

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto
Equazioni alle differenze
La Z-trasformata: definizione e proprietà

Segnali a tempo discreto

Definizione: segnale a tempo discreto

- Consideriamo una sequenza di istanti di tempo

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$$

- Si definisce **segnale a tempo discreto** una successione di valori associati alla sequenza temporale considerata

$$w_k \triangleq w(t_k)$$

- Se vale che $t_k - t_{k-1} = T_s, \forall k$ allora

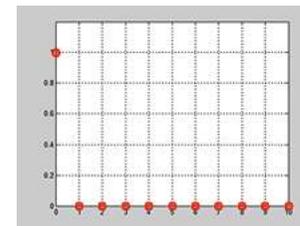
$$w_k = w(kT_s)$$

Alcuni segnali canonici a tempo discreto

Per semplicità in ciò che segue
trascuriamo di indicare
esplicitamente l'intervallo T_s

Impulso unitario

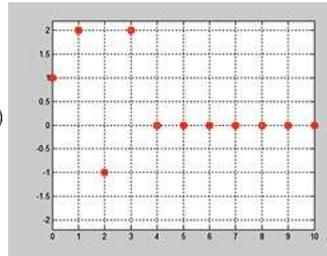
$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases}$$



Impulso traslato $\delta(k-h) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = h \\ 0 & \text{per } k \neq h \end{cases}$

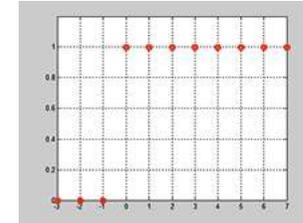
- Una sequenza qualsiasi a tempo discreto può venir sempre espressa come sommatoria di segnali δ opportunamente traslati

$$w(k) = \delta(k) + 2\delta(k-1) - \delta(k-2) + 2\delta(k-3) + \dots$$



Gradino unitario $1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$

- La sequenza $1(k)$ è utile per evidenziare che una sequenza $w(k)$ è identicamente nulla per istanti di tempo negativi



$$w(k) = \hat{w}(k) \cdot 1(k) \iff w(k) = \begin{cases} \hat{w}(k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Segnale esponenziale

$$w(k) = \begin{cases} a^k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = a^k \cdot 1(k) \quad a \in \mathbb{C}$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = a^{kT_s} \cdot 1(kT_s)$$

Rampa unitaria

$$w(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = k \cdot 1(k)$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = k \cdot T_s \cdot 1(kT_s)$$

Polinomio fattoriale di ordine h $f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$

- Si definisce **ricorsivamente**

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(h)}}{h!} \triangleq \begin{cases} \frac{k(k-1) \cdots (k-h+1)}{h!} & \text{per } h > 0, k \geq h \\ 0 & \text{per } h > 0, k < h \end{cases}$$

FA-es Parte 12, 9

• Si ottiene

$$\frac{k^{(1)}}{1!} = k \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(2)}}{2!} = \frac{k(k-1)}{2!} \cdot 1(k)$$

$$= \frac{1}{2} (k^2 - k) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(3)}}{3!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$

$$= \left(\frac{1}{6} k^3 - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k \right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(4)}}{4!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \cdot 1(k)$$

$$= \left(\frac{1}{24} k^4 - \frac{1}{3} k^3 + \frac{11}{24} k^2 - \frac{1}{4} k \right) \cdot 1(k)$$

...

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 12, 10

• la sequenza $f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$

sarà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto!

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k) \longleftrightarrow f(t) = \frac{t^h}{h!} \cdot 1(t)$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 12, 11

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$\frac{k^{(h)}}{h!} = \binom{k}{h} \cdot 1(k)$$

con

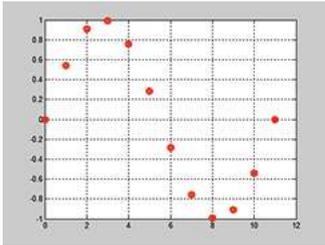
$$\binom{k}{h} = \begin{cases} \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k-h+1)}{h!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } h > 0 \\ k \geq h \end{array} \right] \\ 1 & \left[\text{per } h = 0 \right] \end{cases}$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 12, 12

Segnale sinusoidale

$$w(k) = \begin{cases} \sin(\omega k) & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = \sin(\omega k) \cdot 1(k)$$


Evidenziando il campionamento

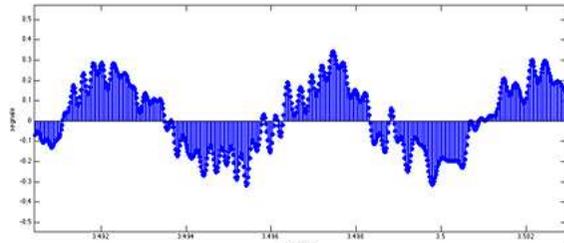
$$w(k T_s) = \sin(\Omega k T_s) \cdot 1(k T_s)$$

$$\Omega T_s = \bar{\omega}$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

Esempi

- segnali elettrici generati da suoni catturati attraverso un microfono (es. persona al telefono), sottoposti a campionamento e digitalizzazione



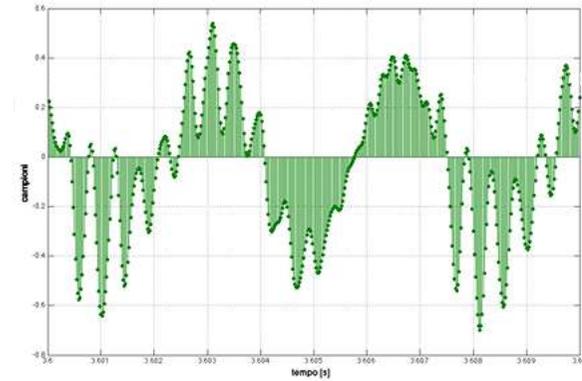
Dave Bowman: "Open the pod bay doors, HAL."
HAL: "I'm sorry, Dave. I'm afraid I can't do that."

[2001: A Space Odyssey (1968)]

durata: 7 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV (16 bit)

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica



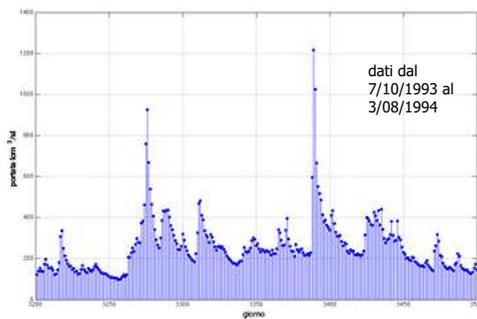
J. Keating: "No matter what anybody tells you, words and ideas can change the world." –
[Dead Poets Society (1989)]

durata: 6 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

- segnali intrinsecamente a tempo discreto, come ad esempio quelli delle cosiddette *serie temporali* (dati meteorologici, geofisici, economici ecc.)



portata media giornaliera del Danubio a Donauwörth, dal 1/1/1985 al 31/12/2004 –
fonte: Università di Würzburg – 7300 campioni (1 campione al giorno)

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Equazioni alle differenze

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Definizione

- A partire dalla sequenza $\{u(k)\}$ $k = 0, 1, 2, \dots$ si vuole elaborare una seconda sequenza discreta $\{y(k)\}$ $k = 0, 1, 2, \dots$
- Il campione generico della sequenza $\{y(k)\}$ viene calcolato nel medesimo istante in cui viene acquisito un nuovo campione di $\{u(k)\}$
- La legge di calcolo del nuovo valore di $y(k)$ è **ricorsiva**: il campione all'istante k viene determinato in funzione di al più tutti i campioni agli istanti precedenti

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(1), y(0), u(k), u(k-1), \dots, u(1), u(0))$$

- Supponiamo ora che il termine generico $y(k)$ dipenda soltanto da un numero finito di valori passati sia della sequenza $\{y(k)\}$ che della sequenza $\{u(k)\}$

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m))$$

- In tal caso l'equazione si dice **equazione alle differenze di ordine n** , dove n è la "distanza temporale" massima tra gli elementi della sequenza incognita, che compaiono nell'equazione.

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m))$$

- Le equazioni alle differenze finite rappresentano l'analogo a tempo discreto delle equazioni differenziali nel caso a tempo continuo.

