

# Stabilità di sistemi interconnessi

# Introduzione

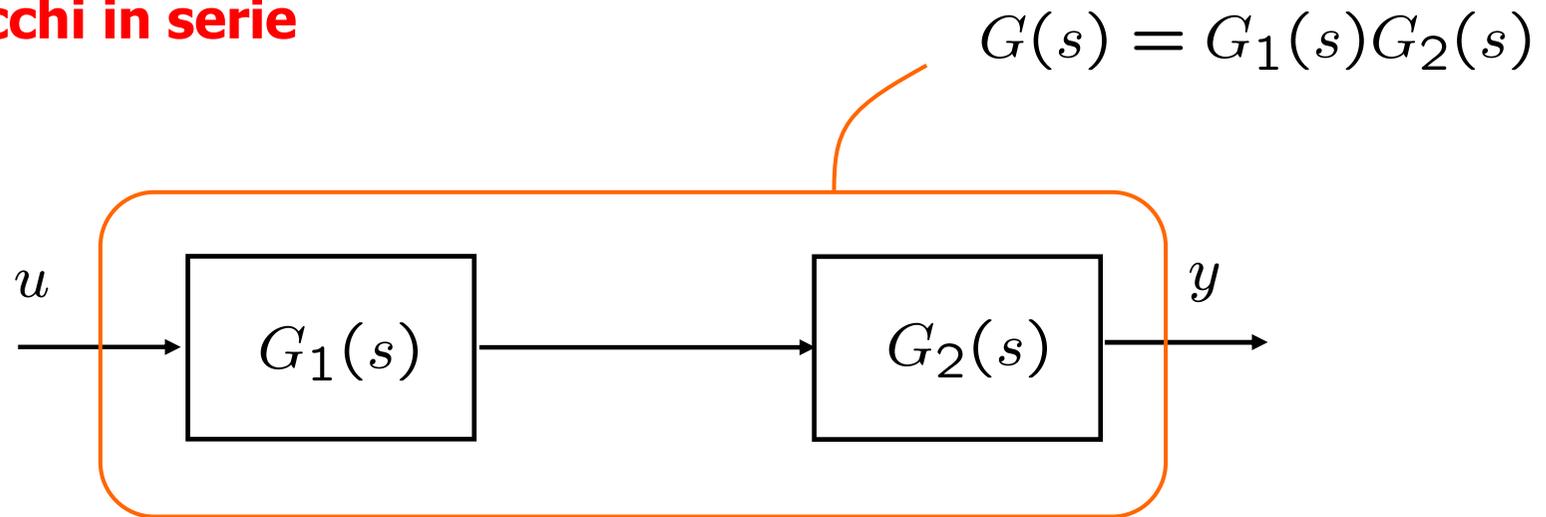
- Assegnato un sistema dinamico LTI descritto tramite uno schema a blocchi (a tempo continuo oppure a tempo discreto), che cosa si può dire della stabilità (**stabilità interna e stabilità BIBO**) del sistema nel suo complesso?
- La **struttura** dello schema agevola l'analisi di stabilità?
  - Esistono delle configurazioni in cui la **stabilità del sistema interconnesso** e' **garantita**, se i sottosistemi elementari sono stabili?
  - Esistono configurazioni in cui questa proprietà non e' valida?

## Tempo continuo vs tempo discreto

- I **risultati** a cui arriveremo saranno **validi** sia per **sistemi a tempo continuo** che **a tempo discreto**.
- Per semplicità allora analizziamo in dettaglio solo il caso a tempo continuo, riportando poi i risultati del caso a tempo discreto.

# Sistemi interconnessi a tempo continuo

## Analisi di stabilità

**- Blocchi in serie**

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$



$$G(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

**- Caso 1: assenza di fattori comuni**

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Poli di } G_1(s) \right\} \cup \left\{ \text{Poli di } G_2(s) \right\}$$



