Trasformate di Laplace

Importanza dei modelli dinamici

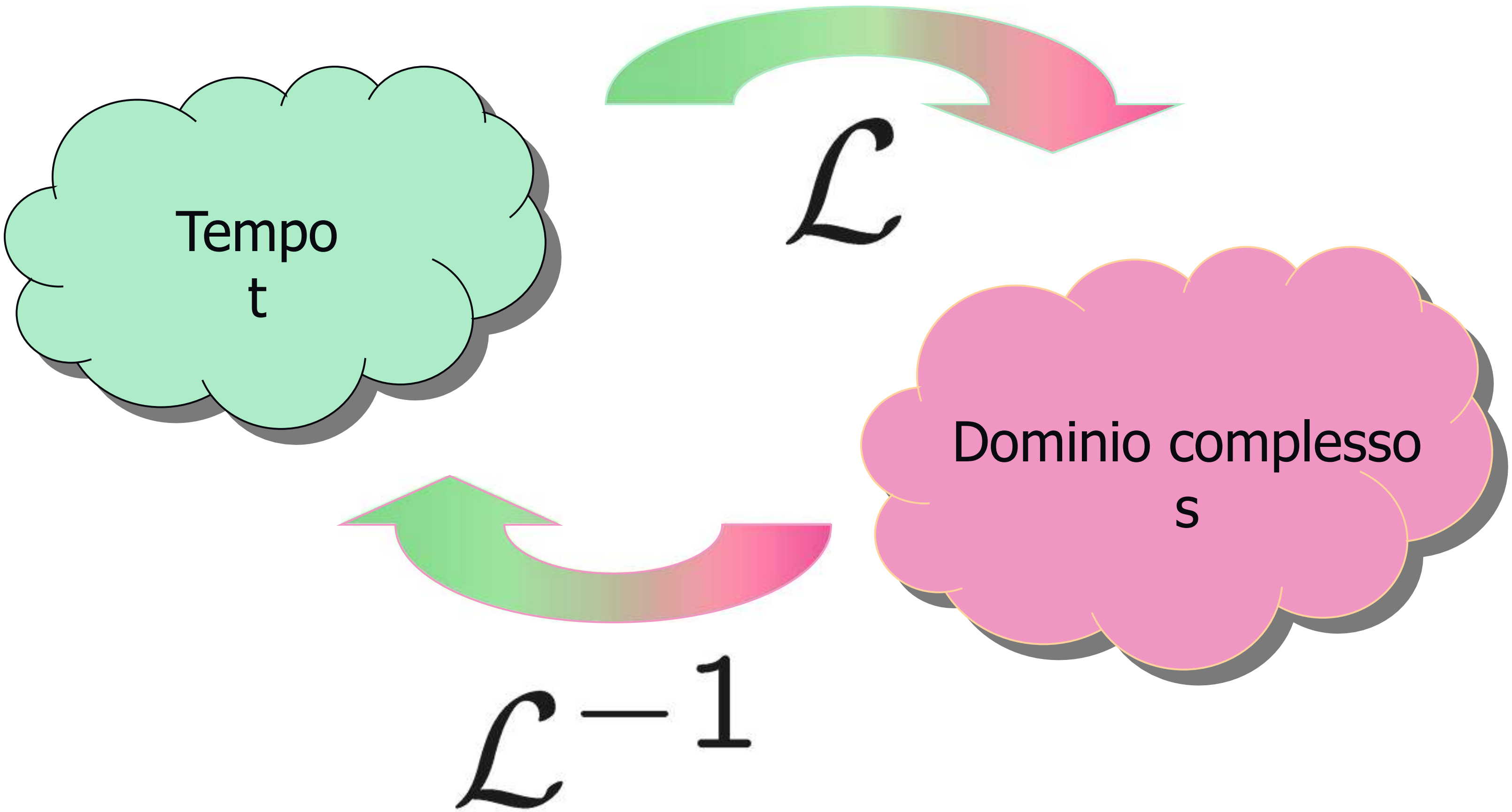
↓

Risolvere equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti)

↓

Metodi per risolverle ???

La trasformata di Laplace e' un OPERATORE funzionale



Definizione :

si considerano funzioni non nulle solo per $t \geq 0$
continue a tratti, senza comportamento impulsivo per t = 0
(ed altre ipotesi sempre verificate dalle funzioni considerate in questo corso)

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

$$s = \sigma + j\,\omega$$

Funzioni del tempo

Funzioni complesse

Perche’ queste trasformate sono utili?

1. Hanno molte proprieta’ che aiutano a risolvere le equazioni differenziali

2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate “notevoli”

Proprieta'

1. Linearita' :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale: $f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

Proprieta'

3. Trasformata della derivata: $f(t),\ f'(t)$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0)$$

Derivate di ordine "n"

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n\,F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0)$$

Proprieta'

4. Traslazione in frequenza: se $k \in C$

$$\mathcal{L}[e^{kt} f(t)] = F(s-k)$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

Proprieta'

6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ a \in R^{+}$$

7. Moltiplicazione per t^n :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

Proprieta’

Def: integrale di convoluzione – $f,\ g$ non nulle per $t \geq 0$

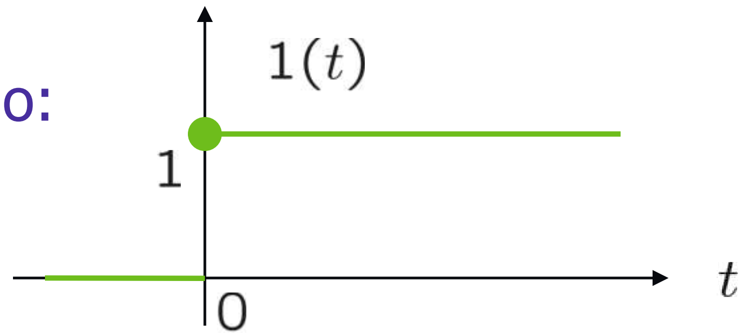
$$h(t) = f(t) \, * \, g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) \, * \, g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