- Ricapitolando, una **equazione alle differenze finite** è una equazione che ha come **incognita** una **funzione a tempo discreto (una successione o sequenza)**.
- L'equazione alle differenze esprime il **legame** tra la **successione incognita** ed altre **successioni note**, eventualmente assegnando anche opportune condizioni iniziali. Il legame viene espresso tramite una **relazione che lega** tra loro e/o alle successioni note i valori della successione incognita ad istanti discreti di tempo diversi:

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m))$$

- Il termine **equazione alle differenze** deriva dal fatto che è possibile definire le **differenze finite**

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1) \quad \text{Differenza di ordine 1}$$

$$\nabla^2 y(k) = \nabla y(k) - \nabla y(k-1) \quad \text{Differenza di ordine 2}$$

$$\nabla^3 y(k) = \nabla^2 y(k) - \nabla^2 y(k-1) \quad \text{Differenza di ordine 3}$$

...

$$\nabla^n y(k) = \nabla^{n-1} y(k) - \nabla^{n-1} y(k-1) \quad \text{Differenza di ordine } n$$

- I termini $y(k)$, $y(k-1)$ ecc. si possono allora esprimere in funzione delle differenze finite $\nabla^h y(k)$ appena definite [una sorta di rapporti incrementali]

$$y(k) = y(k)$$

$$y(k-1) = y(k) - \nabla y(k)$$

$$y(k-2) = y(k) - 2\nabla y(k) + \nabla^2 y(k)$$

...

- Sostituendo nell'equazione

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m))$$

si ottiene

$$\hat{f}(y(k), \nabla y(k), \nabla^2 y(k), \dots, \nabla^n y(k),$$

$$u(k), \nabla u(k), \nabla^2 u(k), \dots, \nabla^m u(k)) = 0$$

- Le due espressioni sono equivalenti, ma la prima delle due (quella ricorsiva) è quella che verrà utilizzata in questo corso.

Un semplice esempio

- Partiamo dall'equazione alle differenze di ordine 2

$$u(k) = -a_1 u(k-1) - a_2 u(k-2) + b_0 e(k)$$

- Sostituiamo ai termini $u(k-1)$, $u(k-2)$ le espressioni

$$u(k-1) = u(k) - \nabla u(k)$$

$$u(k-2) = u(k) - 2\nabla u(k) + \nabla^2 u(k)$$

- Si ottiene l'equazione equivalente

$$a_2 \nabla^2 u(k) - (a_1 + 2a_2) \nabla u(k) + (a_2 + a_1 + 1) u(k) = b_0 e(k)$$

Osservazioni e definizioni

- Nel caso in cui la funzione $f(\dots)$ sia lineare si ottiene una **equazione lineare alle differenze di ordine n**:

$$y(k) = b_0(k)u(k) + b_1(k)u(k-1) + \dots + b_m(k)u(k-m) + \\ -a_1(k)y(k-1) - a_2(k)y(k-2) - \dots - a_n(k)y(k-n)$$

- Le equazioni lineari alle differenze rappresentano l'analogo delle equazioni differenziali lineari del caso a tempo continuo.

- In generale i coefficienti dell'equazione possono variare, al variare dell'istante di tempo considerato:

$$b_j = b_j(k), a_i = a_i(k)$$

Ancora definizioni

- Se i valori dei coefficienti a_i, b_j sono costanti, si ha un' **equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti**.

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m) + \\ - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n)$$

- Questa **particolare classe** di equazioni alle differenze sarà quella di interesse nel corso.

Come si risolve un' equazione alle differenze, lineare, a coeff. costanti?

- Si può dimostrare che la **soluzione è unica** qualora siano noti i **valori iniziali** della sequenza incognita [ovviamente le altre sequenze che compaiono nell'equazione devono essere note] e l' **istante iniziale** [cioè le condizioni iniziali].
- Per ottenere campione per campione la sequenza incognita è possibile risolvere ricorsivamente l' equazione.
- Non è una tecnica efficiente! Esistono metodi più efficaci! Se ne riparerà nel prosieguo del corso ...

Esempio

- Si vuole risolvere l'equazione

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k)$$

a partire dall'istante $k = 0$, con condizioni iniziali

$$y(k) = 0 \quad \forall k < -2 \quad y(-2) = 0, \quad y(-1) = 0$$

e sequenza "eccitante" data da $u(k) = \delta(k)$

- La sequenza-soluzione risulta essere allora ("sequenza di Fibonacci")

$$y(0) = y(-1) + y(-2) + u(0) = 1 \quad y(1) = y(0) + y(-1) + u(1) = 1$$

$$y(2) = y(1) + y(0) + u(2) = 2 \quad y(3) = y(2) + y(1) + u(3) = 3$$

$$\{y(k)\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$

Esempio (continua...)

- Script in Matlab® per determinare i primi 10 campioni

```
N = 10; % i primi N+1 valori della sequenza soluzione
ym1 = 0; ym2 = 0; % valori iniziali
% y(-1) -> ym1 || y(-2) -> ym2

% preallocazione delle variabili
uk = zeros(N+1,1);
uk(1) = 1; % il primo campione e' pari ad 1, tutti gli altri
sono nulli
y_offset = 2; % due le condizioni iniziali su y
yk = zeros(N+1+y_offset,1); % prealloco anche per le
condizioni iniziali
% (continua...)
```

```

clc
disp('=====');
disp('soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)');
disp('con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)');
fprintf(1, '\n valutati i primi %g valori della soluzione \n',N);
disp('=====');
for k = 0 : N
    % ciclo sugli istanti di tempo per cui
    % si vuole risolvere l'equazione
    % alle differenze
    ik = k+1; % indice per i vettori uk ed yk
    yk(ik+y_offset) = yk(ik+y_offset-1) + ...
                    yk(ik+y_offset-2) + uk(ik);

    messaggio = sprintf('al passo %d valore di y %.2f',...
                        k,yk(ik+y_offset));
    disp(messaggio); % visualizza risultato
end % for
disp('=====');

```

- Risultato visualizzato in Matlab®

```

=====
soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)
con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)

    valutati i primi 10 valori della soluzione
=====
al passo 0 valore di y 1.00
al passo 1 valore di y 1.00
al passo 2 valore di y 2.00
al passo 3 valore di y 3.00
al passo 4 valore di y 5.00
al passo 5 valore di y 8.00
al passo 6 valore di y 13.00
al passo 7 valore di y 21.00
al passo 8 valore di y 34.00
al passo 9 valore di y 55.00
al passo 10 valore di y 89.00
=====

```

Esempio (continua...)

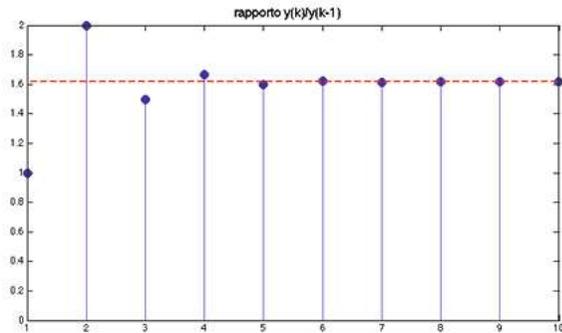
- Quale è il comportamento della sequenza soluzione? Diverge? Converge ad un valore finito?
- Il comportamento da che cosa dipende? Dalle condizioni iniziali? Dal segnale di eccitazione?
- Provare a cambiare le condizioni iniziali ed a risolvere di nuovo in maniera ricorsiva l'equazione...
- Provare ad utilizzare un altro segnale di eccitazione (con ampiezza limitata)...

- ultima parte dello script

```

%--analisi del termine k-esimo della successione--
% viene disegnato l'andamento del rapporto
% y(k)/y(k-1) per k=2,3,...
rapporto_k_kml = yk(y_offset+2:end)./yk(y_offset+1:end-1);
figure('Name','successione di Fibonacci');
stem(rapporto_k_kml,'fill');
title('rapporto y(k)/y(k-1)');
hold on;
Fidia_n = (1+sqrt(5))/2;
plot(ones(size(rapporto_k_kml))*Fidia_n, 'r--');

```



$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \quad u(k) = \delta(k)$$

$$y(-2) = 0, y(-1) = 0 \quad y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

Un altro esempio

- Proviamo a modificare l'equazione alle differenze, in questo modo

$$y(k) = y(k-1) - y(k-2) + u(k)$$

- A parità di condizioni iniziali e di segnale eccitante, come evolve la soluzione stavolta?

$$y(-2) = 0, y(-1) = 0 \quad u(k) = \delta(k)$$

$$y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

$$\{y(k)\} = \{1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, \dots\}$$

Osservazioni

- La formulazione presentata finora per le equazioni alle differenze non è l'unica possibile.

- L'espressione

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), \dots, u(k-m))$$

esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**, che fornisce il valore all'istante attuale della successione incognita $\{y(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{y(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k)\}$

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Esiste anche la possibilità di esprimere le equazioni alle differenze tramite una **relazione ricorsiva in avanti**

$$y(k+n) = g(y(k+n-1), \dots, y(k), u(k+m), \dots, u(k))$$

- Questa relazione fornisce allora un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{y(k)\}$ [in particolare n passi nel futuro, se n è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{y(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k)\}$.