$G(s)$  asint. stabile  $\longleftrightarrow$   $G_1(s), G_2(s)$  asint. stabili

## - Caso 2: presenza di fattori comuni

- Cancellazioni con  $\text{Re}(\text{poli "cancellati"}) < 0$



Dinamica "nascosta" asint. stabile

- Cancellazioni con  $\text{Re}(\text{poli "cancellati"}) \geq 0$



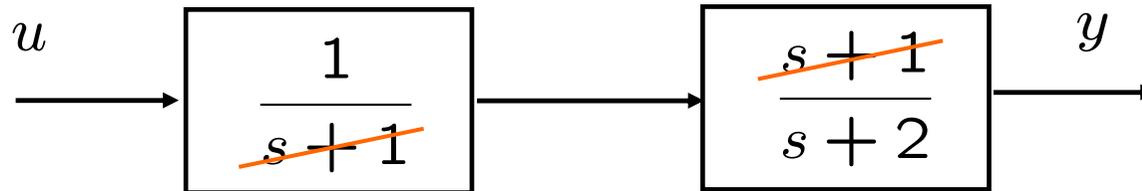
Dinamica "nascosta" non asint. stabile



Il sistema non è asint. stabile  
anche se  $G(s)$  non lo mostra

- Esempi

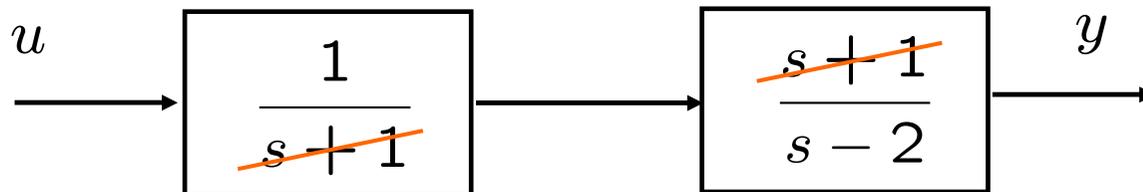
1)



$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Asint. stabile

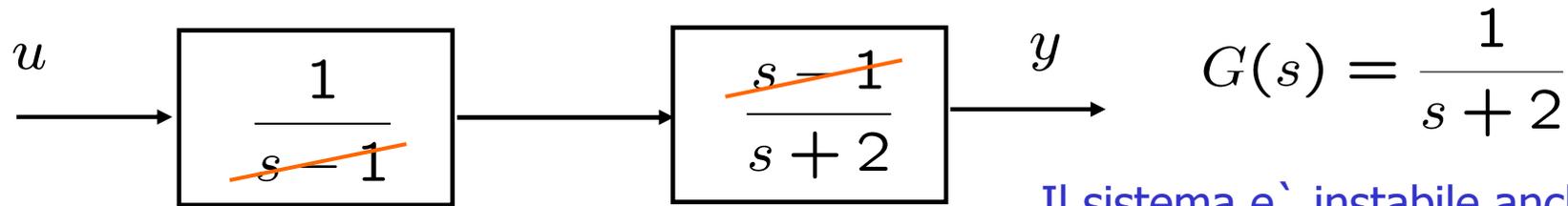
2)



$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

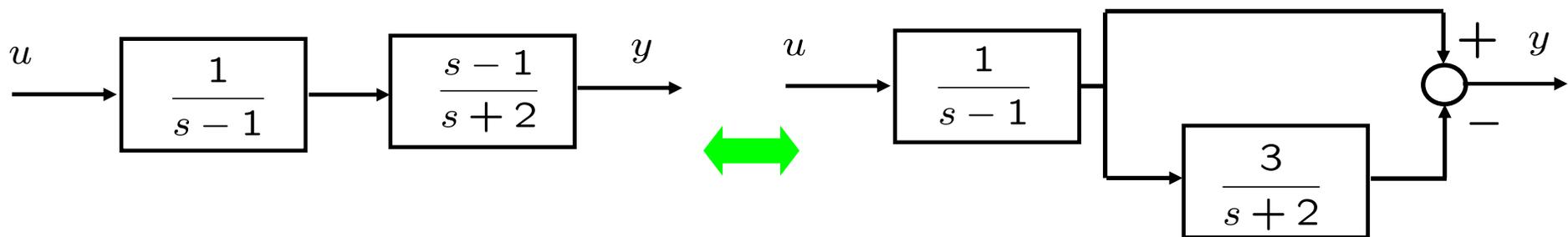
Instabile

3)



Il sistema e' instabile anche se  $G(s)$  non lo mostra

Infatti:

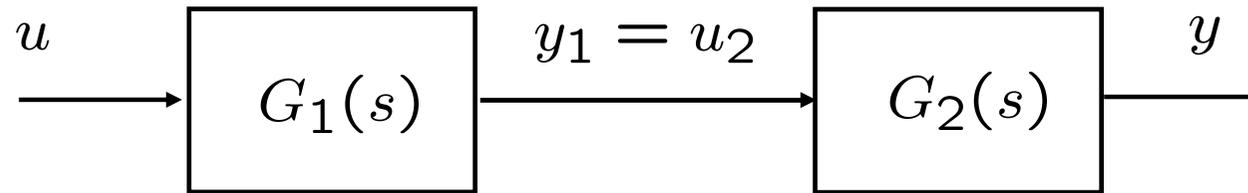


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Autovalore > 0

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1] x \end{cases}$$

## - Blocchi in serie: analisi nel tempo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y_1 = A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 + b_2 d_1 u \\ y = c_2 x_2 + d_2 y_1 \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1(sI - A_1)^{-1}b_1 + d_1 \quad G_2(s) = c_2(sI - A_2)^{-1}b_2 + d_2$$