Trasformate notevoli

1. Trasformata del gradino unitario:



$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt$$

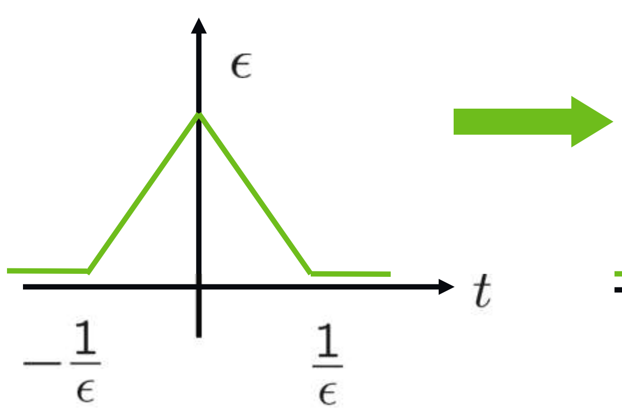
$$= -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

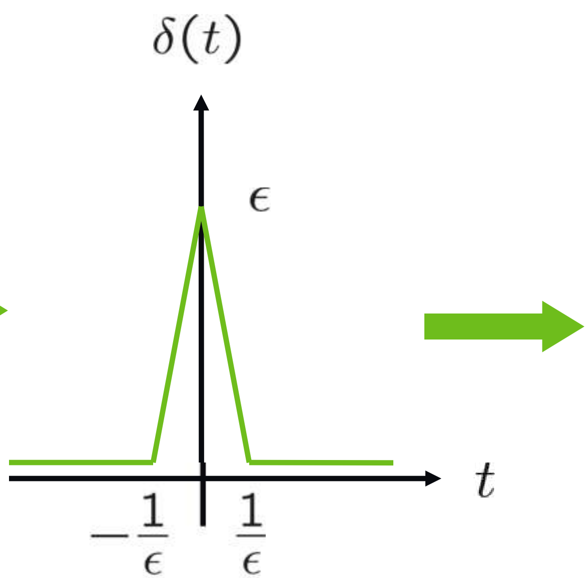
Definizione: $\delta(t)$ di Dirach

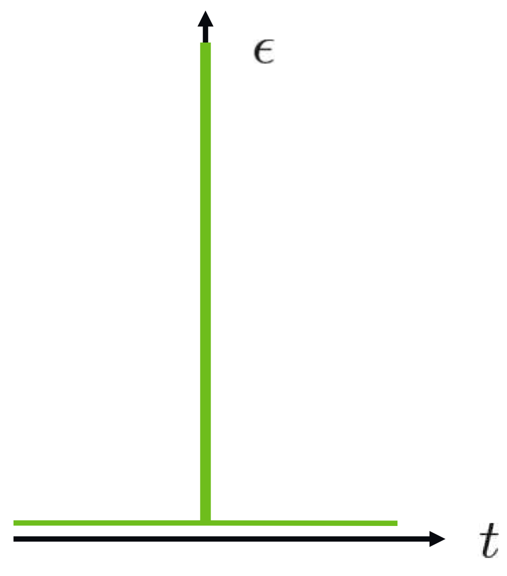
$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Si puo' vedere come il $\lim_{\epsilon \to \infty} f_\epsilon(t)$ di una successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)dt = 1$$







Proprietà ed utilizzo

- integrale unitario (per definizione)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- proprietà di "estrazione" (**sifting property**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-T)dt = f(T)$$

- Utilizzo nello studio dei sistemi dinamici a tempo continuo:
  - condizioni iniziali;
  - comportamento ingresso/uscita del sistema (risposta all'impulso)

Trasformata di Laplace: espressione generale

- Ammettendo che la funzione abbia **comportamento impulsivo** a t = 0 (le altre condizioni su f(t) sono verificate)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

Trasformata della derivata: espressione generale

- Ammettendo che la funzione abbia comportamento impulsivo a t= 0 (le altre condizioni su f(t) sono verificate)

Trasformata della derivata: $f(t),\ f'(t) \quad \mathcal{L}\text{-trasformabili}$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0^-)$$

Derivate di ordine ***n***

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n\,F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0^-)$$

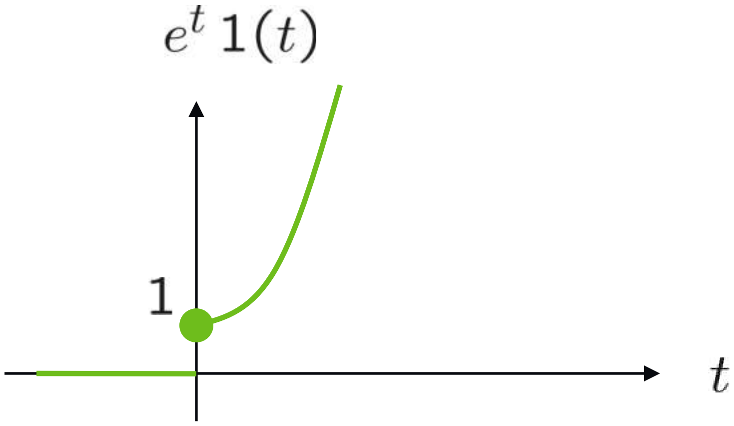
Trasformate notevoli

2. Trasformata della $\delta(t)$ di Dirach

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, d\,t = 1$$

Trasformate notevoli

3. Trasformata dell'esponenziale $e^t \, 1(t)$:

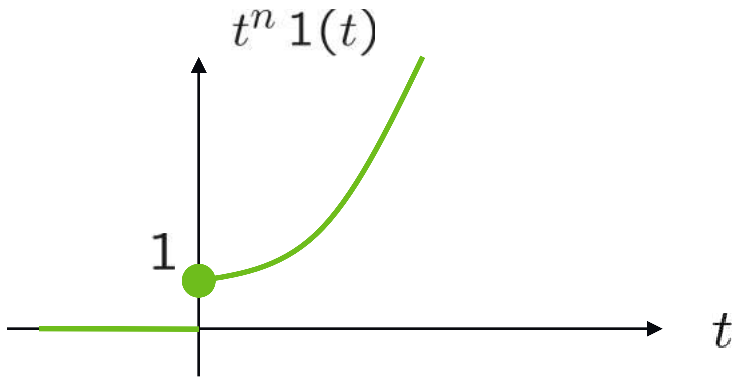


$$\mathcal{L}[e^{kt}1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(k-s)t} dt = \frac{1}{k-s}[e^{(k-s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