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

Ancora altre osservazioni

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva "all'indietro", in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all'istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k) = f(y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), \dots, u(k-m))$$

$$\{u(k)\} \text{ nota } \forall k \geq 0 \quad \{y(k)\} \text{ incognita } \forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(-n), y(-n+1), y(-n+2), \dots, y(-1)$$

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva "in avanti", in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all'istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k+n) = g(y(k+n-1), \dots, y(k), u(k+m), \dots, u(k))$$

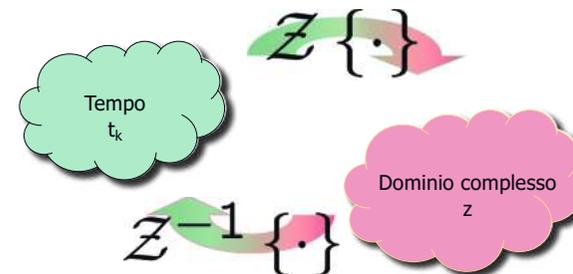
$$\{u(k)\} \text{ nota } \forall k \geq 0 \quad \{y(k)\} \text{ incognita } \forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(0), y(1), y(2), \dots, y(n-1)$$

La Z-trasformata

Definizione, proprietà, trasformate elementari
Antitrasformazione
Teoremi

La Z-trasformata è un OPERATORE funzionale



La Z-trasformata: definizione

La Z-trasformata della successione $\{x(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$
 $0, \forall k < 0$

è la funzione di variabile complessa $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$

Raggio di convergenza: tipicamente la serie che definisce la trasformata converge al di fuori di un cerchio nel piano della variabile complessa z :

$$|z| > R, \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Nel caso di segnali campionati:

- Se il segnale a tempo discreto è stato generato per campionamento, si definisce la Z-trasformata della successione in maniera analoga :

$$\{x(kT_s), k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$0, \forall k < 0$$



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)z^{-k}$$

Notazioni ed osservazioni

- In generale non viene esplicitamente indicato l'intervallo di campionamento T_s con il quale è stata **eventualmente** ottenuta la sequenza $x(kT_s)$ ma semplicemente la si indica con $x(k)$
- Nella maggioranza dei casi, le Z-trasformate che considereremo saranno funzioni polinomiali (in particolare frazioni con polinomi a numeratore e denominatore).
- L'espressione di una Z-trasformata (nei casi di nostro interesse) può essere espressa tramite potenze di z oppure di z^{-1}

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{4 + 6z^{-1} + 8z^{-2}} \longleftrightarrow X(z) = \frac{z^2 - 2z}{4z^2 + 6z + 8}$$

- Dal punto di vista algebrico sono equivalenti. L'unica difficoltà sta nel definire zeri e poli, perché nelle due notazioni sono differenti [zeri e poli sono le radici dei polinomi a numeratore ed a denominatore]. Per poli e zeri useremo sempre la notazione con potenze di z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \implies \begin{cases} \text{Zeri: radici di } N(z) \\ \text{Poli: radici di } D(z) \end{cases}$$

- Per ammettere Z-trasformata nel modo in cui è stata definita, le sequenze che consideriamo devono essere **causali**, ovvero

$$x(k) \equiv 0, \quad \forall k < 0$$

Esempio

- Consideriamo la Z-trasformata

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)}$$

- È immediato determinare zeri e poli dell'espressione analizzata.
- Se la Z-trasformata fosse espressa tramite potenze di z^{-1} , lo zero in $z = 0$ non sarebbe più così facilmente individuabile

$$X(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Proprietà della Z-trasformata

- **Linearità**

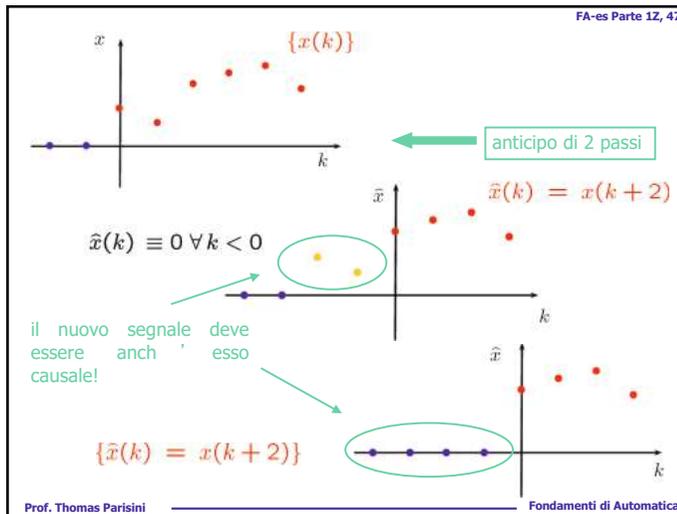
$$\mathcal{Z}[c_1 f(k) + c_2 g(k)] = c_1 \mathcal{Z}[f(k)] + c_2 \mathcal{Z}[g(k)]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}[x(k + 1)] = z[X(z) - x(0)]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di m campioni**

$$\mathcal{Z}[x(k + m)] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k} \right]$$

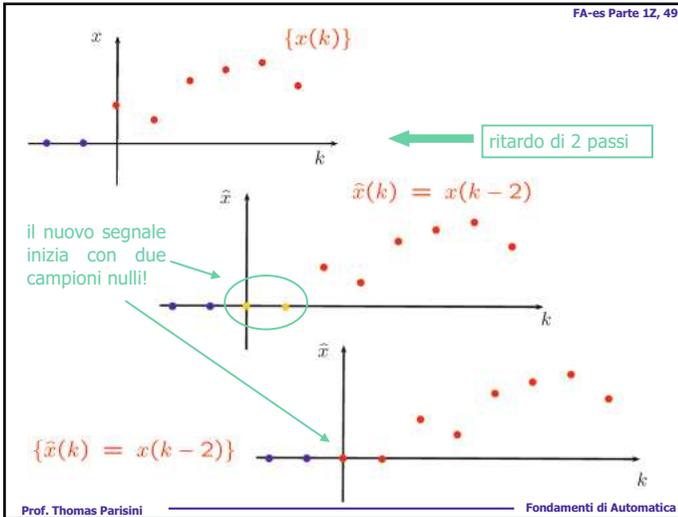


- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}[x(k - 1)] = z^{-1} X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

$$\mathcal{Z}[x(k - m)] = z^{-m} X(z)$$



FA-es Parte 1Z, 50

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{Z}\{a^k x(k)\} = X(a^{-1}z)$$
- **Differenziazione complessa**

$$\mathcal{Z}\{k x(k)\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 51

- **Prodotto di convoluzione**

$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$

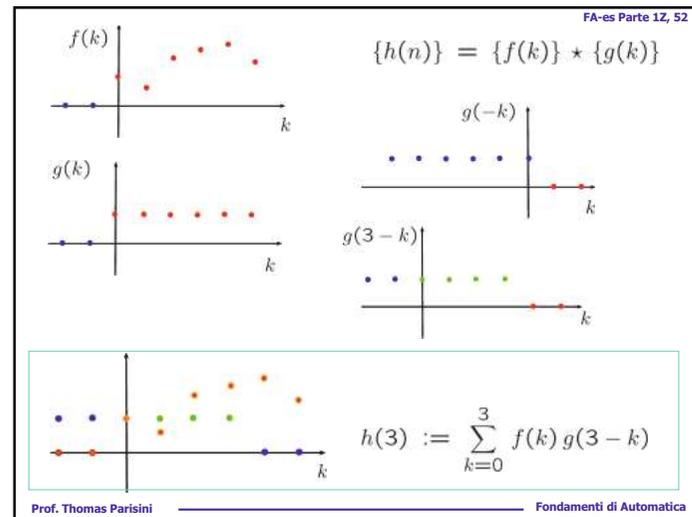
$$h(n) := \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)g(n-k)$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^n f(n-k)g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)g(k)$$

I segnali sono causali.

