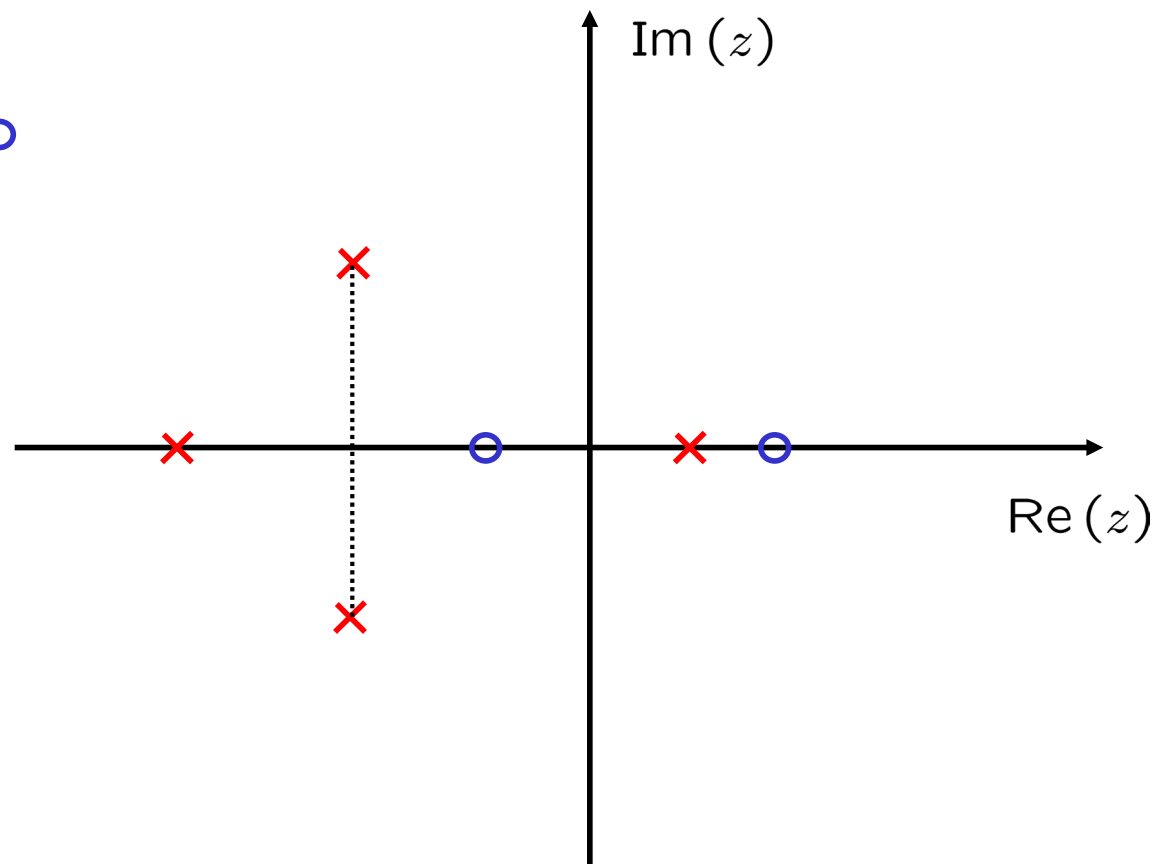
$$C_{1,1} = \lim_{z \rightarrow 0.5} \frac{1}{(z - 1)} = -2 \quad C_{2,1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z - 0.5)} = 2$$

$$y_{\text{imp}}(k) = -2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^k - 1 \right] \cdot 1(k)$$

Poli e zeri di una FDT per un sistema a tempo discreto

$$G(z) = \frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

- Poli: radici di $\varphi(z)$ ✕
- Zeri: radici di $N(z)$ ○



Valgono le medesime considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo!

