Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

Segnali a tempo discreto

Definizione: segnale a tempo discreto

- Consideriamo una sequenza di istanti di tempo

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$$

- Si definisce segnale a tempo discreto una successione di valori associati alla sequenza temporale considerata

$$w_k \stackrel{\triangle}{=} w(t_k)$$

- Se vale che $t_k - t_{k-1} = T_s, \forall k$ allora

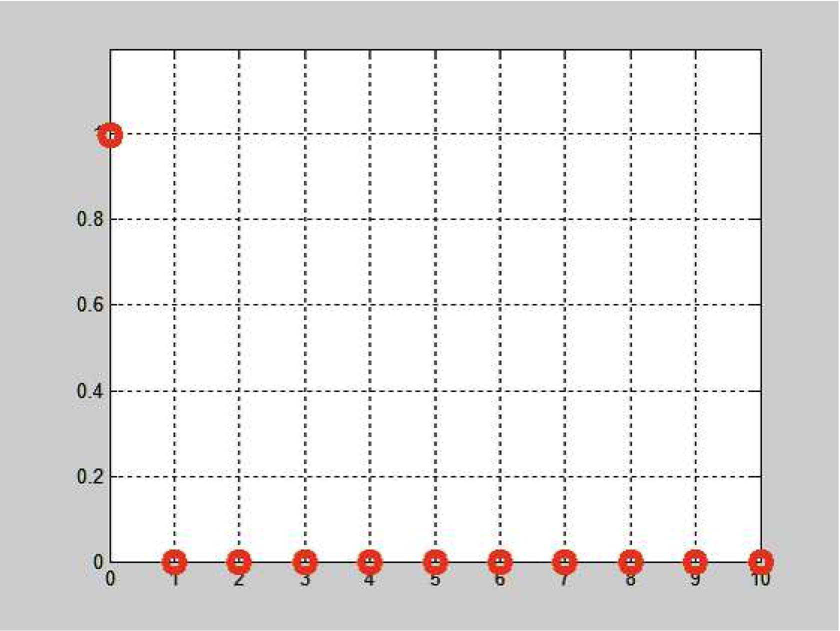
$$w_k = w(k\,T_s)$$

Alcuni segnali canonici a tempo discreto

Per semplicità in ciò che segue trascuriamo di indicare esplicitamente l' intervallo T_s

Impulso unitario

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = 0 \\ 0 & \text{per} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

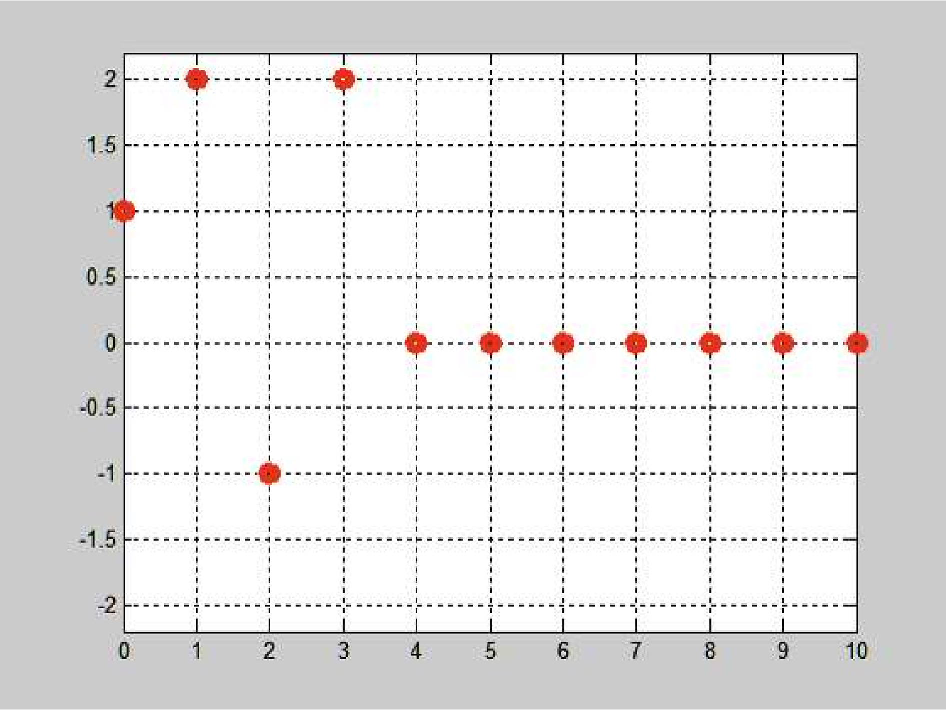


Impulso traslato

$$\delta(k-h) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = h \\ 0 & \text{per} \quad k \neq h \end{cases}$$

- Una sequenza qualsiasi a tempo discreto può venir sempre espressa come sommatoria di segnali δ opportunamente traslati

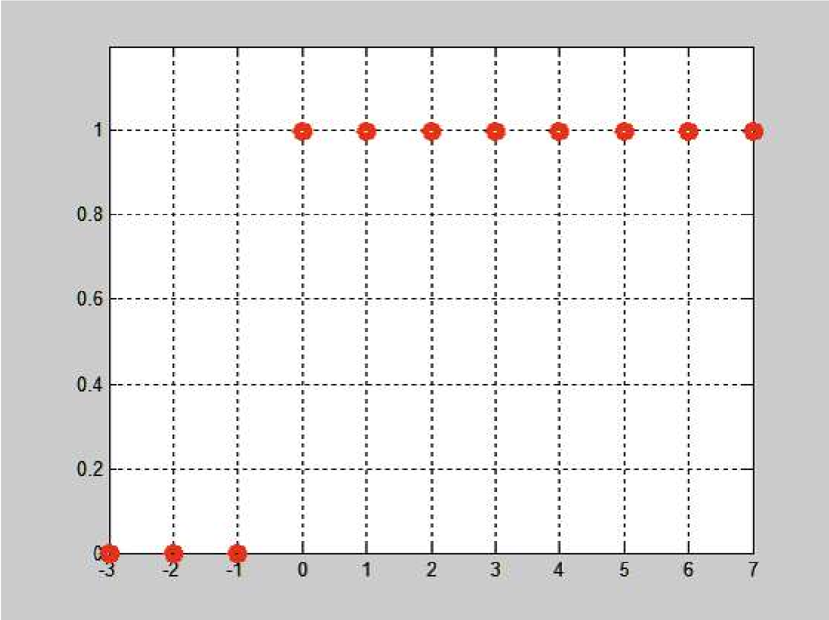
$$w(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1) + $$
$$-\delta(k-2) + 2\,\delta(k-3)$$



Gradino unitario

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

- La sequenza 1(k) è utile per evidenziare che una sequenza w(k) è identicamente nulla per istanti di tempo negativi



$$w(k) = \widehat{w}(k) \cdot 1(k) \quad \Longleftrightarrow \quad w(k) = \begin{cases} \widehat{w}(k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Segnale esponenziale

$$w(k) = \begin{cases} a^k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = a^k \cdot 1(k) \qquad a \in C$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = a^{kT_s} \cdot 1(kT_s)$$

Rampa unitaria

$$w(k) = \begin{cases} k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = k \cdot 1(k)$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = k \cdot T_s \cdot 1(kT_s)$$

Polinomio fattoriale di ordine h

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

- Si definisce **ricorsivamente**

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(h)}}{h!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-h+1)}{h!} & \text{per} \quad h > 0,\ k \geq h \\ 0 & \text{per} \quad h > 0,\ k < h \end{cases}$$

- Si ottiene

$$\frac{k^{(1)}}{1!} = k \cdot 1(k)$$

$$\begin{aligned}\frac{k^{(2)}}{2!} &= \frac{k(k-1)}{2!} \cdot 1(k) \\ &= \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{k^{(3)}}{3!} &= \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k) \\ &= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right) \cdot 1(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{k^{(4)}}{4!} &= \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \cdot 1(k) \\ &= \left(\frac{1}{24}k^4 - \frac{1}{3}k^3 + \frac{11}{24}k^2 - \frac{1}{4}k\right) \cdot 1(k)\end{aligned}$$

$$\dots$$

- la sequenza $$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

sarà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto!

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t^h}{h!} \cdot 1(t)$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$\frac{k^{(h)}}{h!} = \binom{k}{h} \cdot 1(k)$$

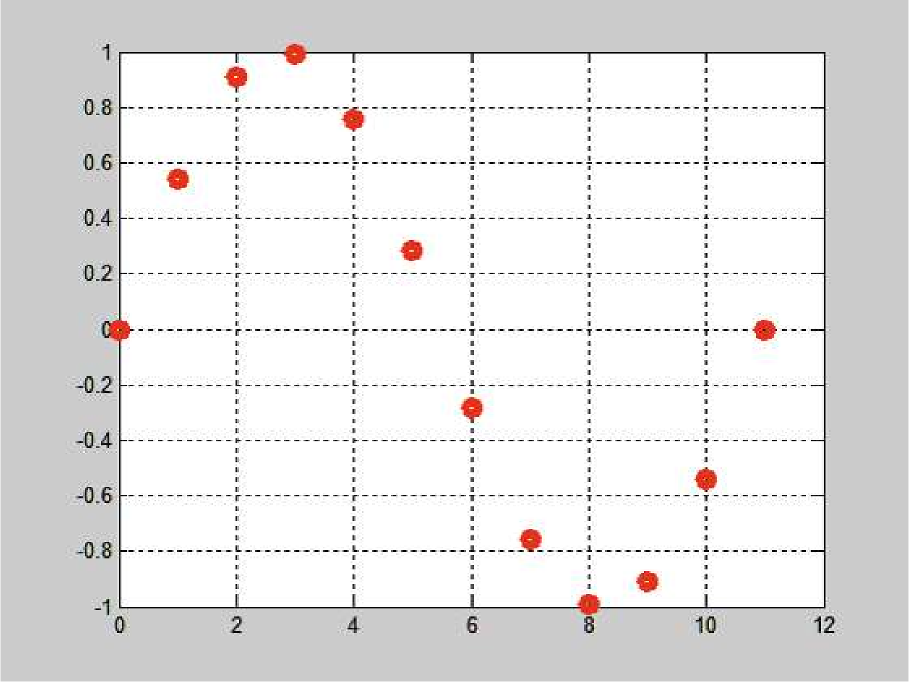
con

$$\binom{k}{h} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-h+1)}{h!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } h > 0 \\ k \geq h \end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } h = 0] \end{cases}$$

Segnale sinusoidale

$$w(k) = \begin{cases} \sin(\omega k) & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = \sin(\omega k) \cdot 1(k)$$



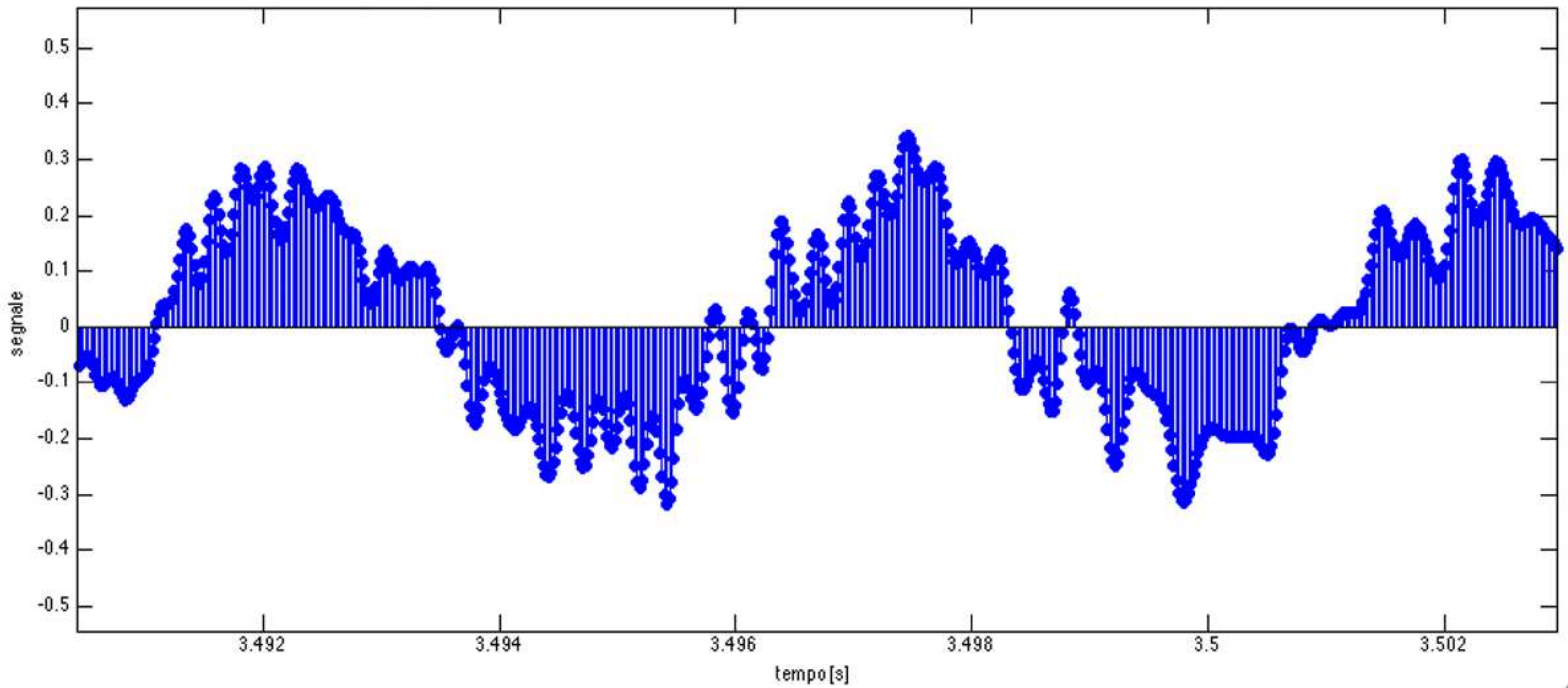
Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = \sin(\Omega k T_s) \cdot 1(kT_s)$$