$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = F(z)G(z)$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica



- **Teorema del valore iniziale**

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata,

se esiste **finito** $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ allora

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{k \rightarrow 0} x(k) = x(0)$$

- **Teorema del valore finale**

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata $X(z)$,

se **tutti i poli** di $X(z)$ **hanno modulo minore di 1**, escluso al più un polo semplice in $z = 1$, allora esiste finito $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) X(z)]$$

Esempio: applicazione dei teoremi

- Si consideri la Z-trasformata $Y(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)}$

- Sfruttando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, determinare:

$$y(0) = ? \quad y(1) = ? \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = ?$$

- Per il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)} = 0$$

- Applicando la regola dell'anticipo ed ancora il teorema del valore iniziale si ottiene poi:

$$y(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[Y(z) - y(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(2z+1)}{(z-1)(3z+1)} = \frac{2}{3}$$

- Applicando infine il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)} = \frac{3}{4}$$

Esempio: soluzione di una equazione alle differenze

FA-es Parte 1Z, 57

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k+1) = 3y(k) + y(k-1) + u(k) \quad y(k) \equiv 0 \forall k < 0$$

Applicando la Z-trasformata ad ambo i membri, per le proprietà viste si ottiene

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^2 y(0)}{z^2 - 3z - 1}}_{\text{dipende dalle condizioni iniziali (soluzione libera)}} + \underbrace{\frac{z}{z^2 - 3z - 1} U(z)}_{\text{dipende dalla sequenza d'ingresso (soluzione forzata)}}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Trasformate notevoli

FA-es Parte 1Z, 58

- **Impulso unitario**

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

- **Scalino unitario**

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \stackrel{\text{Serie geometrica}}{=} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

- **Rampa**

FA-es Parte 1Z, 59

$$x(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{-k} \stackrel{\text{Differenziazione complessa}}{=} -z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

- **Segnale polinomiale**

FA-es Parte 1Z, 60

$$x(k) = \begin{cases} k^n & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{z-1} \right]$$

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n z^{-k} \stackrel{\text{Differenziazione complessa } n \text{ volte}}{=} \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{z-1} \right]$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Dimostrazione (cenni – continua)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(k)\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{k(k(k(\dots(k \cdot 1))))}_{n \text{ volte}} z^{-k} \\ &= \underbrace{\left(-z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} \left(\dots \left(-z \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1}\right]\right)\right)\right)\right)}_{n \text{ volte l'operatore } -z \frac{d}{dz}} \end{aligned}$$

Esempio

$$\mathcal{Z}\{k^2 \cdot 1(k)\} = -z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1}\right)\right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

● Potenza con esponente intero

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-a)}$$

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\{a^k 1(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a^k}_{\frac{z}{a} \triangleq \eta} z^{-k} = \frac{\eta}{(\eta-1)} = \frac{z}{(z-a)}$$

● Esponenziale

$$x(k) = \begin{cases} e^{ak} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-e^a)}$$

● Segnali sinusoidali

$$x(k) = \sin(\omega k) 1(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z \sin \omega}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)}$$

$$\sin(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} \quad \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

$$x(k) = \cos(\omega k) 1(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - z \cos \omega}{(z^2 - 2z \cos \omega + 1)}$$

● Segnali "composti"

$$x(k) = a^k \sin(\omega k) 1(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{az \sin \omega}{(z^2 - 2az \cos \omega + a^2)}$$

$$x(k) = a^k \cos(\omega k) 1(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - az \cos \omega}{(z^2 - 2az \cos \omega + a^2)}$$

● Polinomio fattoriale di ordine n

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} 1(k)$$

con

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(n)}}{n!} \triangleq \begin{cases} \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)}{n!} & \text{per } n > 0, k \geq n \\ 0 & \text{per } n > 0, k < n \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$x(k) = \binom{k}{n} \cdot 1(k) \quad \mathcal{Z}[x(k)] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

con

$$\binom{k}{n} = \begin{cases} \frac{k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)}{n!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } n > 0 \\ k \geq n \end{array} \right] \\ 1 & [\text{per } n = 0] \end{cases}$$

Cenni di dimostrazione

$$x(k) = \binom{k}{1} \cdot 1(k) = k \cdot 1(k) \quad \rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \binom{k}{2} \cdot 1(k) = \frac{1}{2}(k^2 - k) \cdot 1(k)$$



$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(k)\} &= \frac{1}{2} [\mathcal{Z}\{k^2 \cdot 1(k)\} - \mathcal{Z}\{k \cdot 1(k)\}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k) &= \binom{k}{3} \cdot 1(k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k) \\ &= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k \right) \cdot 1(k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(k)\} &= \frac{1}{6} \mathcal{Z}\{k^3 \cdot 1(k)\} - \frac{1}{2} \mathcal{Z}\{k^2 \cdot 1(k)\} + \frac{1}{3} \mathcal{Z}\{k \cdot 1(k)\} \\ &= \frac{1}{6} \frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4} - \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{z}{(z-1)^4} \end{aligned}$$

● **Polinomio fattoriale di ordine n pesato da potenza con esponente intero**

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} 1(k)$$

$$\mathcal{Z} \left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} \right] = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z} \left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} \right] = \frac{1}{a^n} \mathcal{Z} \left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^k \right]$$

Traslazione in frequenza
Polinomio fattoriale

$$\mathcal{Z} \left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^k \right] = \frac{1}{a^n} \frac{z a^{-1}}{(z a^{-1} - 1)^{n+1}} = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

La Z-antitrasformata

La Z-antitrasformata della funzione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

è definita come la sequenza

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z) dz$$

in cui Γ è una curva chiusa contenuta nella regione di convergenza.

Si consideri una classe particolare di funzioni $X(z)$, ovvero le funzioni

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}$$

dove assumiamo $m \leq n$ ovvero

$$X(z) = K \frac{(z-z_1)^{m_1} (z-z_2)^{m_2} \dots (z-z_r)^{m_r}}{(z-p_1)^{n_1} (z-p_2)^{n_2} \dots (z-p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = m,$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$$

$$z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C} \text{ zeri,}$$

$$p_1, \dots, p_q \in \mathbb{C} \text{ poli}$$

Tecniche di Z anti-trasformazione

● Tecniche numeriche:

- "long-division"
- metodo "computazionale"

● Tecniche analitiche

- espansione in fratti semplici

Tecnica della “Long-division” o divisione ripetuta

- Si tratta di una tecnica semplice che permette di determinare **termine a termine** gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$
- È opportuno esprimere $X(z)$ in funzione di potenze negative z^{-1}, z^{-2}, \dots

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

Si esegue la divisione ripetuta del polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore:

$$\begin{array}{r|l} 10z^{-1} + 5z^{-2} & 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \\ \hline -10z^{-1} + 12z^{-2} - 2z^{-3} & 10z^{-1} + 17z^{-2} + \dots \\ \hline & 17z^{-2} - 2z^{-3} \end{array}$$

- Il risultato è una combinazione lineare di potenze negative

$$10z^{-1} + 17z^{-2} + \dots$$

- Ricordando che, per definizione, si ha

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

per semplice confronto si ottiene la sequenza

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 10 \\ x(2) &= 17 \\ &\dots \end{aligned}$$

“Long division”: riassumendo

- Metodo numerico e ricorsivo: fornisce i **valori** numerici della successione **termine a termine**, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.
- Si basa su operazioni di divisione di polinomi: è una tecnica **semplice** dal punto di vista **computazionale (vantaggio)**.

Metodo "computazionale"

Si tratta di un'altra tecnica semplice che permette di determinare termine a termine gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

Idea: metto in evidenza il termine "1", che è la Z-trasformata di ...

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot 1 = \frac{N(z)}{D(z)} U(z)$$



$$D(z) X(z) = N(z) U(z)$$

Utilizzando le proprietà viste per la Z-trasformata si perviene all'equazione alle differenze:

$$\begin{aligned} \bar{a}_n x(k+n) + \bar{a}_{n-1} x(k+n-1) + \dots + \bar{a}_0 x(k) = \\ \bar{b}_m u(k+m) + \bar{b}_{m-1} u(k+m-1) + \dots + \bar{b}_0 u(k) \end{aligned}$$

Non rimane che determinare le condizioni iniziali per risolvere termine a termine l'equazione alle differenze.

I campioni così determinati sono i valori della successione che è la Z-antitrasformata cercata.

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}$$

$$\rightarrow (z^2 - 1.2z + 0.2) X(z) = (10z + 5) U(z)$$

$$\rightarrow x(k+2) - 1.2x(k+1) + 0.2x(k) = 10u(k+1) + 5u(k)$$

- $U(z) = 1 \rightarrow u(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

- $x(k) = 0, \forall k < 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow k = -2 & \rightarrow x(0) = 0 \\ \rightarrow k = -1 & \rightarrow x(1) = 10 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Metodo "computazionale": riassumendo

- Metodo **numerico** e **ricorsivo**: fornisce i valori della successione termine a termine, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.
- Si basa sulla supposizione che la Z-trasformata oggetto di studio rappresenti un'equazione alle differenze con come ingresso un segnale ad impulso discreto, centrato nell'origine: è una tecnica **semplice** dal punto di vista computazionale (**vantaggio**).