Trasformate notevoli

4. Trasformata di $t^n \, 1(t)$:



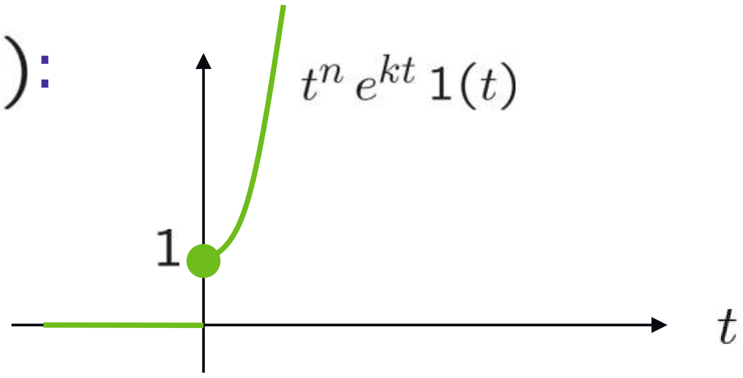
$$\mathcal{L}[t^n 1(t)] = (-1)^n \left\{ (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

...basta applicare la proprieta' di moltiplicazione per t^n ...

Trasformate notevoli

5. Trasformata di $t^n e^{kt} 1(t)$:



$$\mathcal{L}[t^n e^{kt} 1(t)] = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprieta' di moltiplicazione per t^n e di traslazione in frequenza...

Trasformate notevoli

Trasformata di $\sin(\omega t)$ e di $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\,\sin\phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\,\sin\phi$$

Trasformate notevoli

6. Trasformata di $\sin(\omega t)\,1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\cdot 1(t)\right]=\frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Trasformate notevoli

7. Trasformata di $\cos(\omega t)\, 1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Applicazione:

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$\frac{d^2y}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1+3t)u(t)$$

Con condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Se $u(t)$ e' un gradino unitario ed applichiamo le proprieta' viste:

$$\left\{s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right\} + \{3\,[s\,Y(s) - y(0)]\} + \ldots$$

$$\ldots + 2\,Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$\left\{s^2 Y(s) - s\right\} + \{3\,[s\,Y(s) - 1]\} + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$(s^2 + 3\,s + 2)Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Si e' ottenuta un'equazione algebrica da cui esplicitare $Y(s)$:

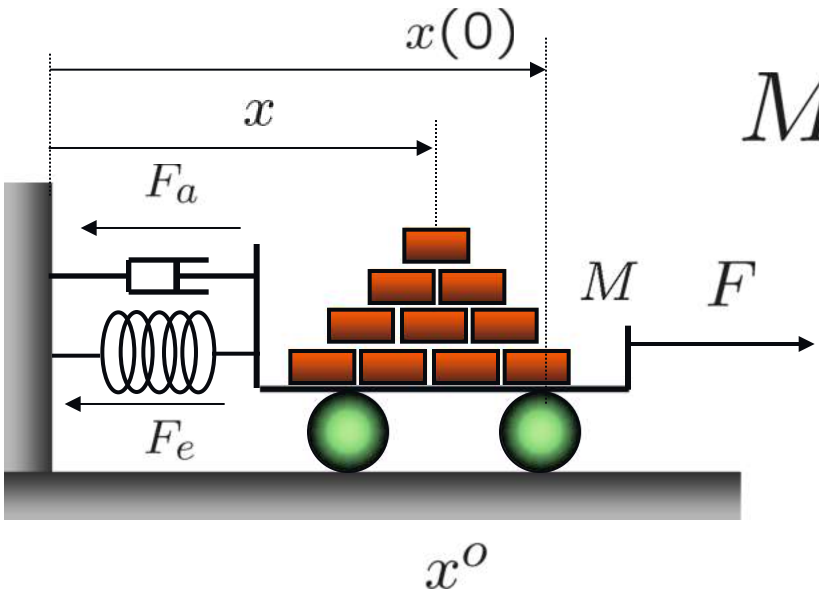
$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3\,s+2} + \frac{1}{s^2+3\,s+2}\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}\right)$$

Da questa equazione si puo' tornare nel dominio del tempo,

ANTITRASFORMANDO

Applicazione:

sistema massa-molla (parte1, 32)



$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$

$$x(0) = r_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$M\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \ldots$$

$$\ldots + h\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)\{Ms^2+hs+k\}-\{Msr_0+hr_0+Mv_0\} = F(s)$$

$$X(s) = \frac{Msr_0+hr_0+Mv_0}{Ms^2+hs+k} + \frac{F(s)}{Ms^2+hs+k}$$

"Risposta" libera

dipende dalle condizioni iniziali

?

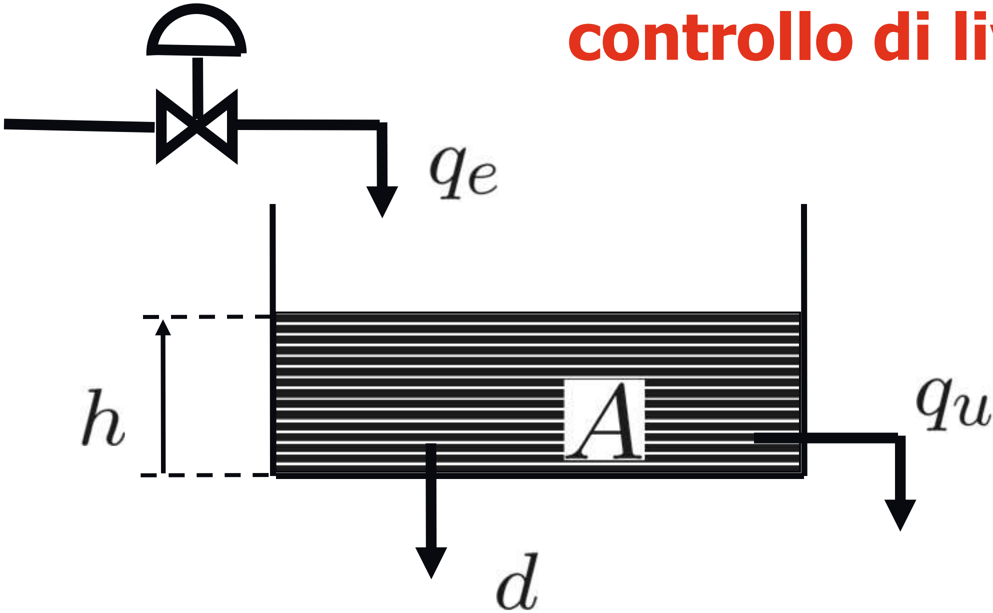
$x(t)$

"Risposta" forzata

dipende dall'ingresso

Applicazione:

controllo di livello (parte 2, 1)



