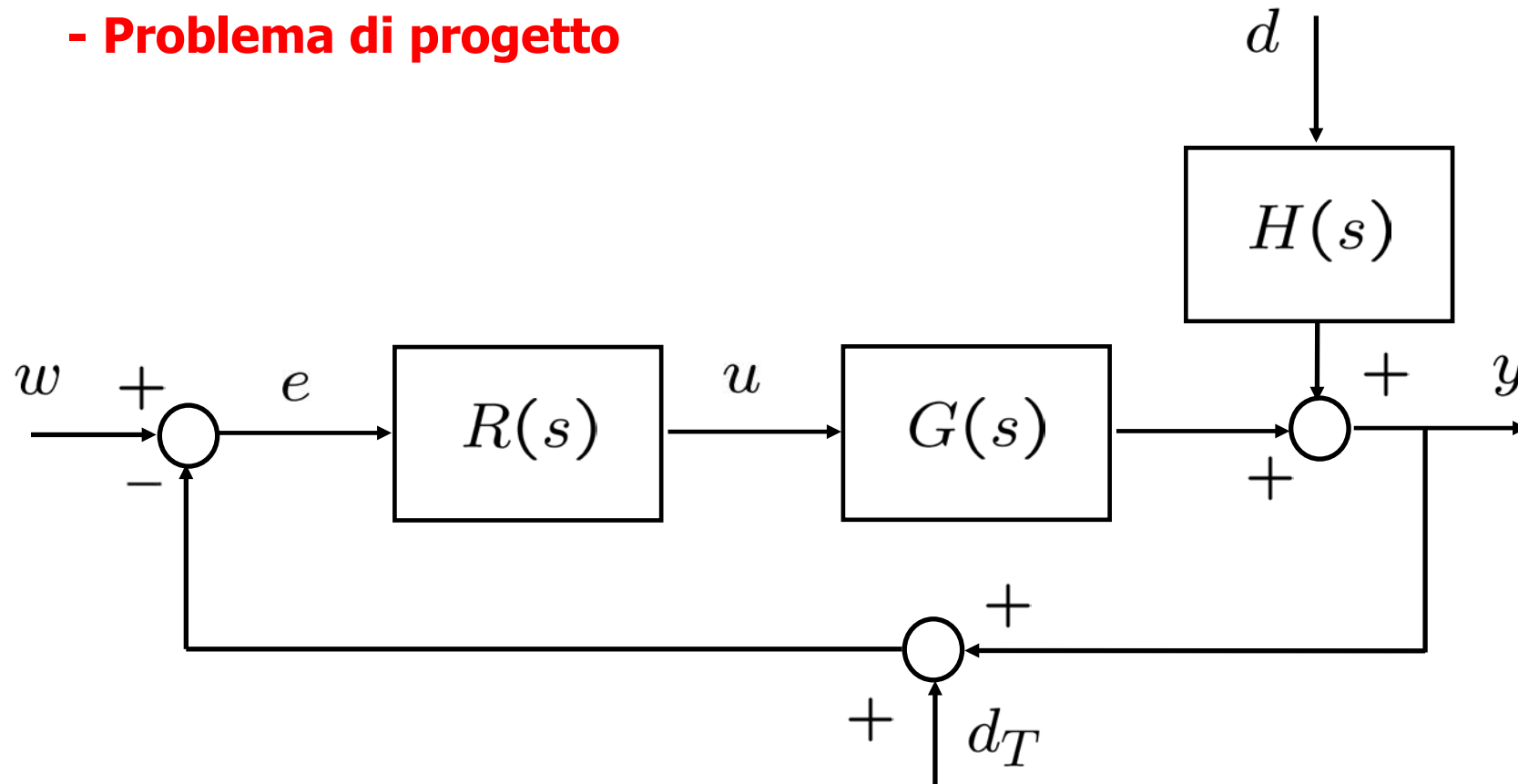


Progetto del controllore

Il caso dei sistemi LTI a tempo continuo

- Problema di progetto

Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi alcuni requisiti

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Asintotica stabilita`  $\left\{ \begin{array}{l} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{array} \right.$ (Bode)
- Precisione statica  $\left\{ \begin{array}{l} g > 0 \quad (\text{poli in } 0) \\ \text{e/o} \\ \mu \text{ elevato} \end{array} \right.$
- Precisione dinamica
 - velocita` di risposta  ω_c elevata
 - smorzamento  φ_m elevato

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Attenuazione disturbi in andata $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_c \text{ elevata} \\ |L(j\omega)| \text{ elevato per } \omega < \omega_c \end{array} \right.$
- Attenuazione disturbi in retroaz. $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_c \text{ non troppo elevata} \\ |L(j\omega)| \text{ piccolo per } \omega > \omega_c \end{array} \right.$
- Stabilità robusta $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_m \\ k_m \end{array} \right. \text{ elevati}$

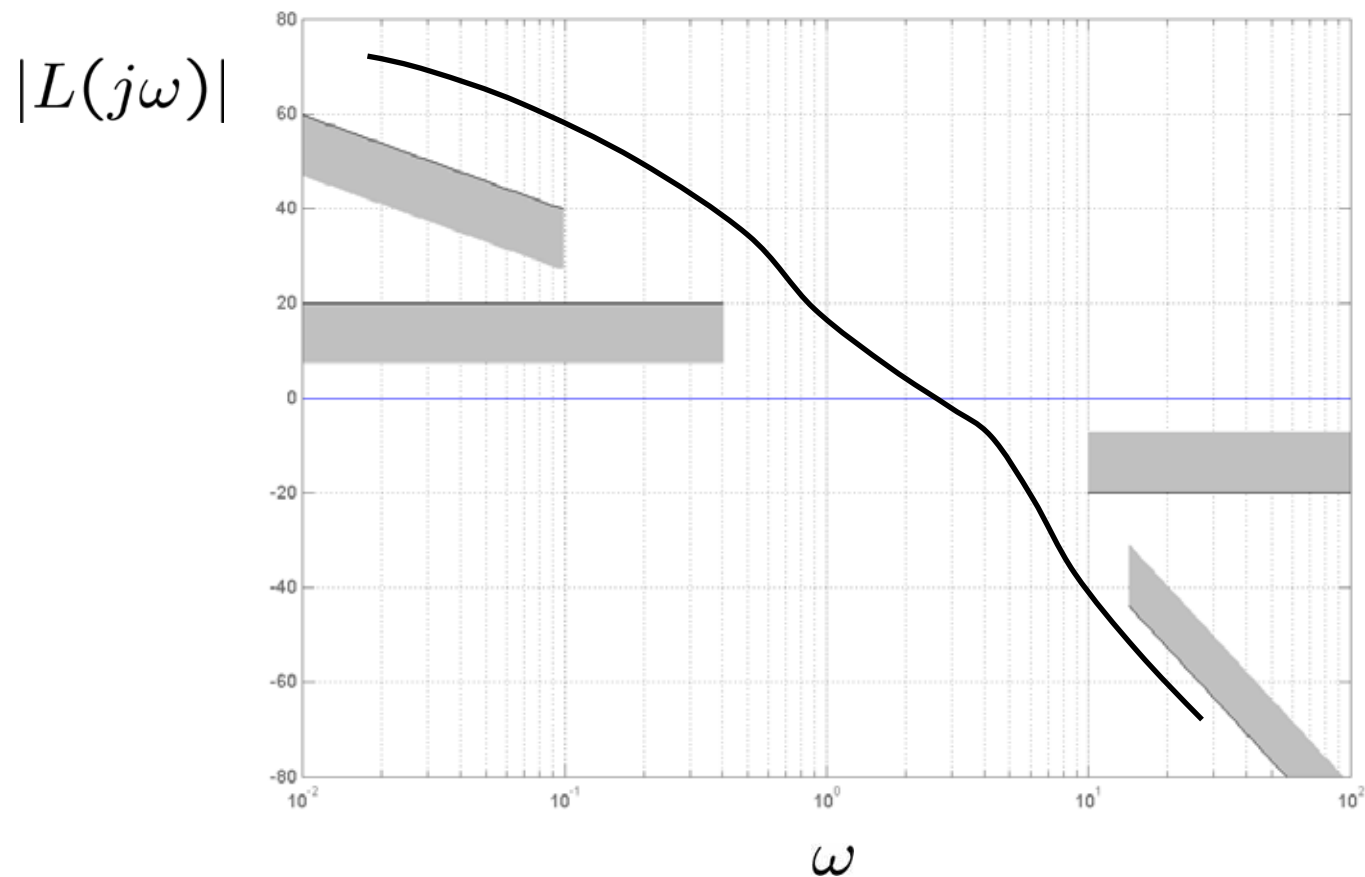
- Tipiche specifiche di progetto sui diagrammi di Bode

A partire dai requisiti si costruiscono opportune specifiche che forniranno vincoli di progetto. Per esempio:

- $|e(\infty)| \leq \bar{e}$ con w, d specificati } Specifica statica
 - Vincoli su $|L(j\omega)|$
 - $\omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max}$
 - $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$
 - $k_m \geq \bar{k}_m$
- } Specifiche dinamiche

- Rappresentazione grafica dei vincoli di progetto sui d. di Bode

I vincoli di progetto derivanti dalle specifiche che devono essere soddisfatte a progetto ultimato possono convenientemente essere riportati sui diagrammi di Bode.



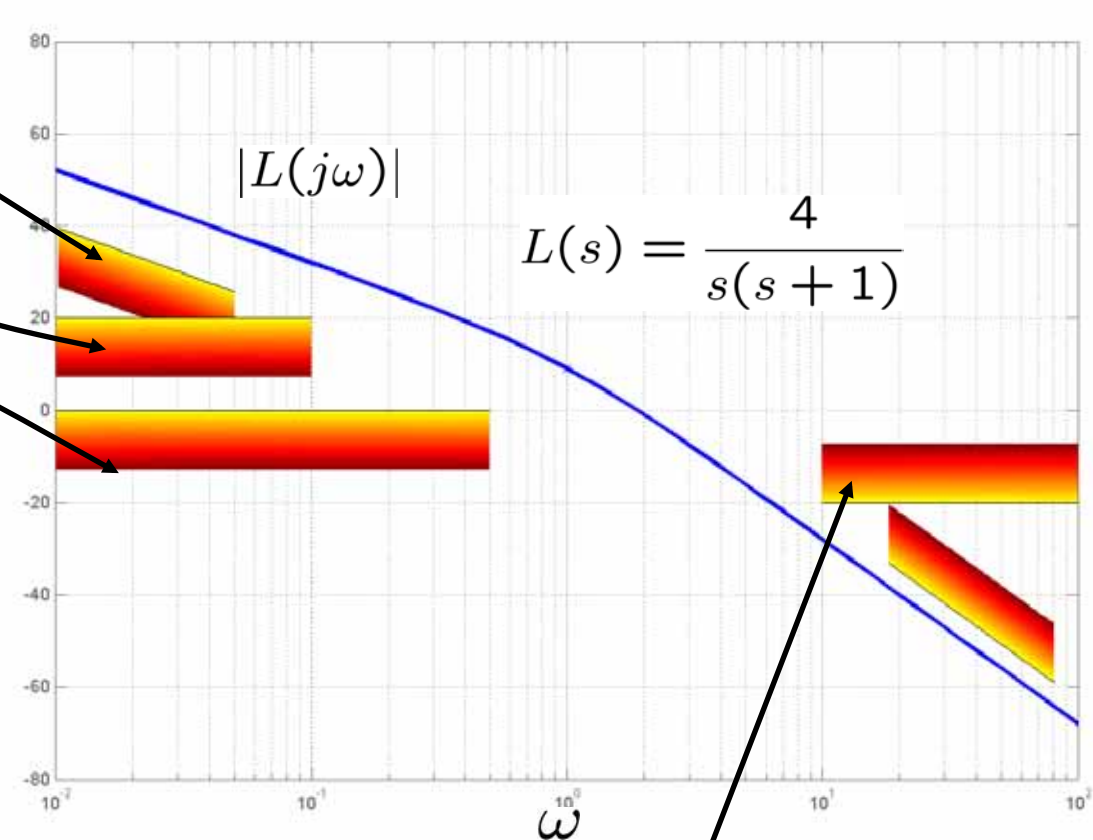
Esempio

$$|e(\infty)| = 0, w(t) = A \cdot 1(t), \forall A$$

$$|S(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \omega \in (0, 0.1)$$

$$S\% \leq 3 \rightarrow \xi \geq 0.75$$

$$T_{a1} \leq 10 \rightarrow \omega_c \geq 0.5$$



$$|F(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \omega \in (10, 100)$$

- Specifiche statiche sul luogo delle radici

- Specifica statica sull'errore a regime: si può tradurre in un vincolo sulla costante di guadagno ρ

$$|e(\infty)| \leq \bar{e} \quad \text{con } w, d \text{ specificati} \quad \longrightarrow \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$$

- Stabilità asintotica del sistema di ciclo chiuso: diviene un ulteriore vincolo sulla costante di guadagno ρ

$$\text{As. Stab.} \quad \longrightarrow \quad \rho_3 \leq \rho \leq \rho_4$$

- Specifiche dinamiche sul luogo delle radici

● Specifiche dinamiche: si traducono in vincoli su

– pulsazione naturale $\omega_n \longrightarrow \omega_1 \leq \omega_n \leq \omega_2$

– coefficiente di smorzamento $\xi \longrightarrow \xi \geq \bar{\xi}$

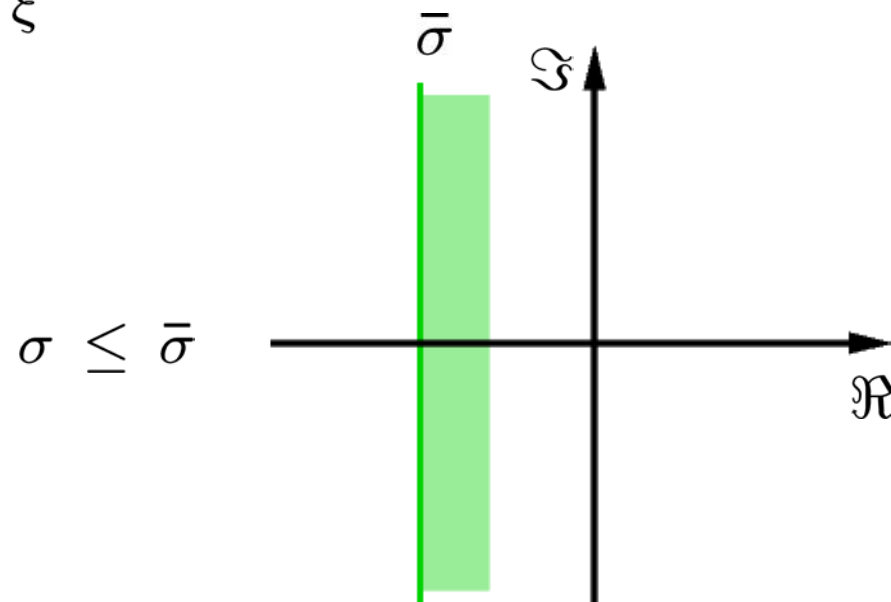
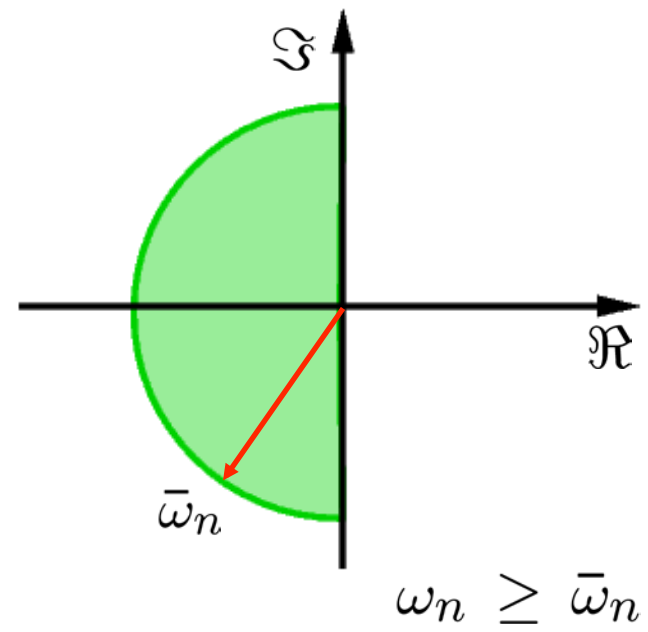
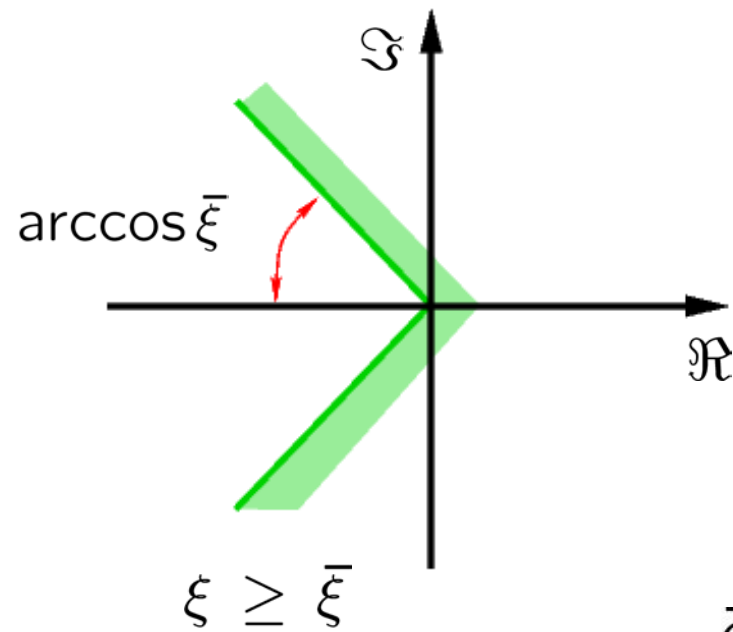
– parte reale dei poli di ciclo chiuso $\sigma = -\xi \omega_n \longrightarrow |\sigma| \geq \bar{\sigma}$

che riguardano i poli dominanti di ciclo chiuso.

- Vincoli su ρ  Individuano una parte del luogo delle radici oggetto di studio come luogo ammissibile per i poli di ciclo chiuso.
- Vincoli su ω_n, ξ, σ  Individuano una regione del piano complesso all'interno della quale deve portarsi il luogo per qualche valore di ρ affinché il progetto vada a buon fine.

La formulazione di problemi in cui si chiede il soddisfacimento contemporaneo di più condizioni di questo genere porta a determinare regioni ammissibili nel piano complesso di forma articolata, data dall'intersezione delle regioni di ciascun vincolo elementare.

Vincoli sul luogo delle radici



Vincoli sul luogo delle radici e sui diagrammi di Bode

A proposito dei poli dominanti si è detto che, approssimativamente

$$\varphi_m < 75^\circ \quad \longrightarrow \quad \text{Poli dominanti complessi con}$$

$$\omega_n \simeq \omega_c \quad \xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

$$\varphi_m > 75^\circ \quad \longrightarrow \quad \text{Polo dominante reale con} \quad \tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$$

quindi

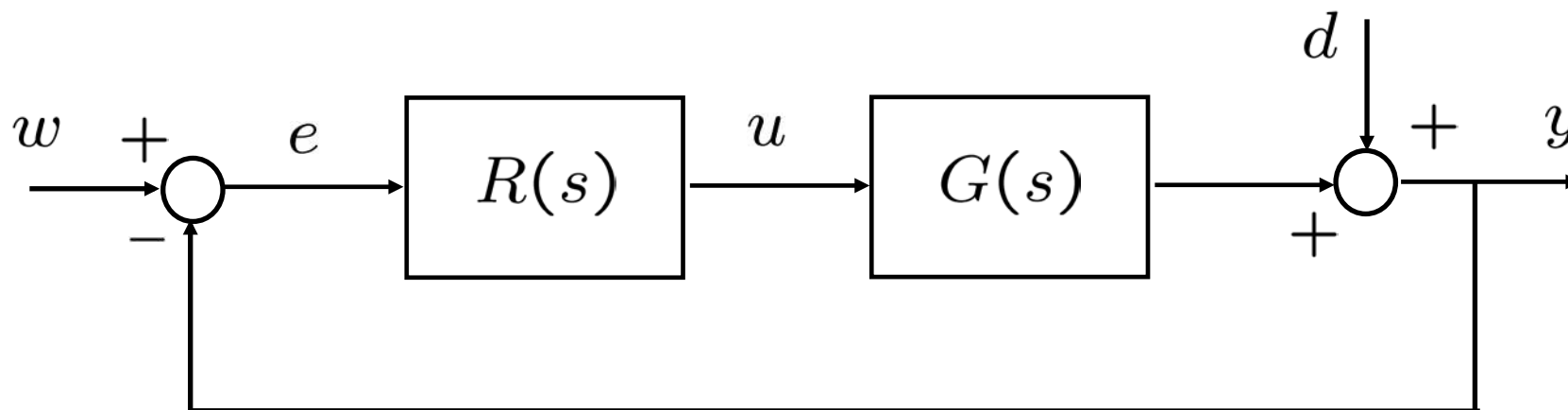
$$\varphi_m \leq \bar{\varphi}_m \quad \longrightarrow \quad \xi \geq \bar{\xi} \simeq \frac{\bar{\varphi}_m}{100}$$

$$\omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max} \quad \longrightarrow \quad \omega_{\min} \lesssim \omega_n \lesssim \omega_{\max}$$

$$t_a \leq \bar{t}_a \quad \longrightarrow \quad \sigma \leq \bar{\sigma} \simeq -\frac{5}{\bar{t}_a}$$

- Progetto "per tentativi"

- Partendo da un controllore $R(s)$ di struttura semplice (per esempio un semplice guadagno $R(s) = \mu_R$) si complica via via la sua funzione di trasferimento finché tutte le specifiche sono **eventualmente** soddisfatte.
- Si può condurre sia utilizzando il luogo delle radici lavorando quindi sul piano s che sui diagrammi di Bode lavorando quindi in frequenza.

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Specifiche di progetto

- $|e(\infty)| \leq 0.1$ con $\begin{cases} w(t) = A \cdot 1(t), & |A| \leq 1 \\ d(t) = B \cdot 1(t), & |B| \leq 5 \end{cases}$
- $\omega_c \geq 0.2$  $\omega_n \gtrsim 0.2$
- $\varphi_m \geq 60^\circ$  $\xi \gtrsim 0.6$

per il progetto sul
luogo delle radici

- Controllore

$$R(s) = \underbrace{\frac{\mu_R}{s^r}}_{R_1(s)} \underbrace{\frac{\prod (1 + sT_i)}{\prod (1 + s\tau_i)}}_{R_2(s)}$$

- Progetto statico

$$L(s) = R(s)G(s) = R(s) \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

Il progetto statico non è influenzato da $R_2(s)$ in quanto $R_2(0) = 1$



$$\text{Guadagno} = 10\mu_R > 0$$

$$\text{Tipo} = r$$

Ma: $e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$

dove: $e_w(t) = e(t) |_{d(t)=0}$

$$e_d(t) = e(t) |_{w(t)=0}$$

} sovrapposizione
effetti

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$


 $|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$

Ma:

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{|A|}{1 + 10\mu_R} \leq \frac{1}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \frac{|B|}{1 + 10\mu_R} \leq \frac{5}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

- Con $r = 1$

$\rightarrow e(\infty) = 0, \quad \forall \mu_R \rightarrow R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$

- Con $r = 0$

$\rightarrow |e(\infty)| \leq \frac{1}{1 + 10\mu_R} + \frac{5}{1 + 10\mu_R} = \frac{6}{1 + 10\mu_R}$

imponendo $|e(\infty)| \leq 0.1$

$\rightarrow \frac{6}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1 \rightarrow \mu_R \geq 5.9$

Potremmo quindi scegliere

$R_1(s) = 8$

- Progetto dinamico (A)