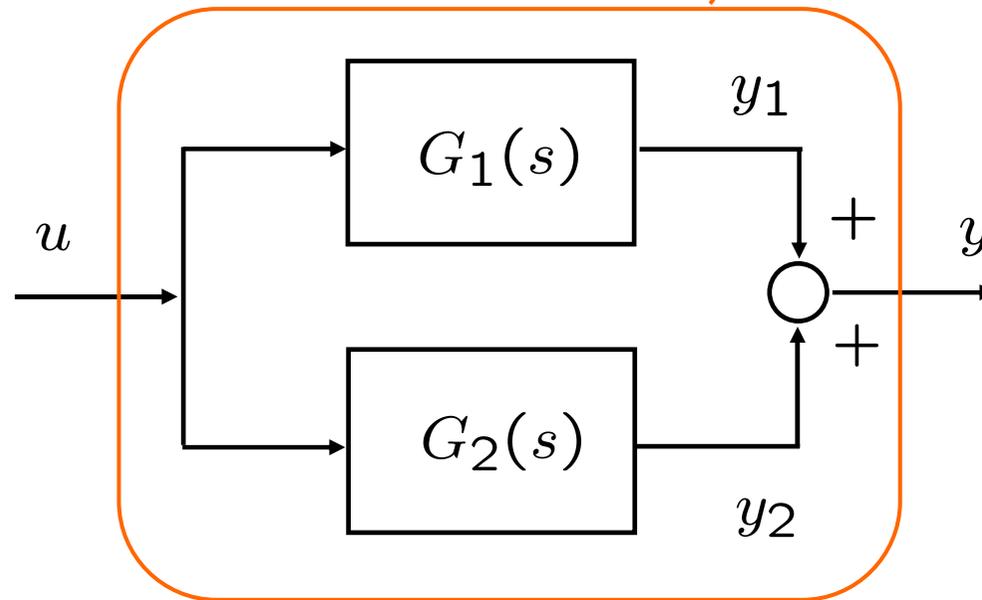
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{bmatrix} u \\ y = [d_2 c_1 \quad c_2] x + d_1 d_2 u \end{cases}$$

## - Conclusione blocchi in serie

- Sistema complessivo asintoticamente stabile  Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in serie

**- Blocchi in parallelo**

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$



$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

**- Caso 1: assenza di fattori comuni**

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Poli di } G_1(s) \right\} \cup \left\{ \text{Poli di } G_2(s) \right\}$$



$G(s)$  asint. stabile  $\longleftrightarrow$   $G_1(s), G_2(s)$  asint. stabili

## - Caso 2: presenza di fattori comuni

- Cancellazioni con  $\text{Re}(\text{poli "cancellati"}) < 0$



Dinamica "nascosta" asint. stabile

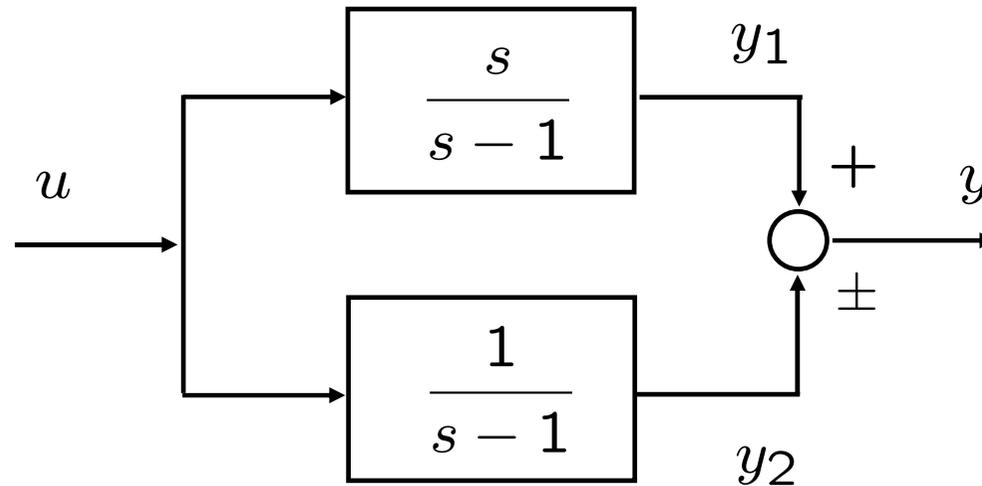
- Cancellazioni con  $\text{Re}(\text{poli "cancellati"}) \geq 0$