Ipotesi:
- serbatoio infinito
- no disturbo
- controllore proporzionale

$$\begin{cases} \dot{h} = -\dfrac{1}{A}(k+\mu)\,h + \dfrac{\mu}{A}h^o \\[2em] h(0) = 0 \end{cases}$$

controllo di livello

Trasformiamo con Laplace, con C.I. nulle (h_0 e' il RIFERIMENTO !):

$$s\,H(s) = -\frac{1}{A}(k+\mu)\,H(s) + \frac{\mu}{A}\mathcal{L}\left\{h^0(t)\right\}$$

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k+\mu)} \cdot \mathcal{L}\left\{h^0(t)\right\}$$

$$\xrightarrow{?} \quad h(t)$$

Antitrasformate

A partire da $F(s)$ si risale - sotto opportune ipotesi - ad $f(t)$ calcolando :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

Che vale per $f(t)$ CAUSALE, cioe' non nulla solo per $t \geq 0$

$\bar{\sigma} > \alpha$, l' ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di F(s) sono a sinistra della retta individuata da $\bar{\sigma}$. **... non ne faremo uso ...**

Antitrasformate

Ci interessa antitrasformare funzioni razionali fratte

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

$$n > m$$

Non applicheremo mai la definizione di antitrasformata!

Antitrasformate

Deve essere n>m

Se $F(s)$ e' causale, questa condizione e' sempre verificata.

Altrimenti la teoria delle trasformate ricorre alle funzioni generalizzate...che non vedremo

Antitrasformate (bis)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

Come si opera nel caso in cui fosse $m = n$?

$$F(s) = a_n + \frac{\hat{N}(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(\hat{N}) < n$$

Nel caso in cui $m = n$, (funzioni razionali **non strettamente proprie**) nel segnale ottenuto come antitrasformata comparirà un impulso di Dirac.

Espansione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s-z_1)^{m_1}(s-z_2)^{m_2}\cdots(s-z_r)^{m_r}}{(s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}\cdots(s-p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m \qquad n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$$

- avremo r zeri: $z_1, z_2, \ldots, z_r \in \mathcal{C}$

  di molteplicita' $m_j \qquad j = 1, \ldots, r$

- avremo q poli: $p_1, p_2, \ldots, p_q \in \mathcal{C}$

  di molteplicita' $n_i \qquad i = 1, \ldots, q$

Espansione in fratti semplici

Vogliamo scrivere $F(s)$ come:

$$F(s) = \frac{C_{1,1}}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{C_{1,n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{2,1}}{(s-p_2)} + \ldots + \frac{C_{2,n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{q,1}}{(s-p_q)} + \ldots + \frac{C_{q,n_q}}{(s-p_q)^{n_q}}$$

Espansione in fratti semplici

Per la proprieta' di linearita' la sua antitrasformata si potra' calcolare cosi':

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right]$$

Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

Espansione in fratti semplici

Infatti si ha che:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right] = \frac{C_{i,j}}{(j-1)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

Ancora per le proprieta' di linearita', traslazione in frequenza e moltiplicazione per t^n .

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j-1)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

Espansione in fratti semplici

→ Se sappiamo calcolare i coefficienti $C_{i,j}$
abbiamo automaticamente la $f(t)$

- Metodo 1: basato sul principio di **identita'** dei polinomi -→va bene per poli a molteplicita' unitaria

- Metodo 2: basato sul **calcolo dei residui** -→ va bene per poli multipli

Espansione in fratti semplici

Risolviamo l'esercizio (parte2, 23) lasciato in sospeso, con entrambi i metodi

a. "Risposta" libera $$Y_l(s) = \frac{s+3}{s^2+3\,s+2}$$

Per analogia col caso massa-molla!

b. "Risposta" forzata $$Y_f(s) = \frac{1}{s^2+3\,s+2}\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}\right)$$

a. Metodo 1 - qui conviene perche' ci sono poli a molteplicita' unitaria

$$p_1 = -1 \qquad p_2 = -2$$

$$Y_l(s) = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+2)}$$

Espansione in fratti semplici

$$Y_l = \frac{s(C_1 + C_2) + 2\,C_1 + C_2}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3\,s + 2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2\,C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$Y_l(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y_l(s)\right\} = y_l(t) = \left[2\,e^{-t} \; - \; e^{-2t}\right] \cdot 1(t)$$

$$\boxed{t \geq 0}$$

Espansione in fratti semplici

b. Metodo 2

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3\,s + 2}\left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}\right) \qquad \begin{cases} p_1 = -1,\ n_1 = 1 \\ p_2 = -2,\ n_2 = 1 \\ p_3 = \ \ 0,\ n_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow \ ?$$

$$Y_f = \frac{C_{1,1}}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s^2} + \frac{C_{3,2}}{s}$$

Espansione in fratti semplici

Per calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ si applica questa formula:

$$\boxed{C_{i,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{d\,s^{(n_i - j)}} F(s)\,(s - p_i)^{n_i} \right\}}$$

Per poli di molteplicita' unitaria:

$$\boxed{C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}}$$

Detta formula di Heaviside

Derivata prima del denominatore!