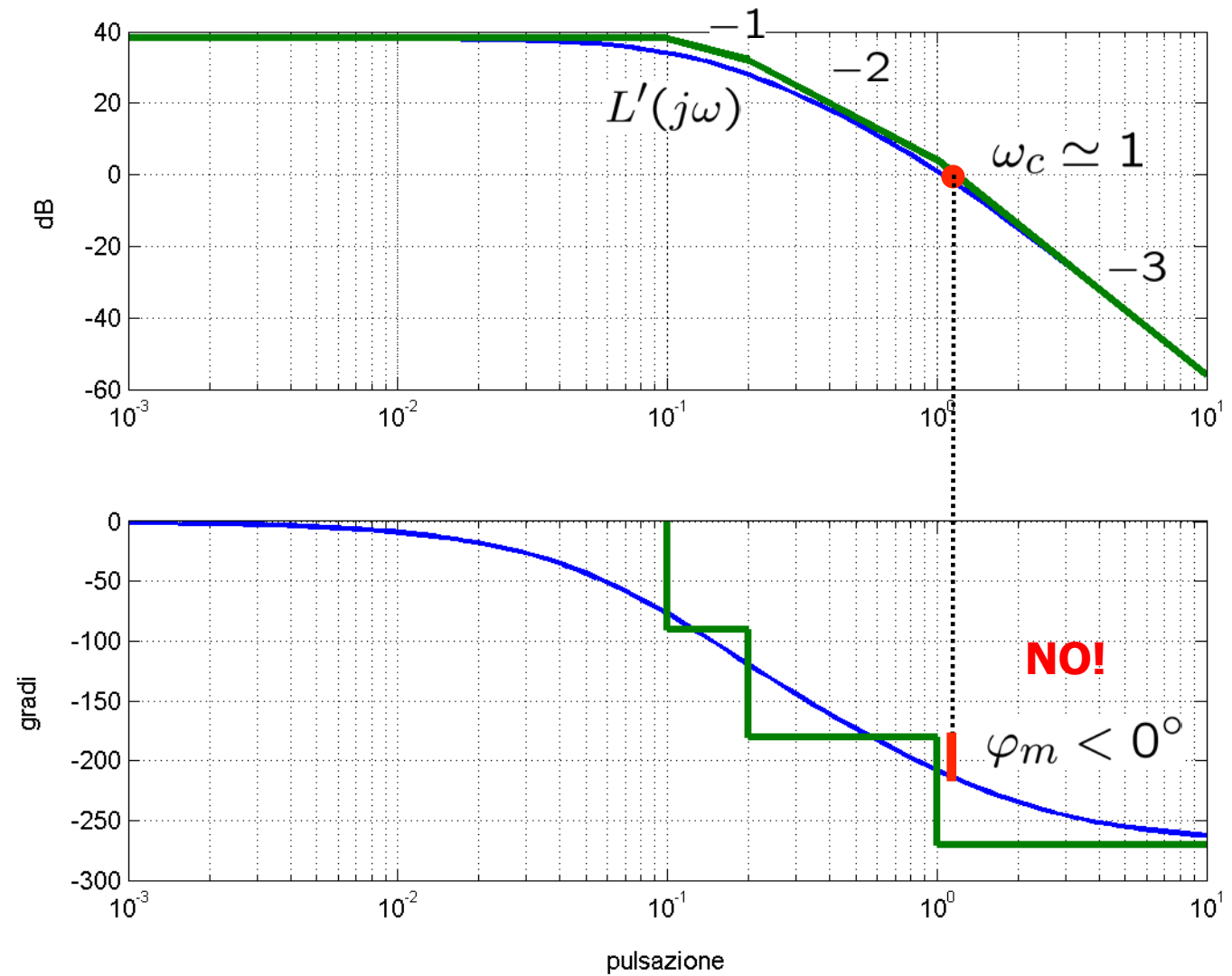
$$R_1(s) = 8$$

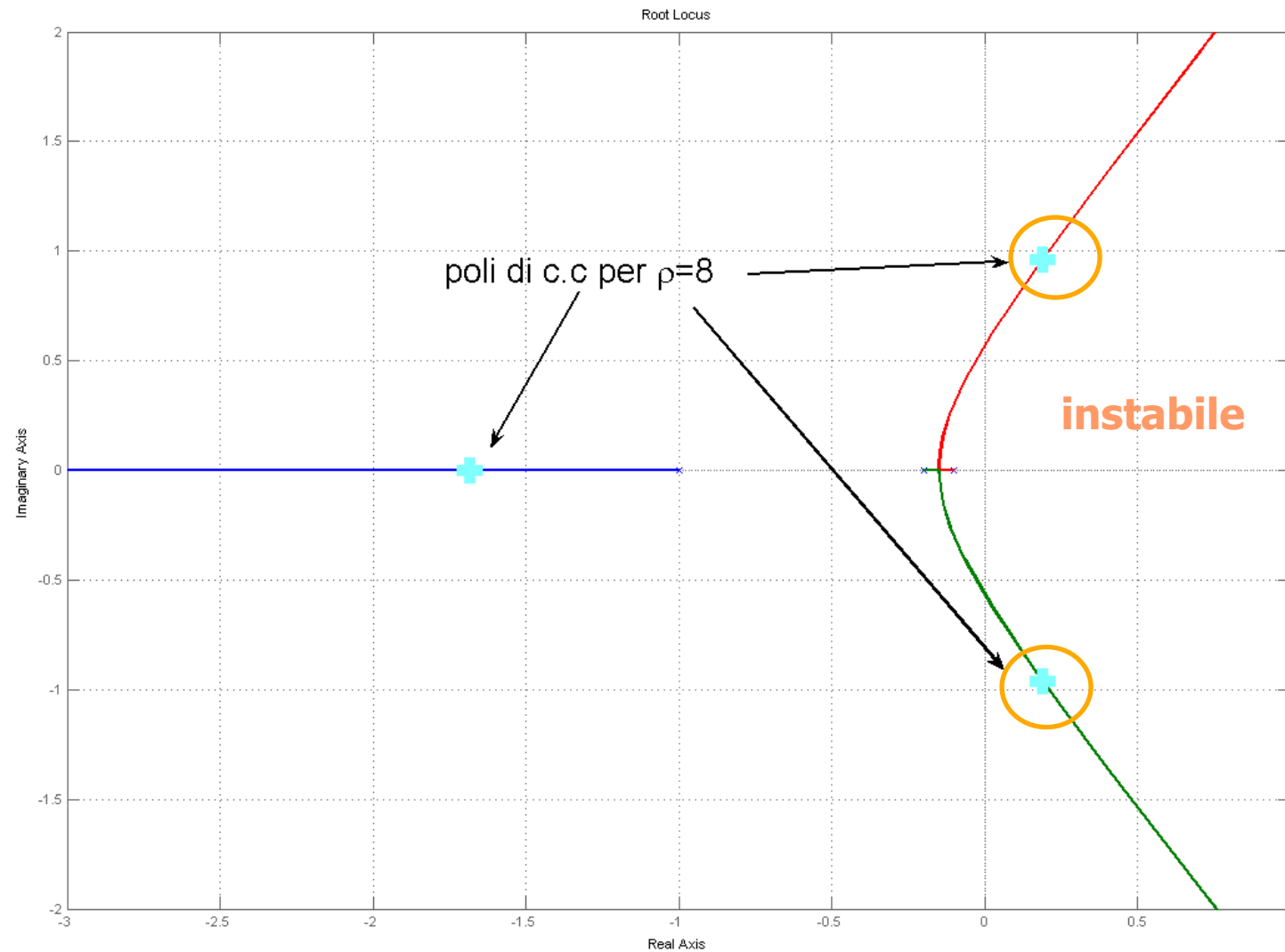
$$L(s) = 8 G(s) R_2(s) = L'(s) R_2(s)$$

$$\text{con } L'(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

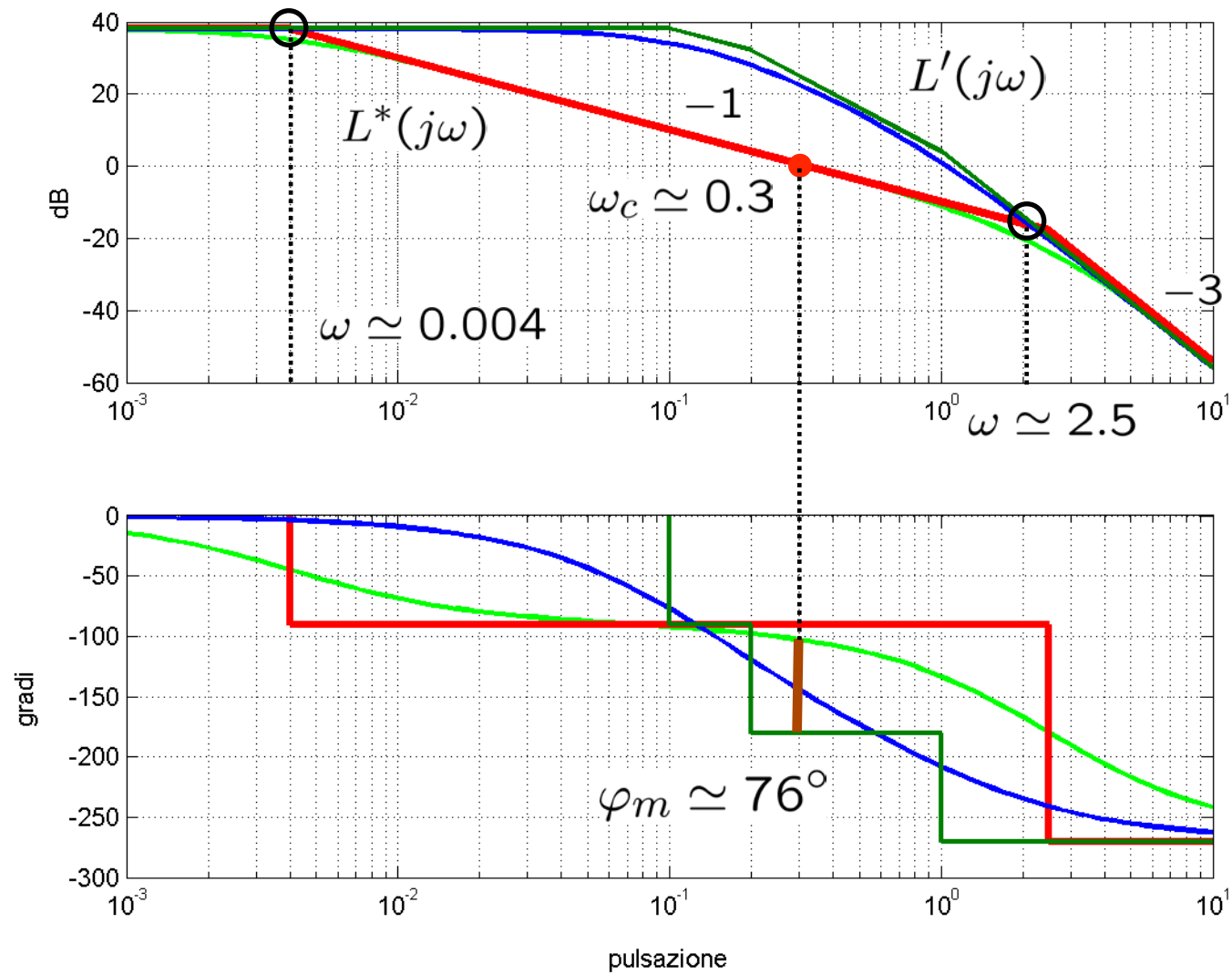
- Tentativo 1

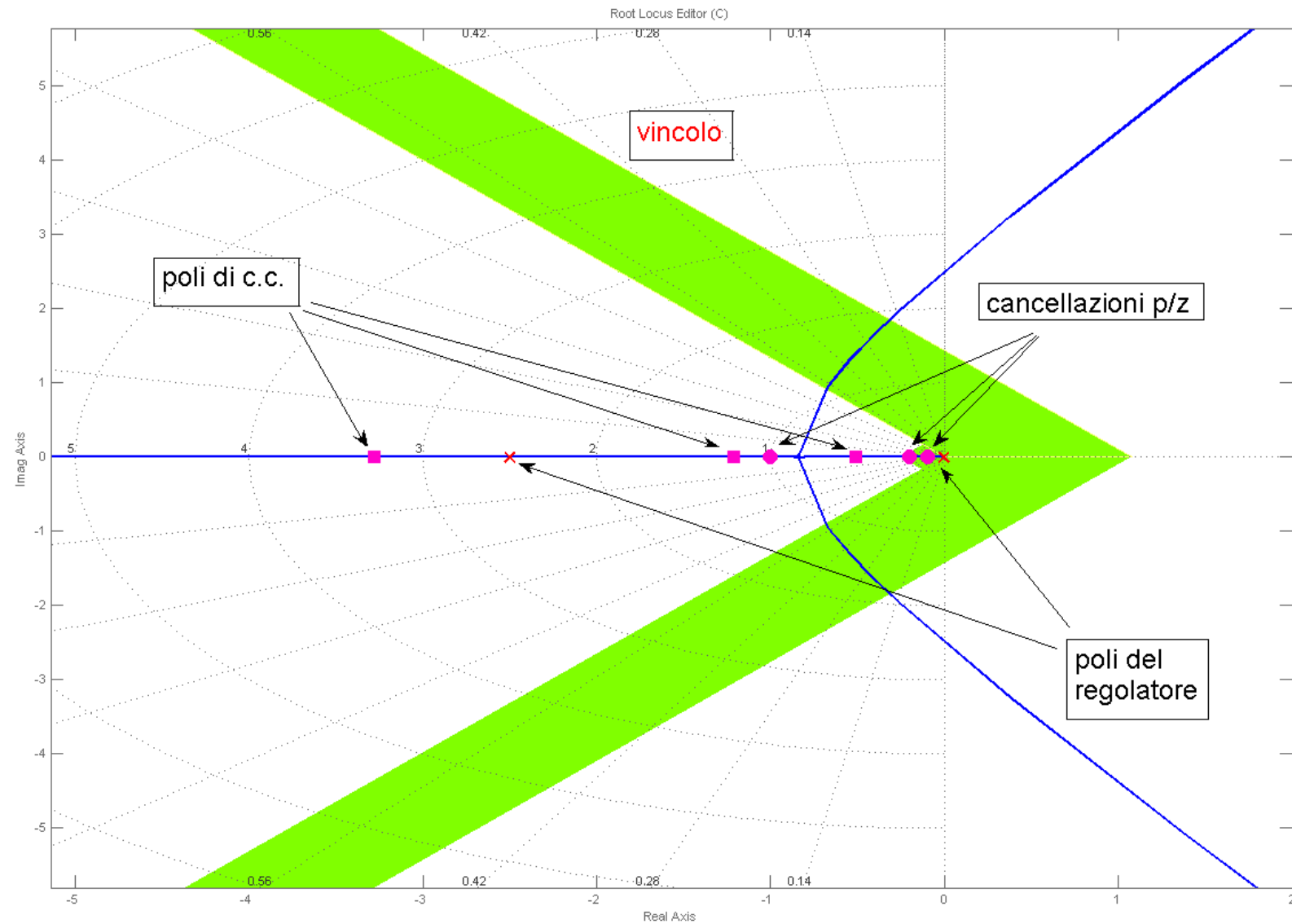
$$R_2(s) = 1$$





- Tentativo 2





- Procedura seguita nel secondo tentativo del progetto (A):

- Si fissa una pulsazione di taglio soddisfacente: $\omega_c = 0.3 \geq 0.2$
 - Si prende una retta con pendenza -1 , passante per ω_c
e si individuano le pulsazioni corrispondenti alle intersezioni con
il diagramma asintotico di L'
 - Si determina quindi la funzione di trasferimento d'anello $L^*(s)$
corrispondente al nuovo diagramma asintotico
 - Essendo evidentemente $L^*(s) = R_2(s)L'(s)$ si ha $R_2(s) = \frac{L^*(s)}{L'(s)}$
 - Nel nostro caso quindi: $L^*(s) = \frac{80}{(1 + s/0.004)(1 + s/2.5)^2}$
- 
 $R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$
 e $R(s) = 8R_2(s)$

- Quindi la soluzione (A) presenta le seguenti caratteristiche:

garantisce la precisione statica

$$R(s) = 8 \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$$

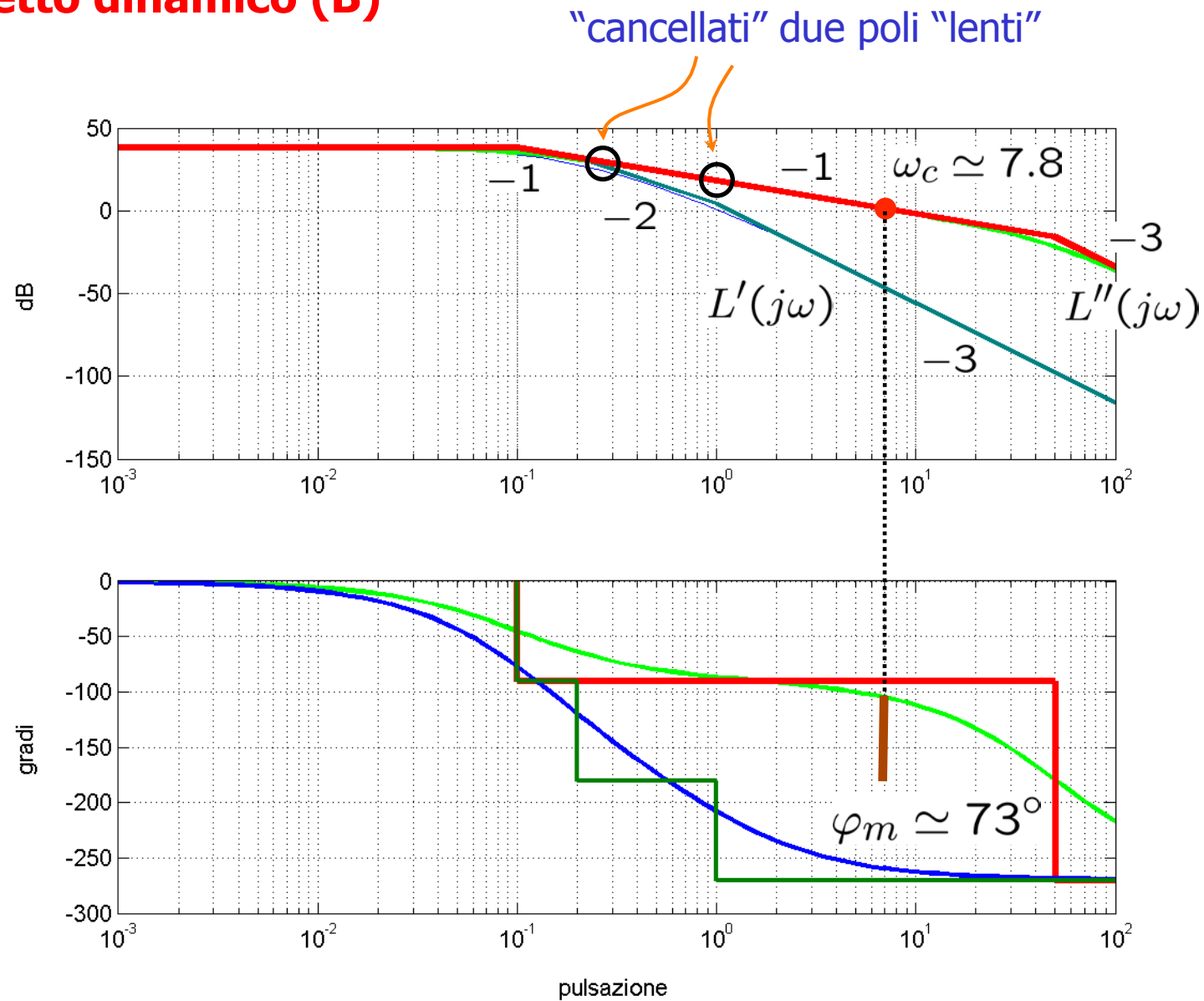
fa scendere $|L(j\omega)|$
a bassa frequenza
(per “tagliare a -1 ”)

- necessari per la realizzabilità
- favoriscono l’attenuazione dei
disturbi in retroazione

- Motivazioni dei “raccordi” tra $L'(s)$ e $L^*(s)$

- A bassa frequenza per non alterare il progetto statico
- Ad alta frequenza per la realizzabilità fisica

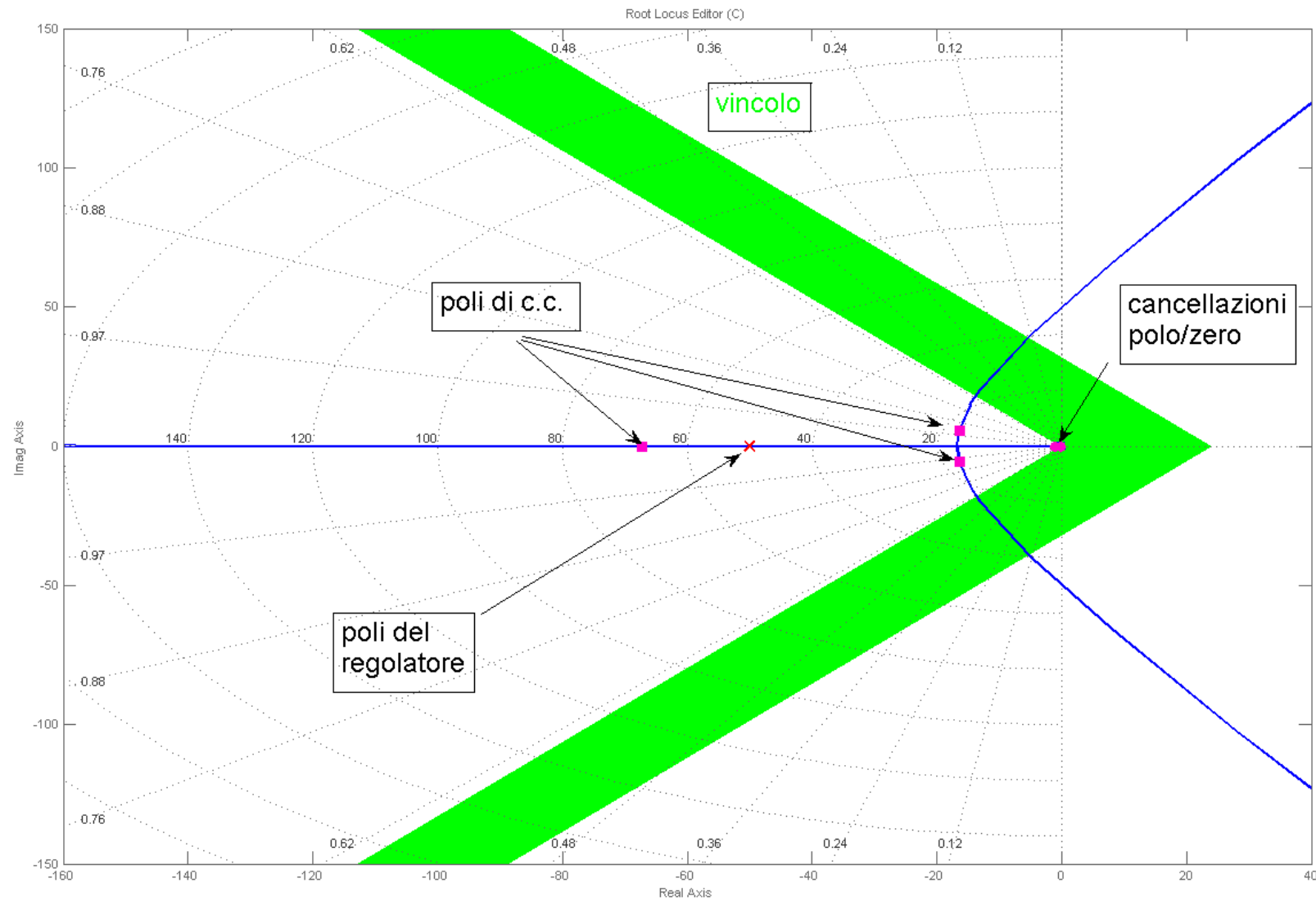
- Progetto dinamico (B)



- Procedura seguita nel progetto (B):

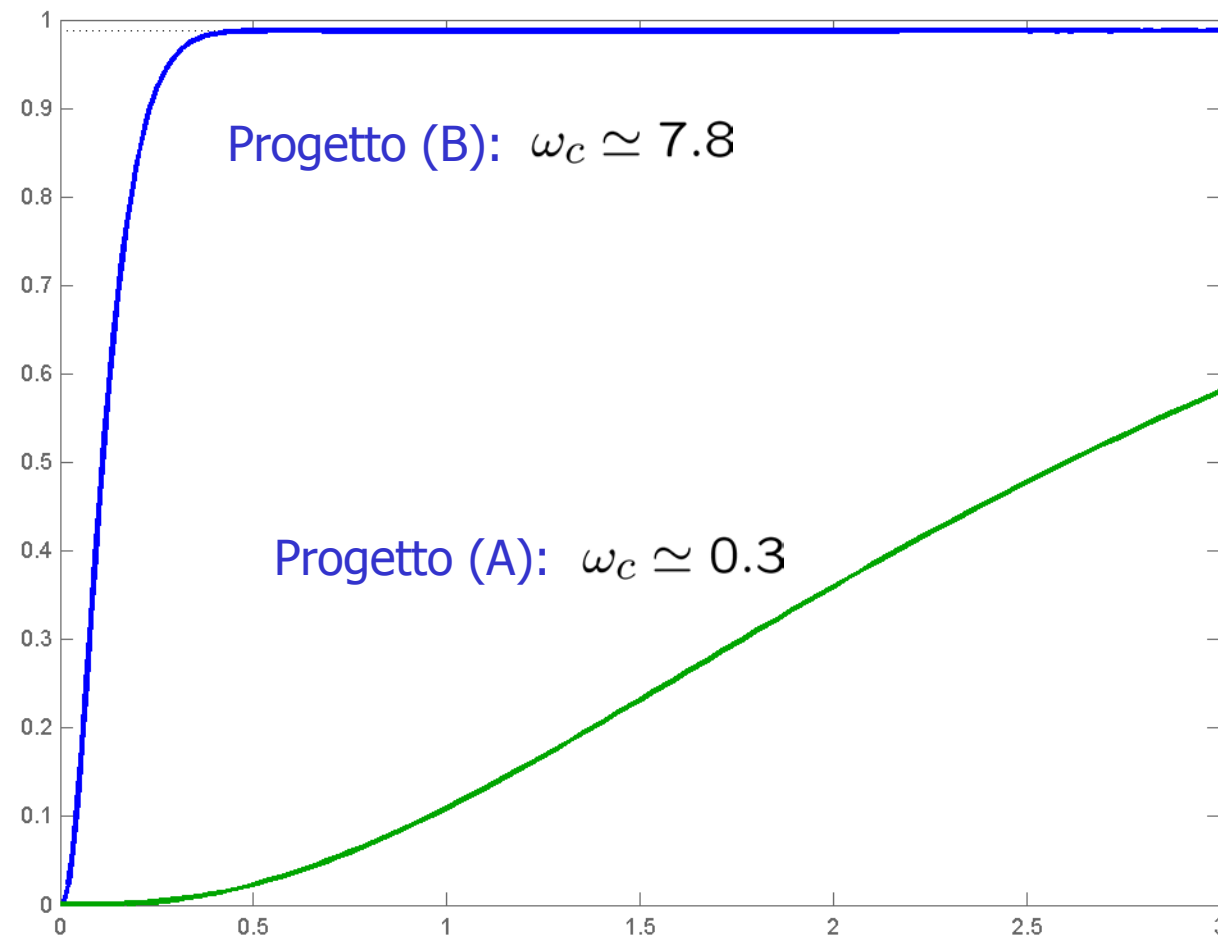
- Si ha cura di mantenere invariato il progetto statico
- Si mantiene il polo in -0.1 (cioè quello più "lento") per avere la "discesa" con pendenza -1
- Si cancellano i poli opportuni in modo da attraversare l'asse a 0 dB con pendenza -1
- Si aggiunge un pari numero di poli sufficientemente a destra della pulsazione di taglio ottenuto
- Nel nostro caso quindi:
$$L''(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 0.02s)^2}$$


$$R_2(s) = \frac{(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 0.02s)^2} \quad \text{e} \quad R(s) = 8R_2(s)$$



- Confronto risposte al gradino del sist. in anello chiuso

Nel Progetto (B) la banda passante e' molto maggiore da cui una velocita' di risposta maggiore



- Inconvenienti associati ad ω_c elevata

- Alti valori dei segnali di controllo generati dal controllore
- Scarsa attenuazione dei disturbi in retroazione
- Scarsa robustezza rispetto a:
 - ritardi di tempo (ricordiamo che lo sfasamento in ritardo cresce con ω)
 - incertezze sul modello ad alta frequenza

- Progetto statico e dinamico (C)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad (\text{quindi cambiamo anche il progetto statico})$$

$$L(s) = \frac{G(s)}{s} \mu_R R_2(s) = L_1(s) \mu_R R_2(s)$$

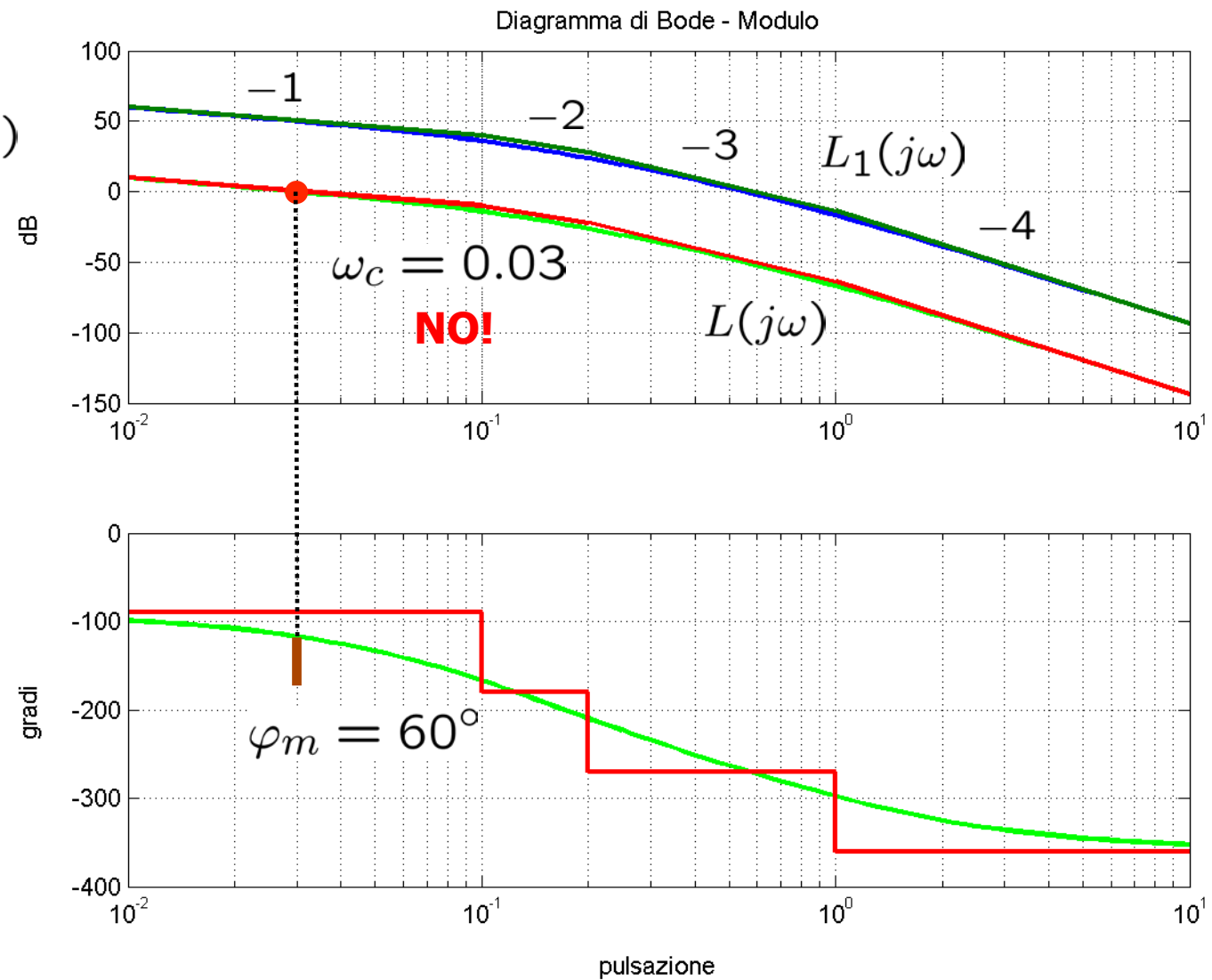
$$\text{con } L_1(s) = \frac{10}{s(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Tentativo 1

$$R_2(s) = 1$$

$$L(s) = \mu_R L_1(s)$$

$$\mu_R = 10^{-5/2} \text{ dB}$$



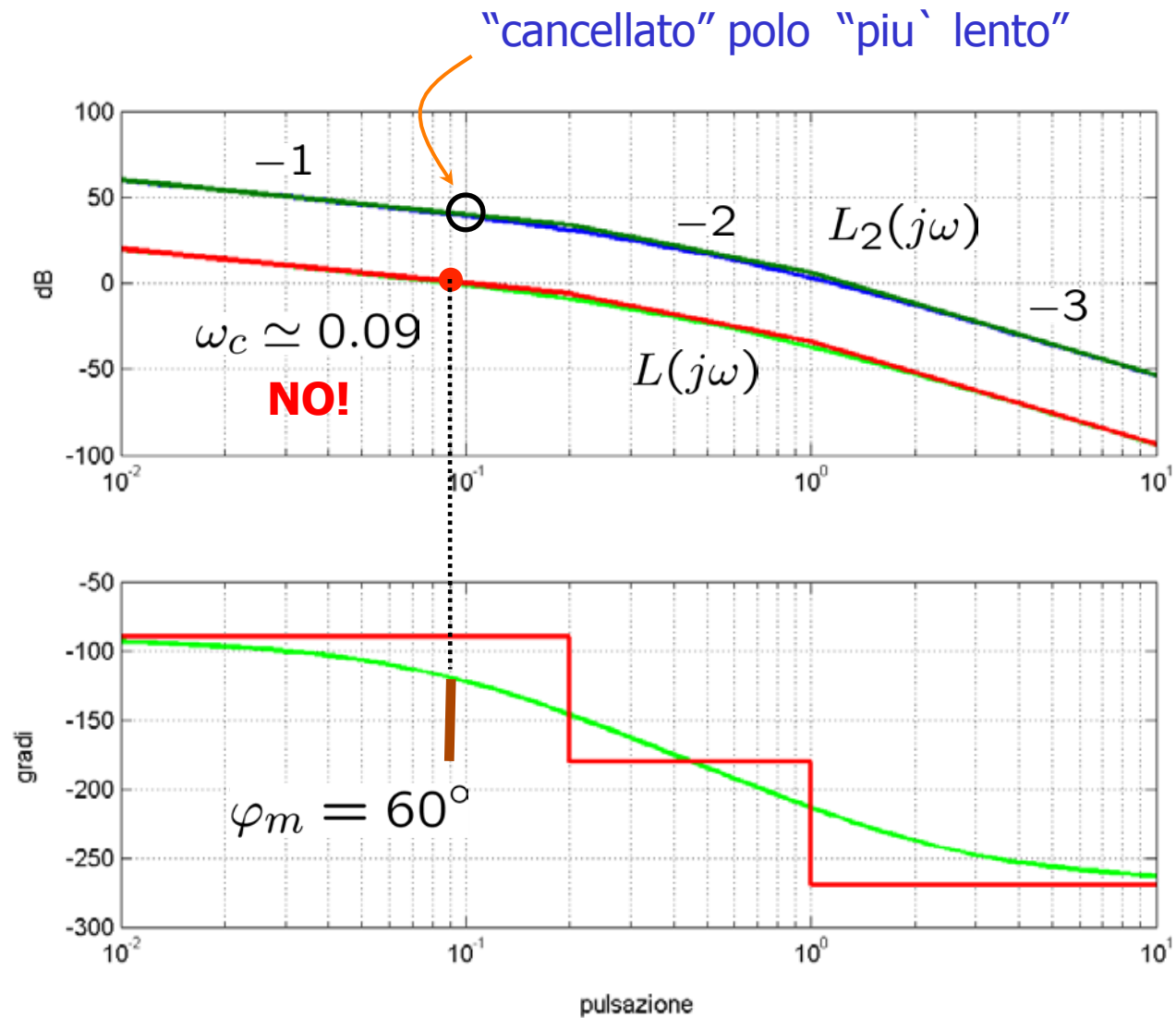
- Tentativo 2

$$R_2(s) = (1 + 10s)$$

$$L(s) = \mu_R L_2(s)$$

$$L_2(s) = \frac{10}{s(1 + 5s)(1 + s)}$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$