$$\Omega T_s = \hat{\omega}$$

Esempi

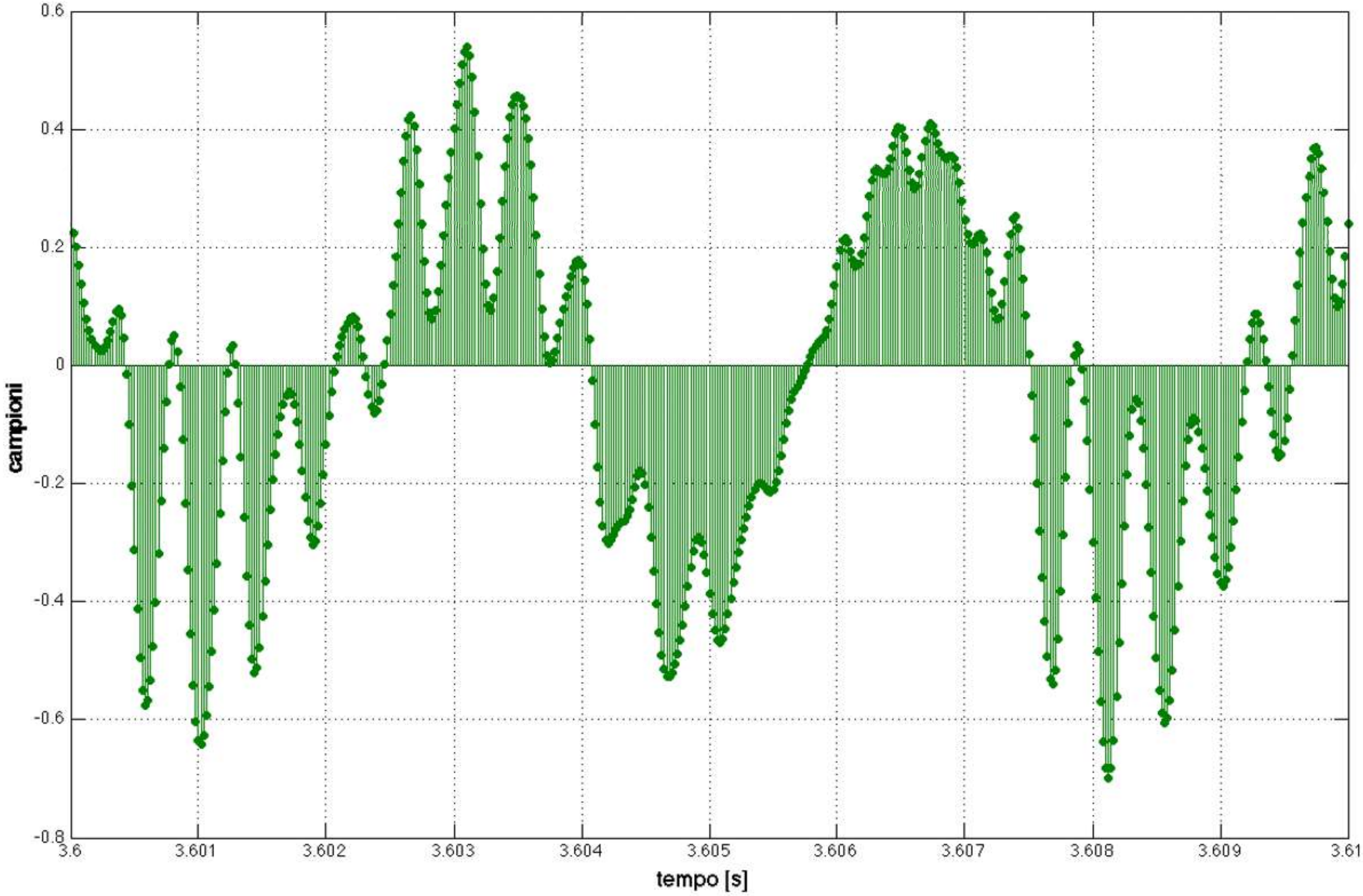
- segnali elettrici generati da suoni catturati attraverso un microfono (es. persona al telefono), sottoposti a campionamento e digitalizzazione



Dave Bowman: “Open the pod bay doors, HAL. “
HAL: “I'm sorry, Dave. I'm afraid I can't do that. “

[2001: A Space Odyssey (1968)]

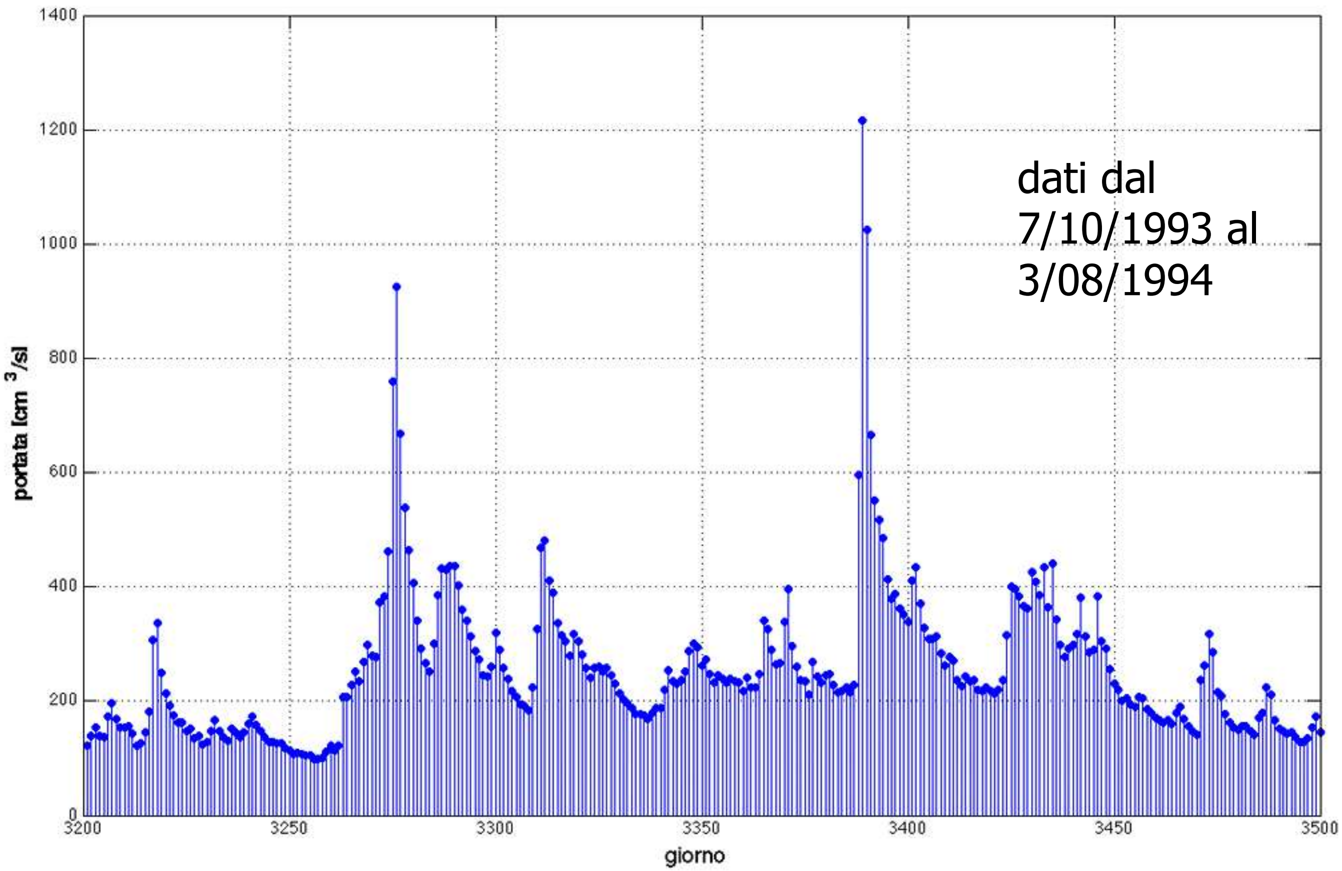
durata: 7 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV (16 bit)



J. Keating: “No matter what anybody tells you, words and ideas can change the world.” – [Dead Poets Society (1989)]

durata: 6 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV

- segnali intrinsecamente a tempo discreto, come ad esempio quelli delle cosiddette *serie temporali* (dati metereologici, geofisici, economici ecc.)



portata media giornaliera del Danubio a Donauwörth, dal 1/1/1985 al 31/12/2004 – fonte: Università di Würzburg – 7300 campioni (1 campione al giorno)

Equazioni alle differenze

Definizione

- A partire dalla sequenza $\{u(k)\}$ $k = 0, 1, 2, \cdots$ si vuole elaborare una seconda sequenza discreta $\{y(k)\}$ $k = 0, 1, 2, \cdots$

- Il campione generico della sequenza $\{y(k)\}$ viene calcolato nel medesimo istante in cui viene acquisito un nuovo campione di $\{u(k)\}$

- La legge di calcolo del nuovo valore di $y(k)$ è ricorsiva: il campione all'istante k viene determinato in funzione di al più tutti i campioni agli istanti precedenti

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(1), y(0), u(k), u(k-1), \cdots, u(1), u(0)\right)$$

- Supponiamo ora che il termine generico $y(k)$ dipenda soltanto da un numero finito di valori passati sia della sequenza $\{y(k)\}$ che della sequenza $\{u(k)\}$

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- In tal caso l'equazione si dice **equazione alle differenze di ordine *n***, dove ***n*** è la "*distanza temporale*" massima tra gli elementi della sequenza incognita, che compaiono nell'equazione.

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Le equazioni alle differenze finite rappresentano l'analogo a tempo discreto delle equazioni differenziali nel caso a tempo continuo.

- Ricapitolando, una **equazione alle differenze finite** è una equazione che ha come **incognita** una **funzione a tempo discreto (una successione o sequenza)**.

- L' equazione alle differenze esprime il legame tra la successione incognita ed altre successioni note, eventualmente assegnando anche opportune condizioni iniziali. Il legame viene espresso tramite una relazione che lega tra loro e/o alle successioni note i valori della successione incognita ad istanti discreti di tempo diversi:

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Il termine **equazione alle differenze** deriva dal fatto che è possibile definire le **differenze finite**

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$$

Differenza di ordine *1*

$$\nabla^2 y(k) = \nabla y(k) - \nabla y(k-1)$$

Differenza di ordine *2*

$$\nabla^3 y(k) = \nabla^2 y(k) - \nabla^2 y(k-1)$$

Differenza di ordine *3*

$$\cdots$$

$$\nabla^n y(k) = \nabla^{n-1} y(k) - \nabla^{n-1} y(k-1)$$

Differenza di ordine *n*

- I termini $y(k)$, $y(k-1)$ ecc. si possono allora esprimere in funzione delle differenze finite $\nabla^h y(k)$ appena definite [una sorta di rapporti incrementali]

$$y(k) = y(k)$$

$$y(k-1) = y(k) - \nabla y(k)$$

$$y(k-2) = y(k) - 2\nabla y(k) + \nabla^2 y(k)$$

$$\cdots$$

- Sostituendo nell'equazione

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

si ottiene

$$\hat{f}\big(y(k), \nabla y(k), \nabla^2 y(k), \cdots, \nabla^n y(k), u(k), \nabla u(k), \nabla^2 u(k), \cdots, \nabla^m u(k)\big) = 0$$

- Le due espressioni sono equivalenti, ma la prima delle due (quella ricorsiva) è quella che verrà utilizzata in questo corso.

Un semplice esempio

- Partiamo dall'equazione alle differenze di ordine 2

$$u(k) = -a_1 u(k-1) - a_2 u(k-2) + b_0 e(k)$$

- Sostituiamo ai termini $u(k-1), u(k-2)$ le espressioni

$$u(k-1) = u(k) - \nabla u(k)$$

$$u(k-2) = u(k) - 2\nabla u(k) + \nabla^2 u(k)$$

- Si ottiene l'equazione equivalente

$$a_2 \nabla^2 u(k) - (a_1 + 2a_2)\nabla u(k) + (a_2 + a_1 + 1)\, u(k) = b_0 e(k)$$

Osservazioni e definizioni

- Nel caso in cui la funzione $f(\cdots)$ sia lineare si ottiene una **equazione lineare alle differenze di ordine n**:

$$y(k) = b_0(k)u(k) + b_1(k)u(k-1) + \cdots + b_m(k)u(k-m) +$$

$$-a_1(k)y(k-1) - a_2(k)y(k-2) - \cdots - a_n(k)y(k-n)$$

- Le equazioni lineari alle differenze rappresentano l'analogo delle equazioni differenziali lineari del caso a tempo continuo.

- In generale i coefficienti dell'equazione possono variare, al variare dell'istante di tempo considerato:

$$b_j = b_j(k),\ a_i = a_i(k)$$

Ancora definizioni

- Se i valori dei coefficienti $a_i,\ b_j$ sono costanti, si ha un' **equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti**.

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m) +$$
$$-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_n y(k-n)$$

- Questa **particolare classe** di equazioni alle differenze sarà quella di interesse nel corso.

Come si risolve un’equazione alle differenze, lineare, a coeff. costanti?

- Si può dimostrare che la **soluzione è unica** qualora siano noti i **valori iniziali** della sequenza incognita [ovviamente le altre sequenze che compaiono nell’equazione devono essere note] e l’**istante iniziale** [cioè le condizioni iniziali].

- Per ottenere campione per campione la sequenza incognita è possibile risolvere ricorsivamente l’equazione.

- Non è una tecnica efficiente! Esistono metodi più efficaci! Se ne riparlerà nel prosieguo del corso …

Esempio

- Si vuole risolvere l'equazione

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k)$$

a partire dall'istante $k = 0$, con condizioni iniziali

$y(k) = 0 \quad \forall k < -2$ $$y(-2) = 0\,,\ y(-1) = 0$$

e sequenza "*eccitante*" data da $u(k) = \delta(k)$

- La sequenza-soluzione risulta essere allora ("sequenza di Fibonacci")

$$y(0) = y(-1) + y(-2) + u(0) = 1 \qquad y(1) = y(0) + y(-1) + u(1) = 1$$

$$y(2) = y(1) + y(0) + u(2) = 2 \qquad y(3) = y(2) + y(1) + u(3) = 3$$

$$\cdots$$

$$\{y(k)\} = \{1\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 8\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 34\,,\ \ldots\}$$

Esempio (continua...)