Dinamica "nascosta" non asint. stabile



Il sistema non è asint. stabile  
anche se  $G(s)$  non lo mostra

**- Esempio**

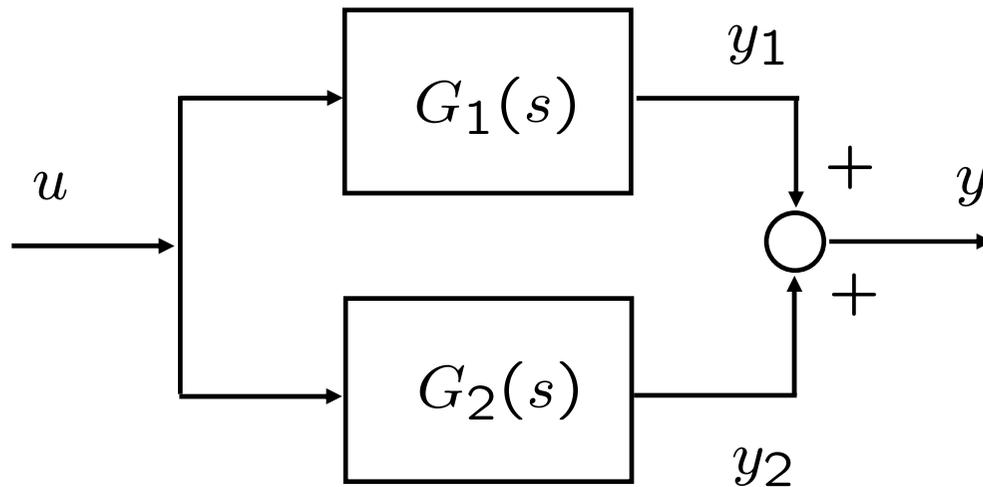
$$(+)\quad G(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Instabile

$$(-)\quad G(s) = 1$$

Il sistema e' instabile anche se  $G(s)$  non lo mostra

## - Blocchi in parallelo: analisi nel tempo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u \\ y_2 = c_2 x_2 + d_2 u \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1(sI - A_1)^{-1}b_1 + d_1$$

$$G_2(s) = c_2(sI - A_2)^{-1}b_2 + d_2$$

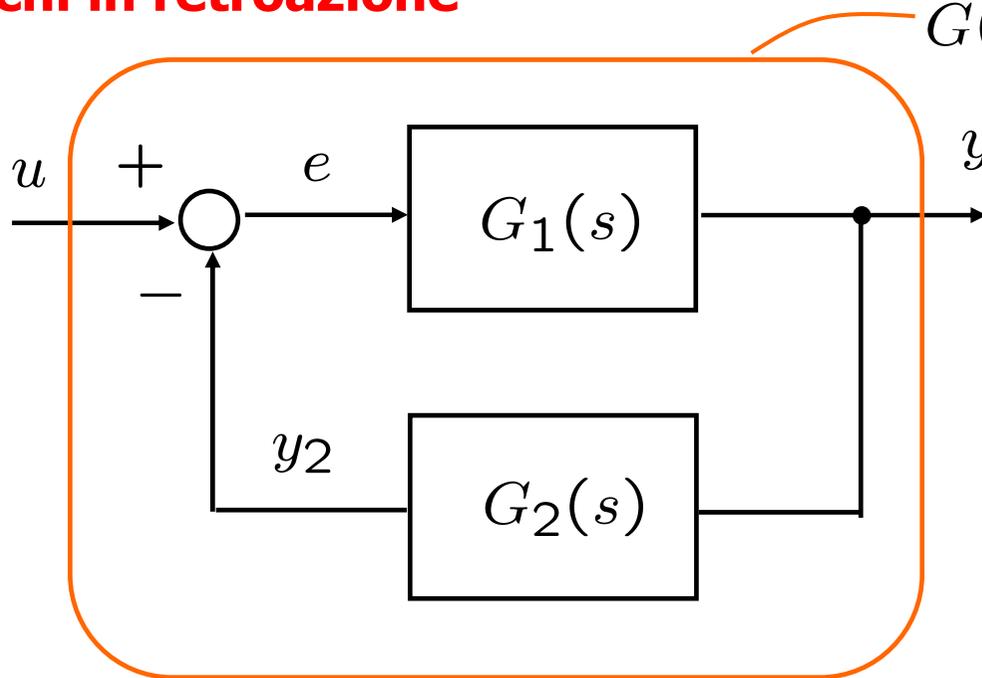


$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \quad c_2] x + (d_1 + d_2) u \end{cases}$$

## - Conclusione blocchi in parallelo

- Sistema complessivo asintoticamente stabile  Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in parallelo