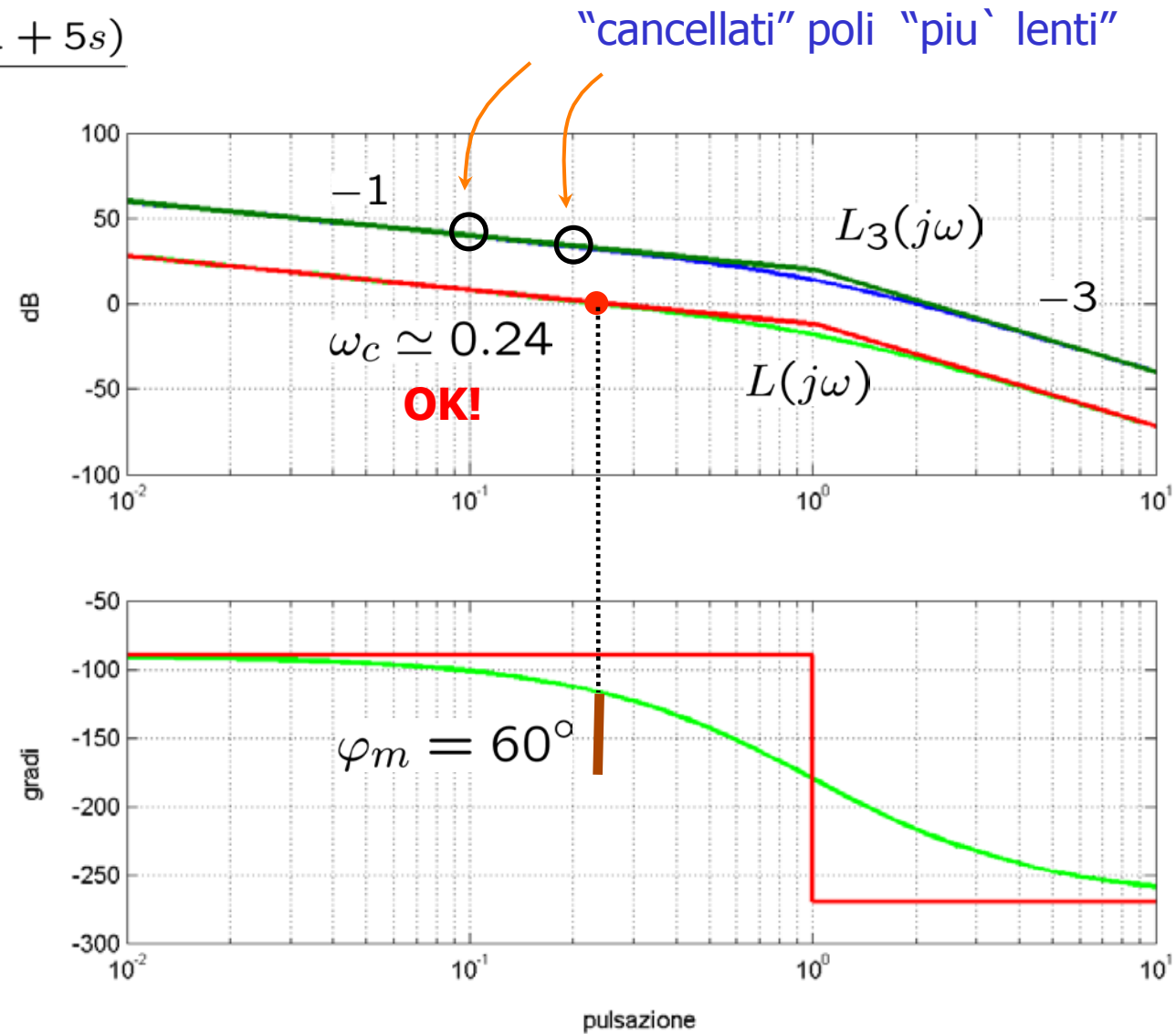
- Tentativo 3

$$R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)}{1 + s}$$

$$L(s) = \mu_R L_3(s)$$

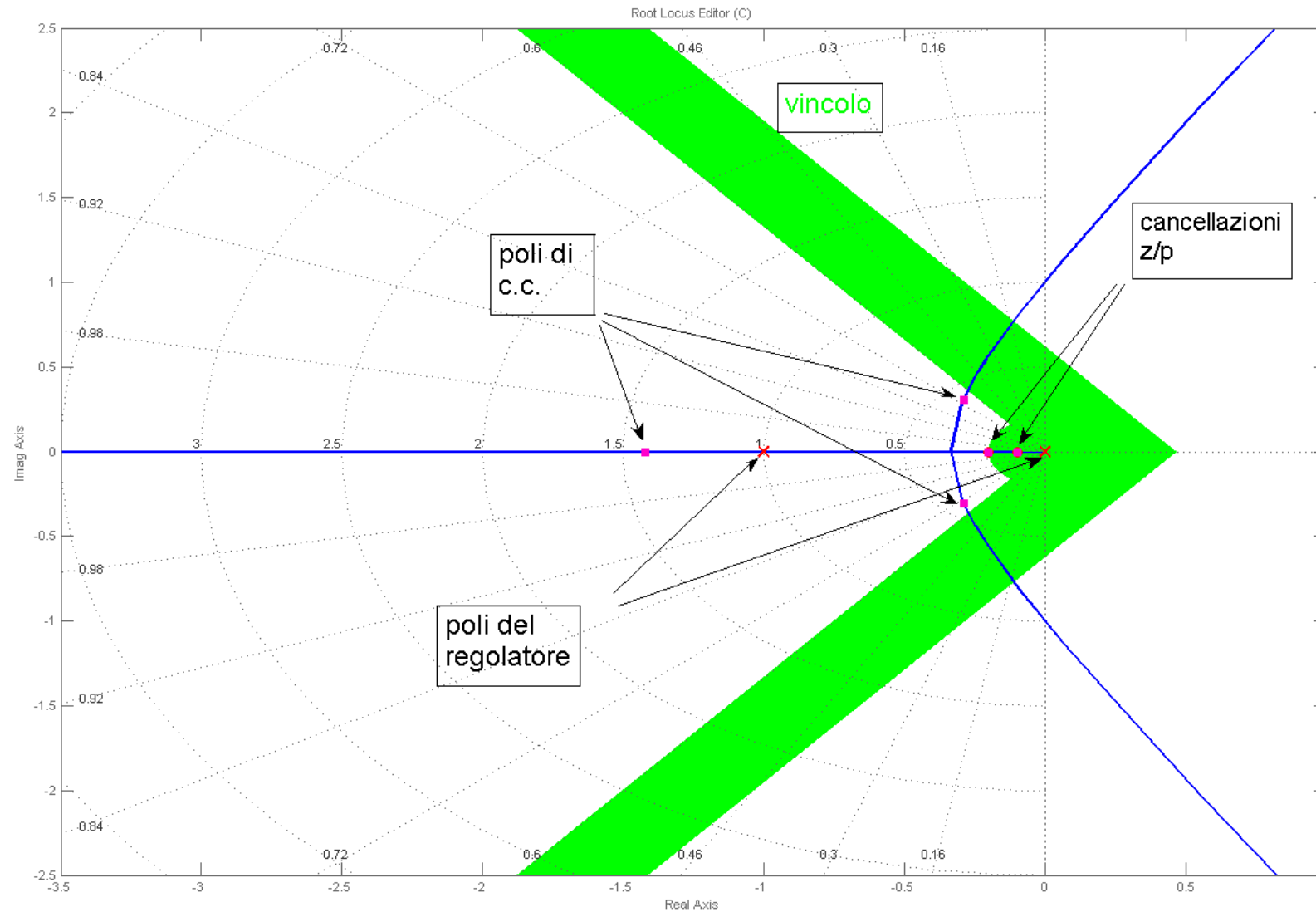
$$L_3(s) = \frac{10}{s(1 + s)^2}$$

$$\mu_R \simeq 0.0254$$



- Progetto sul luogo delle radici

Parte 10, 37



- Riassumendo:

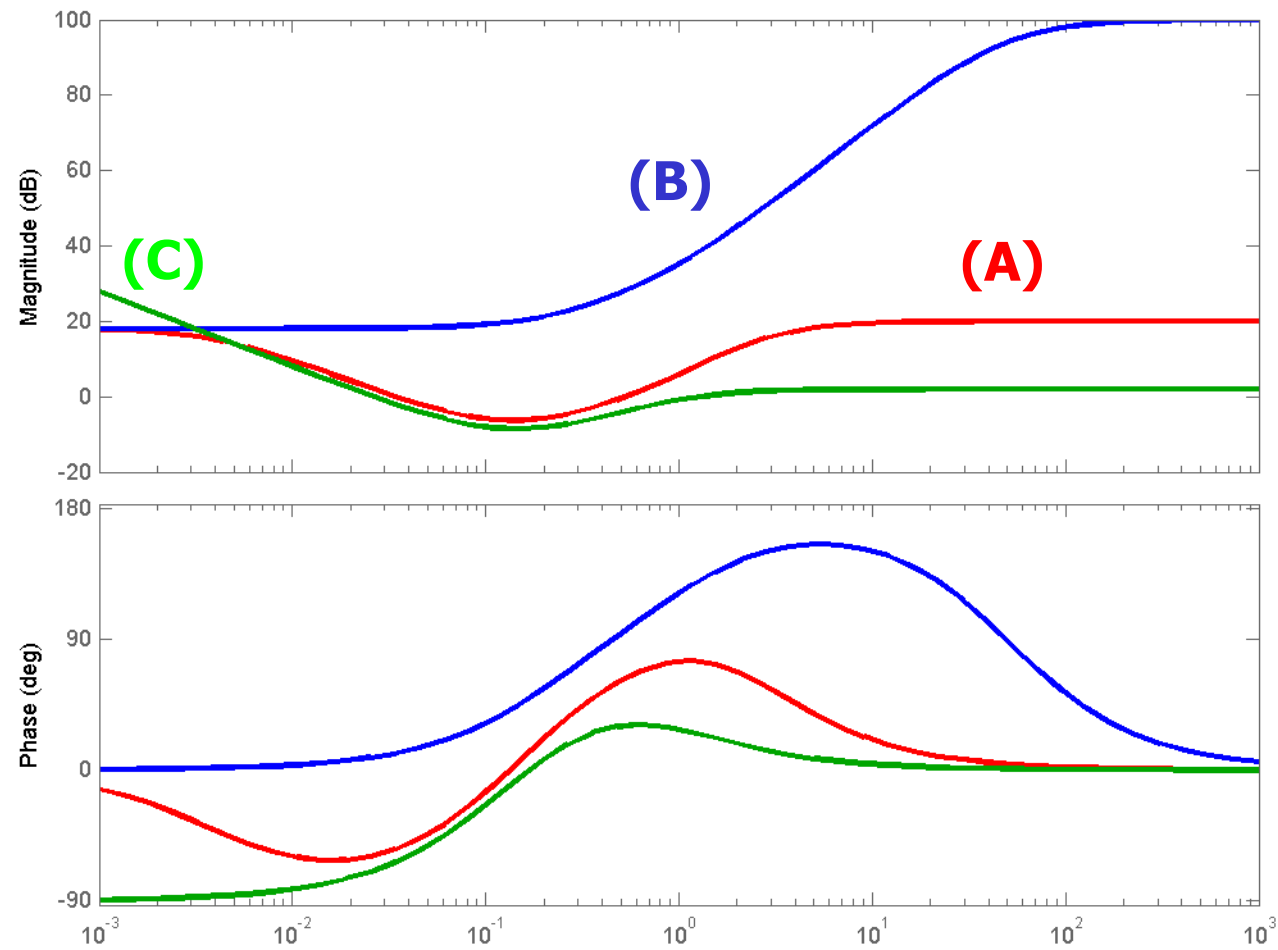
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

(A): $R(s) = \frac{8(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$ $\omega_c \simeq 0.3$
 $\varphi_m \simeq 76^\circ$

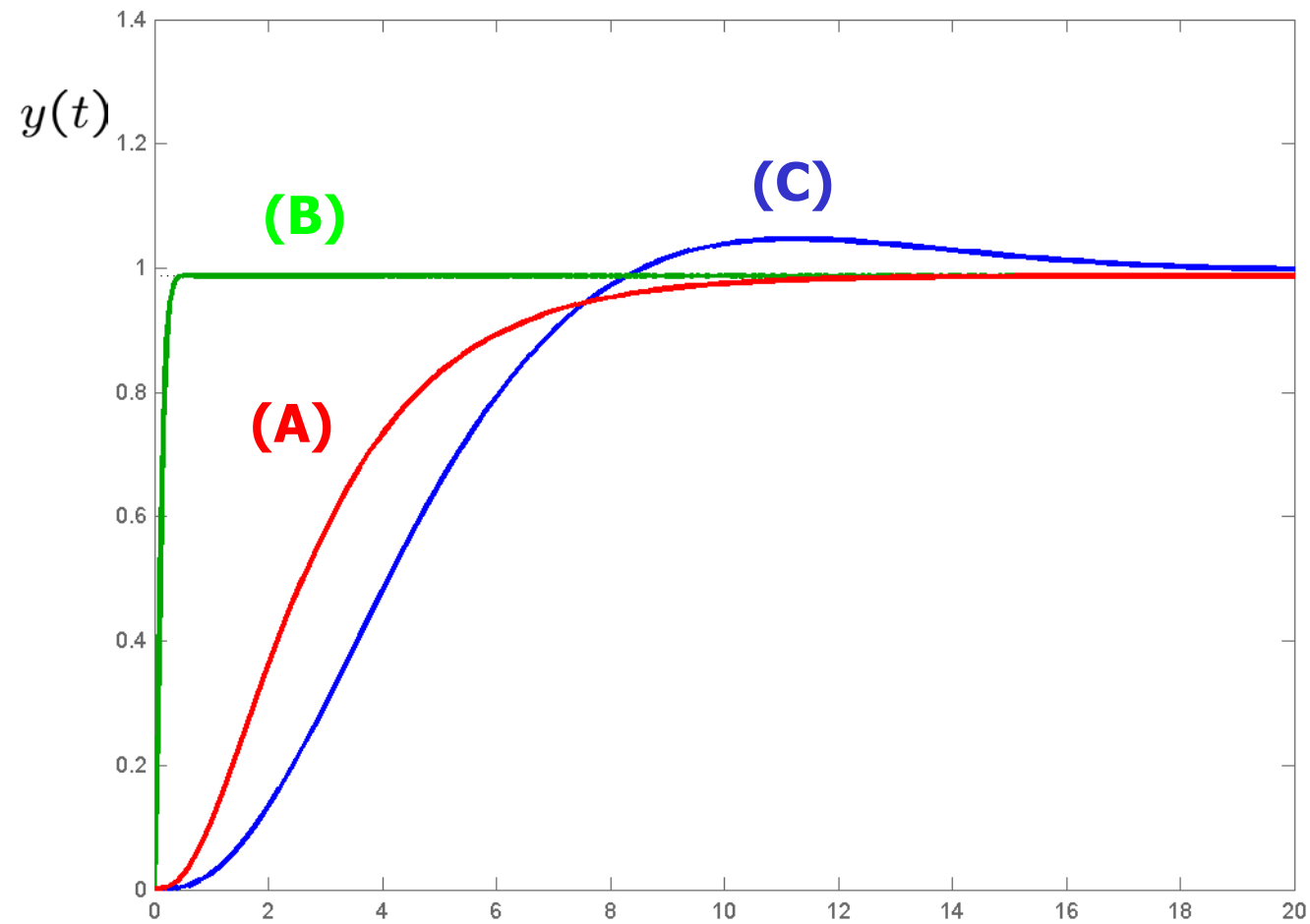
(B): $R(s) = \frac{8(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 0.02s)^2}$ $\omega_c \simeq 7.8$
 $\varphi_m \simeq 73^\circ$

(C): $R(s) = \frac{0.0254(1 + 10s)(1 + 5s)}{s(1 + s)}$ $\omega_c \simeq 0.24$
 $\varphi_m \simeq 63^\circ$
 $e(\infty) = 0$

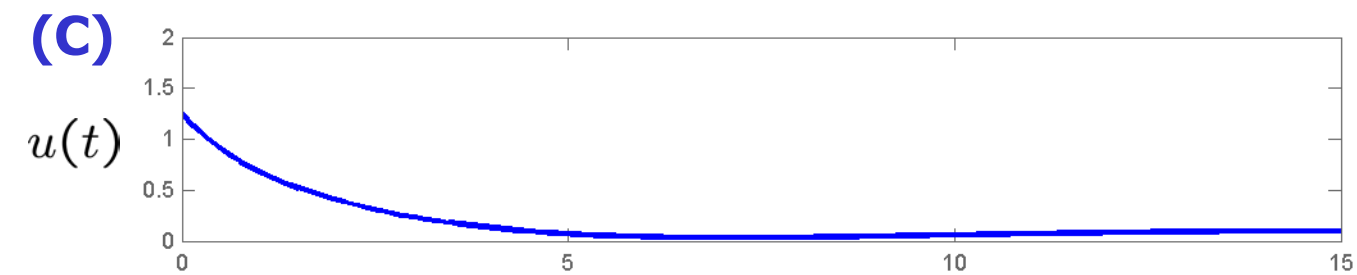
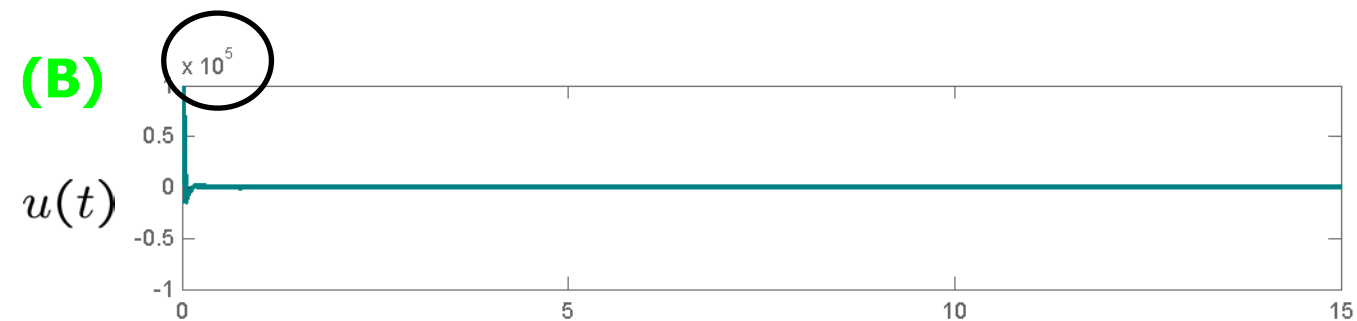
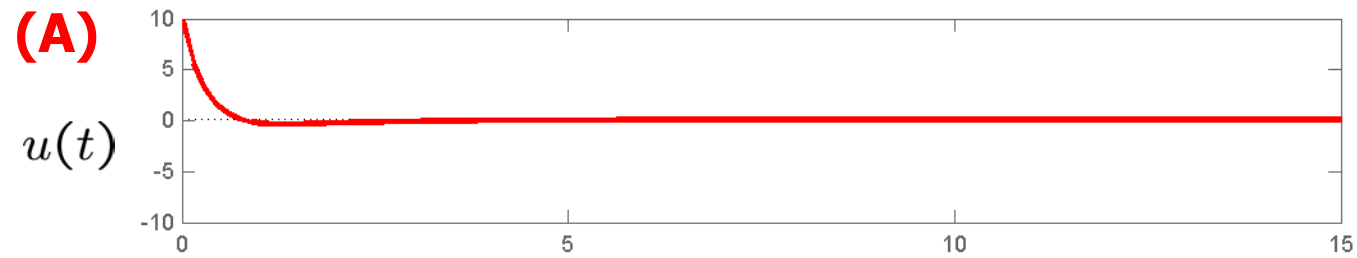
- Diagrammi di Bode dei diversi controllori:



- Risposte al gradino in anello chiuso:

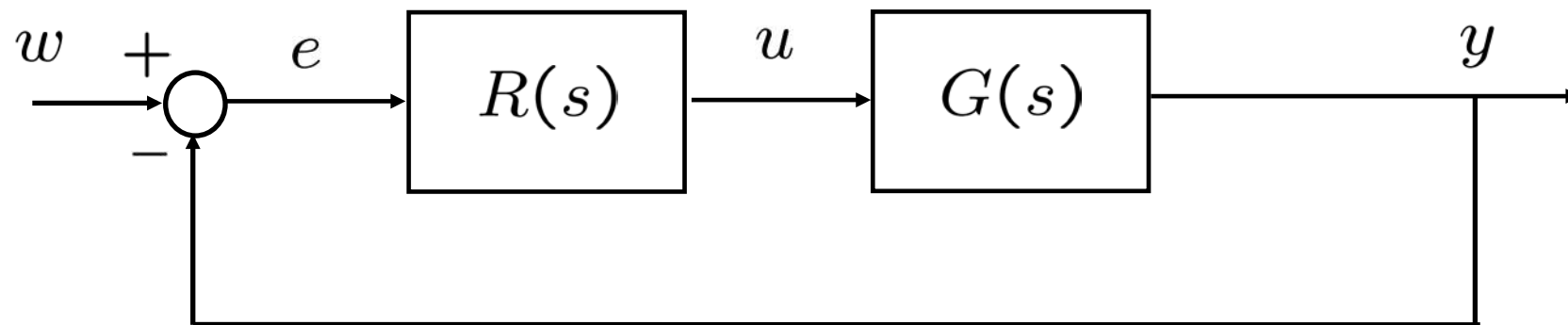


- Segnali di controllo:



- Progetto per sistemi a fase non minima/instabili

- Se il sistema da controllare non è a fase minima o è instabile, non si può utilizzare il criterio di Bode ed inoltre non si possono effettuare cancellazioni di zeri o poli a parte reale positiva quindi il progetto per tentativi va condotto con cautela.
- Inoltre la presenza di tali zeri/poli pone delle limitazioni su ciò che può essere ottenuto in termini di prestazioni

- Esempio 2 (a fase non minima)

$$G(s) = \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 10s)(1 + 0.1s)}$$

- Specifica di progetto: $\varphi_m \geq 40^\circ$

- Il termine $\frac{(1 - 2s)}{s}$

- Non e' cancellabile.
- Da' contributo negativo alla fase: $-90^\circ - \text{arctg}(2\omega)$

in $\omega = 0.5$ tale contributo vale -135°



ω_c

Non potra' superare di molto $\omega = 0.5$



Lo zero a fase non minima da' una limitazione forte alla velocita' di risposta ottenibile a valle del progetto del controllore