- Script in Matlab® per determinare i primi 10 campioni

```
N = 10; % i primi N+1 valori della sequenza soluzione
ym1 = 0; ym2 = 0; % valori iniziali
% y(-1) -> ym1  || y(-2) -> ym2

% preallocazione delle variabili
uk = zeros(N+1,1);
uk(1) = 1; % il primo campione e' pari ad 1, tutti gli altri
sono nulli
y_offset = 2; % due le condizioni iniziali su y
yk = zeros(N+1+y_offset,1); % prealloco anche per le
condizioni iniziali
% (continua…)
```

```
clc
disp('======================================');
disp('soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)');
disp('con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)');
fprintf(1, '\n valutati i primi %g valori della soluzione \n',N);
disp('======================================');
for k = 0 : N
    % ciclo sugli istanti di tempo per cui
    % si vuole risolvere l'equazione
    % alle differenze
    ik = k+1; % indice per i vettori uk ed yk
    yk(ik+y_offset) = yk(ik+y_offset-1) + ...
                      yk(ik+y_offset-2) + uk(ik);

    messaggio = sprintf('al passo %d valore di y %.2f',…
                         k,yk(ik+y_offset));
    disp(messaggio); % visualizza risultato
end % for
disp('======================================');
```

- Risultato visualizzato in Matlab®

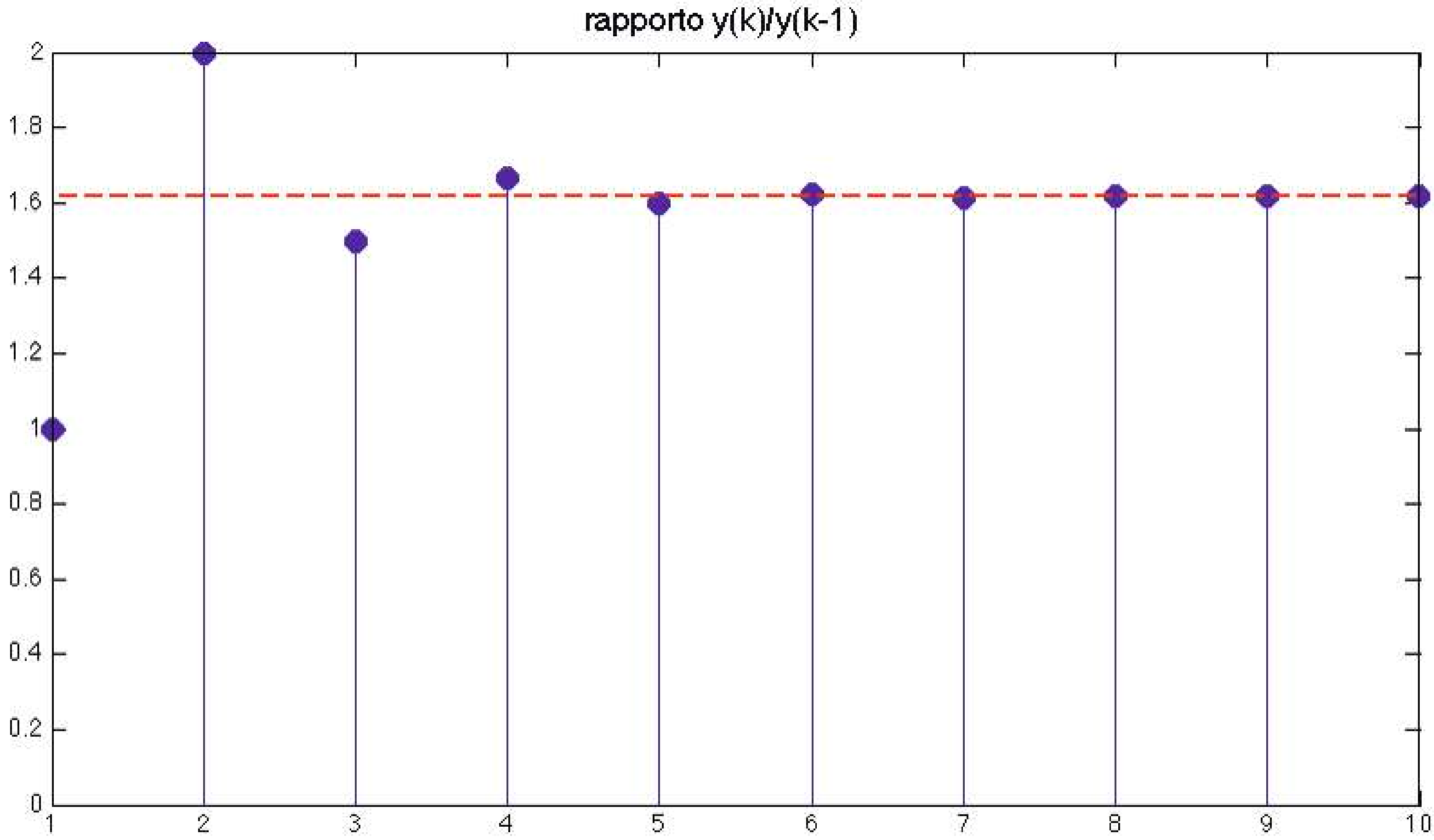
```
======================================
soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)
con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)

 valutati i primi 10 valori della soluzione
======================================
al passo 0 valore di y 1.00
al passo 1 valore di y 1.00
al passo 2 valore di y 2.00
al passo 3 valore di y 3.00
al passo 4 valore di y 5.00
al passo 5 valore di y 8.00
al passo 6 valore di y 13.00
al passo 7 valore di y 21.00
al passo 8 valore di y 34.00
al passo 9 valore di y 55.00
al passo 10 valore di y 89.00
======================================
```

Esempio (continua…)

- Quale è il comportamento della sequenza soluzione? Diverge? Converge ad un valore finito?
- Il comportamento da che cosa dipende? Dalle condizioni iniziali? Dal segnale di eccitazione?
- Provare a cambiare le condizioni iniziali ed a risolvere di nuovo in maniera ricorsiva l’equazione…
- Provare ad utilizzare un altro segnale di eccitazione (con ampiezza limitata)…

- ultima parte dello script

```
%--analisi del termine k-esimo della successione--
% viene disegnato l'andamento del rapporto
% y(k)/y(k-1) per k=2,3,....
rapporto_k_km1 = yk(y_offset+2:end)./yk(y_offset+1:end-1);
figure('Name','successione di Fibonacci');
stem(rapporto_k_km1,'fill');
title('rapporto y(k)/y(k-1)');
hold on;
Fidia_n = (1+sqrt(5))/2;
plot(ones(size(rapporto_k_km1))*Fidia_n, 'r--');
```



$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \qquad u(k) = \delta(k)$$

$$y(-2) = 0\,,\ \ y(-1) = 0 \qquad y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

Un altro esempio

- Proviamo a modificare l'equazione alle differenze, in questo modo

$$y(k) = y(k-1) - y(k-2) + u(k)$$

- A parità di condizioni iniziali e di segnale eccitante, come evolve la soluzione stavolta?

$$y(-2) = 0\,,\ y(-1) = 0 \qquad\qquad u(k) = \delta(k)$$

$$y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

$$\{y(k)\} = \{\boxed{1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -1\,,\ 0}\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -1\,,\ 0\,,\ \cdots\}$$

Osservazioni

- La formulazione presentata finora per le equazioni alle differenze non è l'unica possibile.

- L'espressione
$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$
esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**, che fornisce il valore all'istante attuale della successione incognita $\{y(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{y(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k)\}$

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Esiste anche la possibilità di esprimere le equazioni alle differenze tramite una **relazione ricorsiva in avanti**

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

- Questa relazione fornisce allora un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{y(k)\}$[in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{y(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k)\}$.

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

Ancora altre osservazioni

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “all’indietro”, in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$

$$\{u(k)\} \ \text{nota}\, \forall k \geq 0 \qquad\qquad \{y(k)\} \ \text{incognita}\, \forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(-n),\ y(-n+1),\ y(-n+2),\ \cdots\ y(-1)$$

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “in avanti”, in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

$$\{u(k)\} \text{ nota} \, \forall k \geq 0 \qquad \{y(k)\} \text{ incognita} \, \forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(0),\; y(1),\; y(2),\; \cdots\; y(n-1)$$

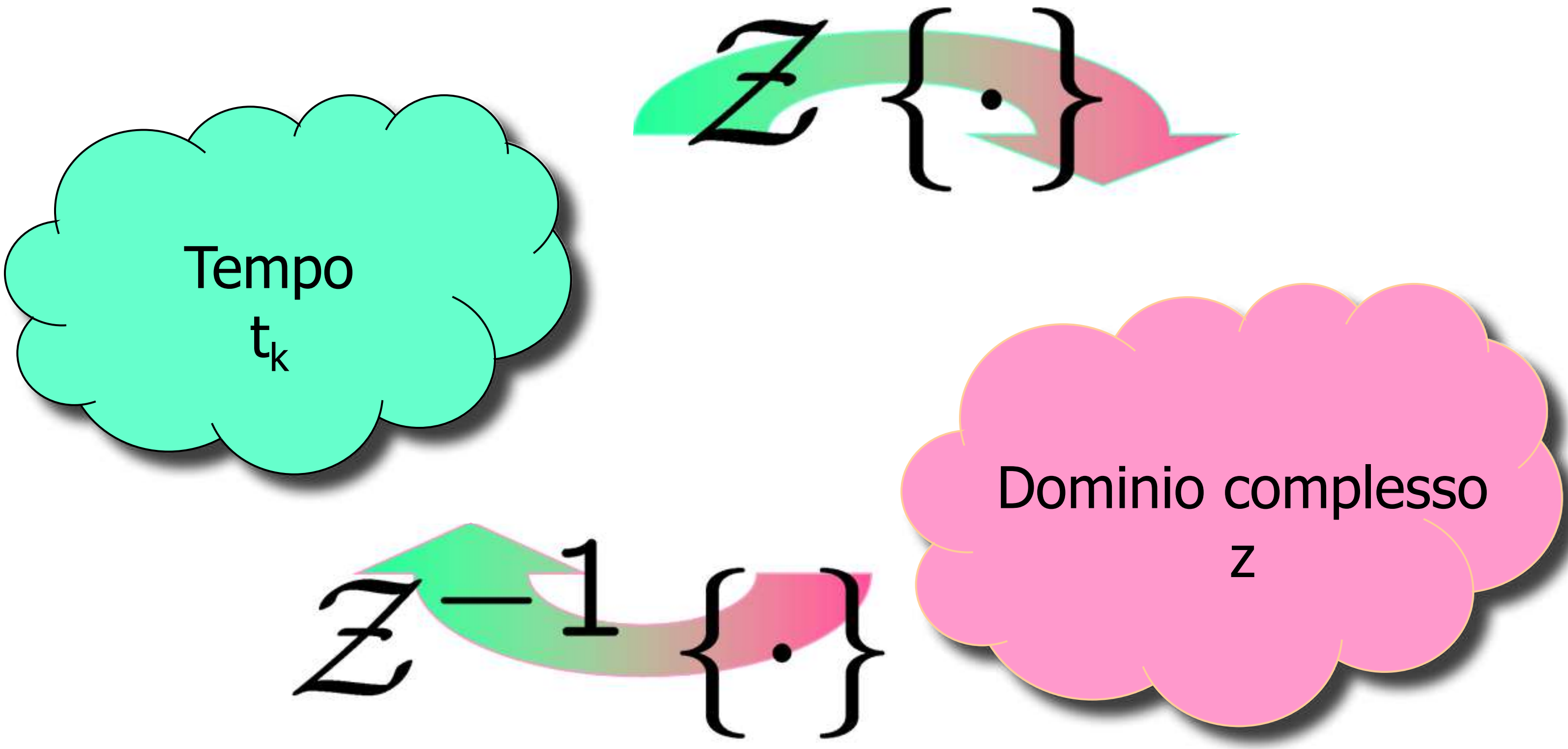
La Z-trasformata

Definizione, proprietà, trasformate elementari

Antitrasformazione

Teoremi

La Z-trasformata è un OPERATORE funzionale



La Z-trasformata: definizione

La Z-trasformata della successione $\{x(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$

$0\,, \quad \forall k < 0$

è la funzione di variabile complessa $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$

Raggio di convergenza: tipicamente la serie che definisce la trasformata converge al di fuori di un cerchio nel piano della variabile complessa z :

$$|z| > R, \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Nel caso di segnali campionati:

- Se il segnale a tempo discreto è stato generato per campionamento, si definisce la Z-trasformata della successione in maniera analoga :

$$\{x(kT_s), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$0\,, \quad \forall k < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) z^{-k}$$

Notazioni ed osservazioni

- In generale non viene esplicitamente indicato l'intervallo di campionamento T_s con il quale è stata eventualmente ottenuta la sequenza $x(kT_s)$ ma semplicemente la si indica con $x(k)$
- Nella maggioranza dei casi, le Z-trasformate che considereremo saranno funzioni polinomiali (in particolare frazioni con polinomi a numeratore e denominatore).
- L'espressione di una Z-trasformata (nei casi di nostro interesse) può essere espressa tramite potenze di z oppure di z^{-1}

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{4 + 6z^{-1} + 8z^{-2}} \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^2 - 2z}{4z^2 + 6z + 8}$$

- Dal punto di vista algebrico sono equivalenti. L'unica difficoltà sta nel definire zeri e poli, perché nelle due notazioni sono differenti [zeri e poli sono le radici dei polinomi a numeratore ed a denominatore]. Per poli e zeri useremo sempre la notazione con potenze di z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{Zeri}\text{: radici di } N(z) \\ \textbf{Poli}\text{: radici di } D(z) \end{cases}$$

- Per ammettere Z-trasformata nel modo in cui è stata definita, le sequenze che consideriamo devono essere **causali**, ovvero

$$x(k) \equiv 0, \qquad \forall k < 0$$

Esempio

- Consideriamo la Z-trasformata

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5\,z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)\,(z + 2)}$$

- È immediato determinare zeri e poli dell'espressione analizzata.