Espansione in fratti semplici

Dunque finiamo l'esercizio:

$$C_{1,1} = \left.\frac{(s+3)}{(s^2)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2 \quad \longrightarrow \quad p_1$$

$$C_{2,1} = \left.\frac{(s+3)}{(s^2)(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad p_2$$

$$\left.\begin{array}{l} C_{3,1} = \dfrac{d}{ds}\left.\dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = -\dfrac{7}{4} \\[2em] C_{3,2} = \left.\dfrac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \; p_3 \quad \begin{array}{l} \rightarrow (s) \\[2em] \rightarrow (s^2) \end{array}$$

Espansione in fratti semplici

Espressione finale di $Y_f(s)$:

$$Y_f = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \left[\frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right] \cdot 1(t) \quad \boxed{t \geq 0}$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Applicazione:

sistema massa-molla

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{Mr_0 s + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \dfrac{F(s)}{Ms^2 + hs + k} \\ r_0 = 0, \quad v_0 = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

Se $F(t)$ e' un gradino

$$X(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

Espandendo in fratti semplici:

$$\Delta = h^2 - 4kM$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s + \frac{h}{2M} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_2}{s + \frac{h}{2M} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_3}{s}$$

$$x(t) = \left[C_1 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_2 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_3\right] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$

Vedi (parte 1,34) $\Rightarrow$ $x(t) = \left[C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + C_3\right] \cdot 1(t)$

Si e' gia' visto l'andamento della $x(t)$ a seconda che le radici siano reali o complesse.

$\Rightarrow$ segno di $\sqrt{\Delta}$!

Applicazione:

controllo di livello

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k+\mu)} \cdot \mathcal{L}\left\{h^0(t)\right\}$$

$$h^0(t) = h^0 1(t)$$

$$h^0(s) = h^0 \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \left[\frac{C_1}{s + \frac{(k+\mu)}{A}} + \frac{C_2}{s}\right]$$

dopo qualche passaggio …

$$h(t) = \frac{\mu\, h^0}{k+\mu}\left(1 - e^{-\frac{(k+\mu)}{A}t}\right) \cdot 1(t)$$

vedi (parte 2, 4)

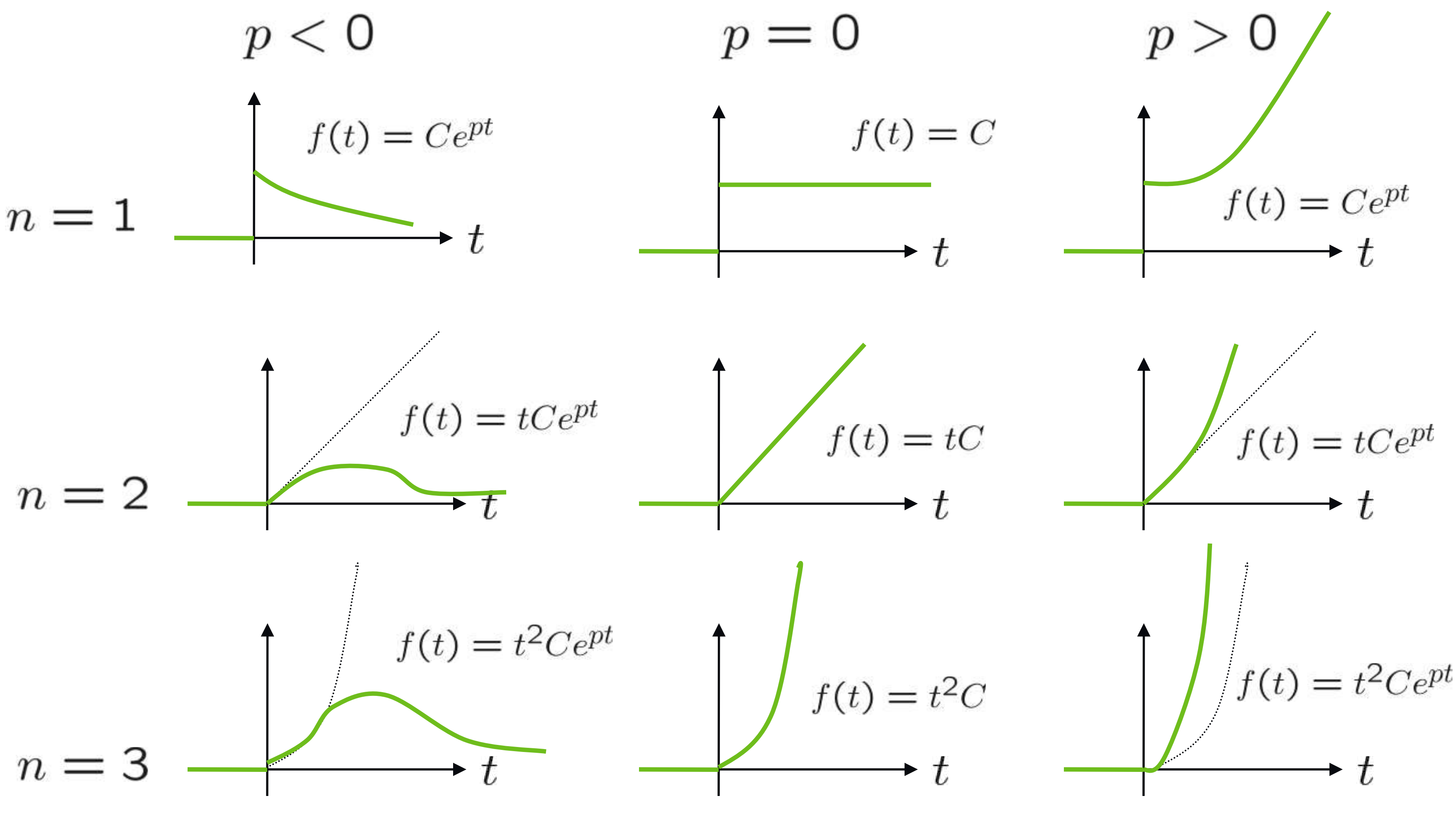
Studio qualitativo delle soluzioni

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{C}{(s-p)^n}] \Longrightarrow f(t) = \frac{C}{(n-1)!} t^{n-1} e^{pt} 1(t)$$