- Tentativo 1 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.085$

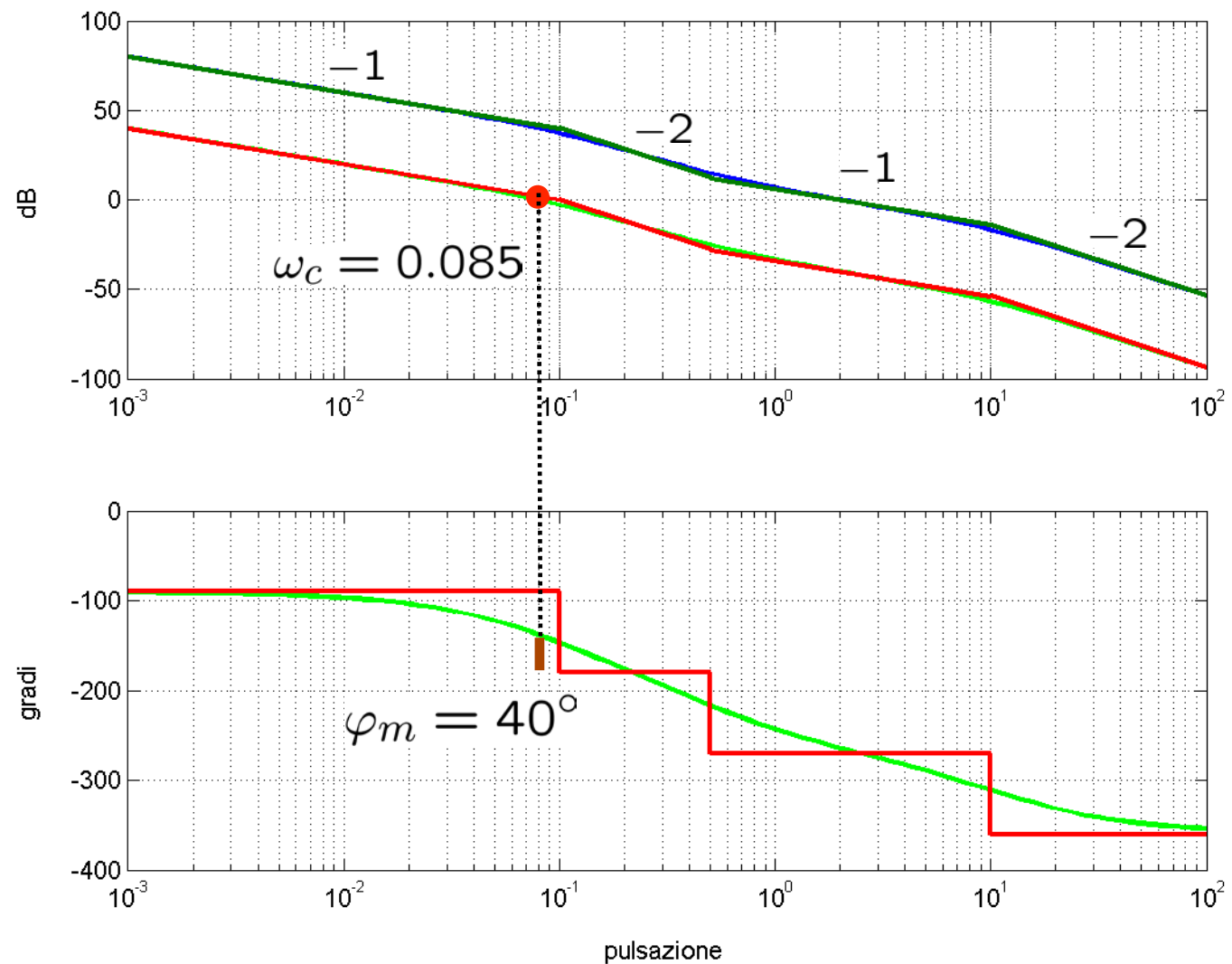
$\omega_{c\max} = 0.085$

$$R(s) = \mu_R$$

$$L(s) = \mu_R G(s)$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$

$\omega_c = 0.085$ dB

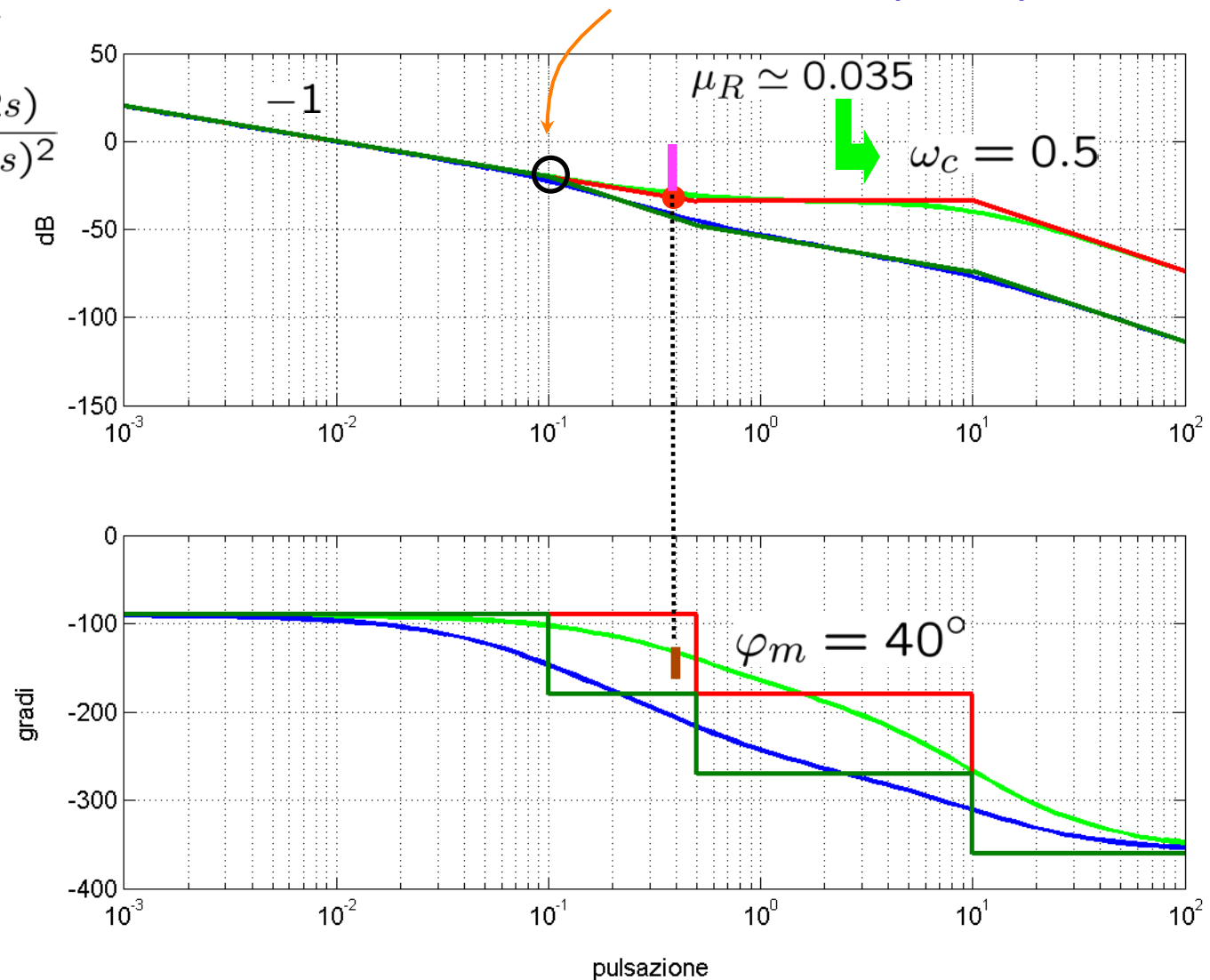


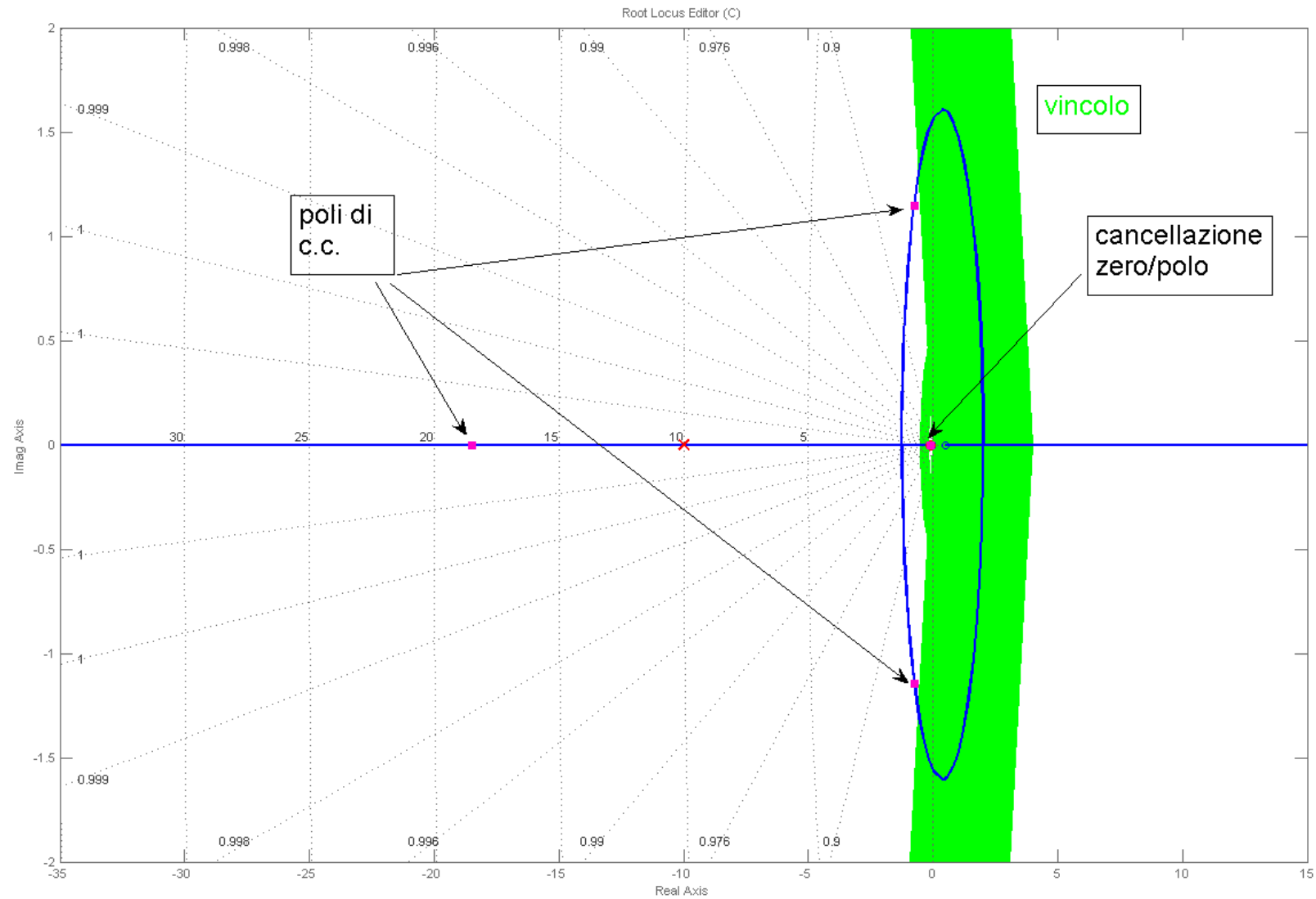
- Tentativo 2 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.5$

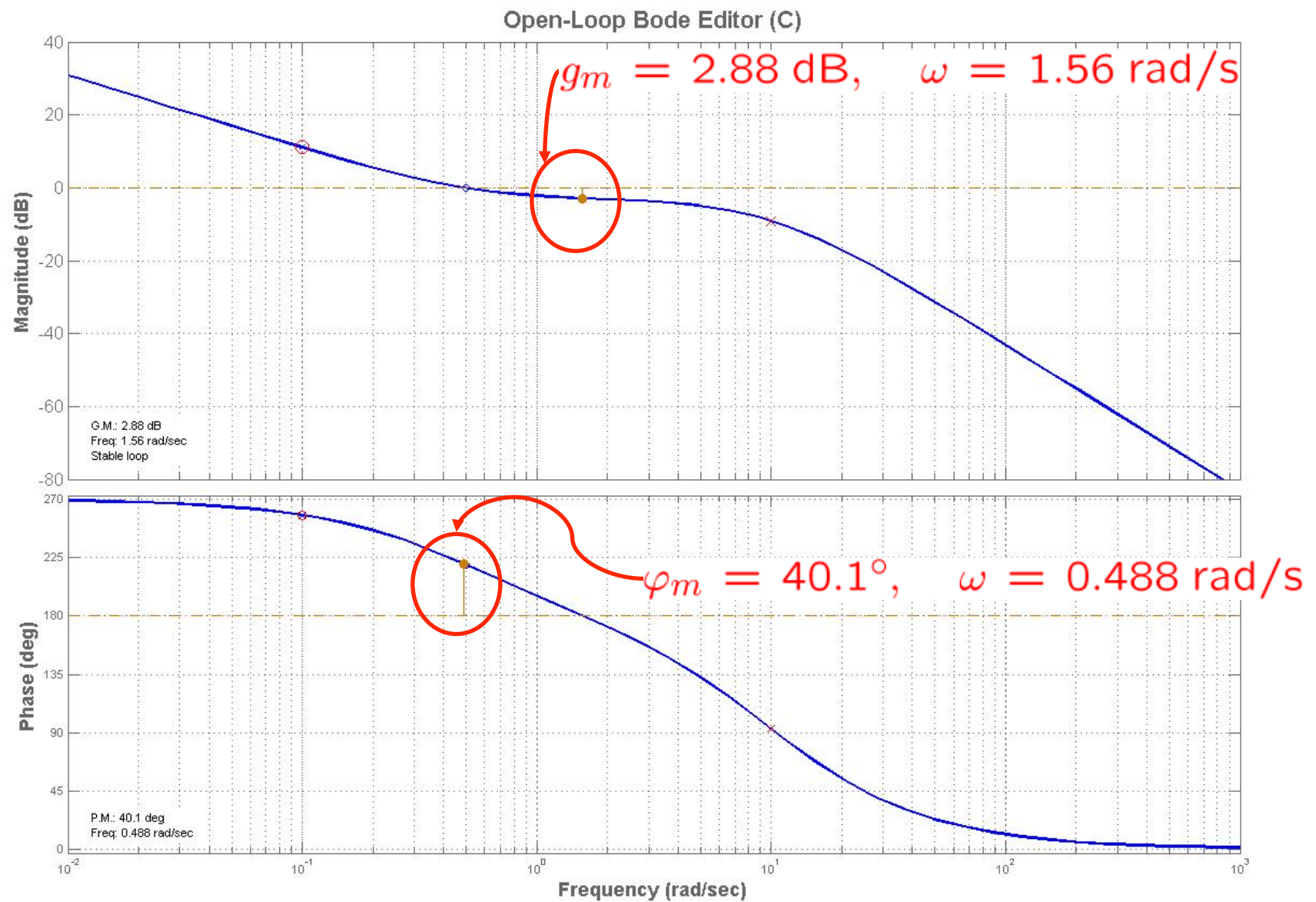
$$R(s) = \mu_R \frac{1 + 10s}{1 + 0.1s}$$

$$L(s) = \mu_R \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 0.1s)^2}$$

“cancellato” polo “piu` lento”

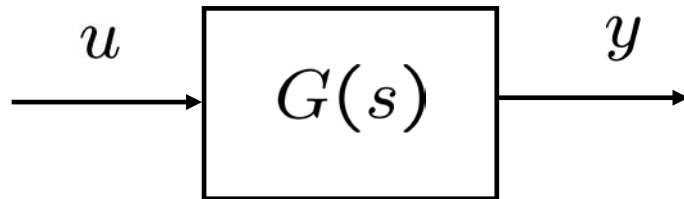








- Esempio 3 (instabile in anello aperto)

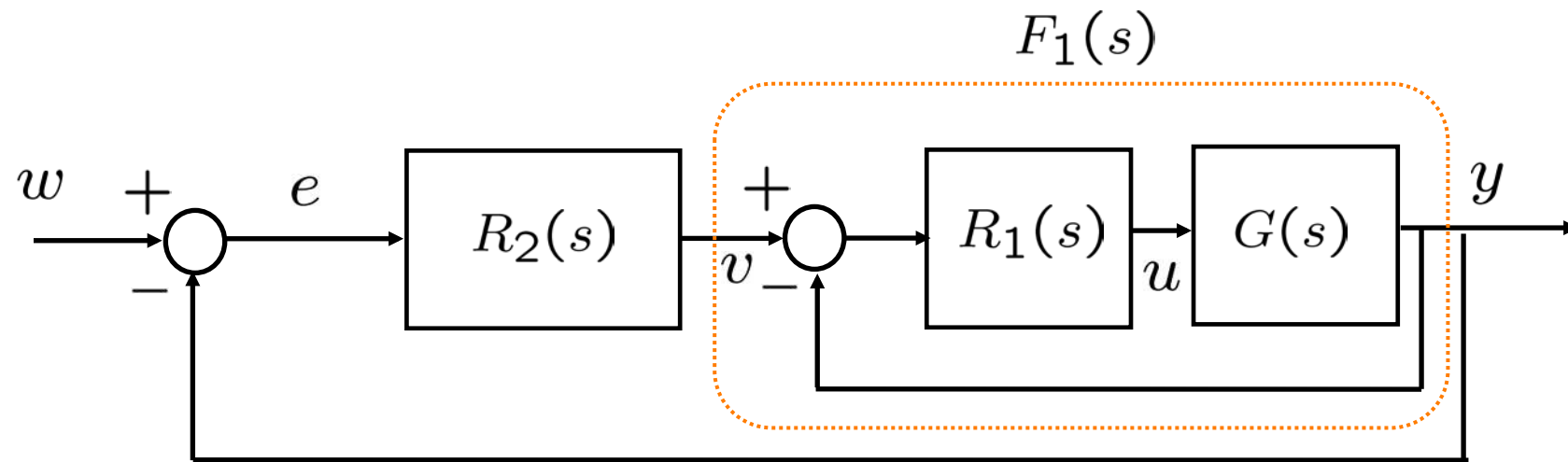


$$G(s) = \frac{1}{s - 1}$$

- Specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0$ con $w(t) = A \cdot 1(t)$
- $\omega_c \geq 0.5$
- $\varphi_m \geq 45^\circ$

La via piu` semplice e` utilizzare il cosiddetto **schema a doppio anello**:



$R_1(s)$ ha il compito di stabilizzare il sistema da controllare

$R_2(s)$ ha il compito di far si` che le specifiche di progetto siano soddisfatte

Il progetto di $R_1(s)$ puo` essere condotto semplicemente cosi`:

$$R_1(s) = \mu_1 \quad \longrightarrow \quad L_1(s) = \frac{\mu_1}{s - 1}$$

$$\downarrow \quad F_1(s) = \frac{L_1(s)}{1 + L_1(s)} = \frac{\mu_1}{s - 1 + \mu_1}$$

Scegliendo per esempio $\mu_1 = 11$ si otterrebbe $F_1(s) = \frac{1.1}{1 + 0.1s}$

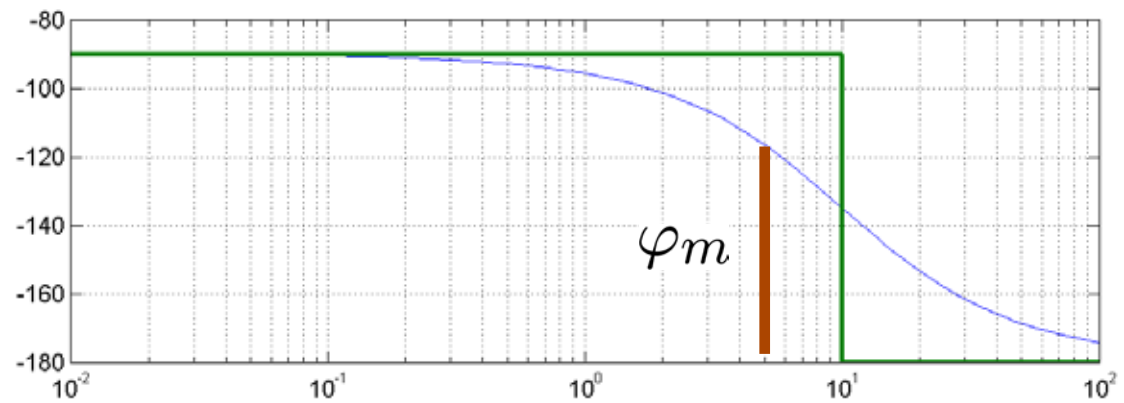
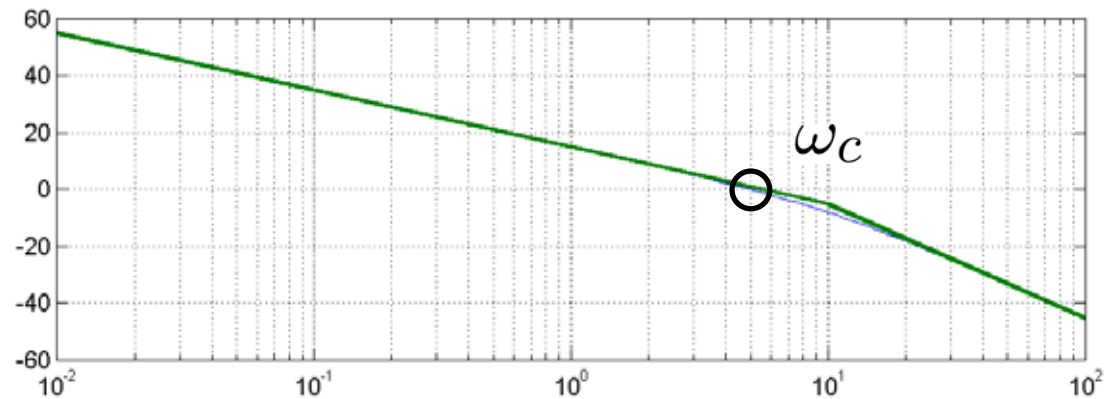
Il progetto di $R_2(s)$ e' ora molto semplice. Per esempio

$$R_2(s) = \frac{5}{s}$$



$$L_1(s) = \frac{5.5}{s(1 + 0.1s)}$$

- $|e(\infty)| = 0$
- $\omega_c \simeq 5.5$
- $\varphi_m \simeq 61^\circ$



Progetto di regolatori standard

Reti correttrici
Regolatori PID

Strutture dei regolatori standard

- Reti correttrici
 - Rete anticipatrice
 - Rete ritardatrice
 - Rete a sella
- Regolatori PID

Rete anticipatrice (o “*lead network* “)

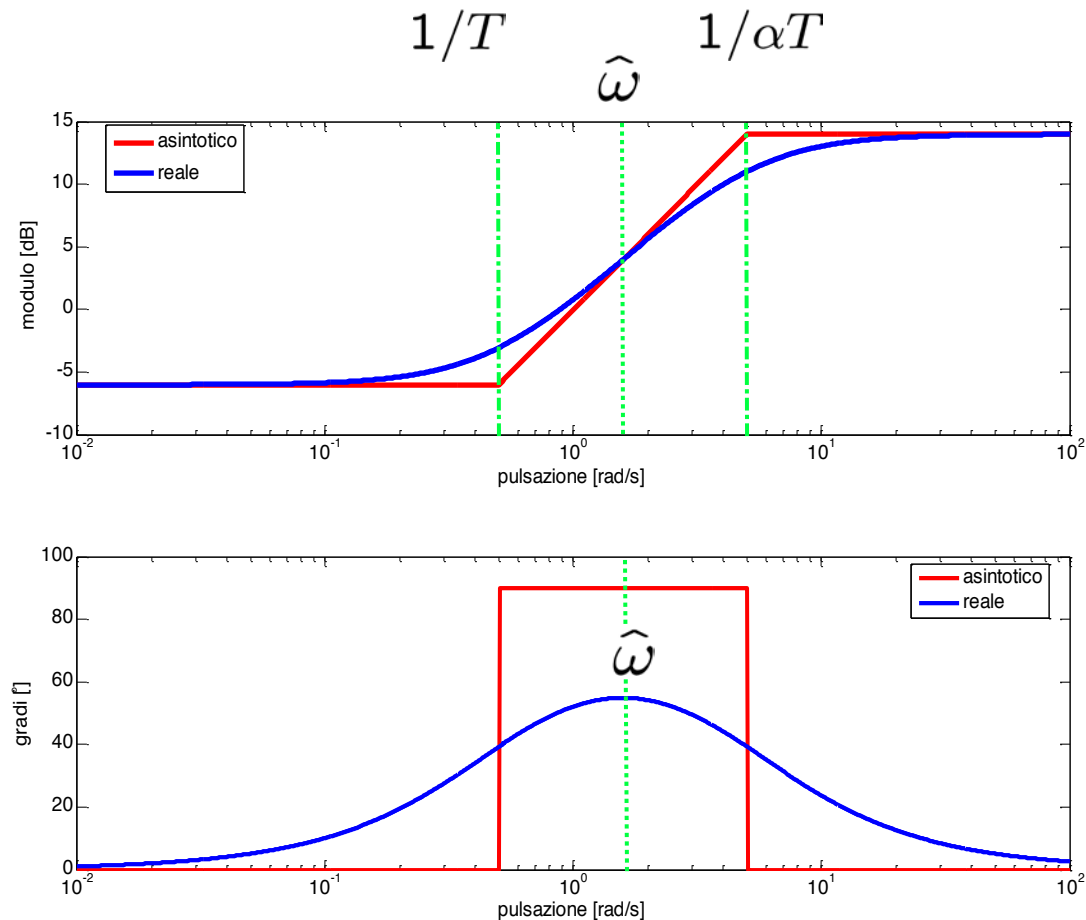
$$R(s) = \mu_R \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

$$\mu_R > 0$$

$$T > 0$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$



$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha}) \quad \text{Massimo anticipo di fase}$$

Compensazione con rete anticipatrice

- Si piazza $\hat{\omega}$ **vicino** alla ω_c desiderata, massimizzando il margine di fase.
- Il massimo anticipo di fase dipende soltanto da α : non si deve esagerare per non amplificare troppo in alta frequenza.
- Scelta tipica:
 $\alpha=0.1 \iff \text{anticipo} = 55^\circ \text{ in } \hat{\omega}$
- NB! Una volta individuata la rete, va **verificato** che effettivamente si ottengano le prestazioni richieste (in termini di margini di fase e di guadagno, di moderazione del segnale di comando ecc.) .
- È una **tecnica di progetto per tentativi**.

Esempio: progetto di una rete anticipatrice

- Determinare una rete che garantisca un anticipo massimo pari a $40^\pm$ in corrispondenza di $\omega=1$:

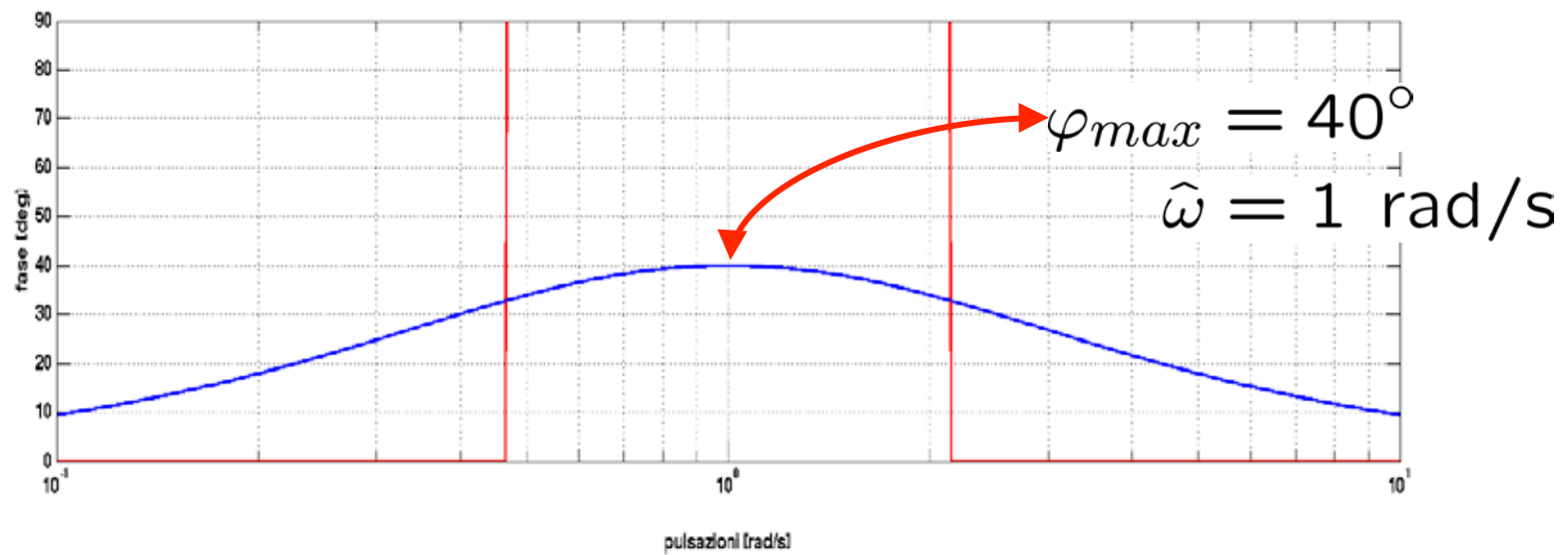
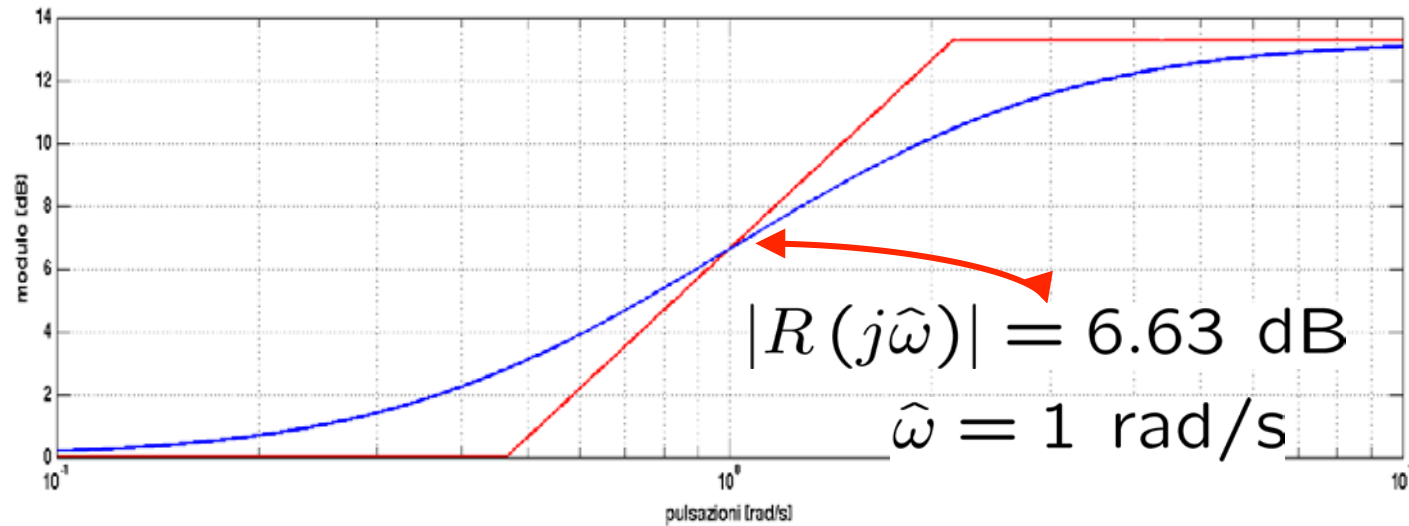
- dalla relazione $\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha})$
si ricava che $\longrightarrow \alpha \approx 0.22$

- Infine da $\hat{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \longrightarrow T \approx 2.14$

- A questo punto la rete è determinata completamente assegnando il valore del guadagno statico μ_R della rete $\mu_R = 1$

$$R(s) = \frac{1 + 2.14 s}{1 + 0.47 s}$$

$$\omega \rightarrow \infty \rightarrow |R(j\omega)| \rightarrow 13.25 \text{ dB}$$



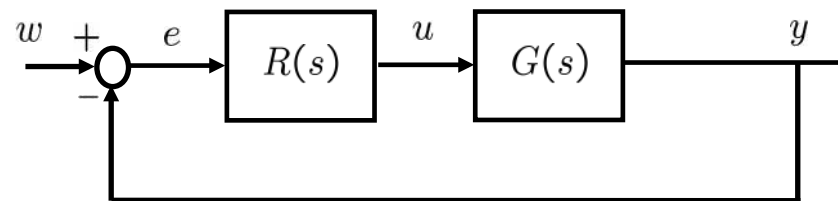
Un esempio completo

- Si progetti un regolatore per il sistema descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)}$$

in grado di garantire che

- risulti $|e_1| < 0.1$ quando l'ingresso è $w(t) = t \cdot 1(t)$
- Il sistema retroazionato presenti
 - Banda passante $\omega_c \approx 2 \text{ rad/s}$
 - Sovraelongazione nella risposta allo scalino unitario non superiore al 16%



- Dalla relazione che lega la sovraelongazione nella risposta allo scalino allo smorzamento dei poli dominanti (Parte 7, slide #32 - 34) si ricava che

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{\%} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\ \Delta_{\%} \leq 16\% \end{array} \right\} \rightarrow \xi \geq 0.5$$