- Se la Z-trasformata fosse espressa tramite potenze di z^{-1}, lo zero in $z = 0$ non sarebbe più così facilmente individuabile

$$X(z) = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{1 + 3\,z^{-1} + 2\,z^{-2}} = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{(1 + z^{-1})\,(1 + 2\,z^{-1})}$$

Proprietà della Z-trasformata

- **Linearità**

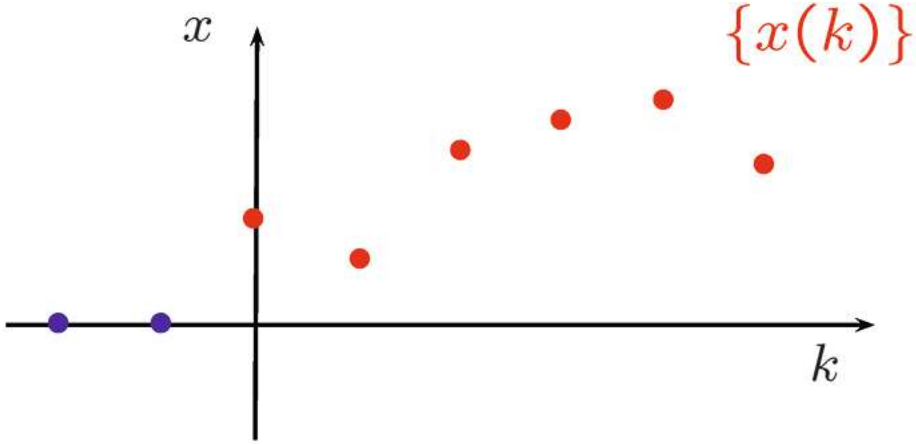
$$\mathcal{Z}\left[c_1\, f(k) + c_2\, g(k)\right] \;=\; c_1\, \mathcal{Z}\left[f(k)\right] + c_2 \mathcal{Z}\left[g(k)\right]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k+1)\right] \;=\; z\left[X(z) - x(0)\right]$$

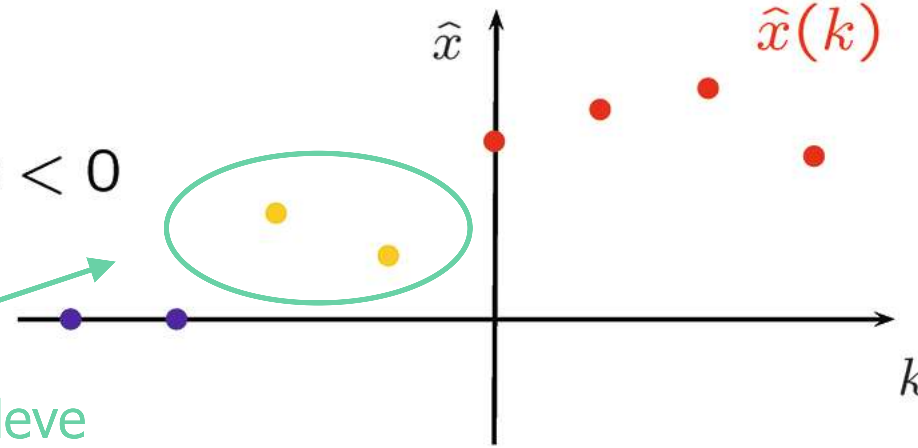
- **Traslazione nel tempo: anticipo di m campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k+m)\right] \;=\; z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)\, z^{-k}\right]$$



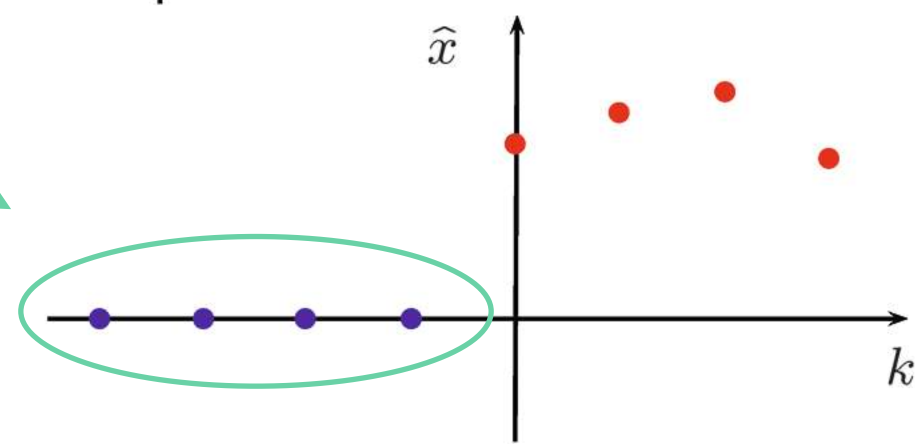
anticipo di 2 passi

$\hat{x}(k) = x(k+2)$



$\hat{x}(k) \equiv 0 \ \forall k < 0$

il nuovo segnale deve essere anch'esso causale!



$\{\hat{x}(k) = x(k+2)\}$

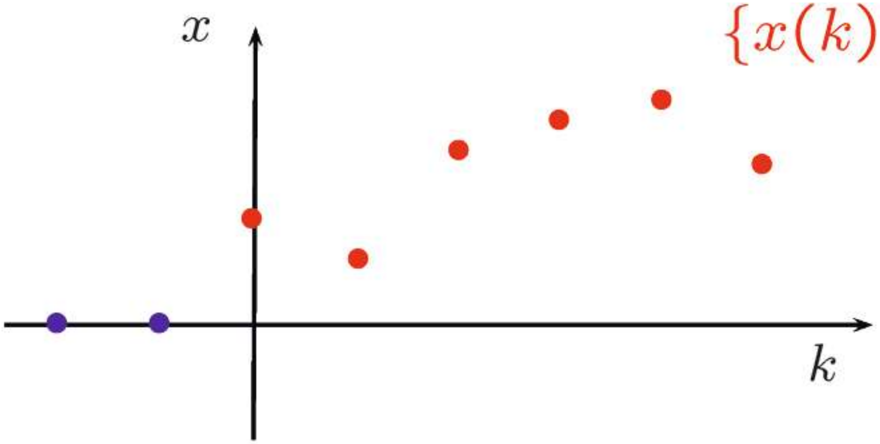
- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$

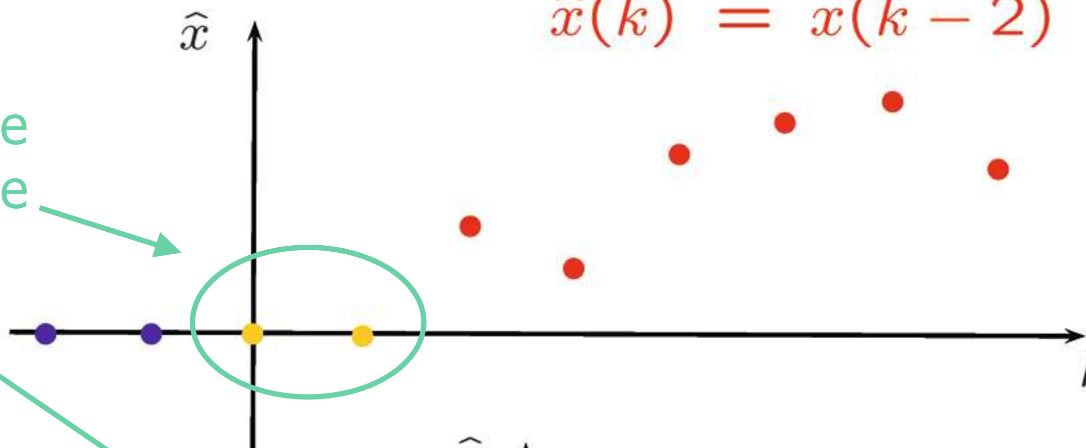
$\{x(k)\}$

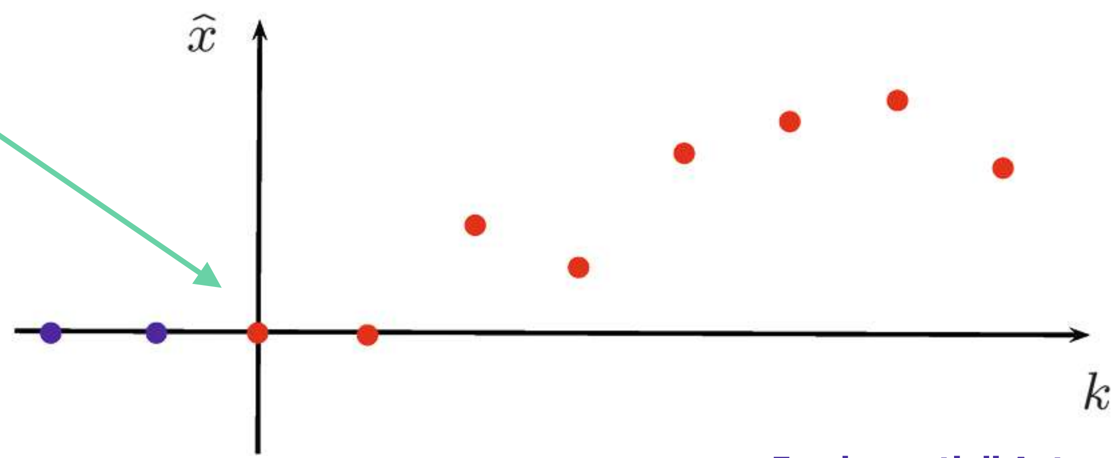


ritardo di 2 passi

$\hat{x}(k) = x(k-2)$

il nuovo segnale inizia con due campioni nulli!





$\{\hat{x}(k) = x(k-2)\}$

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{Z}\left\{a^k\, x(k)\right\} = X\left(a^{-1}\, z\right)$$

- **Differenziazione complessa**

$$\mathcal{Z}\left\{k\, x(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

- **Prodotto di convoluzione**

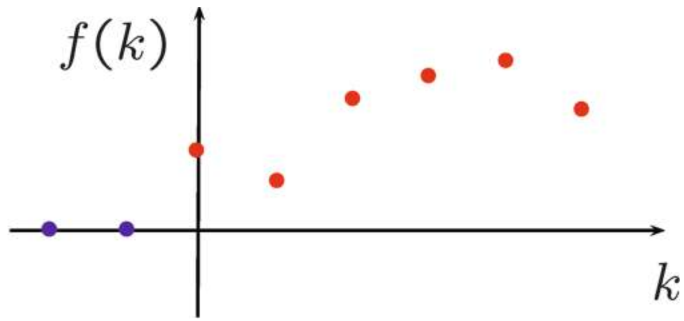
I segnali sono causali.

$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$

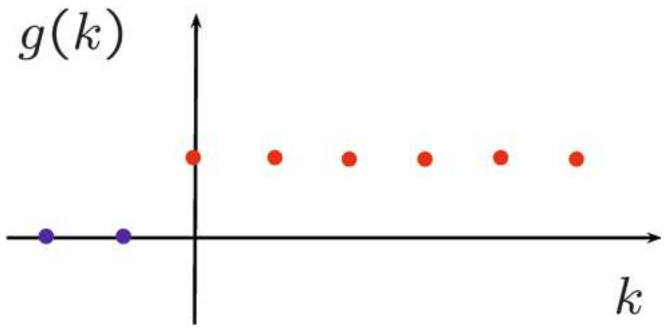
$$h(n) := \sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, g(n-k)$$

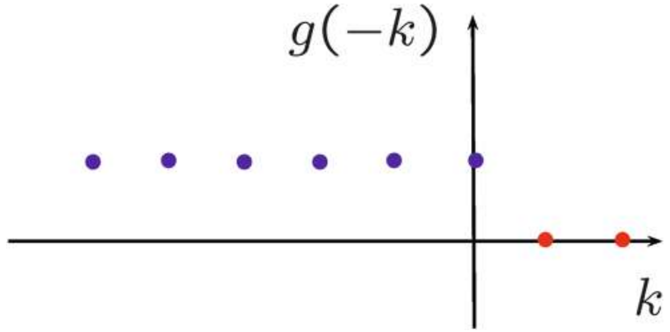
$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)\, g(k)$$

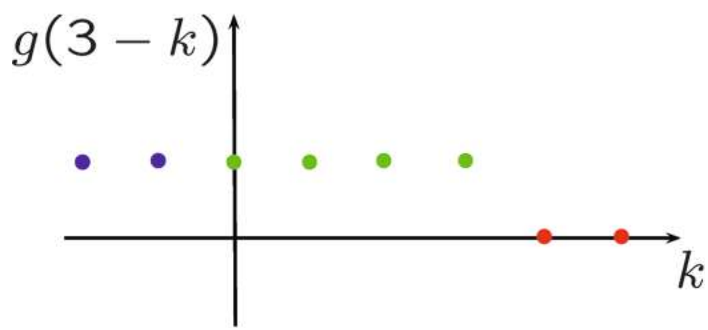
$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = F(z)\, G(z)$$

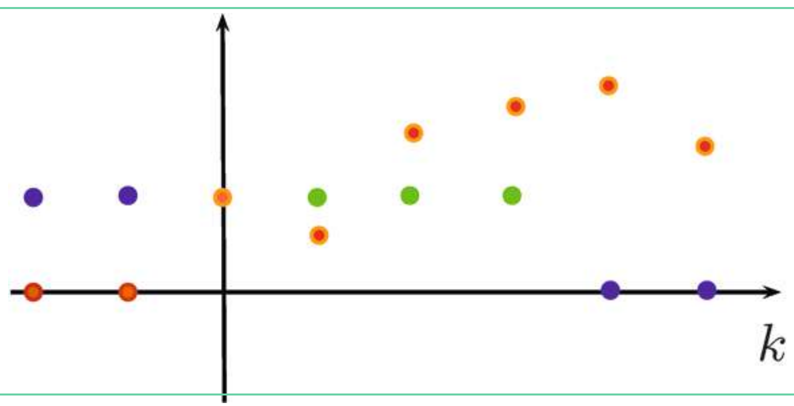


$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$









$$h(3) := \sum_{k=0}^{3} f(k)\, g(3-k)$$

Teorema del valore iniziale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata,

se esiste **finito** $\lim_{z \to \infty} X(z)$ allora

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{k \to 0} x(k) = x(0)$$

Teorema del valore finale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata $X(z)$,

se **tutti i poli** di $X(z)$ **hanno modulo minore di 1**, **escluso al più un polo semplice in z = 1**, allora esiste finito $\lim_{k \to \infty} x(k)$ e

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} \left[\left(1 - z^{-1}\right) X(z) \right]$$

Esempio: applicazione dei teoremi

- Si consideri la Z-trasformata $$Y(z) = \frac{2\,z+1}{(z-1)\,(3\,z+1)}$$

- Sfruttando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, determinare:

$$y(0) = ? \quad y(1) = ? \quad \lim_{k\to\infty} y(k) = ?$$

- Per il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{z \to \infty} Y(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{2\,z+1}{(z-1)\,(3\,z+1)} = 0$$

- Applicando la regola dell'anticipo ed ancora il teorema del valore iniziale si ottiene poi:

$$y(1) = \lim_{z \to \infty} z\,[Y(z) - y(0)] = \lim_{z \to \infty} \frac{z\,(2\,z+1)}{(z-1)\,(3\,z+1)} = \frac{2}{3}$$

- Applicando infine il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2\,z+1}{(z-1)\,(3\,z+1)} = \frac{3}{4}$$

Esempio: soluzione di una equazione alle differenze

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k+1) = 3y(k)+y(k-1)+u(k) \qquad y(k) \equiv 0 \forall k < 0$$

Applicando la Z-trasformata ad ambo i membri, per le proprietà viste si ottiene

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^2 y(0)}{z^2 - 3z - 1}}_{\text{dipende dalle condizioni iniziali (soluzione libera)}} + \underbrace{\frac{z}{z^2 - 3z - 1} U(z)}_{\text{dipende dalla sequenza d'ingresso (soluzione forzata)}}$$

Trasformate notevoli

- **Impulso unitario**

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

- **Scalino unitario**

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

Dimostrazione

Serie geometrica

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Rampa

$$x(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, z^{-k} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- **Segnale polinomiale**

$$x(k) = \begin{cases} k^n & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa *n* volte