- Proprietà

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

- I poli sono autovalori
- Un autovalore può non essere un polo in caso di cancellazioni (vedi esempi)
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità



$$|(\text{poli})| < 1$$

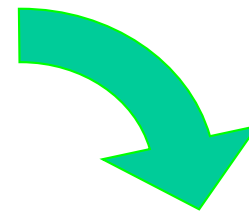
salvo cancellazioni

- $\text{Nr. zeri} \leq \text{Nr. poli}$

Osservazione: stabilità BIBO e stabilità interna per sistemi a tempo discreto

Ora possiamo affermare che

Stabilità asintotica



Stabilità BIBO

Solo se non ci sono cancellazioni!

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

-Diverse parametrizzazioni di una FDT per sistemi a tempo discreto

- (1) Parametrizzazione secondo i coefficienti dei polinomi al numeratore ed al denominatore

$$G(z) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

Parametri: β_i, α_i

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

(2) Parametrizzazione secondo poli e zeri

$$G(z) = \gamma \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

Diagram illustrating the parametrization of a transfer function $G(z)$ according to poles and zeros:

- Zeri** (Zeros): Indicated by arrows pointing to the numerator factors $(z - z_1)$, $(z - z_2)$, ..., $(z - z_m)$.
- Poli** (Poles): Indicated by arrows pointing to the denominator factors $(z - p_1)$, $(z - p_2)$, ..., $(z - p_n)$.
- costante di trasferimento** (Transfer constant): Indicated by an arrow pointing to the gain factor γ .

Parametri: γ, z_i, p_i

$$G(z) = \gamma \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

se $z_i, p_i \in \mathbb{R}, \forall i$

$$= \gamma \frac{1}{(z - 1)^g} \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_i (z - p_i)}$$

Fattorizzo mettendo in evidenza il termine $(z - 1)^g$

γ costante di trasferimento

g tipo del sistema

$$g := (\text{Nr. poli in } z = 1) - (\text{Nr. zeri in } z = 1)$$

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

Se alcuni zeri e/o poli sono complessi si generalizza così:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^g} \gamma \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_i (z - p_i)} \frac{\prod_i (z^2 - 2\varphi_i \cos(\zeta_i) z + \varphi_i^2)}{\prod_i (z^2 - 2\psi_i \cos(\vartheta_i) z + \psi_i^2)}$$

g tipo del sistema

γ costante di trasferimento

$$z_i \in \mathbb{C}, \quad z_i = \varphi_i e^{j\zeta_i}$$

$$p_i \in \mathbb{C}, \quad p_i = \psi_i e^{j\vartheta_i}$$

$$g := (\text{Nr. poli in } z = +1) - (\text{Nr. zeri in } z = +1)$$

Esempio

$$G(z) = \frac{4z^2 + 12z}{z^4 + z^3 - 2z^2}$$

$$= 4 \frac{\cancel{z}(z+3)}{\cancel{z}^2(z-1)(z+2)}$$

Parametri:

$$\beta_2 = 4, \beta_1 = 12, \beta_0 = 0$$

$$\alpha_4 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_1 = \alpha_0 = 0$$

Parametri:

$$\gamma = 4, z_1 = -3$$

$$p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = -2$$

- Guadagno: definizione per sistemi a tempo discreto

$$G(z) = C (zI - A)^{-1} B + D$$



$$G(z)|_{z=1} = ?$$

- Se $g = 0$



$$\mu = G(1) = C(I - A)^{-1}B + D = \text{guadagno statico } \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

- In generale, se $g \neq 0$



$$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^g G(z) \quad \text{guadagno "generalizzato"}$$

	Guadagno statico $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$	Guadagno della FDT μ
$g = 0$	$\mu = C(I - A)^{-1}B + D \quad (= G(1))$	$\mu = G(1)$
$g < 0$	$\mu = C(I - A)^{-1}B + D = 0 \quad (= G(1))$	$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^{-g} G(z)$
$g > 0$	NON DEFINITO	$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^{-g} G(z)$