- La specifica sull'errore a regime alla rampa impone che (se non si sceglie di realizzare un sistema di “*tipo 2*”) debba valere che

$$|e_{\infty}| < \frac{1}{10} \rightarrow \mu_L = L(0) = \mu_R \cdot \mu_G > 10$$

$$\downarrow$$

$$\mu_R > 1$$

- Valutiamo ora il margine di fase del solo processo $G(s)$, per capire come progettare la rete (in realtà anche per capire quale tipo di rete sia necessaria)

$$\angle G(j2) = -90^\circ - \angle (1 + 2j) \approx -154^\circ$$

- Supponendo che il sistema controllato possa essere approssimato da una FdT a soli 2 poli dominanti complessi coniugati (con $\omega_n = 2$) dal coefficiente di smorzamento si può ricavare il margine di fase desiderato (Parte 9 – slide # 62)

$$\xi \geq 0.5 \quad \longrightarrow \quad \varphi_m \geq 50^\circ$$

- Allora è necessaria una rete anticipatrice che fornisca un anticipo massimo pari a (per cautelarsi)

$$\varphi_{max} = 30^\circ, \quad \hat{\omega} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_{max} = 30^\circ, \quad \hat{\omega} = 2 \text{ rad/s}$$



$$\alpha = 0.333 \quad T = 0.866$$

$$R(s) = \mu_R \frac{1 + 0.866 s}{1 + 0.288 s}$$

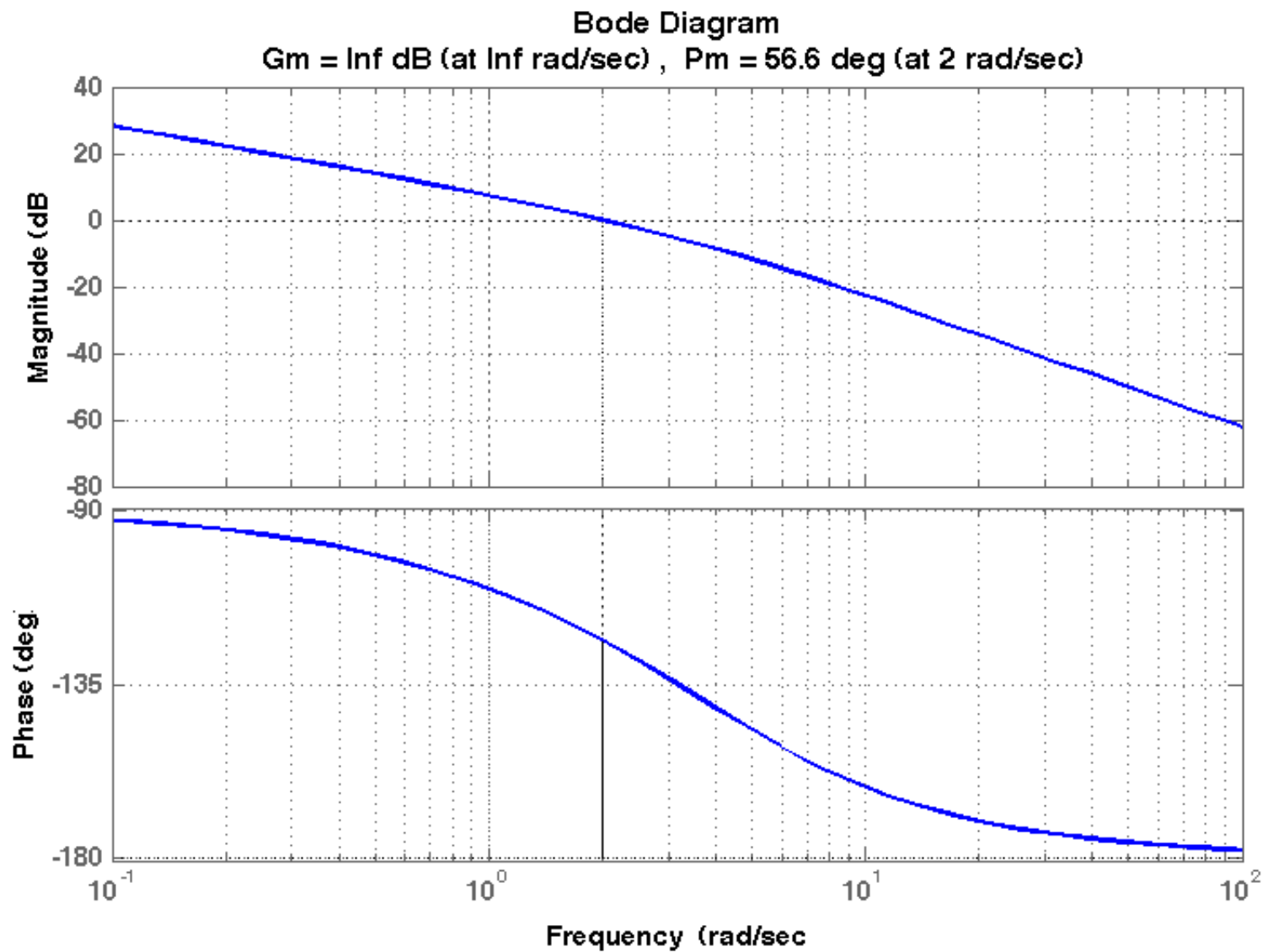


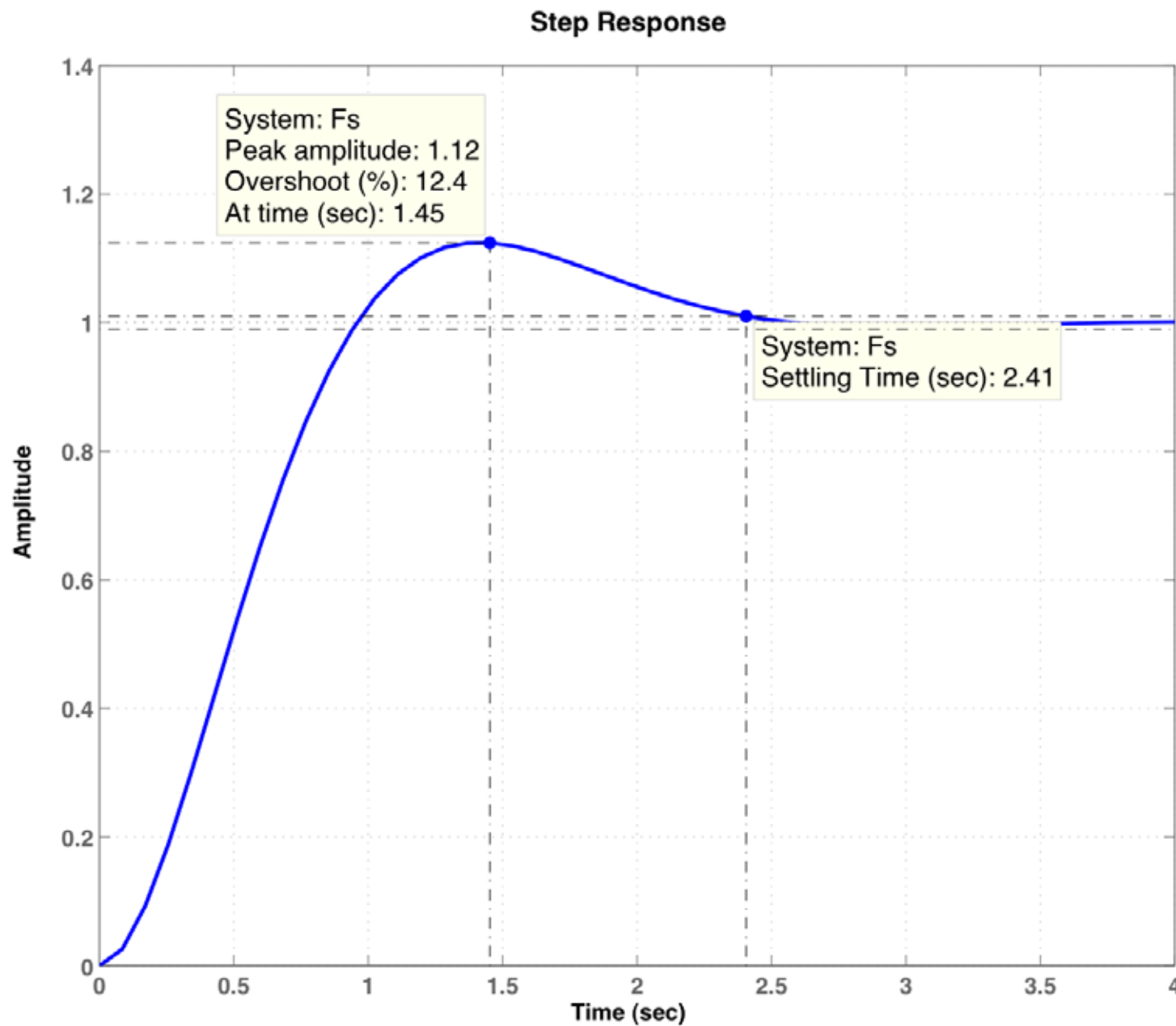
- Il guadagno statico della rete lo si determina imponendo che valga la relazione

$$|L(j2)| = \mu_R \left| \frac{1 + j1.732}{1 + j0.576} \right| \cdot |G(j2)| = 1$$

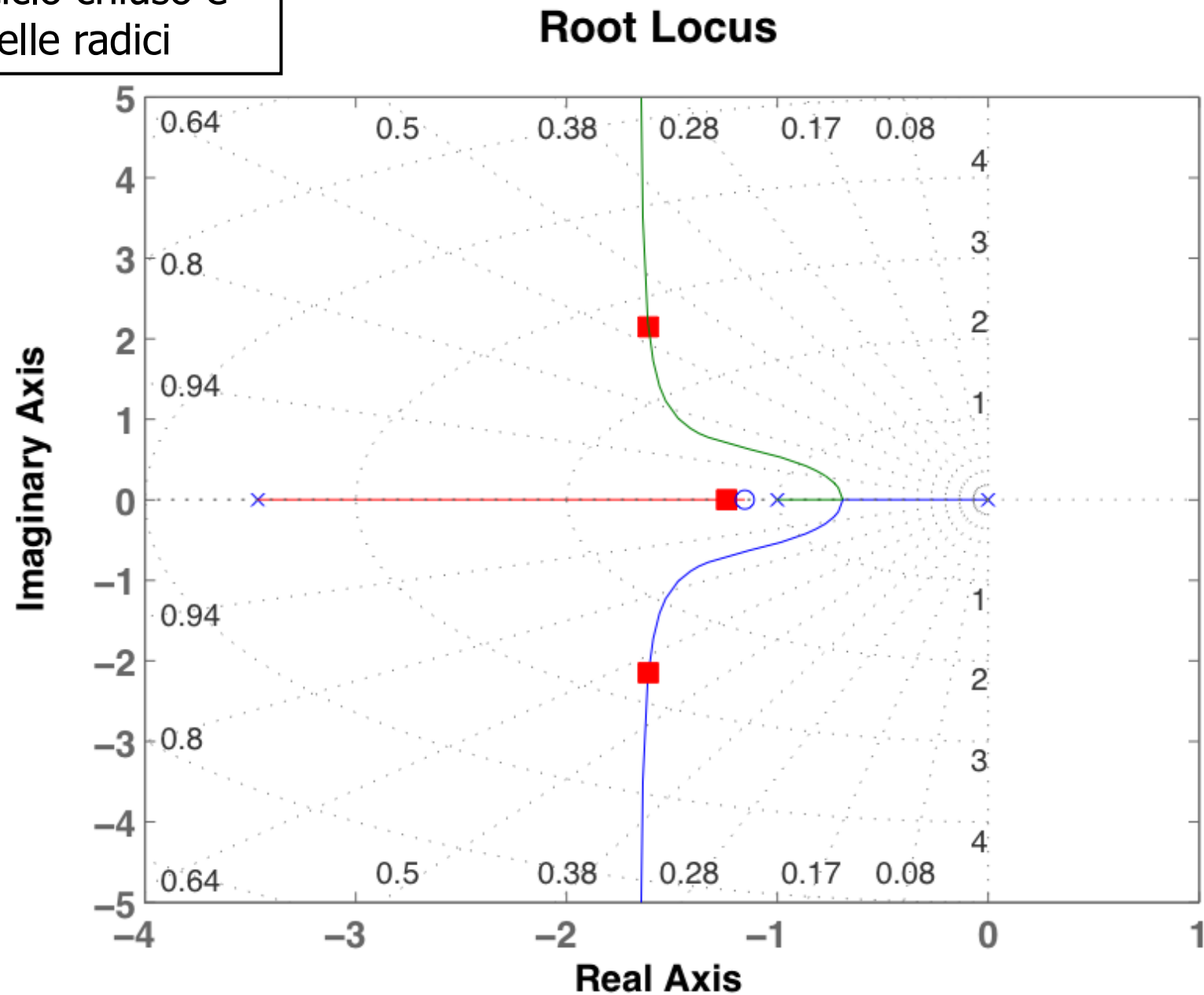
$$\mu_R = 0.258$$

$$R(s) = 0.258 \frac{1 + 0.866 s}{1 + 0.288 s}$$



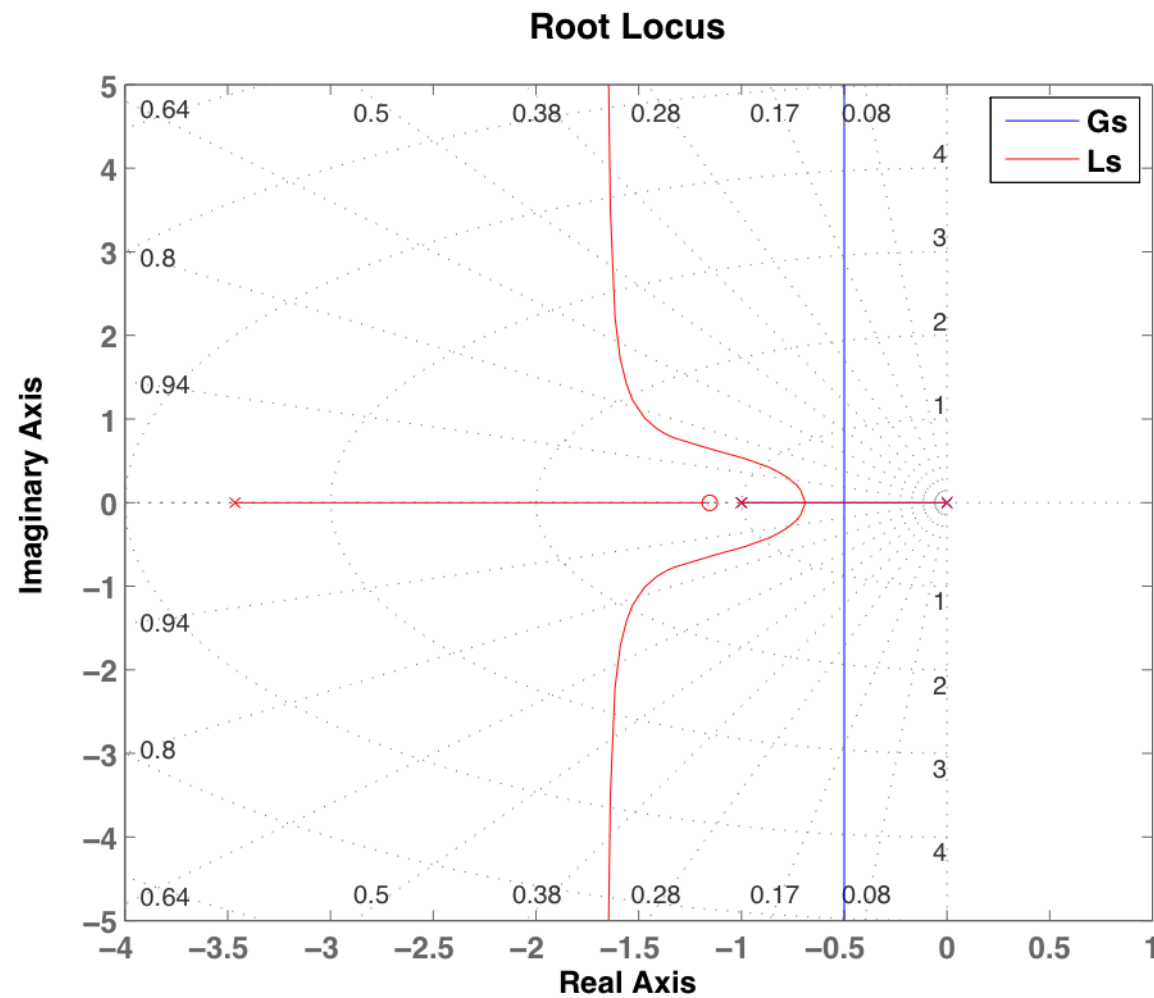


Poli di ciclo chiuso e
luogo delle radici

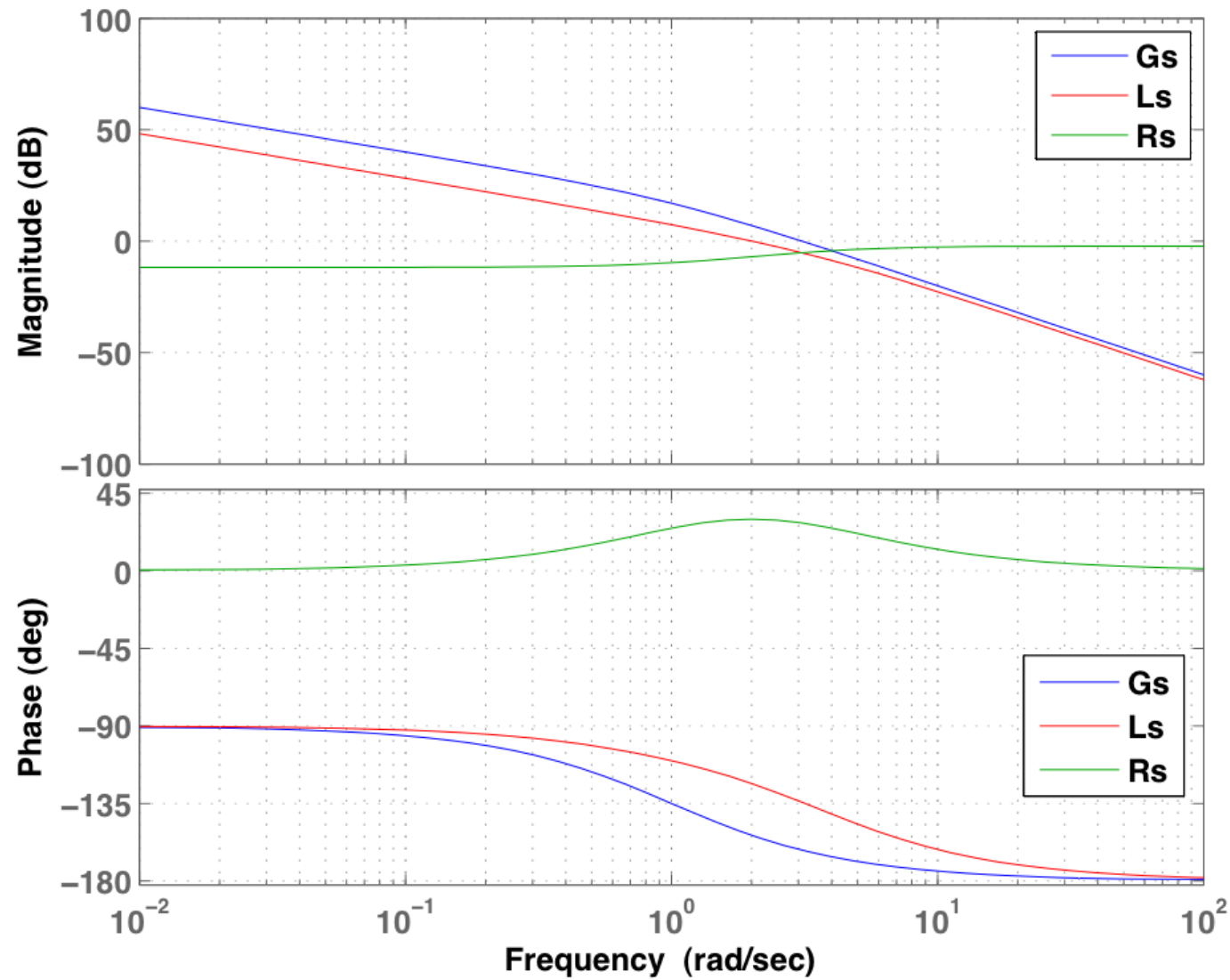


Confronto tra luogo delle radici “prima” e “dopo”

Parte 10, 71



Bode Diagram



Rete ritardatrice (o “*lag network* “)

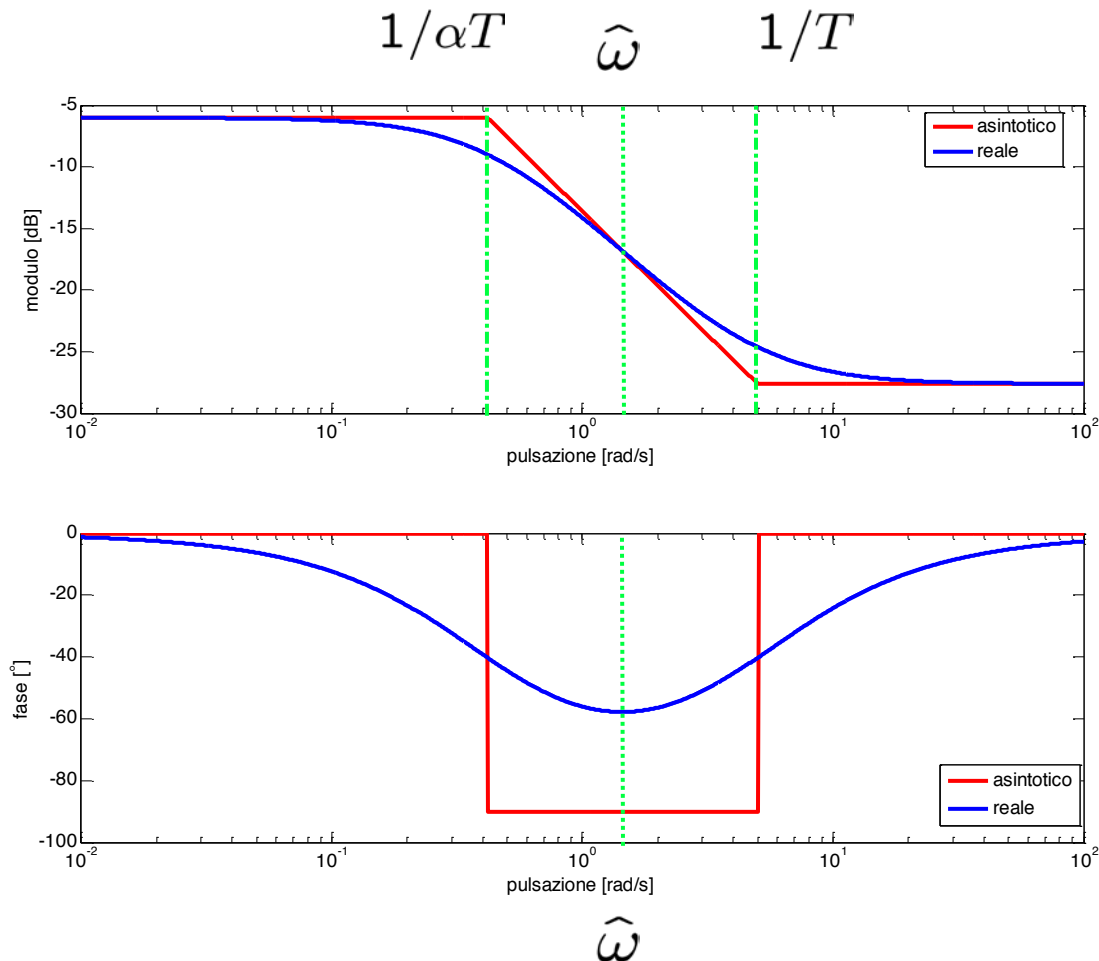
$$R(s) = \mu_R \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

$$\mu_R > 0$$

$$T > 0$$

$$\alpha > 1$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$



$$\varphi_{min} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha}) \quad \text{Massimo ritardo di fase}$$

Compensazione con rete ritardatrice

- Migliorare la precisione statica e/o diminuire la banda passante
- Per far sì che il margine di fase non diminuisca troppo conviene scegliere

$$T > \frac{1}{\omega_c} \quad \left(= \frac{10}{\omega_c} \right)$$

con uno sfasamento al massimo di 6°

- Al crescere di α si approssima un integratore.
- NB! Una volta individuata la rete, va **verificato** che effettivamente si ottengano le prestazioni richieste (in termini di margini di fase e di guadagno, di moderazione del segnale di comando ecc.) .
- È una **tecnica di progetto per tentativi**.

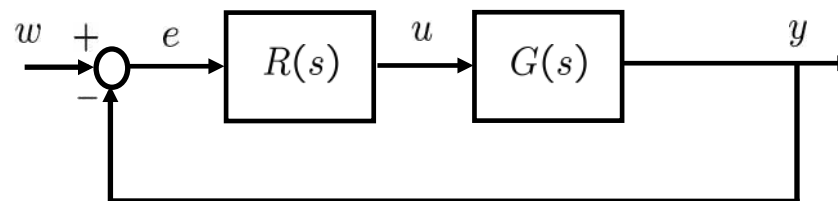
Un esempio completo

- Si progetti un regolatore per il sistema descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{40}{\left(1 + \frac{1}{100}s\right) \left(1 + \frac{1}{1000}s\right)^2}$$

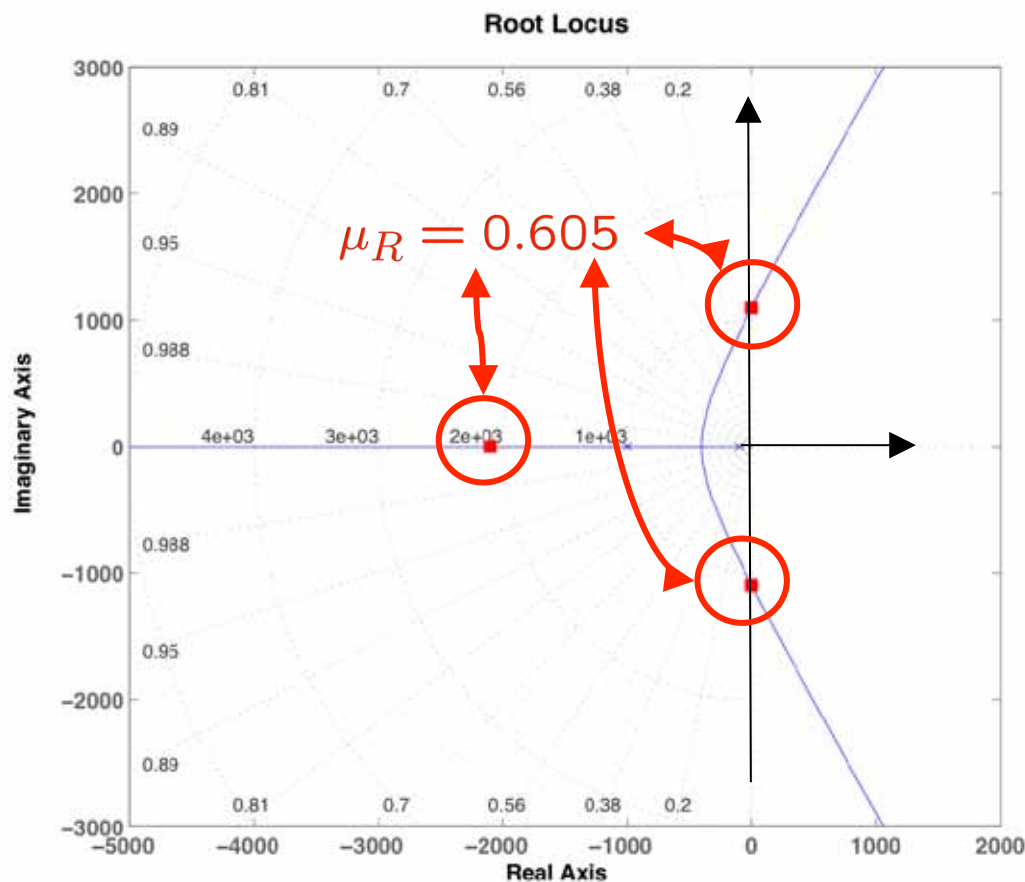
in grado di garantire che

- il sistema a ciclo chiuso presenti un errore a regime allo scalino unitario inferiore a 1/50;
- il sistema (a ciclo aperto) presenti un margine di fase $\varphi_m \geq 45^\circ$



- Si verifichi, facendo uso della tecnica del luogo delle radici, che il sistema descritto dalla $G(s)$ è stabilizzabile con un regolatore puramente proporzionale:

$$R(s) = \mu_R \quad 0 < \mu_R < 0.605$$



- Perché non è una buona idea allora utilizzare questa strategia di controllo?
- Quale è (cfr. Parte 9 – slide #51, #65 e #68) la più importante controindicazione?

- La stabilità è garantita, ma così **si riduce** anche il **guadagno statico** del sistema e quindi **peggiorano le prestazioni a regime a fronte di segnali di riferimento a scalino** (oppure di segnali di disturbo a scalino)!
- Infatti, per soddisfare la richiesta sull'errore a regime si deve garantire che

$$\frac{1}{1 + 40\mu_R} < \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad \mu_R > \frac{49}{40}$$

- Ma questa richiesta contrasta con il vincolo su μ_R per garantire stabilità asintotica a ciclo chiuso

$$0 < \mu_R < 0.605$$

- Introduciamo allora una rete ritardatrice come regolatore: otterremo stabilità ed il margine di fase voluto senza ridurre il guadagno statico (anzi riusciremo ad incrementarlo).