Espansione in fratti semplici

- Si tratta di una **tecnica analitica** per determinare la sequenza

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

- Si esprime $X(z)$ come somma di un numero finito di termini elementari di cui si sa determinare la \mathcal{Z} -antitrasformata

- Il primo passo consiste nell'aggiungere un termine z al denominatore (ciò si può sempre fare):

$$X(z) \quad \rightarrow \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \dots + \frac{C_n}{z-p_n}$$

In generale:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{11}}{(z-p_1)} + \dots + \frac{C_{1n_1}}{(z-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{C_{21}}{(z-p_2)} + \dots + \frac{C_{2n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \dots$$

$$\frac{C_{q1}}{(z-p_q)} + \dots + \frac{C_{qn_q}}{(z-p_q)^{n_q}} \quad \blacksquare$$

$$C_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{z \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{dz^{(n_i - j)}} \frac{X(z)}{z} (z - p_i)^{n_i} \right\}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{i,j} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{C_{i,j} z}{(z-p_i)^j} \right]$$



$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{C_{i,j} z}{(z-p_i)^j} \right] = C_{i,j} \frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!} p_i^{k-j+1} 1(k)$$



$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{i,j} C_{i,j} \frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!} p_i^{k-j+1} 1(k)$$

Caso in cui tutti i poli sono distinti:

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{i=1}^n \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{C_i z}{(z-p_i)} \right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{C_i z}{(z-p_i)} \right] = C_i p_i^k 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \sum_{i=1}^n C_i p_i^k 1(k)$$

$$C_i = \lim_{z \rightarrow p_i} \left\{ \frac{X(z)}{z} (z - p_i) \right\}$$

Esempio: poli tutti distinti

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

$$\rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{10}{z-0.2} = 12.5$$

$$C_2 = \lim_{z \rightarrow 0.2} \frac{10}{z-1} = -12.5$$

$$X(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2}$$

$$\rightarrow x(k) = 12.5 \cdot 1(k) - 12.5 \cdot 0.2^k 1(k)$$

Esempio: poli multipli

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 2.7z^2 + 2.4z - 0.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-0.7} + \frac{c_{2,1}}{z-1} + \frac{c_{2,2}}{(z-1)^2}$$

$$c_1 = \left[(z-0.7) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0.7} = 11, \bar{1}$$

$$c_{2,2} = \left[(z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \right]_{z=1} = 3, \bar{3}$$

$$c_{2,1} = \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{X(z)}{z} \right] \right\}_{z=1} = -11, \bar{1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{11, \bar{1}}{z-0.7} - \frac{11, \bar{1}}{z-1} + \frac{3, \bar{3}}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{11, \bar{1}z}{z-0.7} - \frac{11, \bar{1}z}{z-1} + \frac{3, \bar{3}z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \left[11, \bar{1} (0.7)^k + 3, \bar{3}k - 11, \bar{1} \right] 1(k)$$

Espansione in fratti semplici: riassumendo

- Metodo **analitico**: fornisce direttamente la **forma chiusa** della soluzione (**vantaggio**)

$$X(z) \iff \{x(k)\}$$

- Si basa su tecniche d'analisi e proprietà di funzioni di variabile complessa: è una **tecnica "pesante"** dal punto di vista computazionale (**svantaggio**).

Analisi qualitativa di una Z-Trasformata

- Assegnata una trasformata $X(z)$ che cosa si può affermare, in **maniera qualitativa**, in merito all'andamento del segnale $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$?
- Ad esempio: in quali condizioni $x(k)$ sarà un segnale costante, oppure divergente, oppure tenderà a 0?
- L'evoluzione temporale del segnale $x(k)$ può essere ricavata, in modo qualitativo, analizzando i poli della corrispondente trasformata $X(z)$.

Analisi qualitativa: poli semplici

Verranno considerate le trasformate elementari:

- $X(z) = \frac{z}{z-a} \quad a \in \mathbb{R}$

- $X(z) = \frac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \quad a, \omega \in \mathbb{R}$

Poli reali semplici:

- Il termine elementare è $X(z) = \frac{z}{z-a} \quad a \in \mathbb{R}$

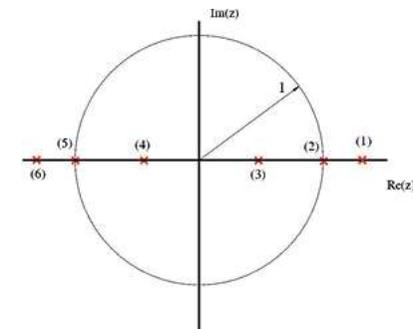
al quale corrisponde la sequenza elementare

$$x(k) = a^k 1(k), \quad k \geq 0$$

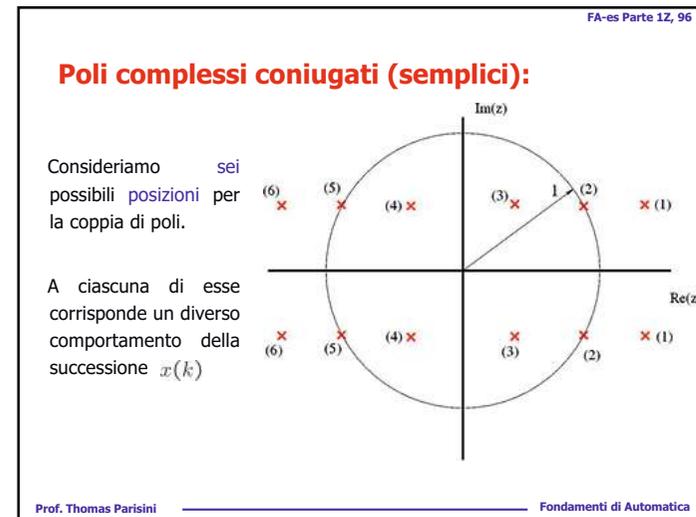
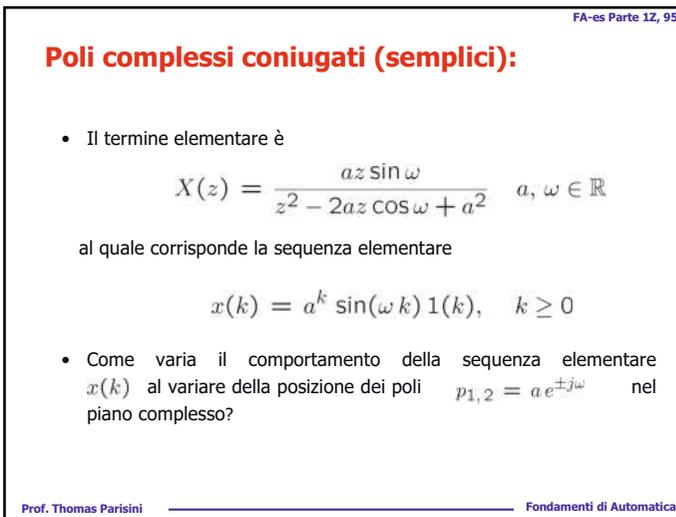
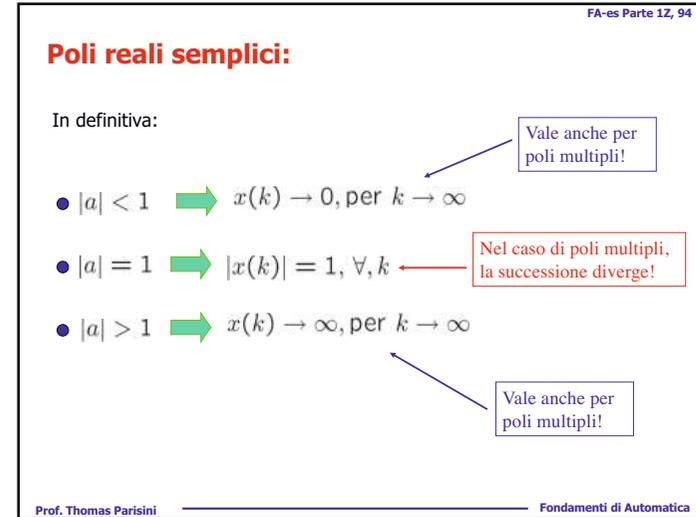
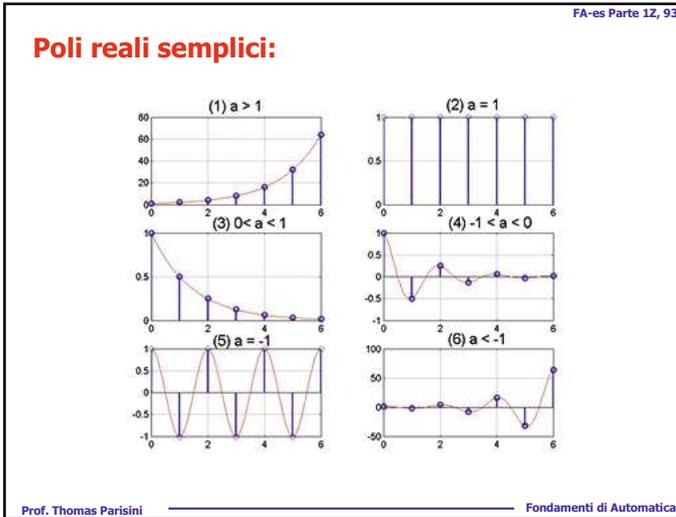
- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

Poli reali semplici:

Consideriamo **sei** possibili **posizioni** per il polo p .