**- Blocchi in retroazione**



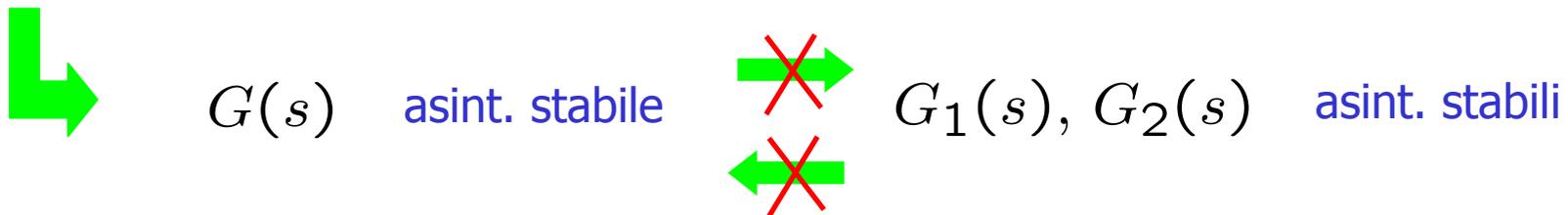
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

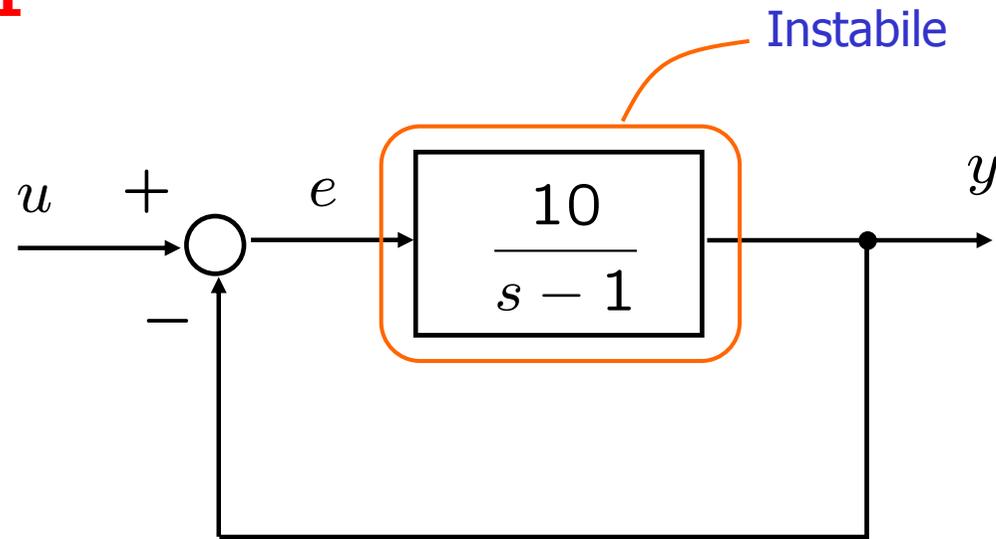


$$G(s) = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

## - Anche in assenza di fattori comuni

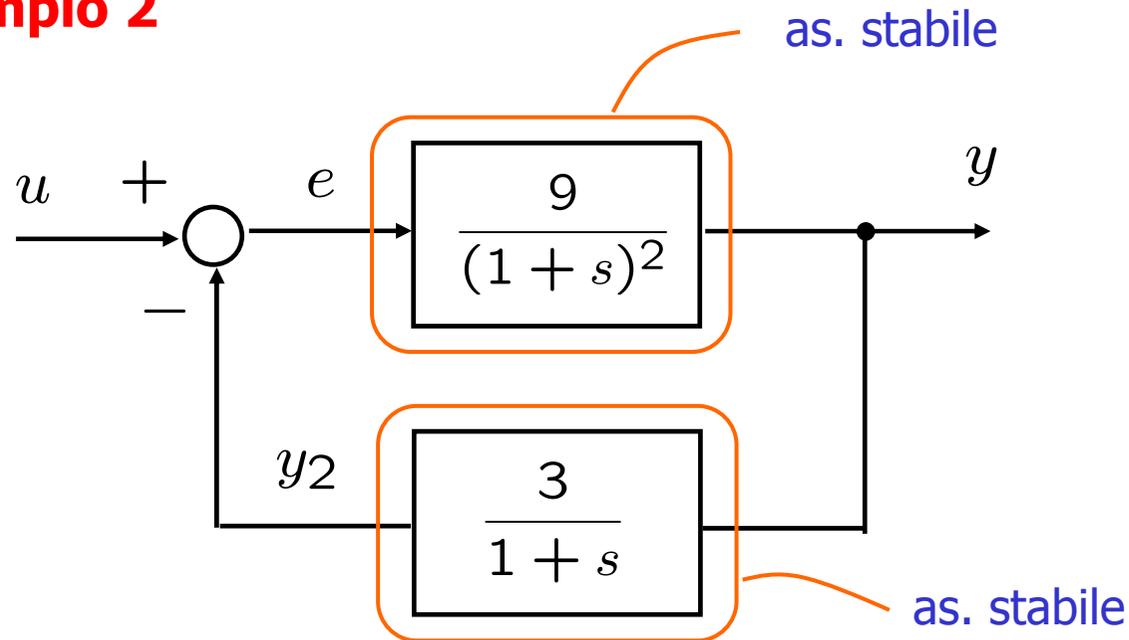
$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Radici di } D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) \right\}$$