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n z^{-k} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{z-1}\right]$$

Dimostrazione (cenni – continua)

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{k\left(k\left(k\left(\cdots\left(k\cdot 1\right)\right)\right)\right)}_{n \text{ volte}} z^{-k}$$

$$= \underbrace{\left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\cdots\left(-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]\right)\right)\right)}_{n \text{ volte l'operatore } -z\frac{d}{dz}}$$

Esempio

$$\mathcal{Z}\left\{k^2\cdot 1(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right) = \frac{z\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)^3}$$

Potenza con esponente intero

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-a)}$$

Dimostrazione

$$\frac{z}{a} \triangleq \eta$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^k 1(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \frac{\eta}{(\eta - 1)} = \frac{z}{(z-a)}$$

Esponenziale

$$x(k) = \begin{cases} e^{ak} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-e^a)}$$

Segnali sinusoidali

$$x(k) = \sin(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z \sin\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

$$\sin(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} \qquad \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

$$x(k) = \cos(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

Segnali "composti"

$$x(k) = a^k \sin(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{az \sin\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

$$x(k) = a^k \cos(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - az\cos\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

Polinomio fattoriale di ordine *n*

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} 1(k)$$

con

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(n)}}{n!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} & \text{per} \quad n > 0,\ k \geq n \\ 0 & \text{per} \quad n > 0,\ k < n \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$x(k) = \binom{k}{n} \cdot 1(k) \qquad \mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

con

$$\binom{k}{n} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } n > 0 \\ k \geq n \end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } n = 0] \end{cases}$$

Cenni di dimostrazione

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1(k) = k \cdot 1(k) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1(k) = \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left\{k^2 \cdot 1(k)\right\} - \mathcal{Z}\left\{k \cdot 1(k)\right\}\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1(k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$

$$= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \frac{1}{6}\mathcal{Z}\left\{k^3 \cdot 1(k)\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{k^2 \cdot 1(k)\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{Z}\left\{k \cdot 1(k)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{\left(z-1\right)^4} - \frac{1}{2}\,\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^4}$$

- **Polinomio fattoriale di ordine *n* pesato da potenza con esponente intero**

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k}\right]$$

Traslazione in frequenza

Polinomio fattoriale

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \frac{z\,a^{-1}}{\left(z\,a^{-1} - 1\right)^{n+1}} = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

La Z-antitrasformata

La Z-antitrasformata della funzione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

è definita come la sequenza

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z)\, dz$$

in cui Γ è una curva chiusa contenuta nella regione di convergenza.

Si consideri una classe particolare di funzioni $X(z)$, ovvero le funzioni

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_0}$$

dove assumiamo $m \leq n$ ovvero

$$X(z) \;=\; K\, \frac{(z - z_1)^{m_1}\, (z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_r)^{m_r}}{(z - p_1)^{n_1}\, (z - p_2)^{n_2} \ldots (z - p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$$

$$z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C} \text{ zeri },$$

$$p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C} \text{ poli}$$

Tecniche di Z anti-trasformazione

- Tecniche numeriche:
  - “long-division”
  - metodo “computazionale”
- Tecniche analitiche
  - espansione in fratti semplici

Tecnica della "Long-division" o divisione ripetuta

- Si tratta di una tecnica semplice che permette di determinare **termine a termine** gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

- È opportuno esprimere $X(z)$ in funzione di potenze negative $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

Si esegue la divisione ripetuta del polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore:

$$\begin{array}{r|l} 10z^{-1} + 5z^{-2} & 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \\ \hline -10z^{-1} + 12z^{-2} - 2z^{-3} & 10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots \\ \cline{1-1} 17z^{-2} - 2z^{-3} & \end{array}$$

- Il risultato è una combinazione lineare di potenze negative

$$10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots$$

- Ricordando che, per definizione, si ha

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

per semplice confronto si ottiene la sequenza

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 10 \\ x(2) &= 17 \\ &\ldots \end{aligned}$$

"Long division": riassumendo

- Metodo numerico e ricorsivo: fornisce i **valori** numerici della successione **termine a termine**, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa su operazioni di divisione di polinomi: è una tecnica **semplice** dal punto di vista **computazionale** (**vantaggio**).

Metodo "computazionale"

Si tratta di un' altra tecnica semplice che permette di determinare termine a termine gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

Idea: metto in evidenza il termine "1", che è la Z-trasformata di …

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot 1 = \frac{N(z)}{D(z)} U(z)$$

$$D(z)\,X(z) = N(z)\,U(z)$$

Utilizzando le proprietà viste per la Z-trasformata si perviene all'equazione alle differenze:

$$a_n\, x(k+n) + a_{n-1}\, x(k+n-1) + \ldots + a_0\, x(k) \;=$$

$$b_m\, u(k+m) + b_{m-1}\, u(k+m-1) + \ldots + b_0\, u(k)$$

Non rimane che determinare le condizioni iniziali per risolvere termine a termine l'equazione alle differenze.

I campioni così determinati sono i valori della successione che è la Z-antitrasformata cercata.

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}$$

$$\left(z^2 - 1.2z + 0.2\right) X(z) = (10z + 5)\, U(z)$$

$$x(k+2) - 1.2x(k+1) + 0.2x(k) = 10u(k+1) + 5u(k)$$

- $U(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$
- $x(k) = 0, \forall\, k < 0$

$$k = -2 \quad \Rightarrow \quad x(0) = 0$$

$$k = -1 \quad \Rightarrow \quad x(1) = 10$$

$\vdots$

Metodo “computazionale”: riassumendo

- Metodo **numerico** e **ricorsivo**: fornisce i valori della successione termine a termine, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa sulla supposizione che la Z-trasformata oggetto di studio rappresenti un’equazione alle differenze con come ingresso un segnale ad impulso discreto, centrato nell’origine: è una tecnica **semplice** dal punto di vista computazionale (**vantaggio**).

Espansione in fratti semplici

- Si tratta di una **tecnica analitica** per determinare la sequenza

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

- Si esprime $X(z)$ come somma di un numero finito di termini elementari di cui si sa determinare la Z-antitrasformata

- Il primo passo consiste nell'aggiungere un termine z al denominatore (ciò si può sempre fare):

$$X(z) \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \dots \frac{C_n}{z-p_n}$$

In generale:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1\,1}}{(z-p_1)} + \dots \frac{C_{1\,n_1}}{(z-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{C_{2\,1}}{(z-p_2)} + \dots \frac{C_{2\,n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \dots$$

$$\frac{C_{q\,1}}{(z-p_q)} + \dots \frac{C_{q\,n_q}}{(z-p_q)^{n_q}}$$

$$C_{i\,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{d\,z^{(n_i - j)}} \frac{X(z)}{z} \, (z-p_i)^{n_i} \right\}$$

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i\,j}\, z}{(z-p_i)^j}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}\, z}{(z-p_i)^j}\right] = C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\,1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\,1(k)$$

Caso in cui tutti i poli sono distinti:

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right] = C_i\, p_i^k \, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{i=1}^{n} C_i\, p_i^k \, 1(k)$$

$$C_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{X(z)}{z} (z - p_i) \right\}$$

Esempio: poli tutti distinti

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$$

$$C_1 = \lim_{z\to 1} \frac{10}{z-0.2} = 12.5$$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.2} \frac{10}{z-1} = -12.5$$

$$X(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2}$$

$$x(k) = 12.5 \cdot 1(k) - 12.5 \cdot 0.2^k \, 1(k)$$

Esempio: poli multipli

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 2.7\, z^2 + 2.4\, z - 0.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - 0.7} + \frac{c_{2,1}}{z - 1} + \frac{c_{2,2}}{(z-1)^2}$$

$$c_1 = \left[(z - 0.7)\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.7} = 11,\bar{1}$$

$$c_{2,2} = \left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = 3,\bar{3}$$

$$c_{2\,1} = \left\{\frac{d}{d\,z}\left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]\right\}_{z=1} = -11,\bar{1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{11.\bar{1}}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}}{z-1} + \frac{3.\bar{3}}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{11.\bar{1}\,z}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}\,z}{z-1} + \frac{3.\bar{3}\,z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \left[11.\bar{1}\,(0.7)^k + 3.\bar{3}\,k - 11.\bar{1}\right] 1(k)$$

Espansione in fratti semplici: riassumendo

- Metodo **analitico**: fornisce direttamente la **forma chiusa** della soluzione (**vantaggio**)

$$X(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{x(k)\}$$

- Si basa su tecniche d'analisi e proprietà di funzioni di variabile complessa: è una **tecnica "pesante"** dal punto di vista computazionale (**svantaggio**).

Analisi qualitativa di una Z-Trasformata

- Assegnata una trasformata $X(z)$, che cosa si può affermare, in maniera qualitativa, in merito all'andamento del segnale $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$?

- Ad esempio: in quali condizioni $x(k)$ sarà un segnale costante, oppure divergente, oppure tenderà a 0?

- L'evoluzione temporale del segnale $x(k)$ può essere ricavata, in modo qualitativo, analizzando i poli della corrispondente trasformata $X(z)$.

Analisi qualitativa: poli semplici

Verranno considerate le trasformate elementari:

- $$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad a \in \mathbb{R}$$

- $$X(z) = \frac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \quad a,\, \omega \in \mathbb{R}$$

Poli reali semplici:

- Il termine elementare è $$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

  al quale corrisponde la sequenza elementare

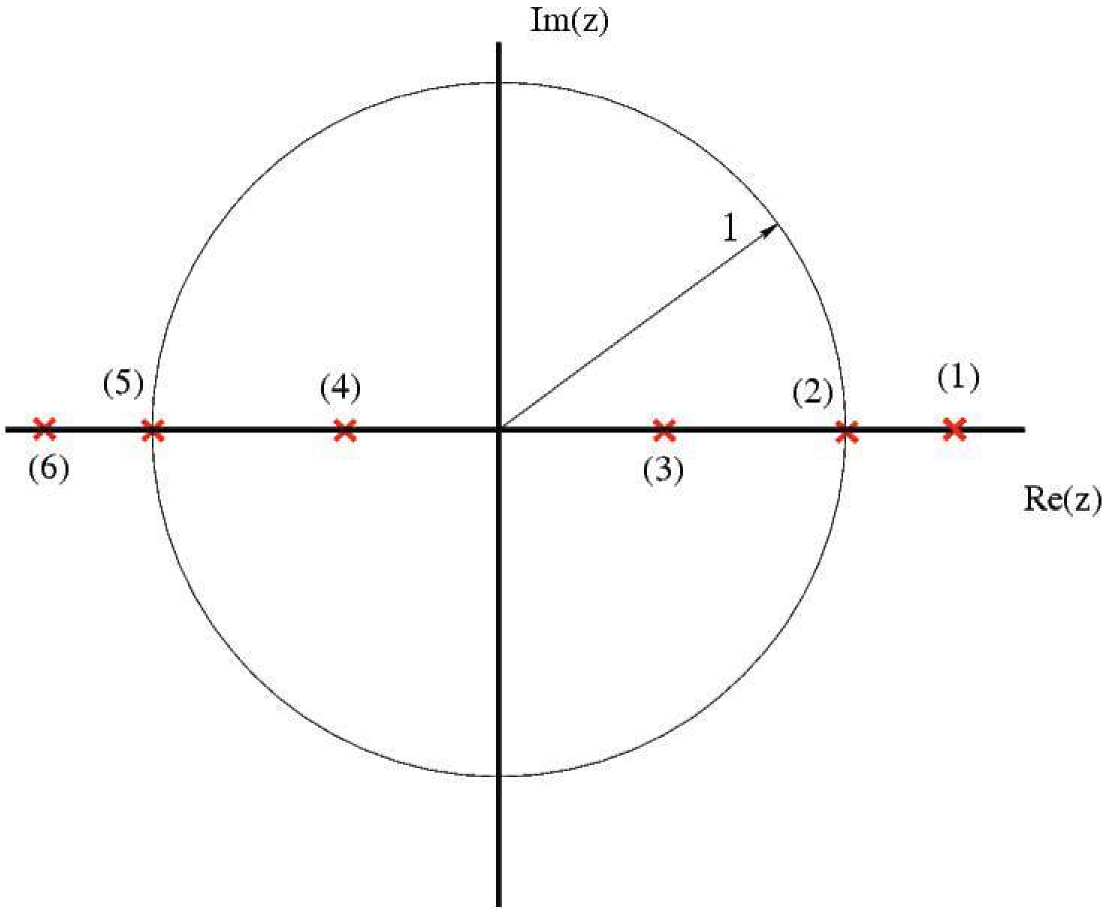
$$x(k) = a^k\, 1(k), \qquad k \geq 0$$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

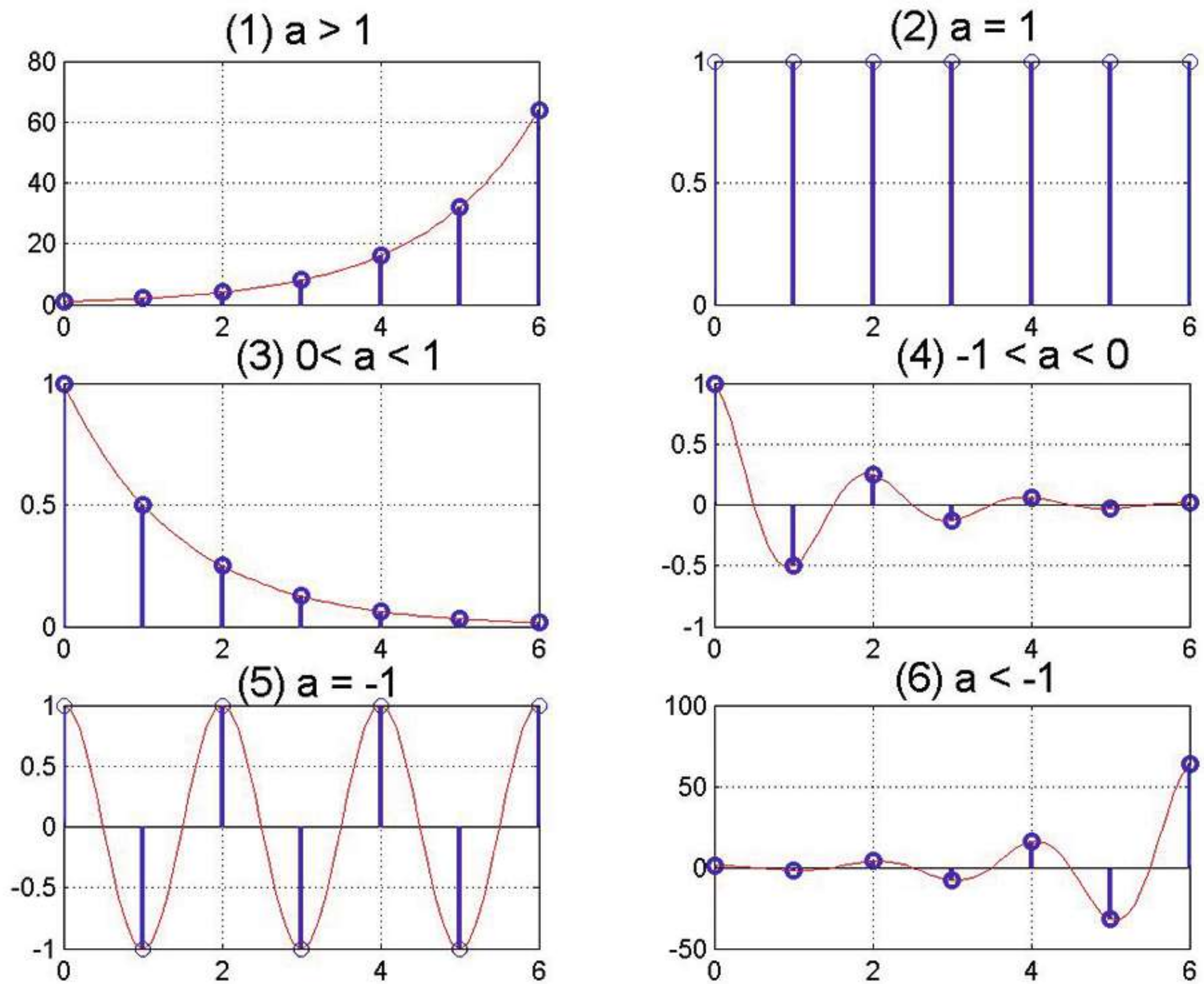
Poli reali semplici:

Consideriamo sei possibili posizioni per il polo p.