- **Progetto della rete:**

- La pulsazione “candidata” a divenire la nuova pulsazione ω_c la si determina risolvendo l’equazione

$$\hat{\omega} : \angle G(j\hat{\omega}) = -125^\circ$$

La soluzione garantirà il margine di fase desiderato (45°) e compenserà la perdita di fase dovuta alla rete ritardatrice (stimata per eccesso in 10°).

$$-\arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{100}\right) - 2\arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{1000}\right) = -125^\circ$$

$$\omega_c \equiv \hat{\omega} \approx 442.47 \text{ rad/s}$$

- Ora è possibile fissare la posizione dello zero della rete

$$T = \frac{10}{\omega_c} \quad \longrightarrow \quad T = 2.26 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

- Ora, in base alla specifica sull'errore a regime si sceglie il guadagno statico della rete

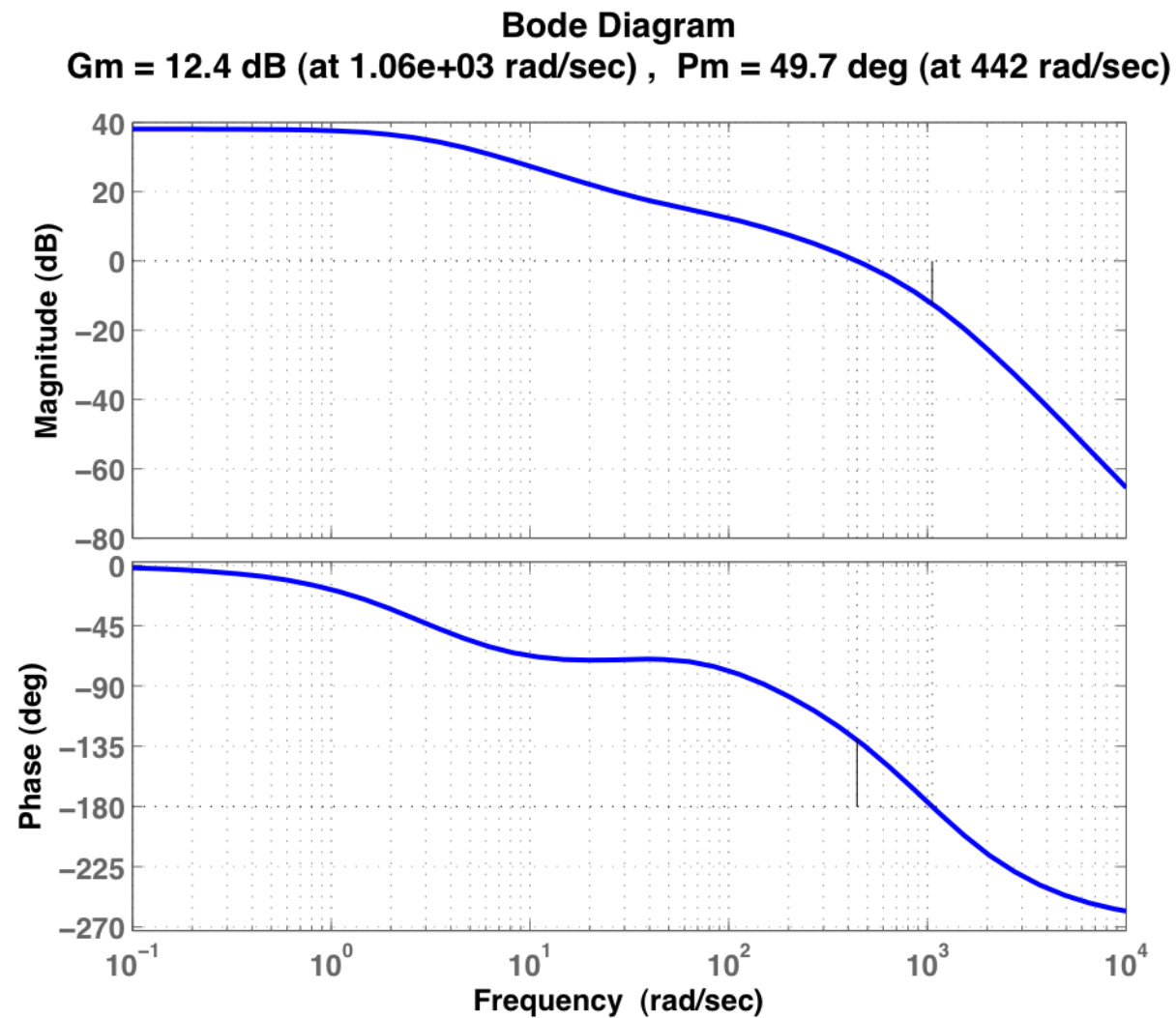
$$\mu_R > \frac{49}{40} \quad \longrightarrow \quad \mu_R = 2$$

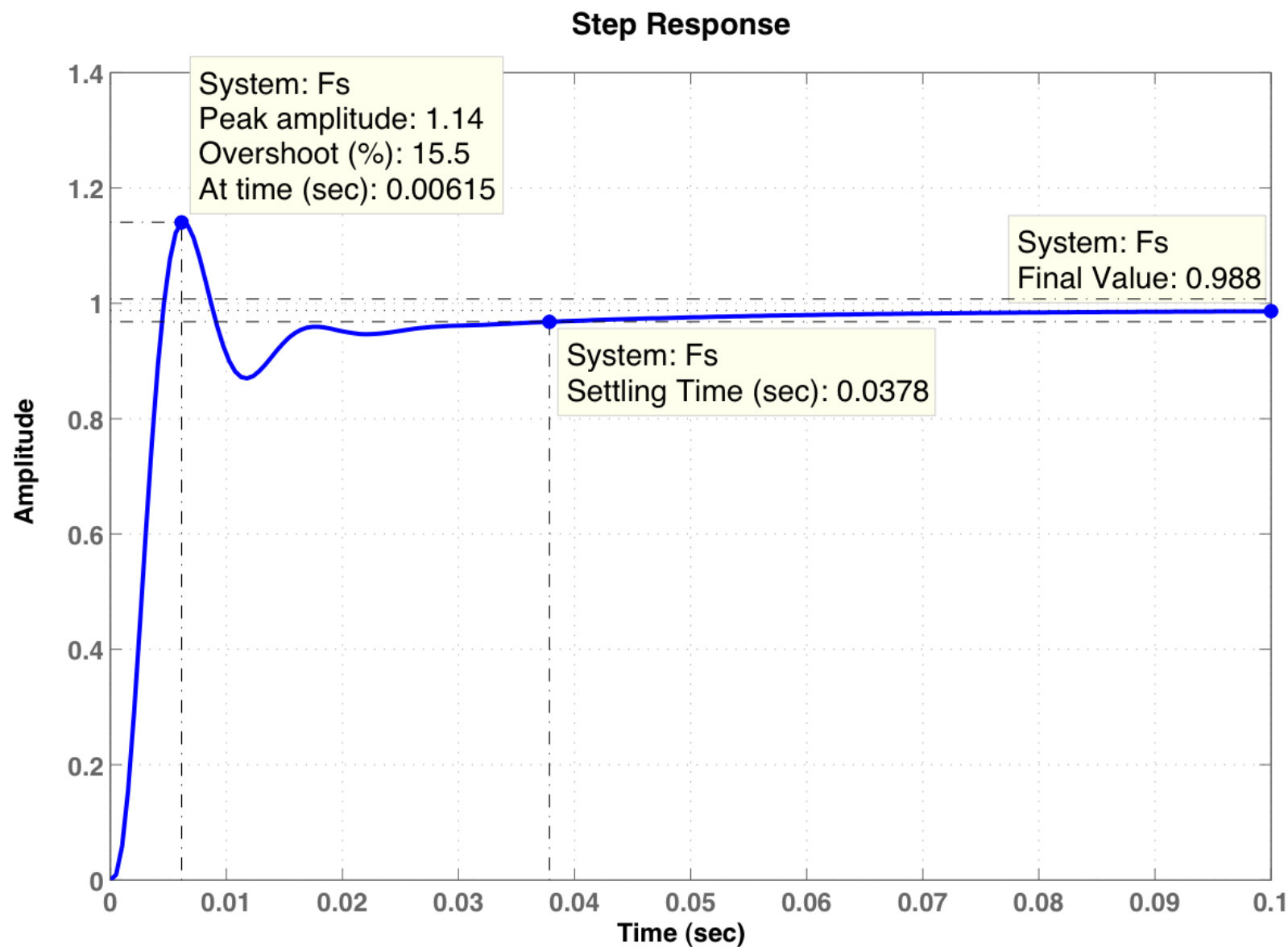
- Infine si determina il valore del parametro α (in sostanza la posizione del polo della rete) per imporre la pulsazione ω_c desiderata:

$$|L(j442.47)| = 2 \left| \frac{1 + j10}{1 + j10\alpha} \right| \cdot |G(j442.47)| = 1$$

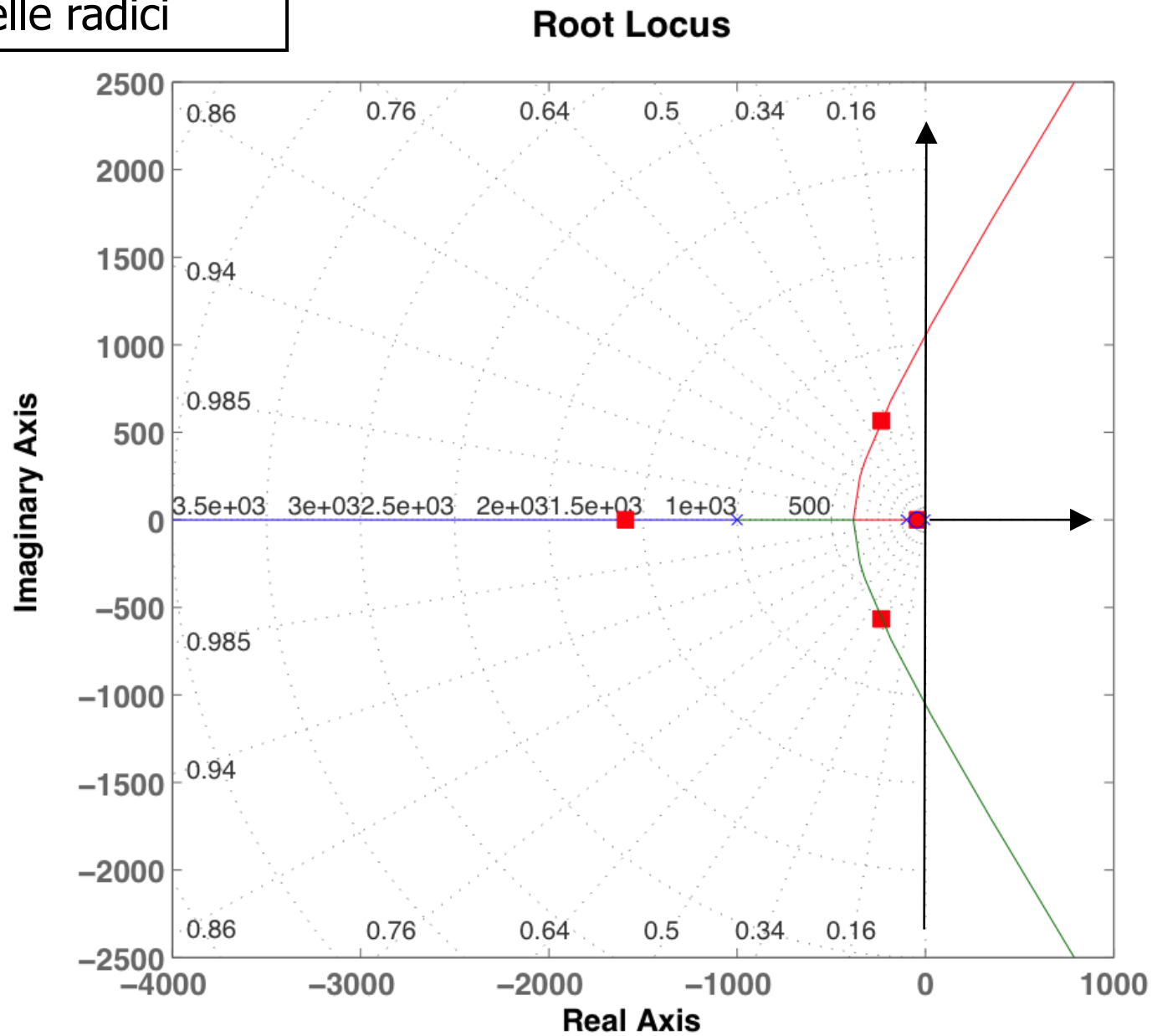
$$\alpha = 14.82$$

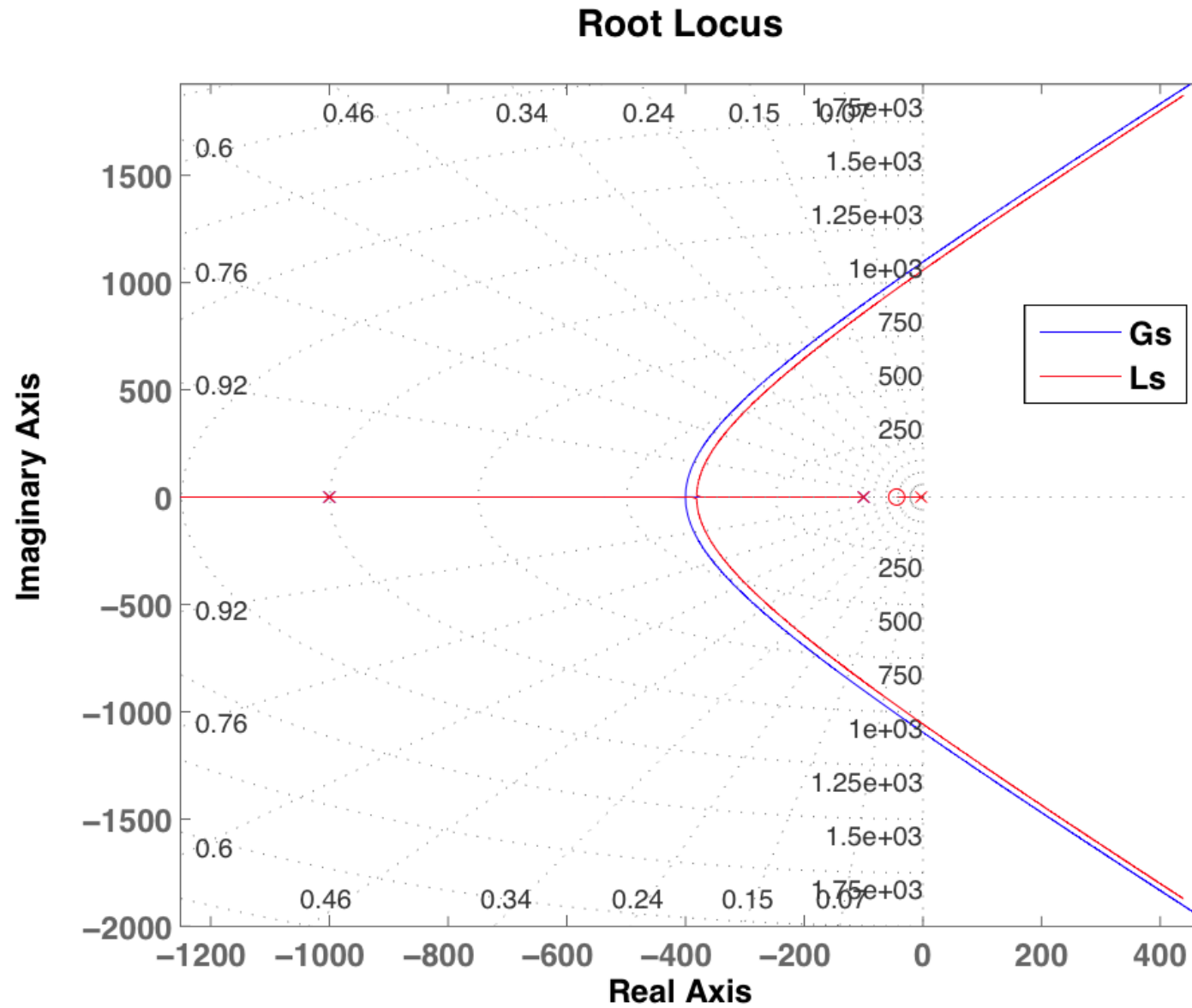
$$R(s) = 2 \frac{1 + 2.26 \cdot 10^{-2} s}{1 + 3.35 \cdot 10^{-1} s}$$



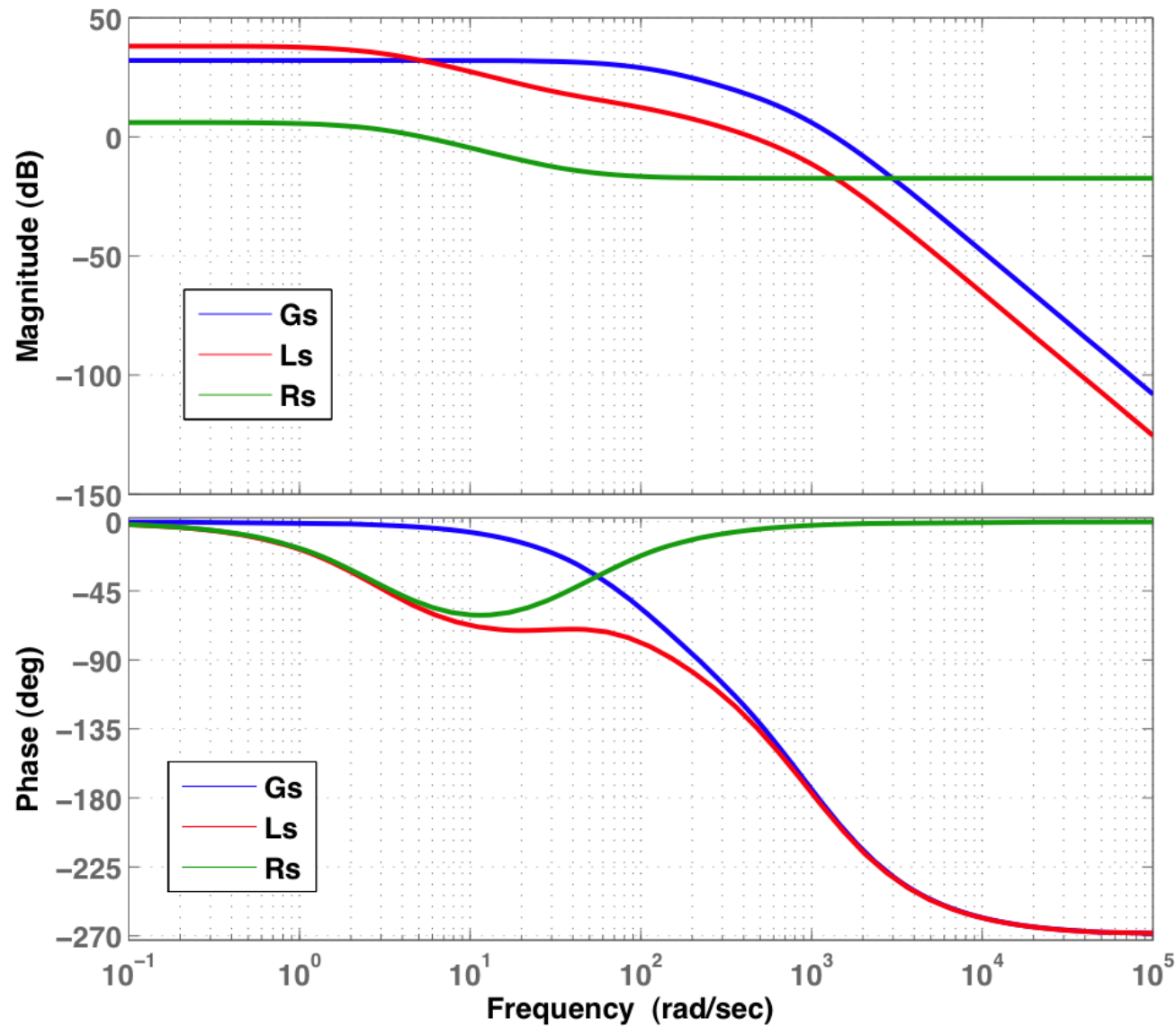


Poli di ciclo chiuso e
luogo delle radici





Risposta in frequenza di $G(s)$, $L(s)$ ed $R(s)$

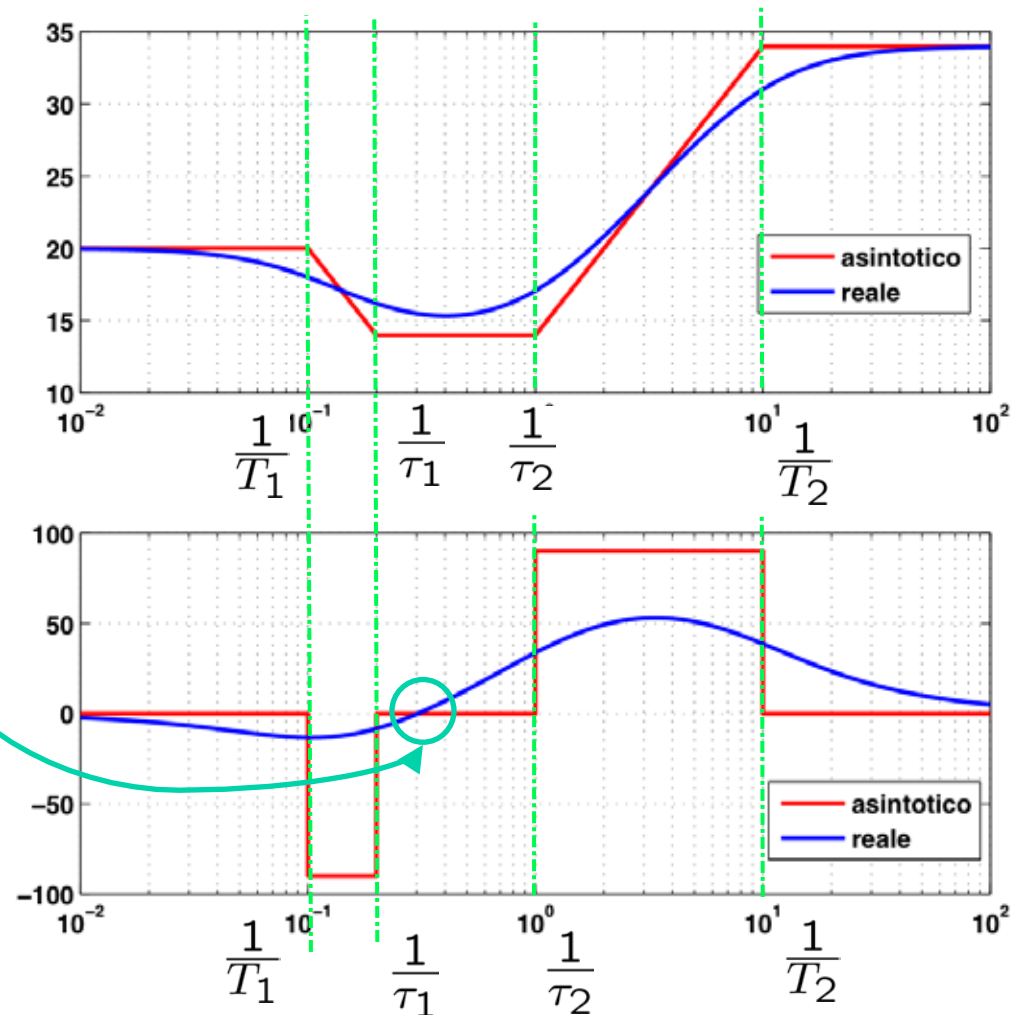
Bode Diagram

Rete a sella

$$R(s) = \mu_R \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

$$\begin{cases} \mu_R > 0 \\ T_1 > \tau_1 \geq \tau_2 > T_2 > 0 \end{cases}$$

$\hat{\omega}$ Sfasamento nullo



- **Pulsazione a sfasamento nullo: in generale** esiste se e solo se

$$T_1 + T_2 > \tau_1 + \tau_2 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{T_1 - \tau_1}{\tau_2 - T_2} > 1$$

ed è data da (lo si verifichi)

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2) - (\tau_1 + \tau_2)}{(T_1 + T_2)\tau_1\tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)T_1T_2}}$$

- **Caso particolare:** nel caso in cui si ponga

$$\tau_1 \tau_2 = T_1 T_2$$

allora la pulsazione a sfasamento nullo è data semplicemente da

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

- Lo si verifichi!

Compensazione con rete a sella

- Per avere un anticipo consistente $\tau_2 > \frac{1}{\omega_c} > T_2$
- Combina i vantaggi delle reti *lead* e *lag*
- Ha il vantaggio di non sfasare in un punto preciso sull'asse delle pulsazioni ω (supponendo di imporre sempre che $T_1 T_2 = \tau_1 \tau_2$)
- NB! Una volta individuata la rete, va **verificato** che effettivamente si ottengano le prestazioni richieste (in termini di margini di fase e di guadagno, di moderazione del segnale di comando ecc.) .
- È una **tecnica di progetto per tentativi**.

Un esempio completo

- Riconsideriamo il problema introdotto nella trasparenza #71 (e risolto prima facendo uso di una rete ritardatrice):
 - Si progetti un regolatore per il sistema descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{40}{\left(1 + \frac{1}{100}s\right) \left(1 + \frac{1}{1000}s\right)^2}$$

in grado di garantire che

- il sistema a ciclo chiuso presenti un errore a regime allo scalino unitario inferiore a 1/50;
- il sistema (a ciclo aperto) presenti un margine di fase

$$\varphi_m \geq 45^\circ$$

- Si determina la pulsazione per la quale vale che

$$\hat{\omega} : \angle G(j\hat{\omega}) = -135^\circ$$

$$-\arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{100}\right) - 2 \arctan\left(\frac{\hat{\omega}}{1000}\right) = -135^\circ$$

$$\omega_c \equiv \hat{\omega} \approx 528.51 \text{ rad/s}$$

- Per soddisfare la specifica sull'errore a regime anche stavolta deve valere che

$$\mu_R > \frac{49}{40} \quad \longrightarrow \quad \mu_R = 2$$

- Per determinare i parametri della rete le condizioni da imporre sono in definitiva

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_1 + T_2 > \tau_1 + \tau_2 \quad \text{condizione di ammissibilità} \\
 \tau_1 \tau_2 = T_1 T_2 \quad \longrightarrow \quad \hat{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \\
 \varphi_m = 45^\circ \quad \longrightarrow \quad \hat{\omega} : \angle G(j\hat{\omega}) = -135^\circ \\
 \quad \quad \quad \hat{\omega} \approx 528.51 \text{ rad/s} \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad \hat{\omega} : |G(j\hat{\omega})| = 1 \\
 \mu_R = 2 \\
 \tau_1 = \tau_2 \quad \longleftarrow
 \end{array} \right.$$

Così ci sono 5 equazioni per 5 incognite: la soluzione è unica (se esiste, cioè se soddisfa la condizione di ammissibilità).