A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(k)$



FA-es Parte 1Z, 97

Poli complessi coniugati (semplici):

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 98

Poli complessi coniugati (semplici):

In definitiva:

- $|p_{1,2}| < 1 \rightarrow x(k) \rightarrow 0, \text{ per } k \rightarrow \infty$ Vale anche per poli multipli!
- $|p_{1,2}| = 1 \rightarrow |x(k)| \text{ limitato, } \forall k$ Nel caso di poli multipli, la successione diverge!
- $|p_{1,2}| > 1 \rightarrow x(k) \rightarrow \infty, \text{ per } k \rightarrow \infty$ Vale anche per poli multipli!

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 99

Poli multipli: poli reali

- Il termine elementare è

$$X(z) = C \frac{z}{(z-a)^n} \quad a \in \mathbb{R}, \quad n > 1$$
- al quale corrisponde la sequenza elementare

$$x(k) = C \binom{k}{n-1} a^{k-n+1} 1(k)$$
- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 100

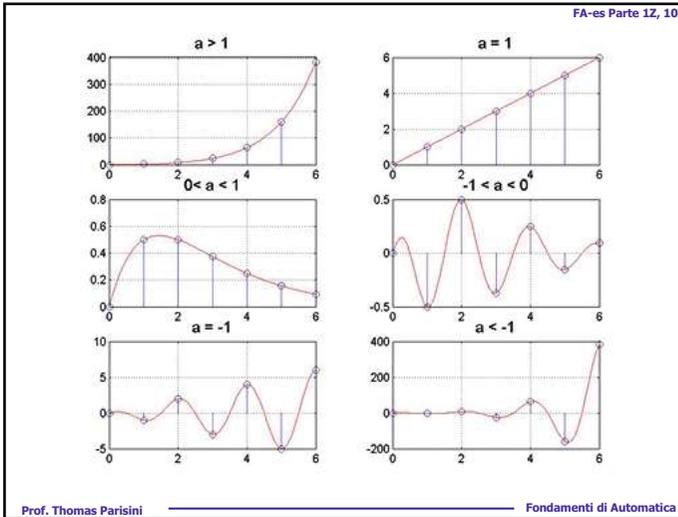
- Ricordando l'espressione del polinomio fattoriale è possibile scrivere

$$x(k) = C \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+2)}{(n-1)!} a^{k-n+1} 1(k)$$
- ovvero

$$x(k) = \frac{C}{(n-1)!} \underbrace{[k^{n-1} + \alpha_1 k^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} k]}_{p(k)} a^{k-n+1} 1(k)$$

Polinomio di grado (n-1) in k

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica



FA-es Parte 1Z, 102

Poli reali multipli:

In definitiva:
$$x(k) = \frac{C}{(n-1)!} [p(k)] a^{k-n+1} 1(k)$$

- $|a| < 1$ → $x(k) \rightarrow 0$, per $k \rightarrow \infty$
- $|a| = 1$ → $x(k) \rightarrow \infty$, per $k \rightarrow \infty$
- $|a| > 1$ → $x(k) \rightarrow \infty$, per $k \rightarrow \infty$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 103

Poli multipli: poli complessi coniugati

- Il termine elementare è

$$X(z) = C \frac{z}{(z-a)^n} + C^* \frac{z}{(z-a^*)^n} \quad a, C \in \mathbb{C}, \quad n > 1$$

con $a = \rho e^{j\theta}$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 104

$$x(k) = C \binom{k}{n-1} a^{k-n+1} 1(k) + C^* \binom{k}{n-1} a^{*k-n+1} 1(k)$$

$$= \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} [\Re(C) (e^{j(k-n+1)\theta} + e^{-j(k-n+1)\theta}) + j \Im(C) (e^{j(k-n+1)\theta} - e^{-j(k-n+1)\theta})] 1(k)$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

$$x(k) = 2 \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} \{ \Re(C) \cos [(k-n+1)\theta] + \\ - \Im(C) \sin [(k-n+1)\theta] \} 1(k)$$

Ponendo

$$H = \frac{2|C|}{(n-1)!} \quad \Phi = \arctan \left(\frac{\Im(C)}{\Re(C)} \right)$$

si ottiene infine

$$x(k) = H \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} \cos [(k-n+1)\theta + \Phi] 1(k)$$

Poli complessi multipli:

In definitiva: $x(k) = H \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} \cos [(k-n+1)\theta + \Phi] 1(k)$

- $|a| < 1$ $\rightarrow x(k) \rightarrow 0$, per $k \rightarrow \infty$
- $|a| = 1$ $\rightarrow x(k) \rightarrow \infty$, per $k \rightarrow \infty$
- $|a| > 1$ $\rightarrow x(k) \rightarrow \infty$, per $k \rightarrow \infty$

Analisi qualitativa: conclusioni

- Per **poli** con **modulo inferiore ad 1**: la successione elementare corrispondente **converge** sempre a **0**.
- Per **poli** di **modulo unitario**: se poli **semplici**, la successione elementare si mantiene **limitata**, altrimenti **diverge**.
- Per **poli** di **modulo maggiore di 1**: la successione elementare corrispondente **diverge sempre**.

Interpretazione operatoriale di $\mathcal{Z}\{\cdot\}$

- Sia data la sequenza $v(t)$ con trasformata $V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t-1)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di un passo) ha trasformata $z^{-1}V(z)$
- Infatti:

$$v(t) = 0, t < 0$$

$$\rightarrow w(0) = 0, w(1) = v(0) = 0, w(2) = v(1), \dots$$

$$W(z) = 0 + v(0)z^{-1} + v(1)z^{-2} + \dots + v(t-1)z^{-t} + \dots \\ = z^{-1}[v(0) + v(1)z^{-1} + \dots + v(t-1)z^{-t+1} + \dots] \\ = z^{-1}V(z)$$

- Analogamente $w(t) = v(t-2)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di due passi) ha trasformata $z^{-2}V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t+1)$ (sequenza $v(t)$ anticipata di un passo) ha trasformata $z[V(z) - v(0)]$

- Infatti:

$$w(0) = v(1), w(1) = v(2), \dots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= v(1) + v(2)z^{-1} + \dots + v(t+1)z^{-t} + \dots \\ &= z[v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots + v(t)z^{-t} + \dots] \\ &= z[v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots + v(t)z^{-t} + \dots] - zv(0) \\ &= z[V(z) - v(0)] \end{aligned}$$

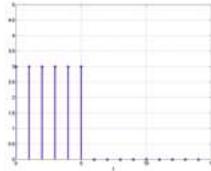
Quindi:

- Gli operatori z e z^{-1} possono essere visti come operatori di **anticipo** e **ritardo** rispettivamente
- In generale z^k e z^{-k} possono essere visti come operatori di anticipo e ritardo rispettivamente di k passi

Esempio

Si consideri il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$



$$\hookrightarrow v(t) = 3 \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t-6)$$

$$\text{Ma } \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\hookrightarrow V(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{3z^{-6}z}{z-1} = \frac{3(z^6 - 1)}{z^5(z-1)}$$

Ulteriori considerazioni su $X(z^{-1})$ vs $X(z)$

- Torniamo alle possibili notazioni per una Z-Trasformata: a potenze di z oppure a potenze di z^{-1} .

$$X(z^{-1}) = \frac{1 - 2z^{-1}}{4 + 6z^{-1} + 8z^{-2}} \longleftrightarrow X(z) = \frac{z^2 - 2z}{4z^2 + 6z + 8}$$

- Appliciamo il “metodo computazionale” per ottenere un’equazione alle differenze che ci permetta di ricavare ricorsivamente, campione dopo campione, il segnale $\{x(k)\}$.

- Otterremo due equazioni alle differenti scritte in maniera diversa a seconda della Z-trasformata da cui partiamo ...
- Partendo dall' **espressione in potenze di z^{-1}** si ottiene

$$\begin{aligned} (4 + 6z^{-1} + 8z^{-2}) X(z) &= (1 - 2z^{-1}) U(z) \\ 4x(k) + 6x(k-1) + 8x(k-2) &= u(k) - 2u(k-1) \\ u(k) &= \delta(k) \end{aligned}$$

- Il **valore all'istante corrente** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione di valori passati del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di **valori all'istante presente** e nel **passato** dell' ingresso (che è un impulso unitario nell' origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z^{-1} può venire ricondotta ad un' equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva "all' indietro"**
- $X(z^{-1})$ è antitrasformabile calcolando il valore all' istante attuale della successione incognita $\{x(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{x(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$
- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali *elaborazione di segnali campionati* (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Partendo dall' **espressione in potenze di z** si ottiene

$$\begin{aligned} (4z^2 + 6z + 8) X(z) &= (z^2 - 2z) U(z) \\ 4x(k+2) + 6x(k+1) + 8x(k) &= u(k+1) - 2u(k) \\ u(k) &= \delta(k) \end{aligned}$$

- Il **valore nel futuro** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione di valori futuri ed all'istante corrente del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di **valori all'istante presente** e nel **futuro** dell' ingresso (che è un impulso unitario nell' origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z può venire ricondotta ad un' equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva in avanti**
- $X(z)$ è antitrasformabile calcolando un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{x(k)\}$ [in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell' equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all' istante attuale sia della sequenza $\{x(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$
- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di *previsione*, cioè modelli matematici utilizzati per predire l' evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

$X(z^{-1})$ vs $X(z)$: concludendo

- Si noti che le due Z-trasformate, così come le due equazioni alle differenze a cui si arriva col metodo computazionale, descrivono il medesimo segnale.
- Analizzeremo ulteriori proprietà caratteristiche della notazione $X(z^{-1})$ e di quella $X(z)$ quando studieremo i sistemi dinamici a tempo discreto (Parte 2) ed in particolare le Funzioni di Trasferimento (Parte 4).