A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(k)$



Poli reali semplici:



Poli reali semplici:

In definitiva:

Vale anche per poli multipli!

- $|a| < 1 \Rightarrow x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$
- $|a| = 1 \Rightarrow |x(k)| = 1, \forall, k$
- $|a| > 1 \Rightarrow x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Nel caso di poli multipli, la successione diverge!

Vale anche per poli multipli!

Poli complessi coniugati (semplici):

- Il termine elementare è

$$X(z) = \frac{a z \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \qquad a,\ \omega \in \mathbb{R}$$

al quale corrisponde la sequenza elementare

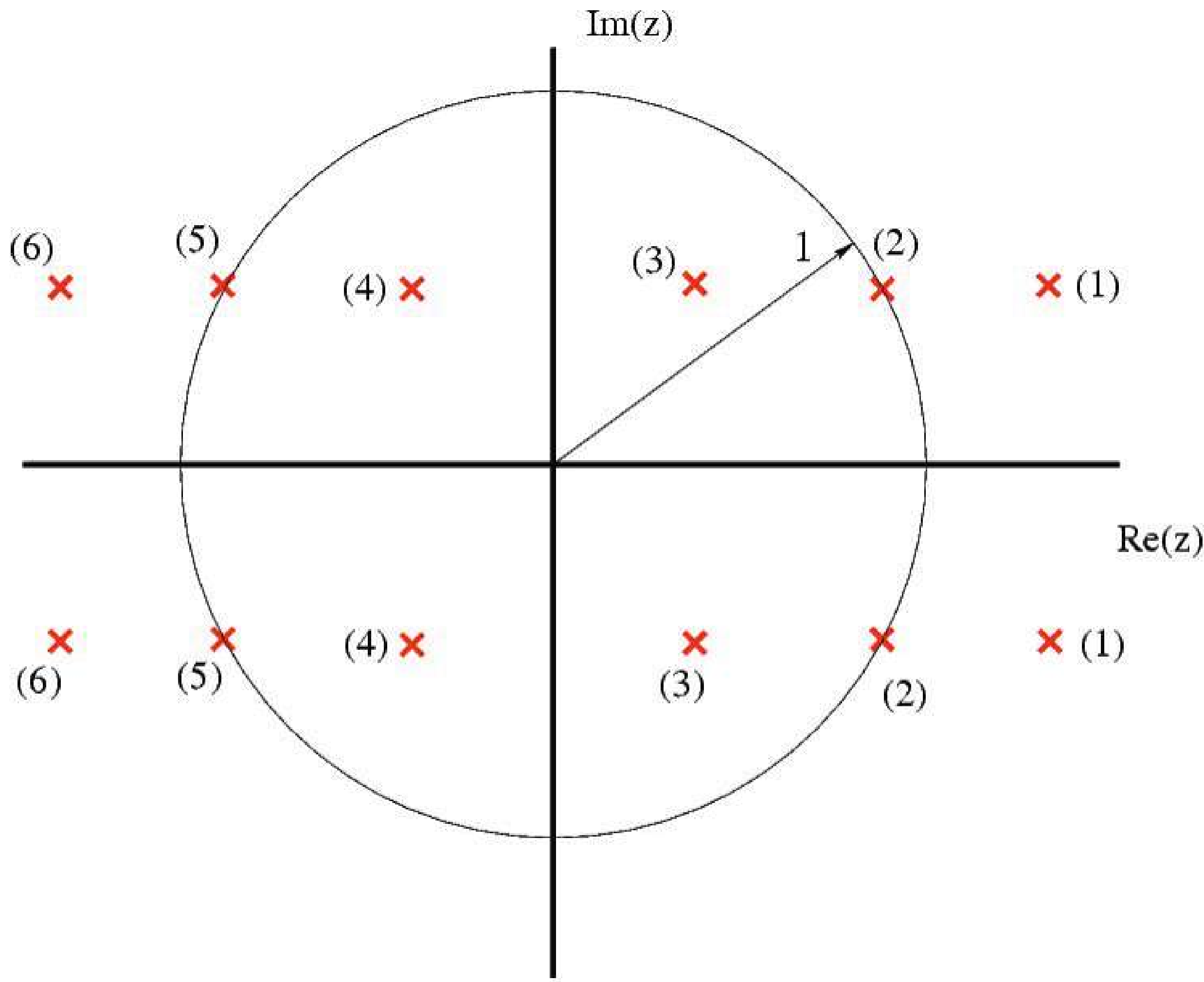
$$x(k) = a^k \sin(\omega\, k)\, 1(k), \qquad k \geq 0$$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione dei poli $p_{1,2} = a\, e^{\pm j\omega}$ nel piano complesso?

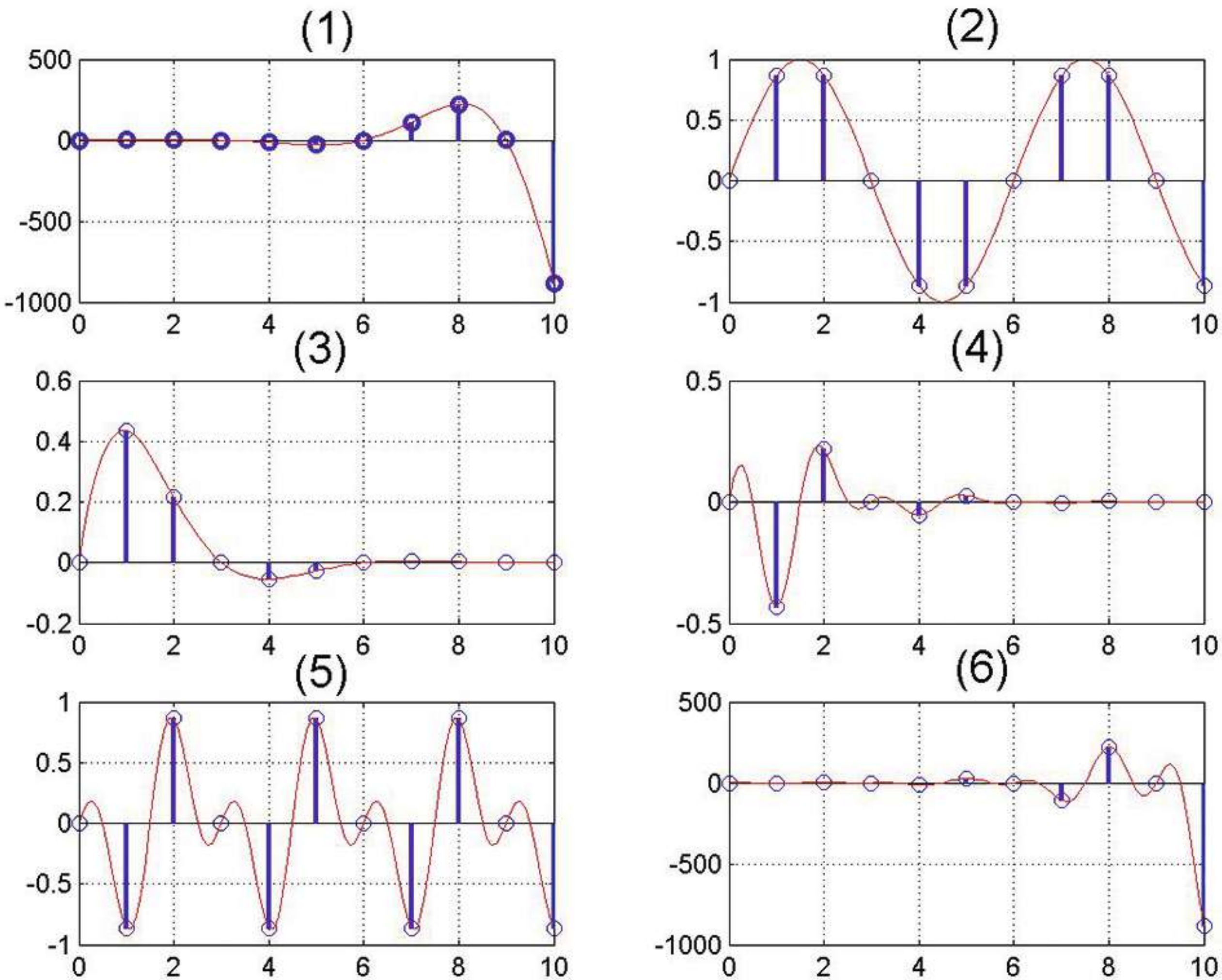
Poli complessi coniugati (semplici):

Consideriamo sei possibili posizioni per la coppia di poli.

A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(k)$



Poli complessi coniugati (semplici):



Poli complessi coniugati (semplici):

In definitiva:

Vale anche per poli multipli!

- $|p_{1,2}| < 1 \Rightarrow x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$
- $|p_{1,2}| = 1 \Rightarrow |x(k)| \text{ limitato }, \forall k$

Nel caso di poli multipli, la successione diverge!

- $|p_{1,2}| > 1 \Rightarrow x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Vale anche per poli multipli!

Poli multipli: poli reali

- Il termine elementare è

$$X(z) = C \frac{z}{(z-a)^n} \quad a \in \mathbb{R}, \quad n > 1$$

- al quale corrisponde la sequenza elementare

$$x(k) = C \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} a^{k-n+1} 1(k)$$

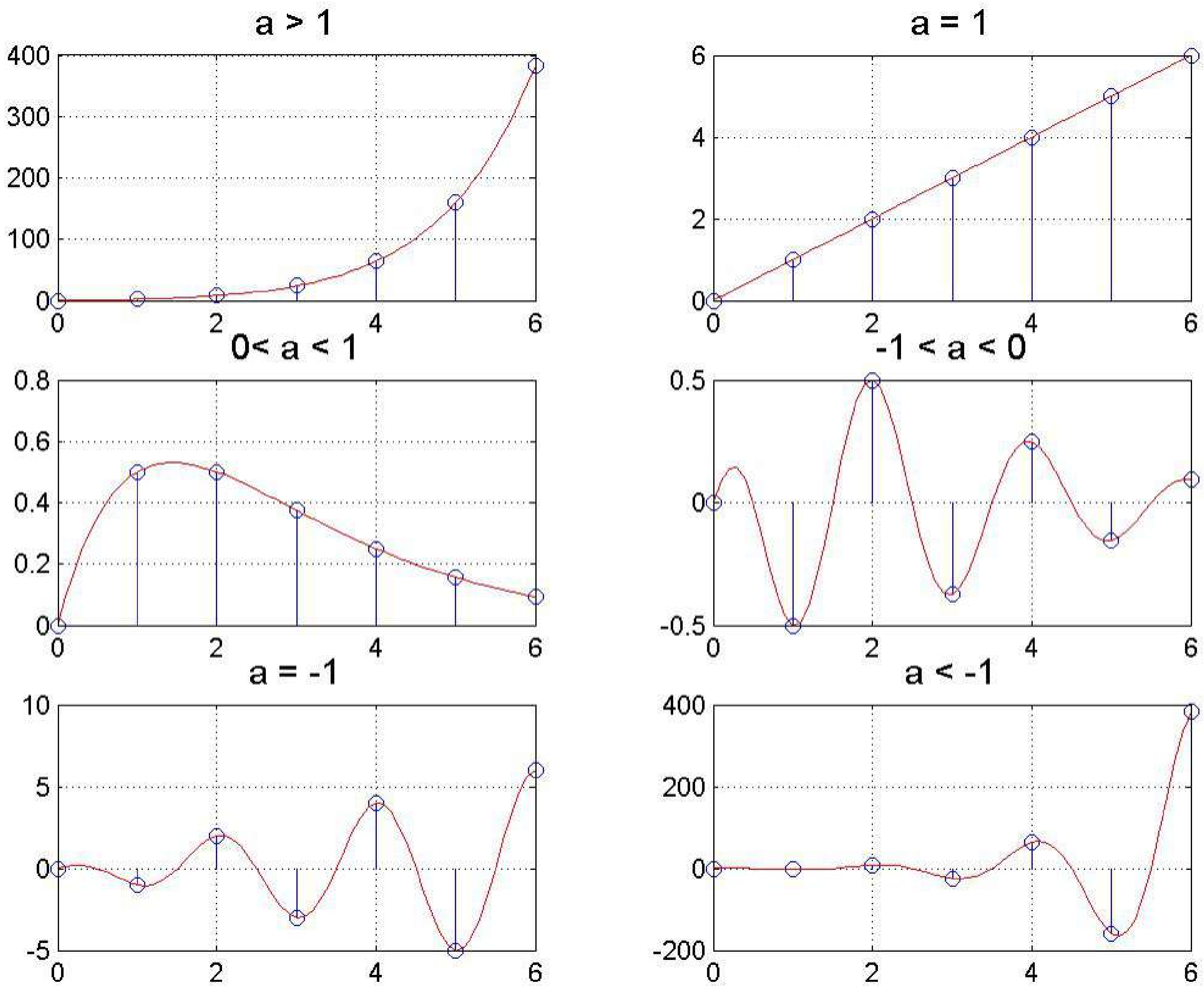
- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