CASI :

$$\begin{cases} p \in \mathcal{R} & \begin{cases} p < 0 \\ p = 0 \\ p > 0 \end{cases} \quad n = 1,\ 2,\ 3 \\ \\ p \in \mathcal{C} & \begin{cases} \mathcal{R}e\{p\} < 0 \\ \mathcal{R}e\{p\} = 0 \\ \mathcal{R}e\{p\} > 0 \end{cases} \quad n = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

$p \in \mathcal{R}$



Studio qualitativo delle soluzioni

Osservazioni:

- Per $p < 0$ l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero

- Per $p = 0$ l'andamento e' divergente, con velocita' crescente con la molteplicita' del polo; e' limitata sse la molteplicita' del polo e' unitaria

- Per $p > 0$ l'andamento e' SEMPRE divergente

$$\boxed{p \in \mathcal{C}}$$

se $p = \sigma + j\,\omega$ e' una radice del denominatore di $F(s)$, allora lo sara' anche il suo complesso e coniugato

$p^* = \sigma - j\,\omega$

Nella scomposizione troveremo come coefficienti legati a $(p,\, p^*)$ i coefficienti $(C,\, C^*)$: dunque dovremo antitrasformare

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-p)^n} + \frac{C^*}{(s-p^*)^n}\right]$$

$$\boxed{p \in \mathcal{C}}$$

Sviluppando si ottiene:

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1} \left\{ C\, e^{(\sigma + j\,\omega)t} + C^*\, e^{(\sigma - j\,\omega)t} \right\} 1(t) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \left\{ C\, e^{j\,\omega t} + C^*\, e^{-j\,\omega t} \right\} 1(t)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \left\{ (C + C^*) \cos(\omega t) + (C - C^*) \sin(\omega t) \right\} 1(t)$$

$$= \frac{2}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \left\{ \mathcal{R}e(C) \cos(\omega t) - \mathcal{I}m(C) \sin(\omega t) \right\} 1(t)$$

$$= K\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)\, 1(t) \qquad K = 2\frac{|C|}{(n-1)!}, \quad \phi = artan\frac{\mathcal{I}m(C)}{\mathcal{R}e(C)}$$

$$p \in \mathcal{C}$$

$\sigma = \mathcal{R}e\{p\} < 0$ | $\sigma = 0$ | $\sigma > 0$

$f(t) = Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$

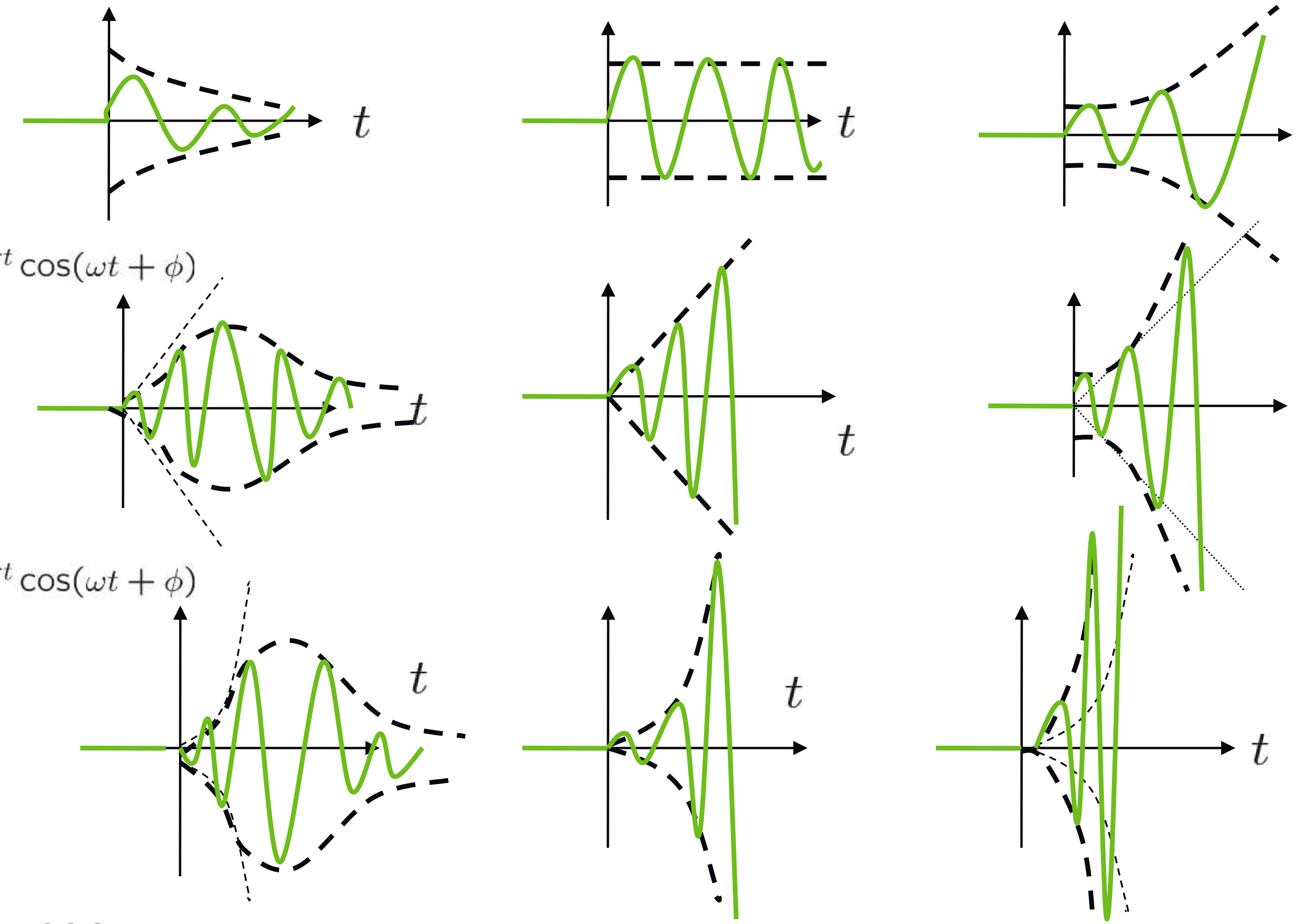
$n = 1$

$f(t) = Kte^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$

$n = 2$

$f(t) = Kt^2e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$

$n = 3$



Studio qualitativo delle soluzioni

Osservazioni:

- Per $\mathcal{R}e\{p\} < 0$ l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero

- Per $\mathcal{R}e\{p\} = 0$ la funzione e' limitata sse la molteplicita' di p e' unitaria

- Per $\mathcal{R}e\{p\} > 0$ l'andamento e' SEMPRE divergente

Proprieta’

Vediamo ancora due proprieta’ molto importanti:

Teorema del valore iniziale

IPOTESI: F(s) strettamente propria, cioe’ n>m.

$$\lim_{t \longrightarrow 0} f(t) = \lim_{s \longrightarrow \infty} s\, F(s)$$

solo per chi e’ curioso:
se $f(t)$ ha impusi - $\delta(t)$ - nell’origine il teorema non vale in questa forma ...
riflettere sul perche’!

Proprieta'

Teorema del valor finale

IPOTESI: Tutti poli sono nel semipiano sinistro, con al piu' un polo di molteplicita' unitaria nell'origine.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

E' un teorema molto utile: si trova subito il valore regime della $f(t)$ senza fare troppi calcoli!

Teorema del valor finale: esempi

Applicazione corretta:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s+1}$$

C'e' un solo polo a parte reale negativa

Applicazione scorretta:

$$\lim_{t \to +\infty} \sin(\omega\, t) \; ? \; \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega} = 1$$

Ci sono due poli immaginari puri!

$$\nexists \lim_{t \to +\infty} \sin(\omega\, t)$$

Esercizi

1. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2}$$

$$C_1 = \lim_{s \to (-1)} \left\{ \frac{5s+3}{\cancel{(s+1)}(s+2)^2} \cancel{(s+1)} = -2 \right\}$$

$$C_{2,1} = \lim_{s \to (-2)} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{5s+3}{(s+1)\cancel{(s+2)^2}} \cancel{(s+2)^2} \right\} = 2$$

$$C_{2,2} = \lim_{s \to (-2)} \left\{ \frac{5s+3}{(s+1)\cancel{(s+2)^2}} \cancel{(s+2)^2} \right\} = 7$$

Antitrasformiamo :

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} + \frac{7}{(s+2)^2}$$

$$f(t) = -2\,e^{-t} + 2\,e^{-2t} + 7\,t\,e^{-2t}$$

fine!

2. Carica e scarica di un circuito RC parallelo:

Equazioni di stato

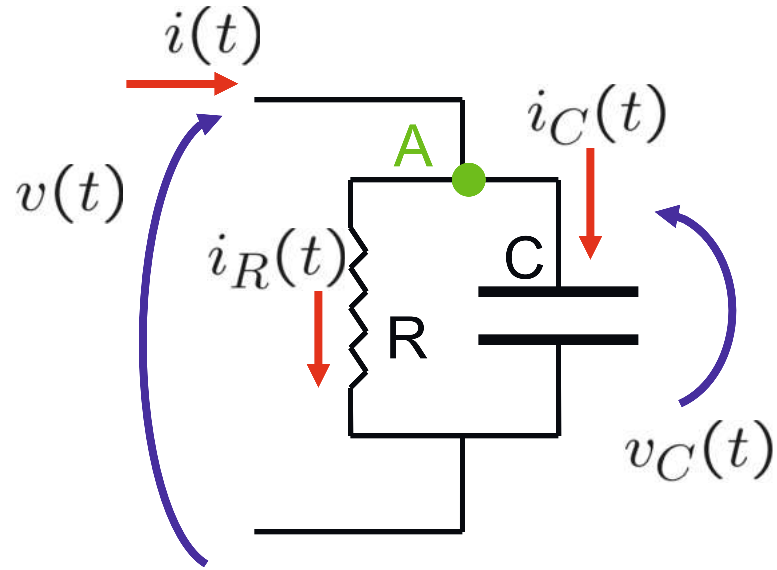
Per il secondo principio di Kirchhoff (al nodo A):

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} + C\frac{d}{dt}v_C(t)$$

$$v_R(t) = v_C(t) = v(t)$$

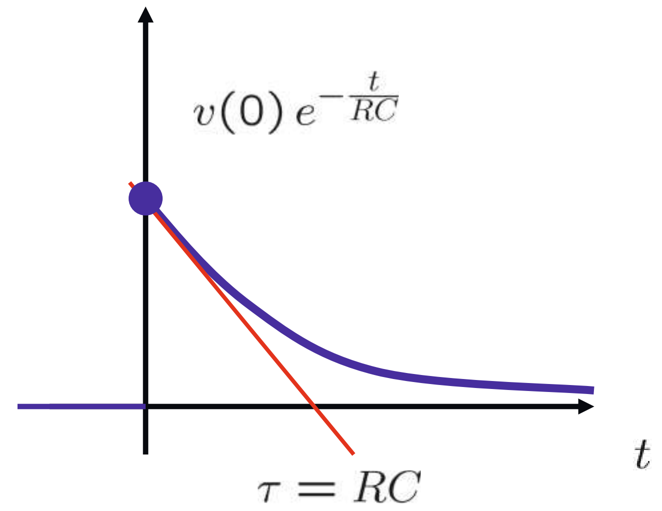
$$\frac{y(t)}{R} + C\frac{d}{dt}y(t) = u(t)$$



$$\begin{cases} i(t) = u(t) \\ v_C(t) = y(t) \end{cases}$$

a) Ingresso nullo, ma con condizioni iniziali diverse da zero : il circuito si scarica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = 0$$



Applichiamo Laplace:

$$\frac{Y(s)}{RC} + s\,Y(s) - y(0) = 0$$

$$Y(s) = y(0)\frac{RC}{s\,RC + 1} = y(0)\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$v(t) = v(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

b) Soluzione ad ingresso diverso da zero, ma condizioni iniziali nulle : il circuito si carica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = \frac{u(t)}{C}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{\cancel{C}}\frac{R\cancel{C}}{s\,RC+1} = \frac{U(s)}{C}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