Teorema del valore iniziale: applicazione e proprietà della Z-Trasformata

Data la Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

con $m \leq n$, vale la proprietà

$$\begin{cases} m = n & f(0) = \frac{b_m}{a_n} \\ m < n & \begin{cases} f(0) = f(1) = \dots = f(n-m-1) = 0 \\ f(n-m) = \frac{b_m}{a_n} \end{cases} \end{cases}$$

Per dimostrare la proprietà, si utilizza il teorema del valore iniziale:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = f(0)$$

1° caso: $m = n$

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &\stackrel{\downarrow}{=} \frac{b_m}{a_n} \end{aligned}$$

2° caso: $m < n$

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = 0$$

$$m = O(N(z)) < O(D(z)) = n$$

Per determinare il secondo campione della sequenza utilizziamo il teorema del valore iniziale e la proprietà di anticipo nel tempo

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z [F(z) - f(0)]$$

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} = 0$$

$$m < n - 1 \quad \longrightarrow \quad m + 1 = O(zN(z)) < O(D(z)) = n$$

Si continua in maniera analoga:

$$f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 [F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}]$$

$$f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} = 0$$

$$m < n - 2 \quad \longrightarrow \quad m + 2 = O(zN(z)) < O(D(z)) = n$$

Fino a quando? Sia $m = n - h$

$$f(h-1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{h-1} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{h-2} f(k)z^{-k} \right]$$

$$f(h-1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{h-1} \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} = 0$$

$$m + (n - m - 1) = O(zN(z)) < O(D(z)) = n$$

Finalmente:

$$f(n-m) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-m-1} f(k)z^{-k} \right]$$

$$f(n-m) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n-m} \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{b_m}{a_n}$$

$$m + (n - m) = O(zN(z)) = O(D(z)) = n$$

Ancora considerazioni e proprietà: sequenza ritardata e condizioni iniziali

- Abbiamo già visto che, data una sequenza

$$\{x(k)\}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x(k) \equiv 0 \quad \forall k < 0$$

la Z-trasformata della sequenza $\{y(k)\}$ ritardata di m istanti di tempo rispetto alla sequenza originaria, è data da

$$y(k) = x(k - m) \quad k \in \mathbb{Z}$$



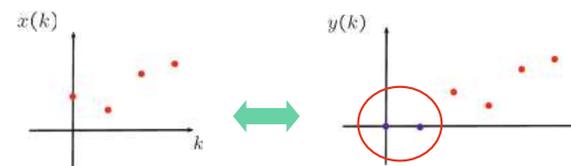
$$\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[x(k - m)] = z^{-m} X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}[x(k - 1)] = z^{-1} X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

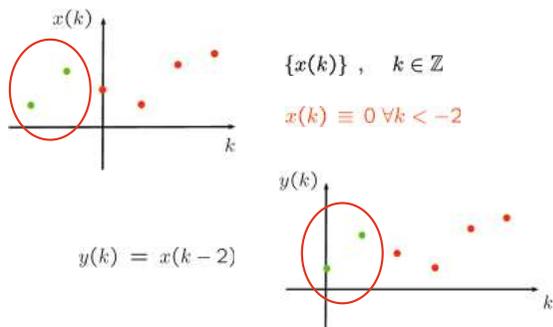
$$\mathcal{Z}[x(k - m)] = z^{-m} X(z)$$



$$\{x(k)\}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x(k) \equiv 0 \quad \forall k < 0$$

$$y(k) = x(k - 2)$$

● **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale**



Come si tiene conto di quei campioni "aggiuntivi"?

● **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale**

Data la sequenza

$$\{x(k)\}, k \in \mathbb{Z}$$

che ammette **campioni non nulli (IN NUMERO FINITO)** anche per istanti di tempo negativi, si costruisce la sequenza ritardata

$$y(k) = x(k-m) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tra le z-trasformate delle sequenze vale la relazione

$$Y(z) = z^{-m} X(z) + z^{-m} \left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p) z^{-p} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(k)] &= \mathcal{Z}[x(k-m)] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m) z^{-k} = \\ &= z^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m) z^{-(k-m)} \right\} = \\ &= z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p) z^{-p} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p) z^{-p} \right\} = \end{aligned}$$

$k-m \triangleq p$

$$\begin{aligned} z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p) z^{-p} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p) z^{-p} \right\} = \\ z^{-m} X(z) + z^{-m} \left\{ \sum_{p=-m}^{-1} x(p) z^{-p} \right\} = Y(z) \end{aligned}$$

La relazione appena trovata è utile per trasformare le equazioni alle differenze "all' indietro"

$$u(k) = f(e(k), \dots, e(k-m); u(k-1), \dots, u(k-n))$$

$$\{e(k)\} \text{ nota } \forall k \geq 0 \quad \text{incognita } \{u(k)\}, \quad k \geq 0$$

$$\text{c.i. } \iff u(-n), u(-n+1), \dots, u(-1)$$

Un esempio

- Consideriamo l' equazione alle differenze

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = u(k)$$

con condizioni iniziali date da

$$x(-2) = 3 \quad x(-1) = 12$$

e con ingresso (sequenza forzante nota) pari a

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

- Vogliamo risolvere l' equazione facendo uso della Z-trasformata.

- La sequenza forzante può essere riscritta nel modo seguente:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

$$u(k) = 0.5 \cdot [(-1)^k + 1] \cdot 1(k)$$

- La sua Z-trasformata è allora

$$U(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1} \right] = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

- In base alla regola descritta nella slide #110. e segg., applicando la Z-trasformata all' equazione alle differenze si ottiene

$$X(z) - 3[z^{-1}X(z) + x(-1)] + 2[z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)] = U(z)$$

$$X(z) = \frac{z[(3z-2)x(-1) - 2zx(-2)]}{z^2 - 3z + 2} + \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Esercizi sulla Z-Trasformata

Z-antitrasformata

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{-0.4 z^2 + 1.08 z}{(z + 0.5) (z - 0.3)^2}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $F(z)$.

$$F(z) = \frac{-0.4 z^2 + 1.08 z}{(z + 0.5) (z - 0.3)^2}$$



$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.4 z + 1.08}{(z + 0.5) (z - 0.3)^2}$$



Sviluppo in fratti semplici

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z + 0.5} + \frac{C_{2,1}}{z - 0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z - 0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z + 0.5} + \frac{C_{2,1}}{z - 0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z - 0.3)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \rightarrow -0.5} (z + 0.5) \frac{F(z)}{z}$$

$$C_{1,1} = \left. \frac{-0.4 z + 1.08}{(z - 0.3)^2} \right|_{z = -0.5} = 2$$

Analogamente

$$C_{2,2} = \left. \frac{-0.4 z + 1.08}{z + 0.5} \right|_{z = +0.3} = 1.2$$

FA-es Parte 1Z, 137

$$F(z) = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \rightarrow 0.3} \frac{d}{dz} \left[\frac{F(z)}{z} (z-0.3)^2 \right]$$

$$C_{2,1} = \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{F(z)}{z} (z-0.3)^2 \right] \right|_{z=0.3} = -2$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 138

In definitiva

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z+0.5} + \frac{-2}{z-0.3} + \frac{1.2}{(z-0.3)^2}$$

$$F(z) = 2 \frac{z}{z+0.5} - 2 \frac{z}{z-0.3} + 4 \frac{0.3z}{(z-0.3)^2}$$

$(-0.5)^k$ $(0.3)^k$ $k(0.3)^k$

$$f(k) = \left[2 \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \left(\frac{3}{10}\right)^k + 4k \left(\frac{3}{10}\right)^k \right] \cdot 1(k)$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 139

$$F(z) = \frac{-0.4z^2 + 1.08z}{(z+0.5)(z-0.3)^2}$$

$$f(k) = \left[2 \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2 \left(\frac{3}{10}\right)^k + 4k \left(\frac{3}{10}\right)^k \right] \cdot 1(k)$$

Osservazioni:

- la differenza di grado tra il polinomio a denominatore di $F(z)$ e quello al numeratore è pari ad 1
 - il primo campione della successione $f(k)$ è nullo!
- I primi campioni della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \left\{ 0, -\frac{2}{5}, \frac{26}{25}, \frac{1}{50}, \frac{149}{625}, \dots \right\}$$

Proposta: ritrovare i primi 5 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 140

Esercizio 2

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$X(z) = \frac{0.1(z+1)z}{(z-1)^2(z-0.6)}$$

Vale la medesima considerazione fatta per l'esercizio precedente:

poiché la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{X(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $X(z)$.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z-1} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{2,1}}{(z-0.6)^2}$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 141

$$C_{1,2} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = 0.5$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} (z-1)^2 \right] = -1.0$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \rightarrow 0.6} (z-0.6) \frac{X(z)}{z} = 1.0$$

$$X(z) = -\frac{z}{z-1} + 0.5 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.6}$$

$$x(k) = [-1 + 0.5k + (0.6)^k] 1(k)$$

$$\{x(k)\} = \{0, 0.1, 0.36, 0.716, 1.1296, \dots\}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 142

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 2z + 1}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ non possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede, oltre agli stessi poli di $F(z)$, un polo nell'origine.