- Ricordando l' espressione del polinomio fattoriale è possibile scrivere

$$x(k) \;=\; C\,\frac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\ldots(k-n+2)}{(n-1)!}\,a^{k-n+1}\,1(k)$$

- ovvero

$$x(k) \;=\; \frac{C}{(n-1)!}\;\overbrace{\underbrace{\left[k^{n-1}+\alpha_1\,k^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-2}\,k\right]}_{\boxed{\text{Polinomio di grado (n-1) in k}}}}^{p(k)}\;a^{k-n+1}\,1(k)$$


a > 1
400
300
200
100
0
0
2
4
6
a = 1
6
4
2
0
0
2
4
6
0< a < 1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6
-1 < a < 0
0.5
0
-0.5
0
2
4
6
a = -1
10
5
0
-5
0
2
4
6
a < -1
400
200
0
-200
0
2
4
6

Poli reali multipli:

In definitiva:

$$x(k) = \frac{C}{(n-1)!} [p(k)] \, a^{k-n+1} \, 1(k)$$

- $|a| < 1$ ⇨ $x(k) \rightarrow 0, \text{per } k \rightarrow \infty$
- $|a| = 1$ ⇨ $x(k) \rightarrow \infty, \text{per } k \rightarrow \infty$
- $|a| > 1$ ⇨ $x(k) \rightarrow \infty, \text{per } k \rightarrow \infty$

Poli multipli: poli complessi coniugati

- Il termine elementare è

$$X(z) = C\frac{z}{(z-a)^n} + C^*\frac{z}{(z-a^*)^n} \qquad a,\, C \in \mathbb{C}, \qquad n > 1$$

con $a = \rho\, e^{j\,\theta}$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

$$x(k) = C \binom{k}{n-1} a^{k-n+1}\, 1(k) +$$

$$+C^* \binom{k}{n-1} a^{*\,k-n+1}\, 1(k)$$

$$= \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} \left[\Re(C)\left(e^{j(k-n+1)\,\theta)} + e^{-j(k-n+1)\,\theta)}\right) +\right.$$

$$\left. +j\,\Im(C)\left(e^{j(k-n+1)\,\theta)} - e^{-j(k-n+1)\,\theta)}\right)\right] 1(k)$$

$$x(k) = 2 \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \{\Re(C) \cos[(k-n+1)\,\theta] + \\ - \Im(C) \sin[(k-n+1)\theta]\} \, 1(k)$$

Ponendo

$$H = \frac{2\,|C|}{(n-1)!} \qquad \Phi = \arctan\left(\frac{\Im(C)}{\Re(C)}\right)$$

si ottiene infine

$$x(k) = H \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \cos[(k-n+1)\,\theta + \Phi] \, 1(k)$$

Poli complessi multipli:

In definitiva: $x(k) = H \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \cos\left[(k-n+1)\,\theta + \Phi\right] 1(k)$

- $|a| < 1 \Rightarrow x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$
- $|a| = 1 \Rightarrow x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$
- $|a| > 1 \Rightarrow x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Analisi qualitativa: conclusioni

- Per **poli** con **modulo inferiore ad 1**: la successione elementare corrispondente **converge** sempre a **0**.
- Per **poli** di **modulo unitario**: se poli **semplici**, la successione elementare si mantiene **limitata**, altrimenti **diverge**.
- Per **poli** di **modulo maggiore di 1**: la successione elementare corrispondente **diverge sempre**.

Interpretazione operatoriale di $\mathcal{Z}\{\cdot\}$

- Sia data la sequenza $v(t)$ con trasformata $V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t-1)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di un passo) ha trasformata $z^{-1}V(z)$
- Infatti:

$$v(t) = 0,\ t < 0$$

$$\Rightarrow\ w(0) = 0, w(1) = v(0) = 0, w(2) = v(1), \dots$$

$$W(z) = 0 + v(0)z^{-1} + v(1)z^{-2} + \cdots + v(t-1)z^{-t} + \cdots$$

$$= z^{-1}[v(0) + v(1)z^{-1} + \cdots + v(t-1)z^{-t+1} + \cdots]$$

$$= z^{-1}V(z)$$

- Analogamente $w(t) = v(t-2)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di due passi) ha trasformata $z^{-2}V(z)$

- La sequenza $w(t) = v(t+1)$ (sequenza $v(t)$ anticipata di un passo) ha trasformata $z[V(z) - v(0)]$

- Infatti:

$$w(0) = v(1), w(1) = v(2), \ldots$$

$$\begin{aligned}
W(z) &= v(1) + v(2)z^{-1} + \cdots + v(t+1)z^{-t} + \cdots \\
&= z[v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] \\
&= z[v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] - zv(0) \\
&= z[V(z) - v(0)]
\end{aligned}$$

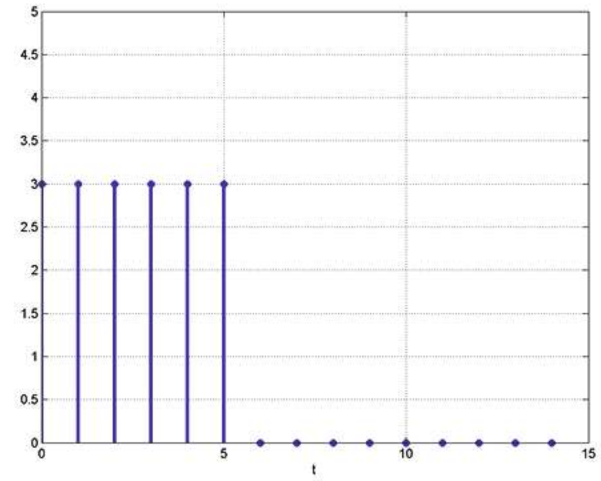
Quindi:

- Gli operatori z e z^{-1} possono essere visti come operatori di **anticipo** e **ritardo** rispettivamente
- In generale z^k e z^{-k} possono essere visti come operatori di anticipo e ritardo rispettivamente di k passi

Esempio

Si consideri il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$



$$v(t) = 3 \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t-6)$$

Ma $\mathcal{Z}\{1(k)\} = \dfrac{z}{z-1}$

$$V(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{3z^{-6}z}{z-1} = \frac{3(z^6-1)}{z^5(z-1)}$$

Ulteriori considerazioni su $X\left(z^{-1}\right)$ vs $X(z)$

- Torniamo alle possibili notazioni per una Z-Trasformata: a potenze di z oppure a potenze di z^{-1}.

$$X\left(z^{-1}\right) = \frac{1-2z^{-1}}{4+6z^{-1}+8z^{-2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z^2-2z}{4z^2+6z+8}$$

- Applichiamo il " metodo computazionale " per ottenere un ' equazione alle differenze che ci permetta di ricavare ricorsivamente, campione dopo campione, il segnale $\{x(k)\}$.

- Otterremo due equazioni alle differenti scritte in maniera diversa a seconda della Z-trasformata da cui partiamo …

- Partendo dall'**espressione in potenze di $\mathbf{z}^{-1}$** si ottiene

$$\left(4+6z^{-1}+8z^{-2}\right) X(z) = \left(1-2z^{-1}\right) U(z)$$

$$4\,x(k)+6\,x(k-1)+8\,x(k-2) = u(k)-2\,u(k-1)$$

$$u(k) = \delta(k)$$

- Il **valore all'istante corrente** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione** di **valori passati del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di valori all'istante presente e nel passato dell'ingresso (che è un impulso unitario nell'origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z^{-1} può venire ricondotta ad un' equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva "all' indietro"**

- $X\left(z^{-1}\right)$ è antitrasformabile calcolando il valore all' istante attuale della successione incognita $\{x(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{x(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d' eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Partendo dall' **espressione in potenze di** $\mathbf{z}$ si ottiene

$$\left(4\,z^2+6\,z+8\right)\,X(z) = \left(z^2-2\,z\right)\,U(z)$$

$$4\,x(k+2)+6\,x(k+1)+8\,x(k) = u(k+1)-2\,u(k)$$

$$u(k) = \delta(k)$$

- Il **valore nel futuro** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione** di **valori futuri ed all' istante corrente del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di valori all' istante presente e nel futuro dell' ingresso (che è un impulso unitario nell' origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z può venire ricondotta ad un'equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva in avanti**

- $X(z)$ è antitrasformabile calcolando un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{x(k)\}$ [in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{x(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

$\mathrm{X}\left(\mathrm{z}^{-1}\right)$ vs $\mathrm{X}\left(\mathrm{z}\right)$: concludendo

- Si noti che le due Z-trasformate, così come le due equazioni alle differenze a cui si arriva col metodo computazionale, descrivono il medesimo segnale.

- Analizzeremo ulteriori proprietà caratteristiche della notazione $X\left(z^{-1}\right)$ e di quella $X\left(z\right)$ quando studieremo i sistemi dinamici a tempo discreto (Parte 2) ed in particolare le Funzioni di Trasferimento (Parte 4).

Teorema del valore iniziale: applicazione e proprietà della Z-Trasformata

Data la Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

con $m \leq n,$ vale la proprietà

$$\begin{cases} m = n & f(0) = \dfrac{b_m}{a_n} \\ m < n & \begin{cases} f(0) = f(1) = \cdots = f(n-m-1) = 0 \\ f(n-m) = \dfrac{b_m}{a_n} \end{cases} \end{cases}$$

Per dimostrare la proprietà, si utilizza il teorema del valore iniziale:

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = \lim_{k \to 0} f(k) = f(0)$$

1° caso: $m = n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m\, z^m + b_{m-1}\, z^{m-1} + \cdots + b_1\, z + b_0}{a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0}$$

$$= \frac{b_m}{a_n}$$

2° caso: $m < n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = 0$$

$$m = O(N(z)) < O(D(z)) = n$$

Per determinare il secondo campione della sequenza utilizziamo il teorema del valore iniziale e la proprietà di anticipo nel tempo

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z \, [F(z) - f(0)]$$

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n - 1 \longrightarrow m + 1 = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Si continua in maniera analoga:

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \left[F(z) - f(0) - f(1)\,z^{-1}\right]$$

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \frac{b_m\,z^m + \cdots + b_0}{a_n\,z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n-2 \longrightarrow m+2 = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Fino a quando? Sia $m = n - h$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{h-2} f(k)\,z^{-k}\right]$$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \frac{b_m\,z^m + \cdots + b_0}{a_n\,z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m+(n-m-1) = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Finalmente:

$$f(n-m) = \lim_{z\to\infty} z^{n-m}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-m-1} f(k)\, z^{-k}\right]$$

$$f(n-m) = \lim_{z\to\infty} z^{n-m}\, \frac{b_m\, z^m + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + \cdots + a_0} = \frac{b_m}{a_n}$$

$$m + (n-m) = O\,(z\,N(z)) = O\,(D(z)) = n$$

Ancora considerazioni e proprietà: sequenza ritardata e condizioni iniziali

- Abbiamo già visto che, data una sequenza

$$\{x(k)\}\ , \quad k \in \mathbb{Z} \quad x(k) \equiv 0\ \forall k < 0$$

la Z-trasformata della sequenza $\{y(k)\}$ ritardata di *m* istanti di tempo rispetto alla sequenza originaria, è data da

$$y(k) = x(k-m) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

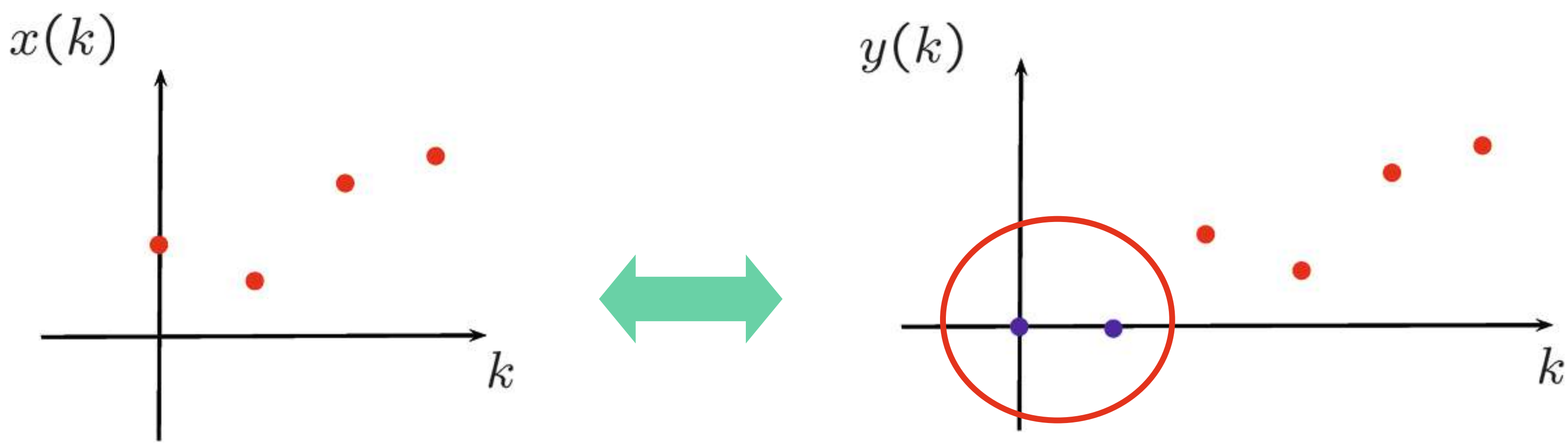
$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

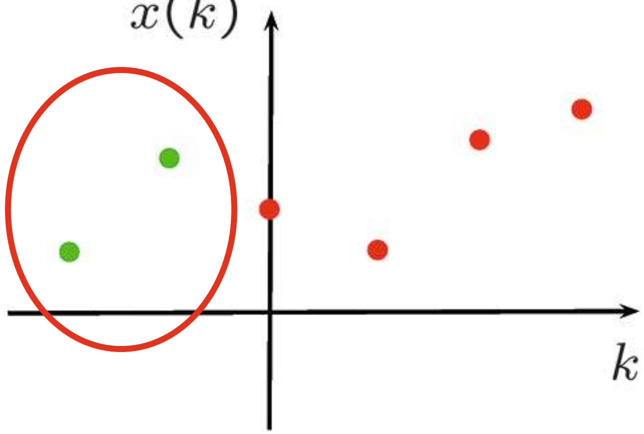
- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$



$\{x(k)\}\ ,\quad k \in \mathbb{Z}\quad x(k) \equiv 0\ \forall k < 0\qquad y(k) = x(k-2)$

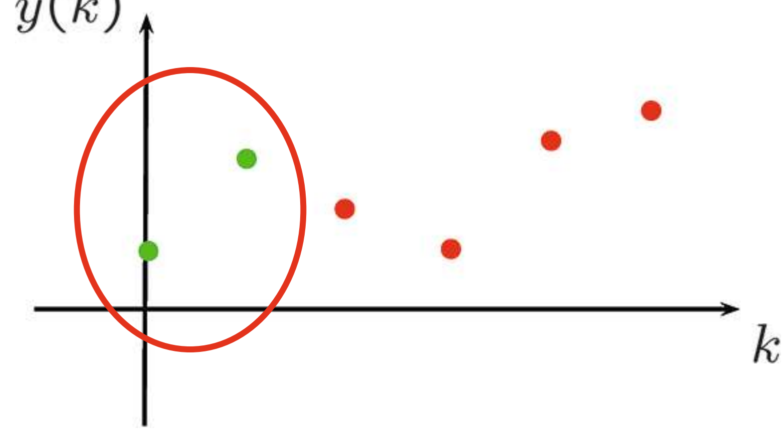
- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale**



$$\{x(k)\}\ ,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x(k) \equiv 0\ \forall k < -2$$

$$y(k) = x(k-2)$$



Come si tiene conto di quei campioni "aggiuntivi"?

● Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale

Data la sequenza

$$\{x(k)\} \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

che ammette **campioni non nulli (IN NUMERO FINITO)** anche per istanti di tempo negativi, si costruisce la sequenza ritardata

$$y(k) = x(k-m) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tra le z-trasformate delle sequenze vale la relazione

$$Y(z) = z^{-m} X(z) + z^{-m} \left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p) \, z^{-p} \right]$$

$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-k} =$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-(k-m)} \right\} =$$

$$k - m \stackrel{\triangle}{=} p$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)} \right\} =$$

$$z^{-m}\left\{\sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)}\right\} =$$

$$z^{-m}\, X(z) + z^{-m}\left\{\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)}\right\} = Y(z)$$

La relazione appena trovata è utile per trasformare le equazioni alle differenze “all’ indietro”

$$u(k) = f\left(e(k), \ldots, e(k-m); u(k-1), \ldots, u(k-n)\right)$$

$$\{e(k)\} \text{ nota } \forall\, k \geq 0 \qquad \text{incognita } \{u(k)\}\,, \quad k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \iff \quad u(-n), u(-n+1), \ldots, u(-1)$$

Un esempio

- Consideriamo l'equazione alle differenze

$$x(k) \; - \; 3\,x(k-1) \; + \; 2\,x(k-2) \; = \; u(k)$$

con condizioni iniziali date da

$$x(-2) \; = \; 3 \quad x(-1) \; = \; 12$$

e con ingresso (sequenza forzante nota) pari a

$$u(k) \; = \; \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad k \geq 0$$

- Vogliamo risolvere l'equazione facendo uso della Z-trasformata.

- La sequenza forzante può essere riscritta nel modo seguente:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

$$u(k) = 0.5 \cdot \left[(-1)^k + 1\right] \cdot 1(k)$$

- La sua Z-trasformata è allora

$$U(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}\right] = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

- In base alla regola descritta nella slide #110. e segg., applicando la Z-trasformata all'equazione alle differenze si ottiene

$$X(z) - 3\left[z^{-1}X(z) + x(-1)\right] +$$

$$+2\left[z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)\right] = U(z)$$

$$X(z) = \frac{z\left[(3z-2)\,x(-1) - 2z\,x(-2)\right]}{z^2 - 3z + 2} +$$

$$+\frac{z^2}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Esercizi sulla Z-Trasformata

Z-antitrasformata

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $F(z)$.

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.4\,z + 1.08}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Sviluppo in fratti semplici

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to -0.5} (z+0.5)\,\frac{F(z)}{z}$$

$$C_{1,1} = \left.\frac{-0.4\,z + 1.08}{(z-0.3)^2}\right|_{z=-0.5} = 2$$

Analogamente

$$C_{2,2} = \left.\frac{-0.4\,z + 1.08}{z+0.5}\right|_{z=+0.3} = 1.2$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.3} \frac{d}{dz}\left[\frac{F(z)}{z}\,(z-0.3)^2\right]$$

$$C_{2,1} = \left.\frac{d}{dz}\left[\frac{F(z)}{z}\,(z-0.3)^2\right]\right|_{z=0.3} = -2$$

In definitiva

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z+0.5} + \frac{-2}{z-0.3} + \frac{1.2}{(z-0.3)^2}$$

$$F(z) = 2\frac{z}{z+0.5} - 2\frac{z}{z-0.3} + 4\frac{0.3\,z}{(z-0.3)^2}$$

$$(-0.5)^k \qquad (0.3)^k \qquad k\,(0.3)^k$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right]\cdot 1(k)$$

$$F(z) = \frac{-0.4\, z^2 + 1.08\, z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right] \cdot 1(k)$$

Osservazioni:

- la differenza di grado tra il polinomio a denominatore di $F(z)$ e quello al numeratore è pari ad 1
    - il primo campione della successione $f(k)$ è nullo!
- I primi campioni della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \left\{0, -\frac{2}{5}, \frac{26}{25}, \frac{1}{50}, \frac{149}{625} \dots\right\}$$

Proposta: ritrovare i primi 5 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Esercizio 2

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$X(z) = \frac{0.1\,(z+1)\,z}{(z-1)^2\,(z-0.6)}$$

Vale la medesima considerazione fatta per l'esercizio precedente:

poiché la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{X(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $X(z)$.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z-1} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{2,1}}{(z-0.6)^2}$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = 0.5$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} (z-1)^2 \right] = -1.0$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.6} (z-0.6) \frac{X(z)}{z} = 1.0$$

$$X(z) = -\frac{z}{z-1} + 0.5 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.6}$$

$$x(k) = \left[-1 + 0.5\,k + (0.6)^k \right] 1(k)$$

$$\{x(k)\} = \{0,\ 0.1,\ 0.36,\ 0.716,\ 1.1296,\ \ldots\}$$

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2+1}{z^2+2z+1}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ non possiede uno zero nell' origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede, oltre agli stessi poli di $F(z)$, un polo nell' origine.

Sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z\,(z+1)^2} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z+1} + \frac{C_{2,2}}{(z+1)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2+1}{(z+1)^2} = 1 \qquad C_{2,2} = \lim_{z \to -1} \frac{z^2+1}{z} = -2$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to -1} \left\{ \frac{d}{d\,z} \left[\frac{z^2+1}{z} \right] \right\} = 0$$

$$F(z) = 1 - 2\frac{z}{(z+1)^2}$$

$$\delta(k) \qquad\qquad (-1)^{k-1}\; k\, 1(k)$$

$$f(k) = \delta(k) - 2\,\underbrace{(-1)^{k-1} \cdot k \cdot 1(k)}$$

La successione diverge!

Che fosse una successione divergente lo si poteva dedurre anche dalla Z-Trasformata iniziale, che presenta un polo doppio di modulo unitario!

I primi valori della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \{1, -2, 4, -6\ldots\}$$

Proposta: ritrovare i primi 4 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Esercizio 4

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2-4z+3}$$

Fattorizzando:

$$F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$$

si nota che esiste un polo a modulo maggiore dell'unità: la successione diverge!

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z-1} + \frac{C_{3,1}}{z-3}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} z \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{1}{3}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{F(z)}{z} = \cdots = -1$$

$$C_{3,1} = \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$F(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

$$f(k) = \frac{1}{3} \delta(k) + \left[\underbrace{\frac{2}{3} 3^k}_{\text{Il termine divergente}} - 1 \right] \cdot 1(k)$$

Esercizio 5

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{0.625\, z \left(z^2 + 0.8z - 0.6\right)}{(z-1)^4}$$

Osservazione

La trasformata presenta un polo di modulo unitario, con molteplicità maggiore dell'unità (molteplicità 4): il segnale corrispondente è certamente divergente.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{(z-1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{1,3}}{(z-1)^3} + \frac{C_{1,4}}{(z-1)^4}$$

$$C_{1,4} = \lim_{z \to 1} (z-1)^4 \frac{F(z)}{z} = 0.75$$

$$C_{1,3} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{d\,z} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 1.75$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\,z^2} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0.625$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\,z^3} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0$$

$$F(z) = 0.625 \frac{z}{(z-1)^2} + 1.75 \frac{z}{(z-1)^3} + 0.75 \frac{z}{(z-1)^4}$$

$$F(z) = 0.625\,\frac{z}{(z-1)^2} + 1.75\,\frac{z}{(z-1)^3} + 0.75\,\frac{z}{(z-1)^4}$$

$$\binom{k}{2}\cdot 1(k)$$

$$\binom{k}{3}\cdot 1(k)$$

$$f(k) = \left\{0.625\,k + 1.75\,\boxed{\left[\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k\right]} + \right.$$

$$\left. + 0.75\,\boxed{\left[\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right]}\right\}\,1(k)$$

In definitiva

$$f(k) = \left[0.5\,k^2 + 0.125\,k^3\right]\,1(k)$$

Esercizio 6

Analizzare qualitativamente il segnale a cui corrisponde la Z-Trasformata

$$Y(z) = -\frac{(2z + p - 1)}{(z + 1 + 2p)(z - 1)}$$

al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$

Valore iniziale $\lim_{z \to \infty} Y(z) = 0 = y(0) \quad \forall p$

- $p < -1$

due modi distinti; un modo è associato ad un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi l'uscita del sistema diviene illimitata al crescere di *k*

- $p = -1$

in questo caso si ottiene

$$Y(z) = -\frac{2}{z-1}$$

$$y(k) = -2 \cdot 1(k-1)$$

- $-1 < p < 0$

$$Y(z) = -\frac{2z+p-1}{(z+2p+1)\,(z-1)}$$

la sequenza si mantiene limitata e tende a zero asintoticamente, dato che i modi della risposta sono associati a poli entrambi minori dell'unità (in modulo).

- $p = 0$ $$Y(z) = -\frac{2z-1}{(z+1)(z-1)}$$

$$y(k) = (-1)\cdot\delta(k) - \frac{1}{2}\cdot 1(k) + \frac{3}{2}\cdot(-1)^k\cdot 1(k)$$

comportamento oscillante permanente: poli di modulo unitario, semplici

- $p > 0$

C' è un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi il segnale diviene illimitato al crescere di *k*.

Esercizio 7

- Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = e(k)$$

dove $\quad x(k) = 0 \quad \forall\, k < -2, \quad x(-2) = x(-1) = 1$

$$e(k) = \begin{cases} 1 & k = 0,\ 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Determinare **per via numerica** i primi 4 campioni non noti della successione:

$x(0) \quad \rightarrow \quad x(0) - 3x(-1) + 2x(-2) = e(0)$

$$x(0) = 2$$

$$x(1) \quad \Rightarrow \quad x(1) - 3\,x(0) + 2\,x(-1) \;=\; e(1)$$

$$x(1) \;=\; 4$$

$$x(2) \quad \Rightarrow \quad x(2) - 3\,x(1) + 2\,x(0) \;=\; e(2)$$

$$x(2) \;=\; 9$$

$$x(3) \quad \Rightarrow \quad x(3) - 3\,x(2) + 2\,x(1) \;=\; e(3)$$

$$x(3) \;=\; 19$$

- Scrivendo un semplice script in ambiente Matlab si possono rapidamente calcolare i primi 25 campioni della sequenza

```
al passo 0 valore di x 2.00
al passo 1 valore di x 4.00
al passo 2 valore di x 9.00
al passo 3 valore di x 19.00
al passo 4 valore di x 39.00
al passo 5 valore di x 79.00
al passo 6 valore di x 159.00
al passo 7 valore di x 319.00
al passo 8 valore di x 639.00
al passo 9 valore di x 1279.00
al passo 10 valore di x 2559.00
al passo 11 valore di x 5119.00
al passo 12 valore di x 10239.00
al passo 13 valore di x 20479.00
al passo 14 valore di x 40959.00
al passo 15 valore di x 81919.00
al passo 16 valore di x 163839.00
al passo 17 valore di x 327679.00
al passo 18 valore di x 655359.00
al passo 19 valore di x 1310719.00
al passo 20 valore di x 2621439.00
al passo 21 valore di x 5242879.00
al passo 22 valore di x 10485759.00
al passo 23 valore di x 20971519.00
al passo 24 valore di x 41943039.00
al passo 25 valore di x 83886079.00
```

- Proviamo ora a **risolvere l' equazione** alle differenze facendo uso della **Z-trasformata**:

$$\mathcal{Z}\left\{x\,(k\,-\,m)\right\} \;=\; z^{-m}\,X(z) + z^{-m}\left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\,z^{-p}\right]$$

$$x(k)\,-\,3\,x(k-1)\,+\,2\,x(k-2)\;=\;e(k)$$

$$X(z) \;=\; \frac{z\,\left[x(-1)\,(3\,z-2)\,-\,2\,x(-2)\,z\right]}{z^2\,-\,3\,z\,+\,2} +$$

$$+\,\frac{z^2}{z^2-3\,z+2}\cdot\frac{z^2+1}{z^2}$$

- In definitiva la sequenza cercata possiede Z-trasformata data da:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$$

- Lo sviluppo in fratti semplici porta a

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{(-2)\,z}{z-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-2}$$

- Antitrasformando si ottiene quindi

$$x(k) = \frac{1}{2} \cdot \delta(k) + \left[\frac{5}{2} \cdot 2^k - 1\right] \cdot 1(k)$$

Esercizi sulle Z-Trasformate

Esercizi “per casa”

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z - 1)}$$

Esercizio 2

Partendo dalla medesima Z-Trasformata $F(z)$ dell'esercizio precedente, determinare i primi 3 valori della successione $f(k)$ utilizzando sia la tecnica di "long division" che il metodo computazionale.

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{\left(z^2 - 1\right)(z - 2)}$$

Esercizio 4

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+3) - 2.2\,x(k+2) + 1.57\,x(k+1) - 0.36\,x(k) = e(k)$$

con condizioni iniziali $x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k)$

Determinare:

- uno script Matlab che calcoli i primi 45 valori della sequenza $x(k)$
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$
- partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ determinare, utilizzando l'algoritmo di long-division, i primi 5 valori della sequenza.

Esercizio 5

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 0, \quad y(-2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 6

Si consideri ancora l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 1, \quad y(-2) = -2$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 0 \quad \forall k$

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando il metodo computazionale.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 7

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+2) + 3\,x(k) - 2\,x(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $\begin{cases} x(-2) = 12, & x(-1) = 0 \\ x(0) = 1, & x(1) = -2 \end{cases}$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Determinare:

- i primi 10 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$.