**- Esempio 1**

$$G(s) = \frac{\frac{10}{s-1}}{1 + \frac{10}{s-1}} = \frac{\frac{10}{s-1}}{\frac{s-1+10}{s-1}} = \frac{10}{s+9}$$

Asint. stabile

**- Esempio 2**

$$G(s) = \frac{\frac{9}{(1+s)^2}}{1 + \frac{3}{(1+s)^3}} = \frac{9(1+s)}{(1+s)^3 + 27}$$

$$\varphi(s) = (1 + s)^3 + 27 = s^3 + 3s^2 + 3s + 28$$

1	1	3	0
2	3	28	0
3	$\alpha$	0	0
4	$\beta$	0	0

$r_4$

$$\alpha = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 28 \end{bmatrix} = -\frac{19}{3}$$

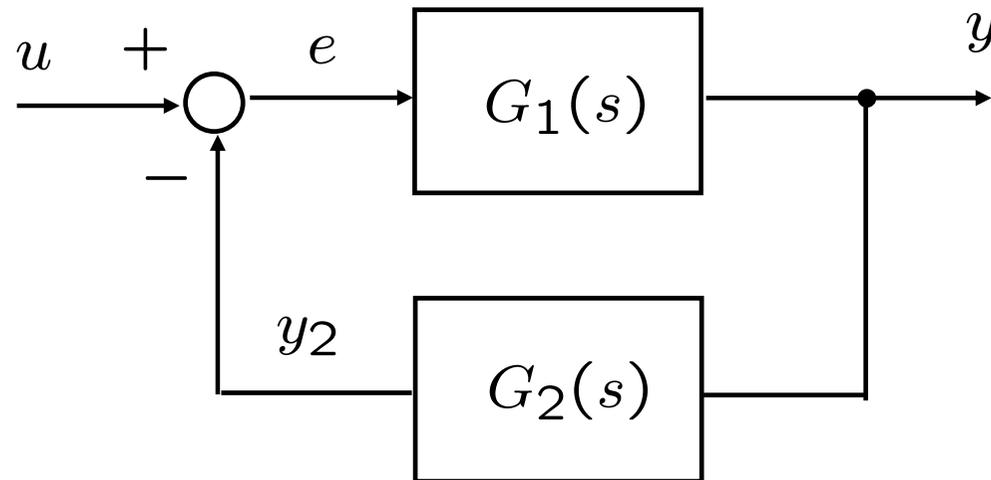
$$\beta = 28$$

Due variazioni di segno in  $r_4$



Instabilita`

## - Blocchi in retroazione: analisi nel tempo



$$e = u - y$$

$$d_1 = d_2 = 0$$



Perche' (es. a casa)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 e \\ y = c_1 x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y \\ y_2 = c_2 x_2 \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1$$

$$G_2(s) = c_2 (sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -b_1 c_2 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \ 0] x \end{cases}$$

## - Conclusione blocchi in retroazione

- Sistema complessivo asintoticamente stabile  Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori cambiano a causa della connessione in retroazione

# Sistemi interconnessi a tempo discreto

## Analisi di stabilità: i risultati

## Tempo discreto: blocchi in serie

- Sistema complessivo asintoticamente stabile  Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in serie

A tempo discreto sistema as. stabile significa che gli autovalori ...

Per le **cancellazioni** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso di sistemi a tempo continuo.

## Esempi

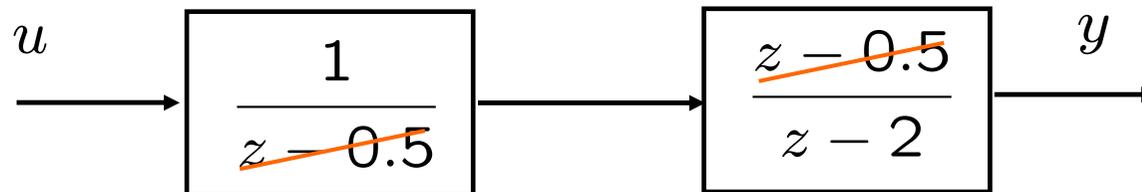
1)



$$G(z) = \frac{1}{z - 0.5}$$

Asint. stabile

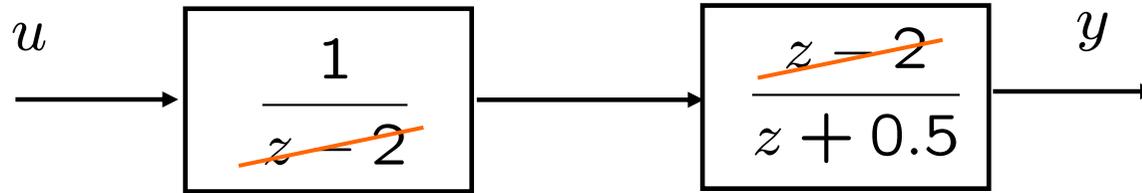
2)