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 143

Sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2 + 1}{z(z+1)^2} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z+1} + \frac{C_{2,2}}{(z+1)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 1}{(z+1)^2} = 1 \quad C_{2,2} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2 + 1}{z} = -2$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 + 1}{z} \right] \right\} = 0$$

$$F(z) = \frac{1}{z} - 2 \frac{z}{(z+1)^2}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 144

$$f(k) = \delta(k) - 2(-1)^{k-1} \cdot k \cdot 1(k)$$

Che fosse una successione divergente lo si poteva dedurre anche dalla Z-Trasformata iniziale, che presenta un polo doppio di modulo unitario!

I primi valori della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \{1, -2, 4, -6, \dots\}$$

Proposta: ritrovare i primi 4 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Esercizio 4

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3}$$

Fattorizzando:

$$F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$$

si nota che esiste un polo a modulo maggiore dell'unità: la successione diverge!

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z-1} + \frac{C_{3,1}}{z-3}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{F(z)}{z} = \dots = \frac{1}{3}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{F(z)}{z} = \dots = -1$$

$$C_{3,1} = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{F(z)}{z} = \dots = \frac{2}{3}$$

$$F(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

$$f(k) = \frac{1}{3} \delta(k) + \underbrace{\left[\frac{2}{3} 3^k - 1 \right]}_{\text{Il termine divergente}} \cdot 1(k)$$

Il termine divergente

Esercizio 5

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{0.625 z (z^2 + 0.8z - 0.6)}{(z-1)^4}$$

Osservazione

La trasformata presenta un polo di modulo unitario, con molteplicità maggiore dell'unità (molteplicità 4): il segnale corrispondente è certamente divergente.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{(z-1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{1,3}}{(z-1)^3} + \frac{C_{1,4}}{(z-1)^4}$$

$$C_{1,4} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^4 \frac{F(z)}{z} = 0.75$$

$$C_{1,3} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 1.75$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0.625$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0$$

$$F(z) = 0.625 \frac{z}{(z-1)^2} + 1.75 \frac{z}{(z-1)^3} + 0.75 \frac{z}{(z-1)^4}$$

FA-es Parte 1Z, 149

$$F(z) = 0.625 \frac{z}{(z-1)^2} + 1.75 \frac{z}{(z-1)^3} + 0.75 \frac{z}{(z-1)^4}$$

$$f(k) = \left\{ 0.625 k + 1.75 \left[\frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} k \right] + \right. \\ \left. + 0.75 \left[\frac{1}{6} k^3 - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k \right] \right\} 1(k)$$

In definitiva

$$f(k) = [0.5 k^2 + 0.125 k^3] 1(k)$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 150

Esercizio 6

Analizzare qualitativamente il segnale a cui corrisponde la Z-Trasformata

$$Y(z) = -\frac{(2z + p - 1)}{(z + 1 + 2p)(z - 1)}$$

al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$

Valore iniziale $\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = 0 = y(0) \quad \forall p$

- $p < -1$

due modi distinti; un modo è associato ad un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi l'uscita del sistema diviene illimitata al crescere di k

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 151

- $p = -1$

in questo caso si ottiene

$$Y(z) = -\frac{2}{z-1}$$

↓

$$y(k) = -2 \cdot 1(k-1)$$

- $-1 < p < 0$

$$Y(z) = -\frac{2z + p - 1}{(z + 2p + 1)(z - 1)}$$

la sequenza si mantiene limitata e tende a zero asintoticamente, dato che i modi della risposta sono associati a poli entrambi minori dell'unità (in modulo).

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 152

- $p = 0$

$$Y(z) = -\frac{2z - 1}{(z + 1)(z - 1)}$$

$$y(k) = (-1) \cdot \delta(k) - \frac{1}{2} \cdot 1(k) + \frac{3}{2} \cdot (-1)^k \cdot 1(k)$$

comportamento oscillante permanente: poli di modulo unitario, semplici

- $p > 0$

C'è un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi il segnale diviene illimitato al crescere di k .

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 153

Esercizio 7

- Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = e(k)$$
 dove $x(k) = 0 \quad \forall k < -2, \quad x(-2) = x(-1) = 1$

$$e(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
- Determinare **per via numerica** i primi 4 campioni non noti della successione:

$$x(0) \rightarrow x(0) - 3x(-1) + 2x(-2) = e(0)$$

$$x(0) = 2$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 154

$$x(1) \rightarrow x(1) - 3x(0) + 2x(-1) = e(1)$$

$$x(1) = 4$$

$$x(2) \rightarrow x(2) - 3x(1) + 2x(0) = e(2)$$

$$x(2) = 9$$

$$x(3) \rightarrow x(3) - 3x(2) + 2x(1) = e(3)$$

$$x(3) = 19$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 155

- Scrivendo un semplice script in ambiente Matlab si possono rapidamente calcolare i primi 25 campioni della sequenza

al passo 0 valore di x 2.00	
al passo 1 valore di x 4.00	
al passo 2 valore di x 9.00	
al passo 3 valore di x 19.00	
al passo 4 valore di x 39.00	
al passo 5 valore di x 79.00	
al passo 6 valore di x 159.00	
al passo 7 valore di x 319.00	
al passo 8 valore di x 639.00	
al passo 9 valore di x 1279.00	
al passo 10 valore di x 2559.00	
al passo 11 valore di x 5119.00	
al passo 12 valore di x 10239.00	
al passo 13 valore di x 20479.00	
	al passo 14 valore di x 40959.00
	al passo 15 valore di x 81919.00
	al passo 16 valore di x 163839.00
	al passo 17 valore di x 327679.00
	al passo 18 valore di x 655359.00
	al passo 19 valore di x 1310719.00
	al passo 20 valore di x 2621439.00
	al passo 21 valore di x 5242879.00
	al passo 22 valore di x 10485759.00
	al passo 23 valore di x 20971519.00
	al passo 24 valore di x 41943039.00
	al passo 25 valore di x 83886079.00

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1Z, 156

- Proviamo ora a **risolvere l'equazione** alle differenze facendo uso della **Z-trasformata**:

$$\mathcal{Z}\{x(k-m)\} = z^{-m}X(z) + z^{-m} \left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p)z^{-p} \right]$$

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = e(k)$$

$$X(z) = \frac{z[x(-1)(3z-2) - 2x(-2)z]}{z^2 - 3z + 2} + \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{z^2 + 1}{z^2}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

- In definitiva la sequenza cercata possiede Z-trasformata data da:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$$

- Lo sviluppo in fratti semplici porta a

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{(-2)z}{z-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-2}$$

- Antitrasformando si ottiene quindi

$$x(k) = \frac{1}{2} \cdot \delta(k) + \left[\frac{5}{2} \cdot 2^k - 1 \right] \cdot 1(k)$$

Esercizi sulle Z-Trasformate

Esercizi "per casa"

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z - 1)}$$

Esercizio 2

Partendo dalla medesima Z-Trasformata $F(z)$ dell' esercizio precedente, determinare i primi 3 valori della successione $f(k)$ utilizzando sia la tecnica di "long division" che il metodo computazionale.

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{(z^2 - 1)(z - 2)}$$

Esercizio 4

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+3) - 2.2x(k+2) + 1.57x(k+1) - 0.36x(k) = e(k)$$

con condizioni iniziali $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $x(2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k)$

Determinare:

- uno script Matlab che calcoli i primi 45 valori della sequenza $x(k)$
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$
- partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ determinare, utilizzando l'algoritmo di long-division, i primi 5 valori della sequenza.

Esercizio 5

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 0$, $y(-2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 6

Si consideri ancora l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 1$, $y(-2) = -2$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 0 \quad \forall k$

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando il metodo computazionale.
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 7

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+2) + 3x(k) - 2x(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $\begin{cases} x(-2) = 12, & x(-1) = 0 \\ x(0) = 1, & x(1) = -2 \end{cases}$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Determinare:

- i primi 10 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$.