Se l'ingresso e' un gradino in corrente:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)\frac{1}{s\,C}$$

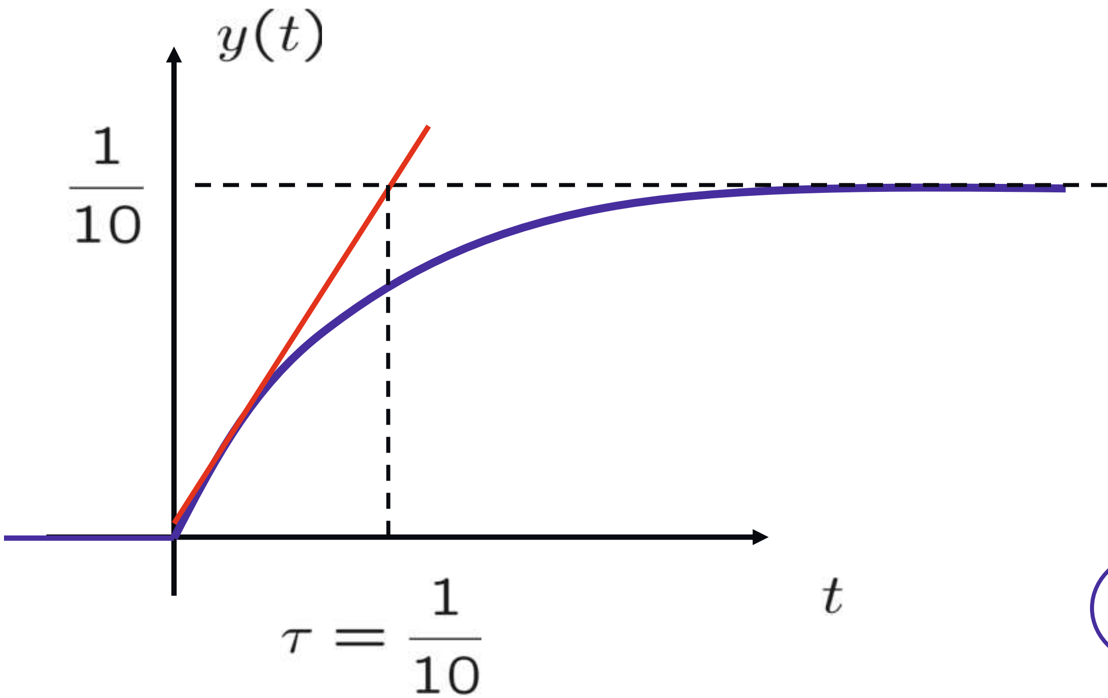
Allora espandiamo in fratti semplici...

Se R=10, C=1 si ha RC=10 e dunque:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+10)}\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+10} + \frac{B}{s}\right]$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{s\cancel{(s+10)}}\cancel{(s+10)}\Big|_{s=-10} = -\dfrac{1}{10} \\[2ex] B = \dfrac{1}{\cancel{s}(s+10)}(\cancel{s})\Big|_{s=0} = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \left\{-\frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10}\right\} 1(t) = \frac{1}{10}(1 - e^{-10t})\, 1(t)}$$




fine!

3. Antitrasformare la funzione:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Innanzitutto troviamo i poli:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + (1 - j2))(s + (1 + j2))}$$

Poi espandiamo in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s + (1 - j2))} + \frac{C_2^*}{(s + (1 + j2))}$$

Applichiamo la formula dei residui :

$$C_1 = \lim_{s \longrightarrow 0} F(s)\, s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \longrightarrow (-1+j2)} F(s)\, (s + (1 - j2)) = 3 + j4$$

$$C_2^* = \lim_{s \longrightarrow (-1-j2)} F(s)\, (s + (1 + j2)) = 3 - j4$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = 1(t) + (3 + j4)e^{-(1-j2)t} + (3 - j4)e^{-(1+j2)t}$$

Che non e' molto agevole perche' presenta coefficienti complessi...

Semplifichiamola sfruttando le formule di Eulero:

$$f(t) = 1(t) + 10e^{-t}(\cos(2t+\phi)) \qquad \phi = artan(\frac{4}{3})$$

Ma si poteva anche accoppiare i poli complessi e coniugati:

$$\frac{3+j4}{(s+1-j2)} + \frac{3-j4}{(s+1+j2)} = \ldots = \frac{6(s+1)-16}{(s+1)^2+(2)^2}$$

$$\ldots = 6\,\frac{(s+1)}{(s+1)^2+(2)^2} - 8\,\frac{2}{(s+1)^2+(2)^2}$$

Antitrasformando –> ricordare la proprieta' di traslazione in frequenza:

$$f(t) = 1(t) + 6e^{-t}\cos 2t - 8e^{-t}\sin 2t$$

fine!

Quello appena visto si dice metodo del **COMPLETAMENTO DEI QUADRATI**:

a. Si accoppiano i poli complessi e coniugati:

$$\frac{C_2}{(s+p)} + \frac{C_2^*}{(s+p^*)} \Longrightarrow \frac{a\,s+b}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

$\mathcal{R}e\{p\}$ $\qquad$ $\mathcal{I}m\{p\}$

b. Si "aggiustano" le costanti al numeratore per avere:

$$\frac{K_1(s+\sigma)+K_2\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\left(K_1 e^{-\sigma t}\cos(\omega t) + K_2 e^{-\sigma t}\sin(\omega t)\right)\,1(t)$$

4. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 6s + 8}{(s-1)^3(s+2)^2}$$

Abbiamo gia' i poli...stavolta facciamo attenzione agli zeri!!

Infatti ci sono delle semplificazioni fra numeratore e denominatore: un fattore $(s+2)$ si elimina... Magari non ce ne siamo accorti... ☹
Ma facendo i conti nell'espansione in fratti semplici il coefficiente $C_{2,2}$ legato ad $(s+2)^2$ risultera' nullo!

$$C_{2,2} = \lim_{s \longrightarrow (-2)} F(s)(s+2)^2 = \ldots = 0$$

➡ Se nell'espansione un coefficiente risulta NULLO significa che ci sono delle semplificazioni di cui non ci si e' accorti.

☺
fine!