- Infatti, risolvendo il sistema di 5 equazioni si ottiene la soluzione (ammissibile)

$$\mu_R = 2 \quad \tau_1 = \tau_2 \approx 1.9 \cdot 10^{-3}$$

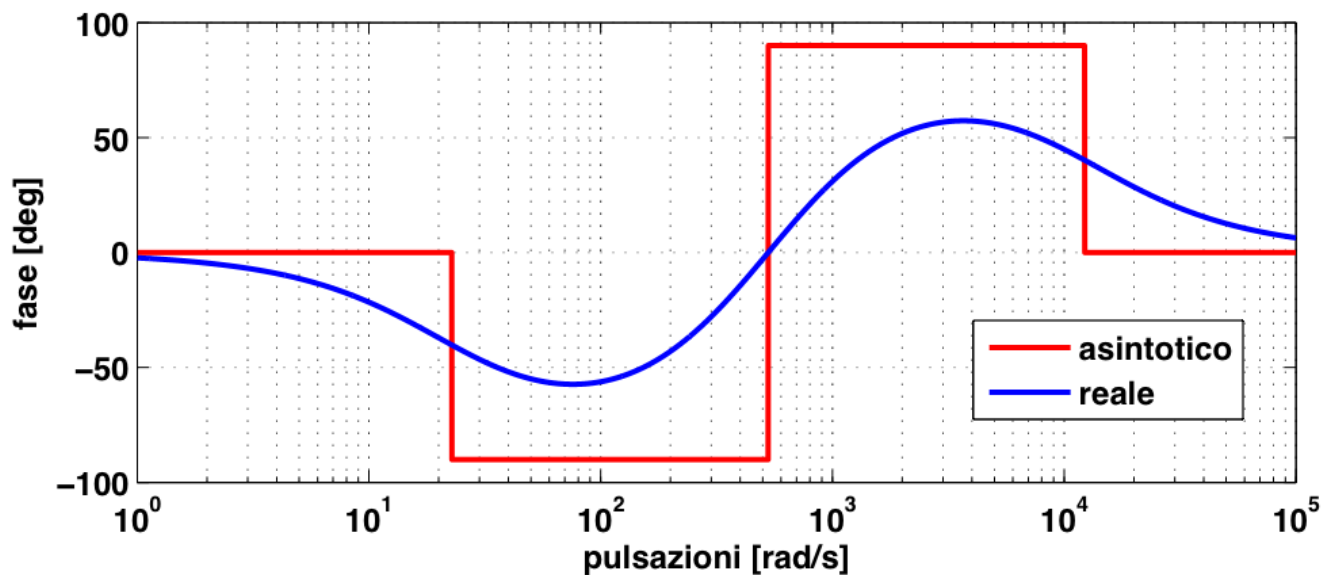
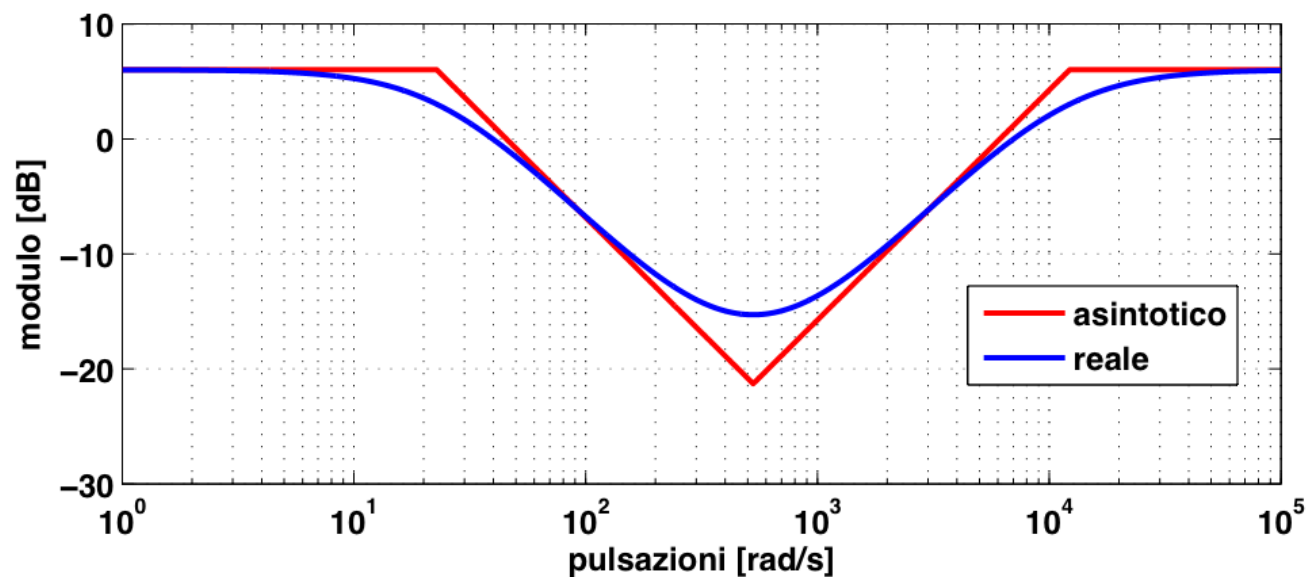
$$T_1 \approx 4.39 \cdot 10^{-2} \quad T_2 \approx 8.15 \cdot 10^{-5}$$

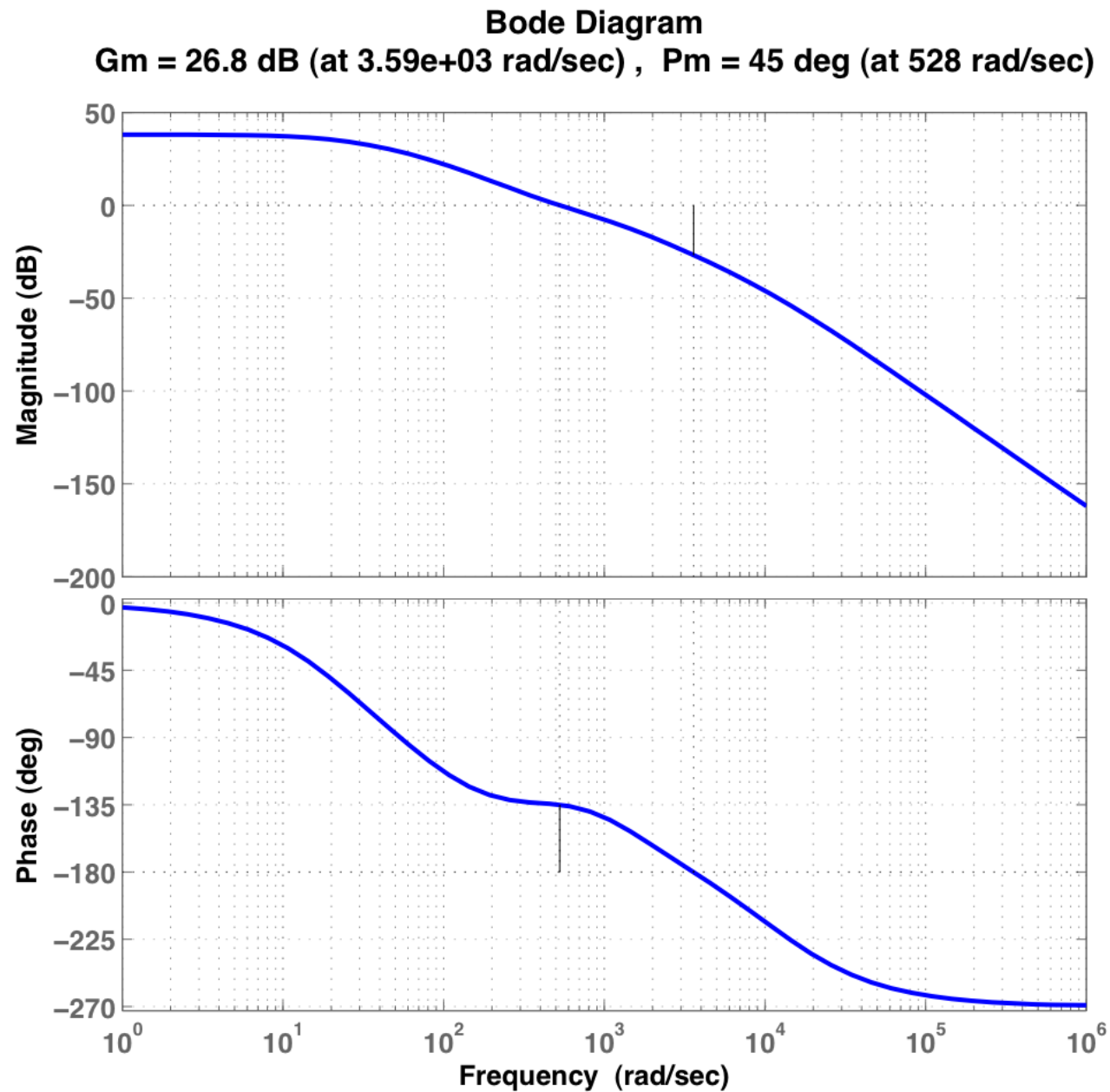
- In definitiva la rete a sella cercata è pari a

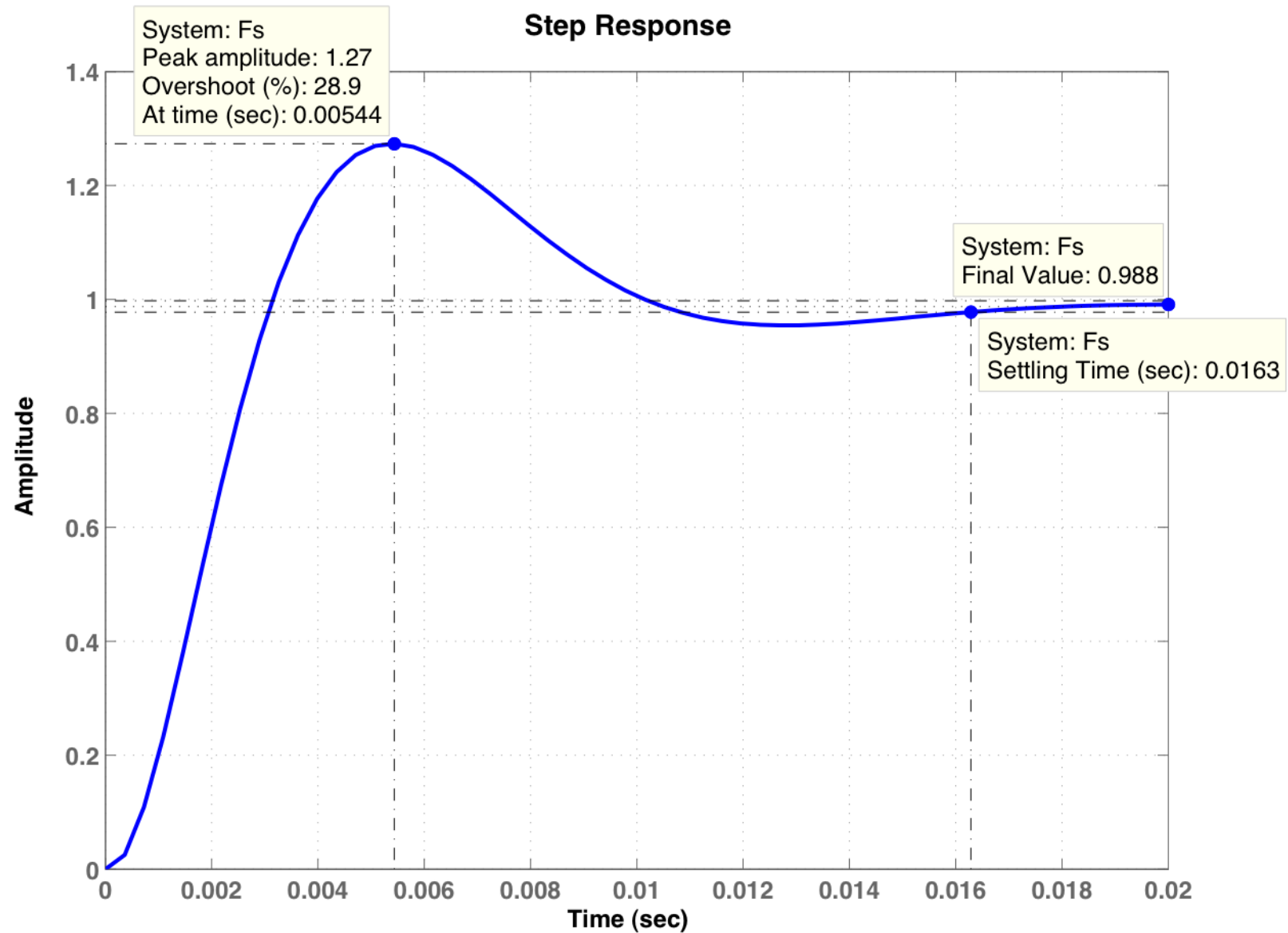
$$R(s) = 2 \frac{(1 + 1.9 \cdot 10^{-3}s)(1 + 1.9 \cdot 10^{-3}s)}{(1 + 4.39 \cdot 10^{-2}s)(1 + 8.15 \cdot 10^{-5}s)}$$

La risposta in frequenza della rete $R(j\omega)$

Parte 10, 92

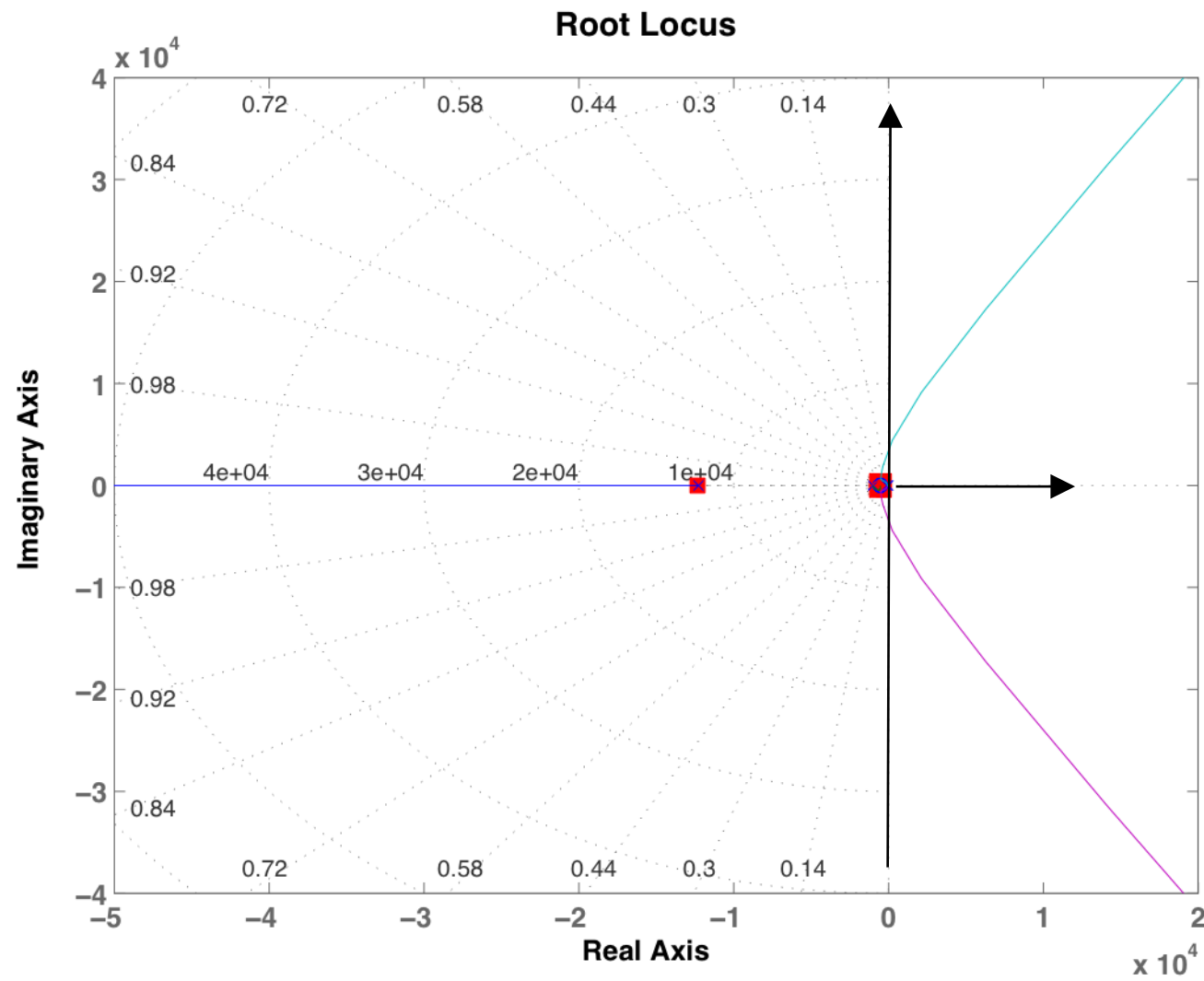


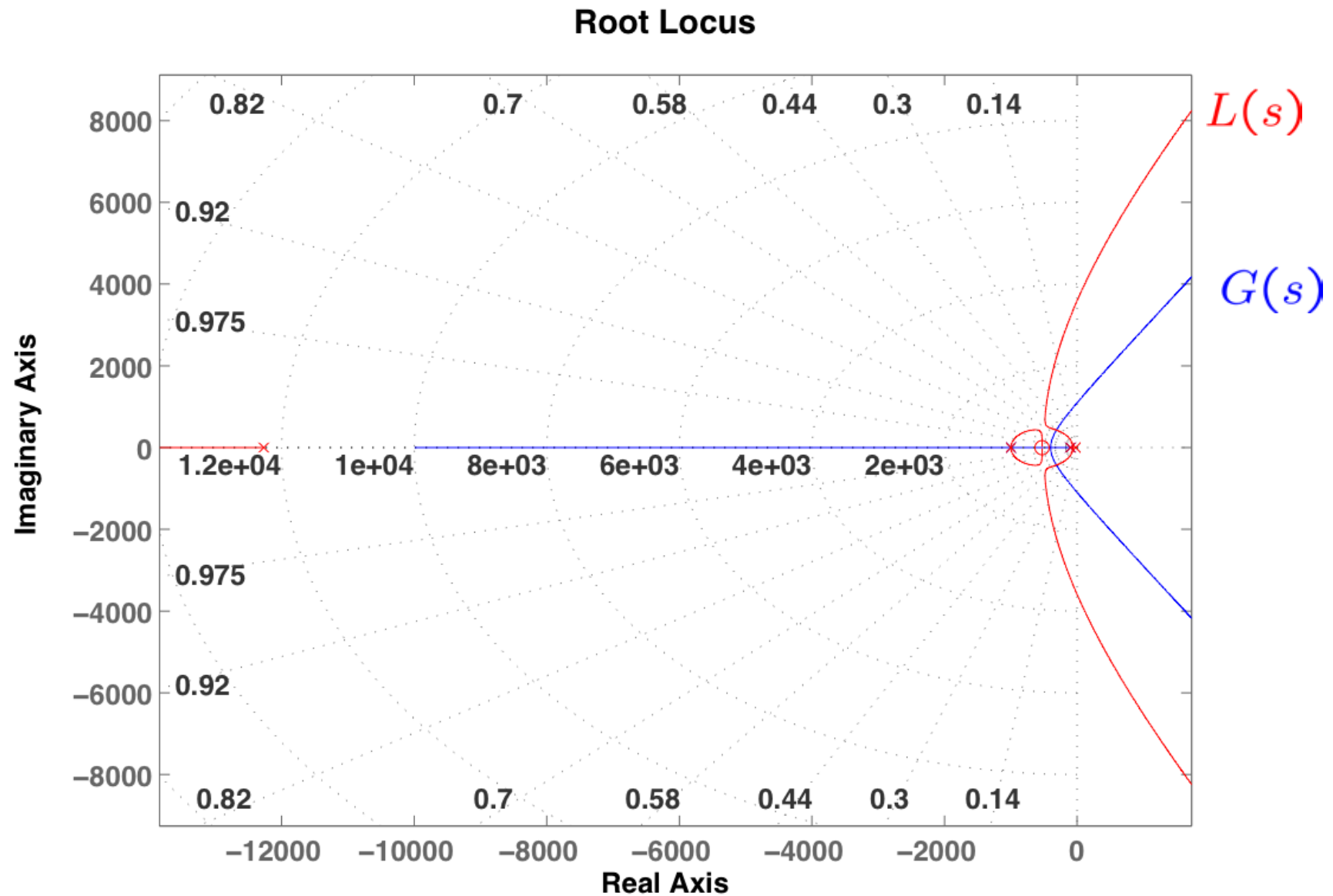


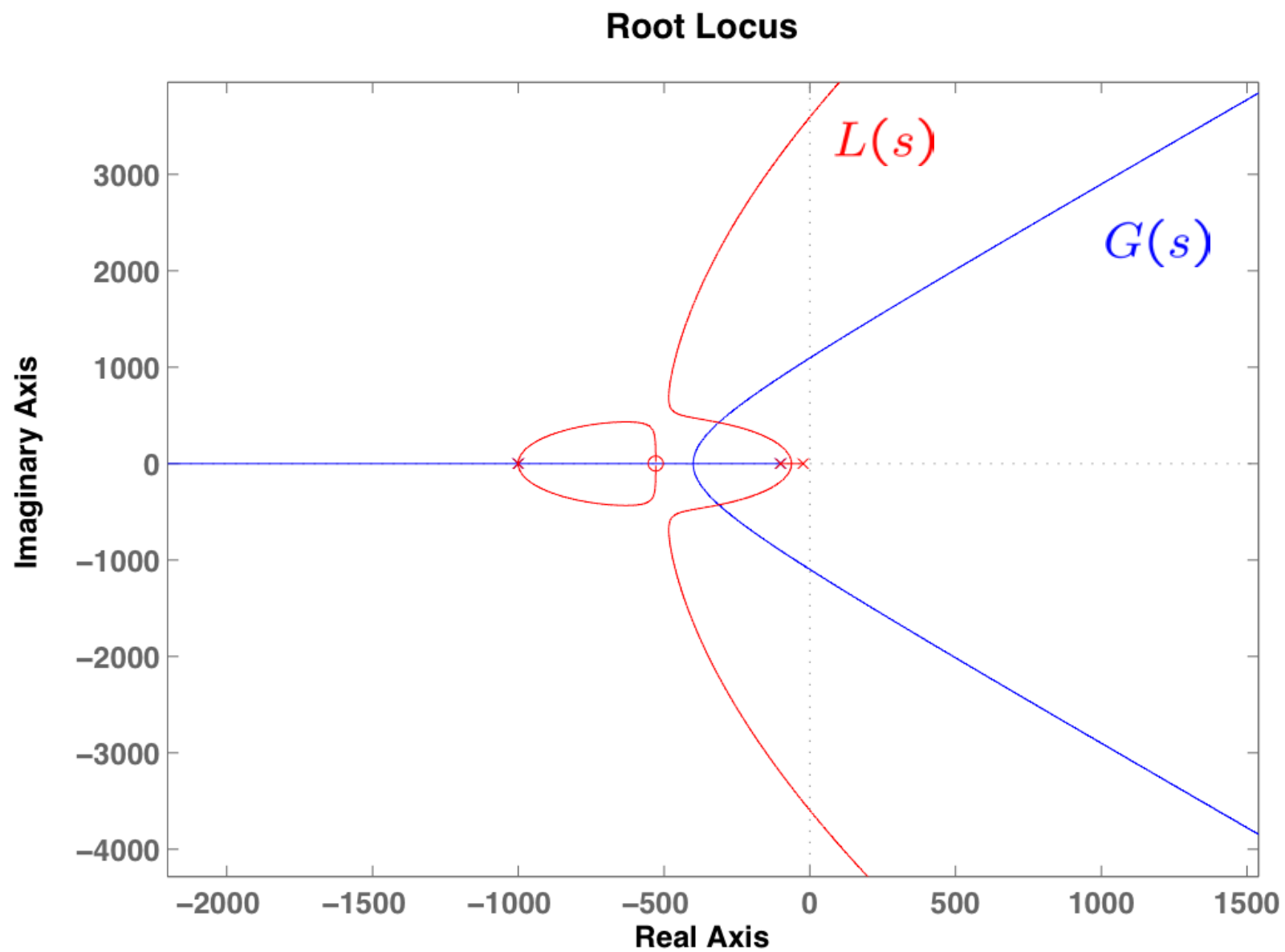


Poli di ciclo chiuso e luogo delle radici

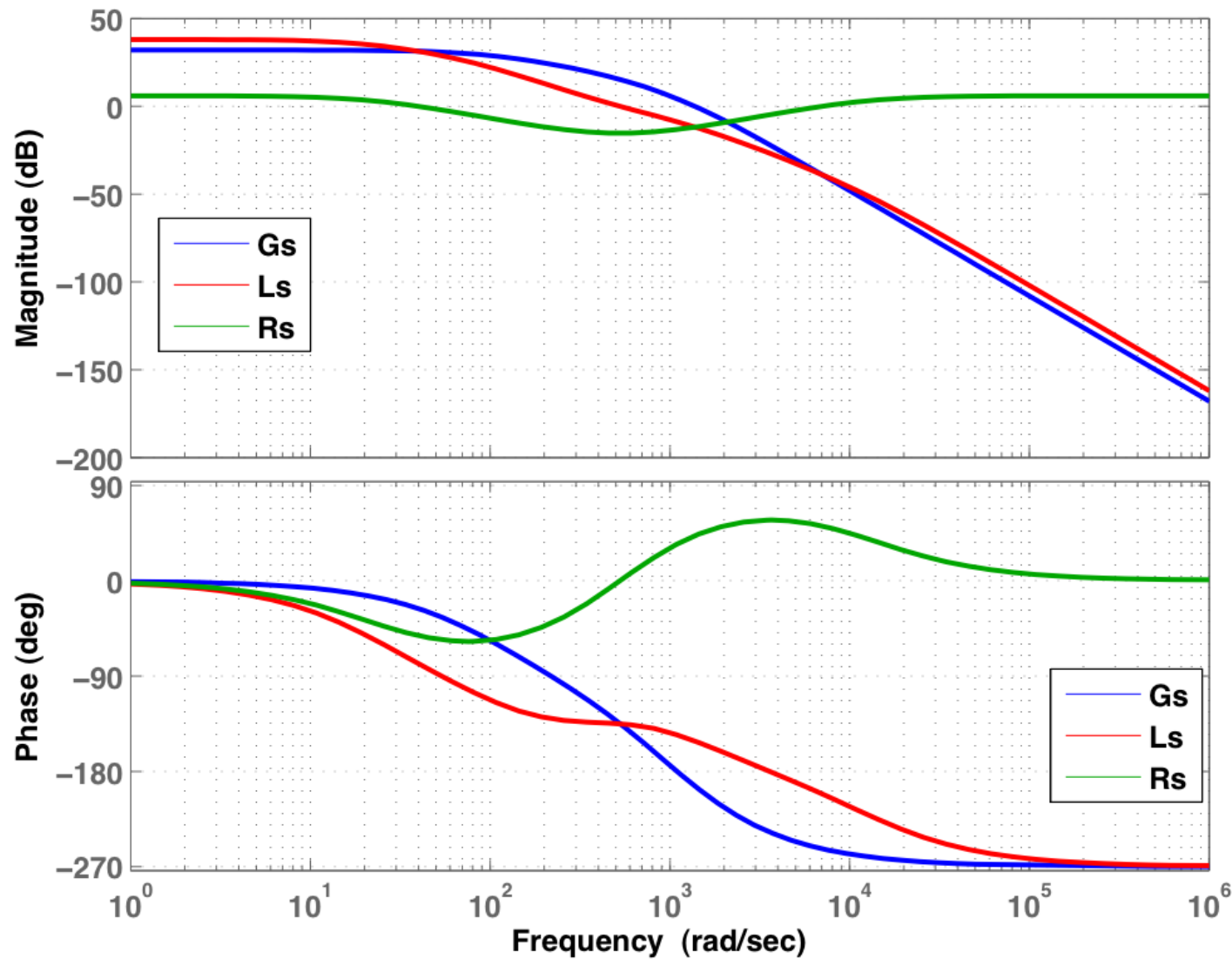
Parte 10, 95







Bode Diagram



Regolatori PID

- Regolatori con azione di controllo

- proporzionale
- integrale
- derivativa



$$\begin{aligned} u(t) &= K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right] \\ &= K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t) \end{aligned}$$

Parametri dei PID

- coefficienti dell'azione P, I, D K_p, K_i, K_d
- (costante di) tempo dell'azione I, D T_i, T_d
- 1.^o legame tra i parametri $T_i = \frac{K_p}{K_i}, T_d = \frac{K_d}{K_p}$

Schema a blocchi di un PID ideale

- Forma standard

$$R(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{s T_i} + s T_d \right]$$

- Forma interagente

$$R(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{s T'_i} \right) (1 + s T'_d)$$

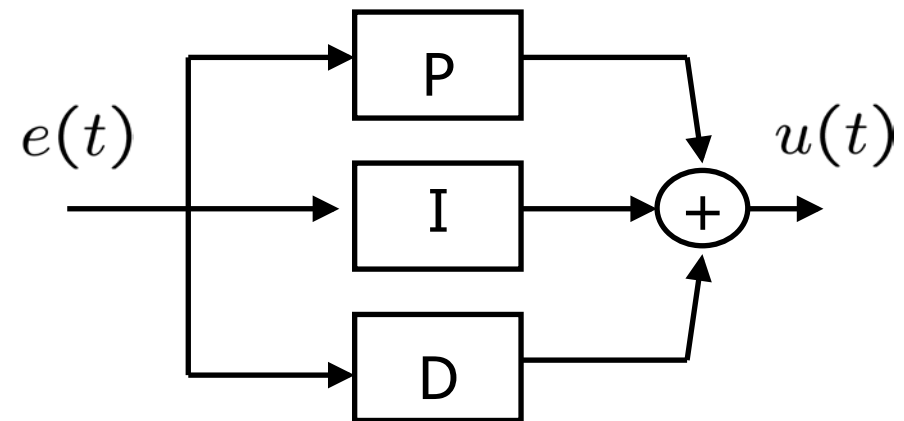
- Forma in parallelo

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + s K_d$$

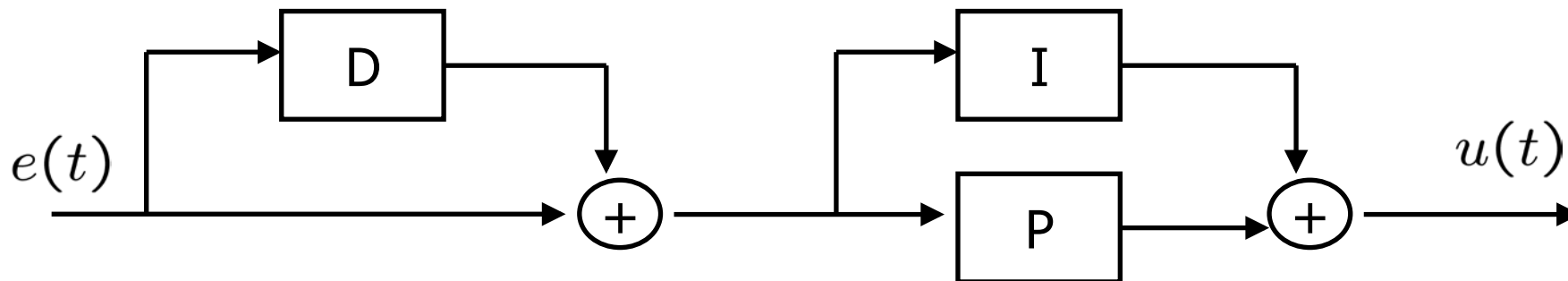
È PID ideale perchè la **fdt non è propria** (2 zeri/1 polo).