$$G(z) = \frac{1}{z - 2}$$

Instabile

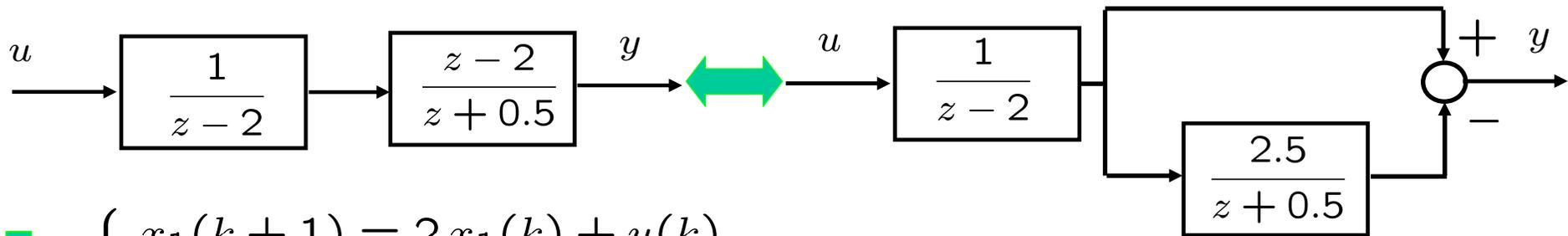
3)



$$G(z) = \frac{1}{z + 0.5}$$

Il sistema è instabile anche se  $G(z)$  non lo mostra

Infatti:



$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 2.5x_1(k) - 0.5x_2(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

|Autovalore| > 1

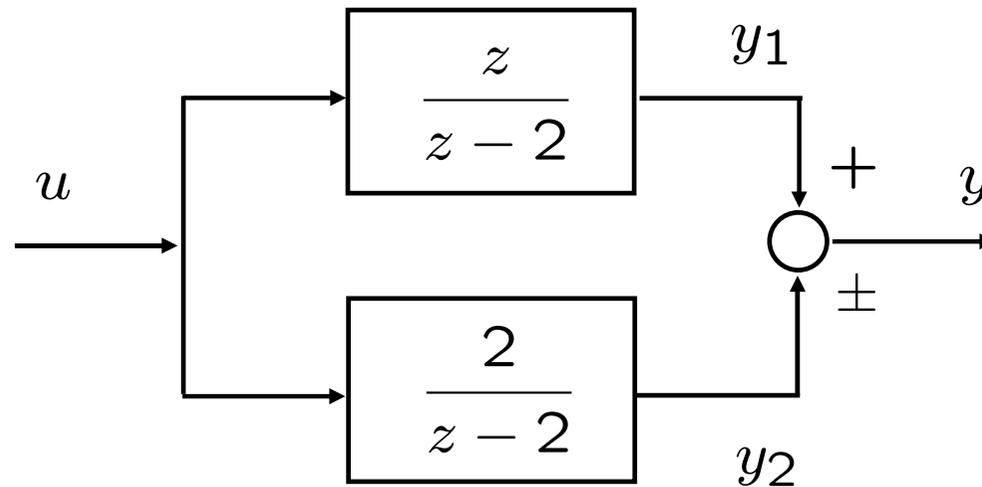
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \ 1] x(k) \end{cases}$$

## Tempo discreto: blocchi in parallelo

- Sistema complessivo asintoticamente stabile  Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in parallelo

Per le **cancellazioni** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso di sistemi a tempo continuo.

## Esempio



$$(+) \quad G(z) = \frac{z+2}{z-2}$$

Instabile

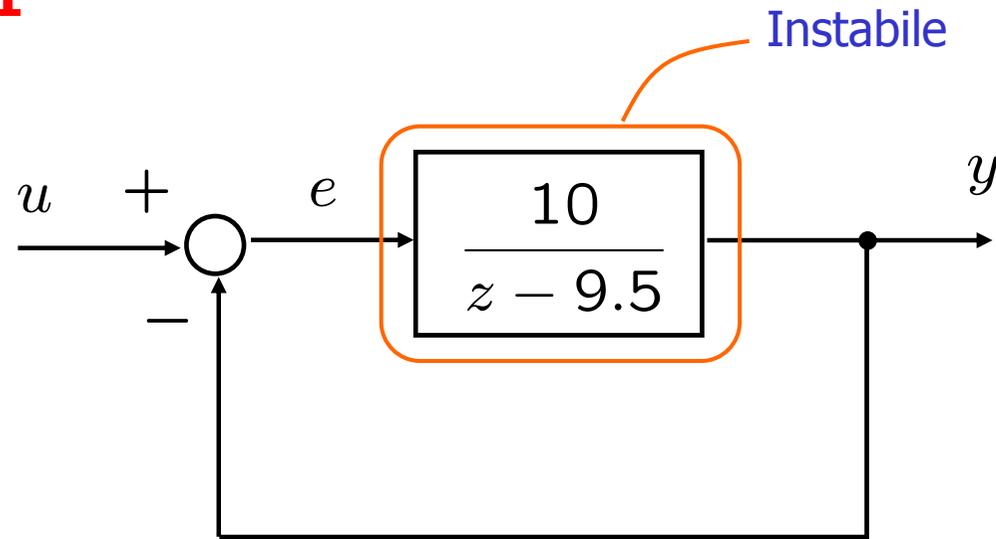
$$(-) \quad G(z) = 1$$

Il sistema è instabile anche se  $G(z)$  non lo mostra

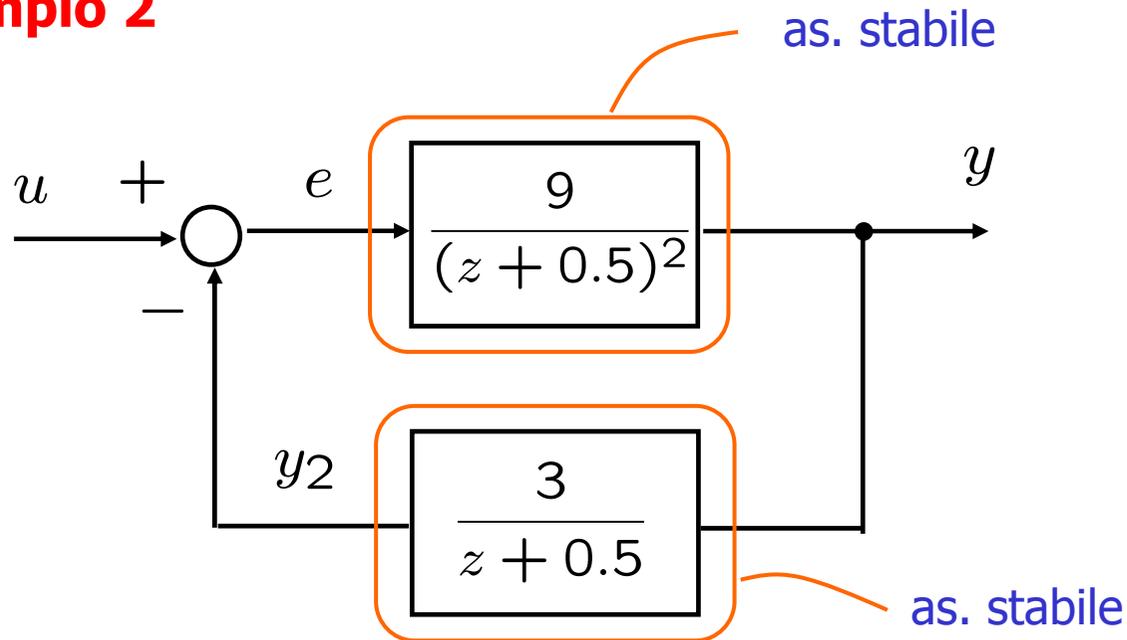
## Tempo discreto: blocchi in retroazione

- Sistema complessivo asintoticamente stabile  Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori cambiano a causa della connessione in retroazione!

Per le **cancellazioni** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso di sistemi a tempo continuo.

**- Esempio 1**

$$G(z) = \frac{\frac{10}{z - 9.5}}{1 + \frac{10}{z - 9.5}} = \frac{\frac{10}{z - 9.5}}{\frac{z - 9.5 + 10}{z - 9.5}} = \frac{10}{z + 0.5} \quad \text{Asint. stabile}$$

**- Esempio 2**

↳

$$G(z) = \frac{\frac{9}{(z + 0.5)^2}}{1 + \frac{3}{(z + 0.5)^3}} = \frac{9(z + 0.5)}{(z + 0.5)^3 + 27}$$

$$\varphi(z) = (z + 0.5)^3 + 27 = z^3 + 1.500z^2 + 0.750z + 27.125$$



Per i criteri di as. stabilità, questo polinomio caratteristico è instabile!

Infatti

$$z_1 = -3.5000$$

$$z_2 = 1.0000 + 2.5981 j$$

$$z_3 = 1.0000 - 2.5981 j$$

Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}$$



$$q(w) = 30.375 w^3 - 77.625 w^2 + 82.125 w - 26.875$$

Criterio di Routh

3	30.375	82.125
2	-77.625	-26.875
1	71.6087	
0	-26.875	



3 variazioni di segno: instabile! Tutte le radici di  $\varphi(z)$  hanno modulo maggiore dell'unità.