Schema a blocchi di un PID ideale (2)

- Forma non interagente



- Forma interagente



Legami tra i parametri

- Standard vs parallela $T_i = \frac{K_p}{K_i}, \quad T_d = \frac{K_d}{K_p}$
- Da interagente a non interagente

$$K_p = K_p' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'}$$

$$T_i = T_i' + T_d'$$

$$T_d = \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'}$$

- Da non interagente ad interagente

$$T_i \geq T_d$$



$$K_p' = \frac{K_p}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 T_d}{T_i}} \right)$$

$$T_i' = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4 T_d}{T_i}} \right)$$

$$T_d' = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 T_d}{T_i}} \right)$$

Perchè 3 strutture?

- La forma non interagente (e quindi anche quella parallela) è più generale di quella interagente.
- La forma interagente è stata storicamente la prima a venire utilizzata (regolatori pneumatici) e secondi molti testi è la più semplice da tarare manualmente.
- In effetti T'_i e T'_d esprimono direttamente le costanti di tempo degli zeri della fdt in forma interagente.

Osservazioni: valori ammissibili dei parametri

- Qualsiasi sia la forma scelta per il PID ideale, esso ha una fdt con 2 zeri ed 1 polo.
- In particolare **il polo è fisso** nell'origine, gli **zeri sono funzione dei parametri**.
- Esistono allora dei **vincoli** per i parametri? **SI!**
 - Gli **zeri** del regolatore devono essere **a parte reale negativa**, cioè il **regolatore** PID deve avere una fdt **a fase minima!**
- Questa richiesta vincola i parametri che compaiono nella fdt del PID.

- Forma interagente  zeri reali negativi

$$R(s) = K_p' \left(\frac{1 + s T_i'}{s T_i'} \right) (1 + s T_d')$$

$$K_p' > 0$$

$$T_i', T_d' > 0$$

- Forma non interagente  zeri a parte reale negativa

$$R(s) = K_p \frac{1 + s T_i + s^2 T_i T_d}{s T_i}$$

$$K_p > 0$$

$$T_i, T_d > 0$$

- Forma parallela  zeri a parte reale negativa

$$R(s) = \frac{K_i + s K_p + s^2 K_d}{s}$$

$$K_p > 0$$

$$K_i, K_d > 0$$

PID realizzabile

- Si limita l'amplificazione del “derivatore” ad alta frequenza introducendo un filtro LP del 1.^o ordine

$$K_p T_d s \quad \longrightarrow \quad \frac{K_p T_d s}{1 + s \frac{T_d}{N}}$$

$$5 (10) \leq N \leq 10 (100)$$

- In questo modo la fdt del PID diviene propria (PID realizzabile).

FdT del PID realizzabile

$$R(s) = K_i \frac{\left[1 + s \left(T_i + \frac{T_d}{N}\right) + s^2 T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N}\right)\right]}{s \left(1 + s \frac{T_d}{N}\right)}$$



$$R(s) = K_i \frac{(1 + s \hat{\tau}_1)(1 + s \hat{\tau}_2)}{s (1 + s \hat{\tau}_3)}$$

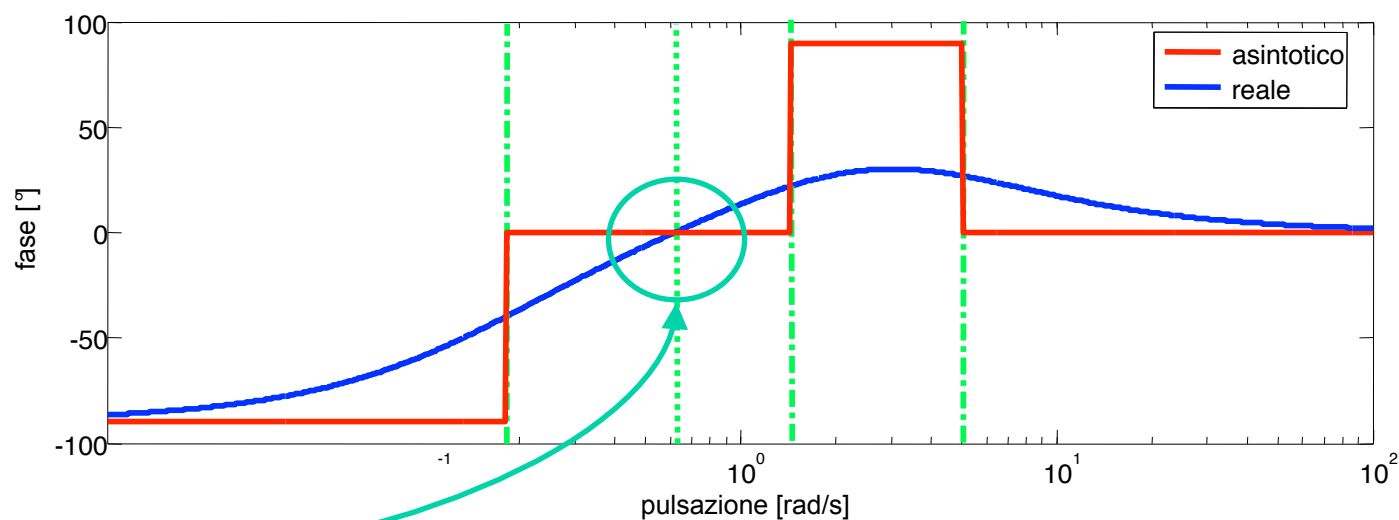
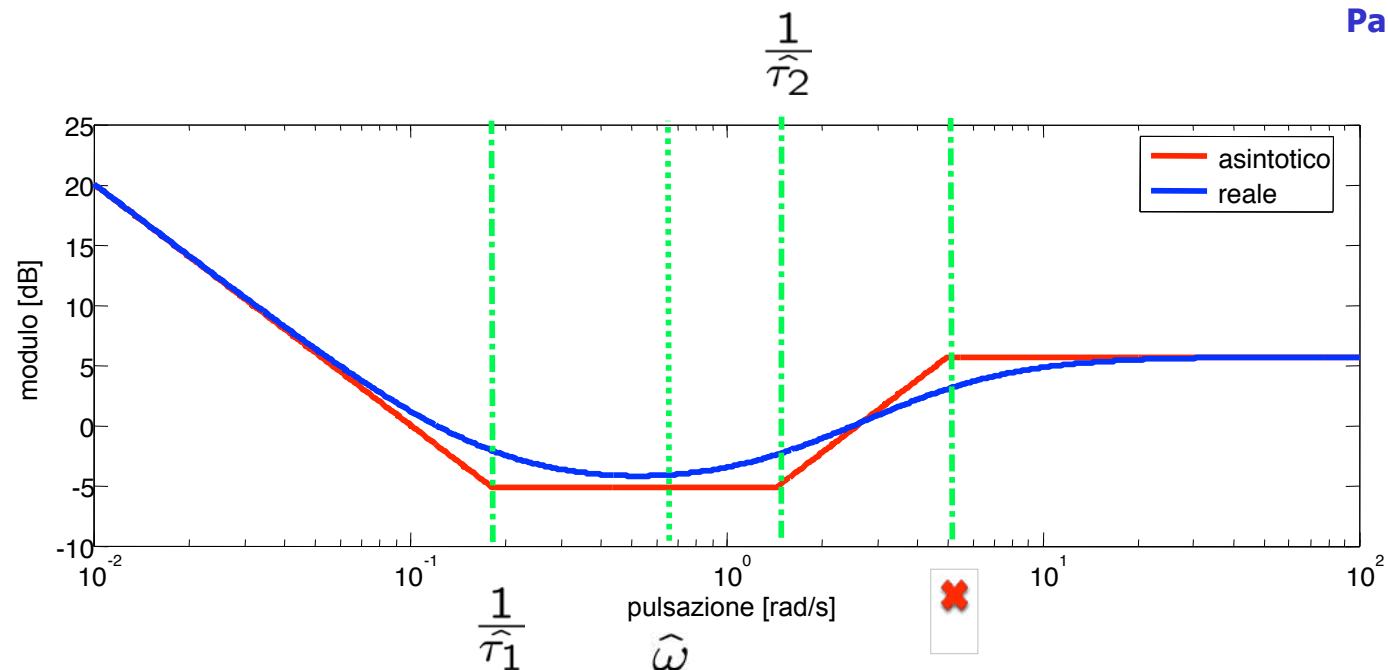
$$N \gg 1$$

$$T_d < T_i$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{\tau}_1 \approx \tau_1 \\ \hat{\tau}_2 \approx \tau_2 \end{array} \right\} \quad \hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2$$

PID ideale



Sfasamento nullo

$$\frac{1}{\hat{\tau}_2}$$

PID e pulsazione a sfasamento nullo

- Partendo dall'espressione

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s \hat{\tau}_1) (1 + s \hat{\tau}_2)}{s (1 + s \hat{\tau}_3)}$$

ed imponendo $\angle R(j\hat{\omega}_{\text{reale}}) = 0$

si ottiene
$$\hat{\omega}_{\text{reale}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2 - (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2) \hat{\tau}_3}}$$

Lo si verifichi

- Partendo invece dall'espressione del PID non fisicamente realizzabile in forma non interagente

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{s T_i} = K_i \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s}$$

imponendo

$$\angle R(j\bar{\omega}_{\text{ideale}}) = 0$$

si ottiene stavolta

$$\bar{\omega}_{\text{ideale}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Lo si verifichi

- Si noti che

$$\hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \quad \longrightarrow \quad \hat{\omega}_{\text{reale}} \approx \bar{\omega}_{\text{ideale}}$$

PID a derivazione sull'uscita

- Motivazione: ridurre l'escursione del segnale di comando all'attuatore a fronte di brusche variazioni del segnale di riferimento.
- Si applichi un riferimento a gradino: vale che

$$\left. \begin{array}{l} r(t) = R \cdot 1(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{d e}{d t} = \frac{d y(t)}{d t}$$

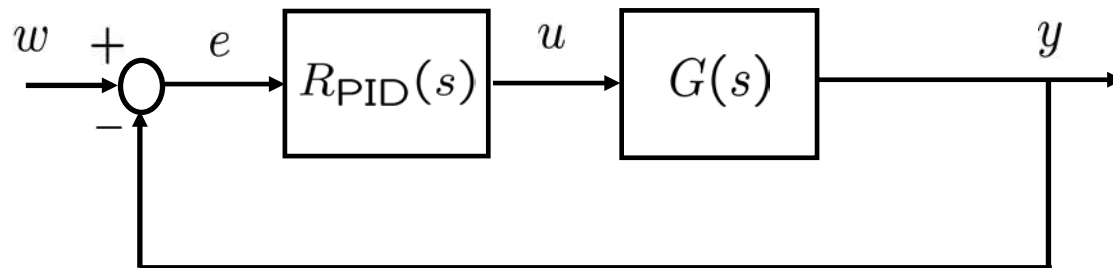
tranne che nell'istante di variazione del segnale d'ingresso.

- Perché non utilizzare allora la derivata dell'uscita misurata al posto della derivata dell'errore nella parte “derivativa” del PID?
- Sicuramente il segnale “*derivata dell'uscita*” è meno soggetto a brusche variazioni di quanto lo sia il segnale di riferimento.
- NB per ora trascuriamo il problema del rumore di misura.

PID a derivazione sull'uscita: un esempio

- Consideriamo il processo

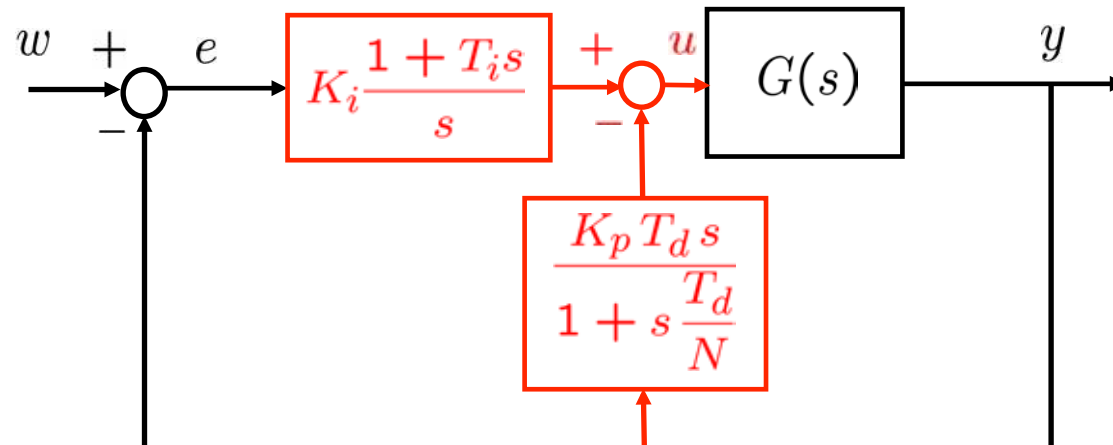
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}$$



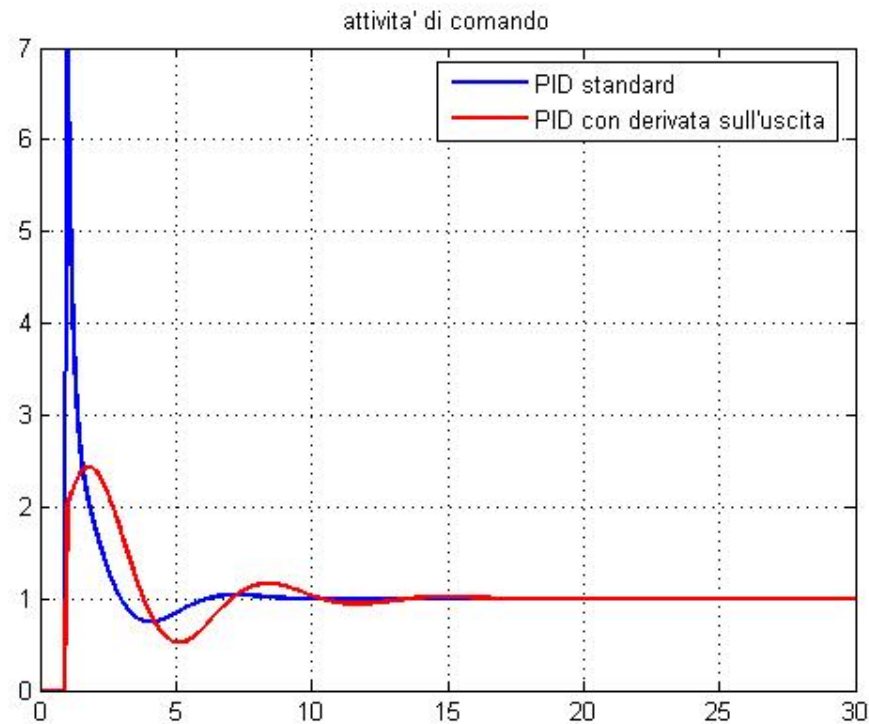
Schema classico

- Il PID abbia parametri

$$\begin{aligned} K_p &= 2 \\ T_i &= 2 \\ T_d &= 0.5 \\ N &= 5 \end{aligned}$$

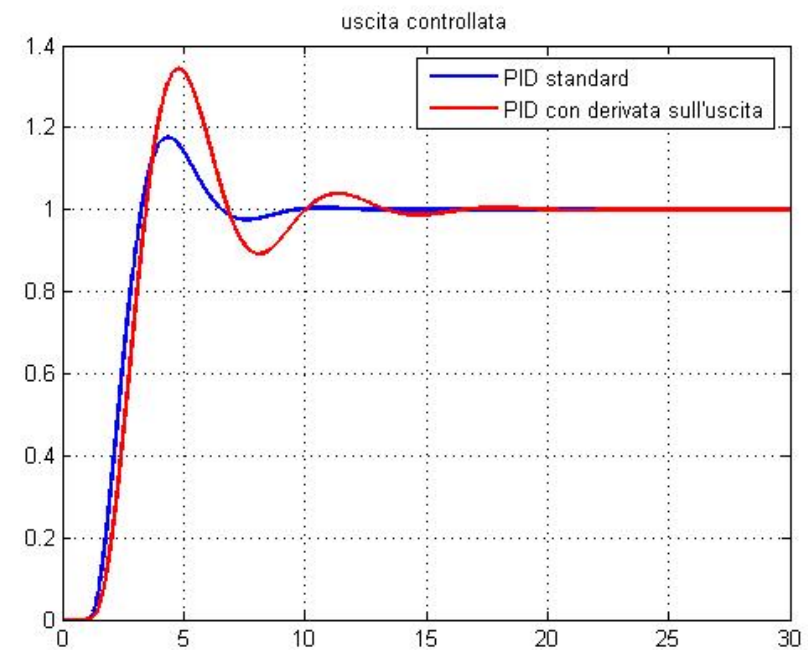


Schema a derivata sull'uscita



Il segnale di comando è più moderato

Le prestazioni peggiorano un po'



Effetto del polo aggiuntivo LP: scelta di N

- Affrontiamo ora il problema del rumore di misura: come moderare l'effetto del rumore sulla legge di controllo di tipo derivativo? Si utilizza il polo aggiuntivo LP.
- Al crescere di N, il PID realizzabile si comporta sempre più come quello ideale.
- Al crescere di N è sempre minore l'azione filtrante LP sul rumore: si eccita sempre più l'attuatore con segnale indesiderato (si amplifica il rumore di misura; la sensibilità del controllo cresce [in modulo] alle alte frequenze).
- **Scelta "ottima"**: determinare un valore "basso" di N, che ponga comunque il polo in $-N/T_D$ **al di fuori della banda di interesse** per il controllo.

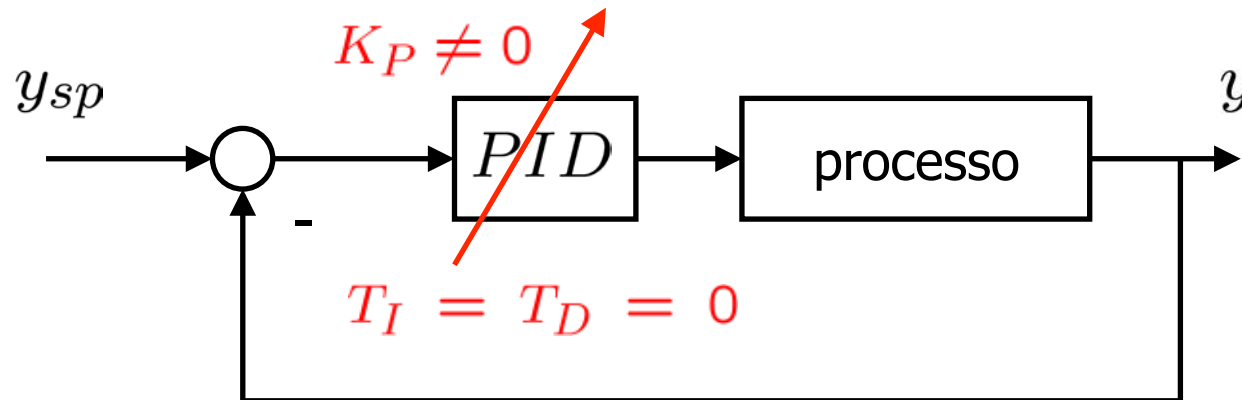
Quando è adeguato un regolatore PID?

- PI: adatto ad un sistema con dinamica del 1.^o ordine, eventualmente con un ritardo puro
- I: per sistemi algebrici (regolazione di portate)
- P, PI: per sistemi di tipo “integrale” (controllo di livello ...)
- PID: quando la dinamica dominante è del 2.^o ordine.
- Per sistemi non a fase minima (es. ritardo dominante) meglio il predittore di Smith (**non ne parliamo!**).
- Nel caso di dinamica del 2.^o ordine con poli poco smorzati il PID dà risultati insoddisfacenti (meglio una rete corretttrice).

Taratura di un regolatore PID

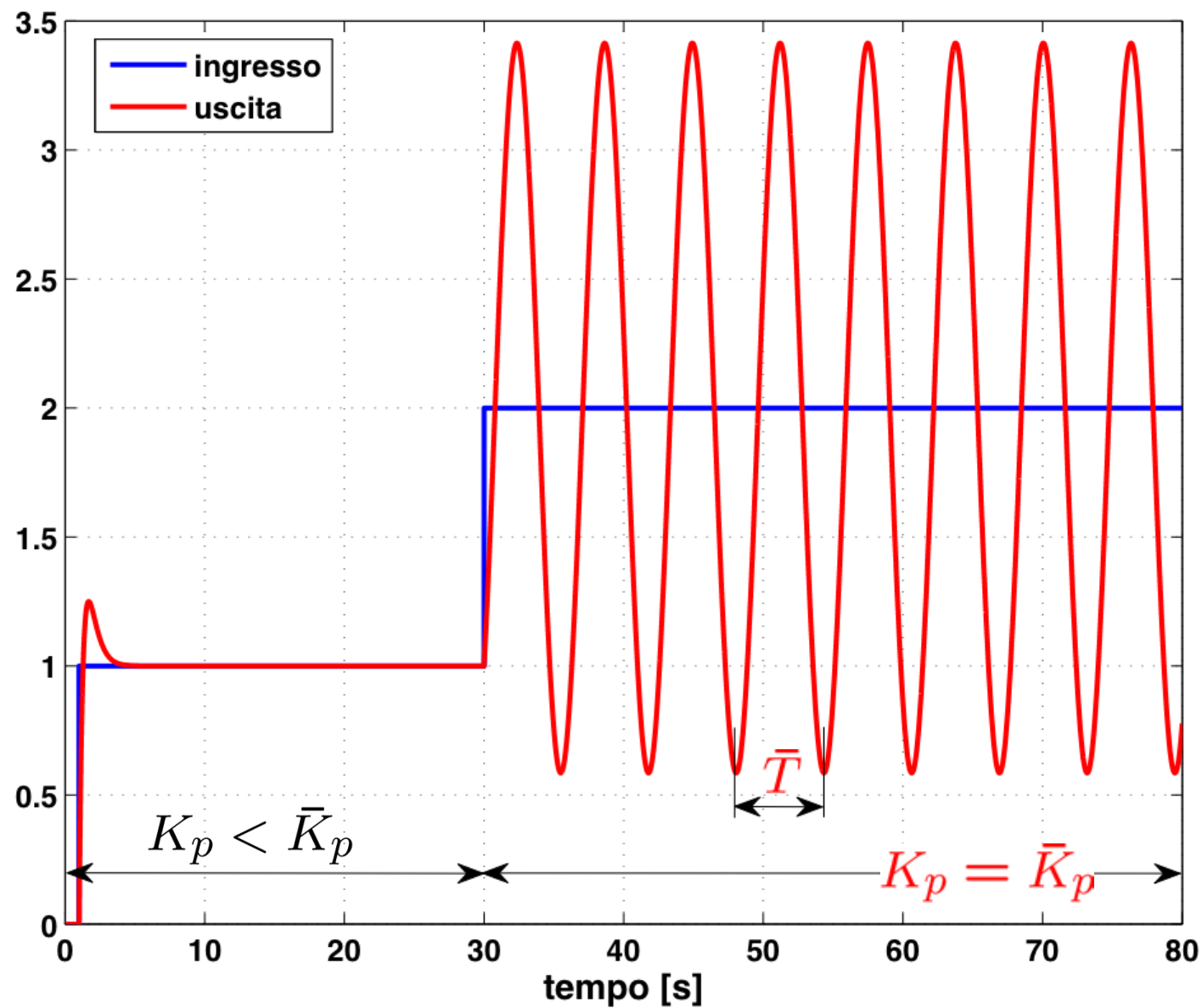
- **Metodi empirici** (Ziegler/Nichols e successive modifiche)
 - Nessuna conoscenza a priori sul sistema
 - Basati su esperimenti
 - Costruzione di modelli semplificati del processo
- Metodi analitici (non li vediamo!)
- Autosintonia (non li vediamo!)

Analisi della risposta in anello chiuso

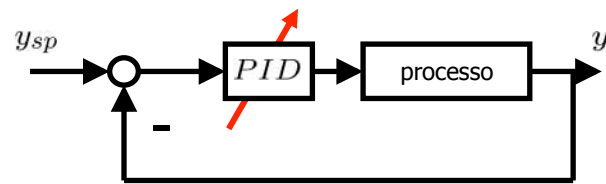


- Con $T_I = T_D = 0$, K_p “piccolo” si osserva la risposta al gradino del **sistema a ciclo chiuso**.
- Si aumenta K_p finché la risposta presenta **oscillazioni permanenti**
- Si consulta la tabella.

↙ $\bar{K}_p \quad \bar{T}$



Metodo di Ziegler/Nichols a ciclo chiuso



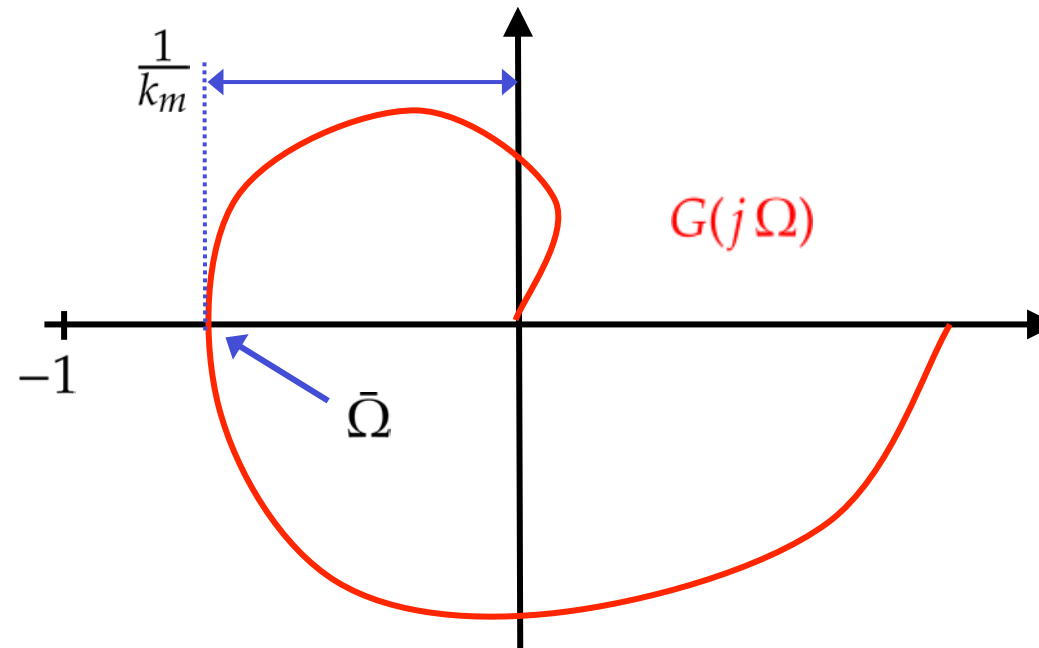
$\bar{K}_p$ $\bar{T}$ 

	K_p	T_i	T_d
P	$0.5\bar{K}_p$		
PI	$0.45\bar{K}_p$	$0.8\bar{T}$	
PID	$0.6\bar{K}_p$	$0.5\bar{T}$	$0.125\bar{T}$

Analisi della risposta a ciclo chiuso

- Interpretazione teorica:
 - portare il sistema ad avere una risposta oscillante, di ampiezza permanente, significa averlo portato al limite della stabilità, forzando il sistema di ciclo chiuso ad avere, tra i suoi poli, almeno una coppia di poli immaginari puri.
 - Questo significa che il guadagno critico $\bar{K}_p$ coincide col margine di guadagno k_m del sistema da controllare, descritto dalla FdT $G(s)$ (nel caso in cui k_m esista finito).
 - Ancora, il guadagno critico $\bar{K}_p$ coincide con il guadagno che porta ad avere sul luogo delle radici almeno due poli immaginari puri (se il luogo taglia l'asse immaginario).

- Facendo riferimento alla figura



si può scrivere che

$$\bar{K}_p = k_m \qquad \bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\Omega}}$$

- A questo punto si può usare la tabella vista in precedenza.

Osservazioni

- Obiettivo: $\varphi_m \approx 30^\circ$
- La tabella fornisce **valori indicativi**: poi serve **taratura “fine”**
- Procedura non applicabile se
 - Il sistema non raggiunge il limite di stabilità $k_m \rightarrow \infty$
 - Le oscillazioni sono pericolose

Analisi della risposta al gradino ad anello aperto



- Si applica un **ingresso a gradino** al **processo non controllato** e si registra l'uscita
- Si ricavano i parametri della risposta (**metodo della tangente/metodo delle aree**)
- Si consulta la tabella.

Modello approssimato del primo ordine con ritardo finito (FOPD)

- Si vuole modellare il processo con una funzione di trasferimento molto semplice: modello del primo ordine con un ritardo finito

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s}$$

- Che caratteristiche possiede la risposta al gradino di $G(s)$?

Risposta al gradino di un sistema FOPD

$$\left. \begin{array}{l} G(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s} \\ U(s) = \frac{\bar{U}}{s} \end{array} \right\} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s} \frac{\bar{U}}{s}$$

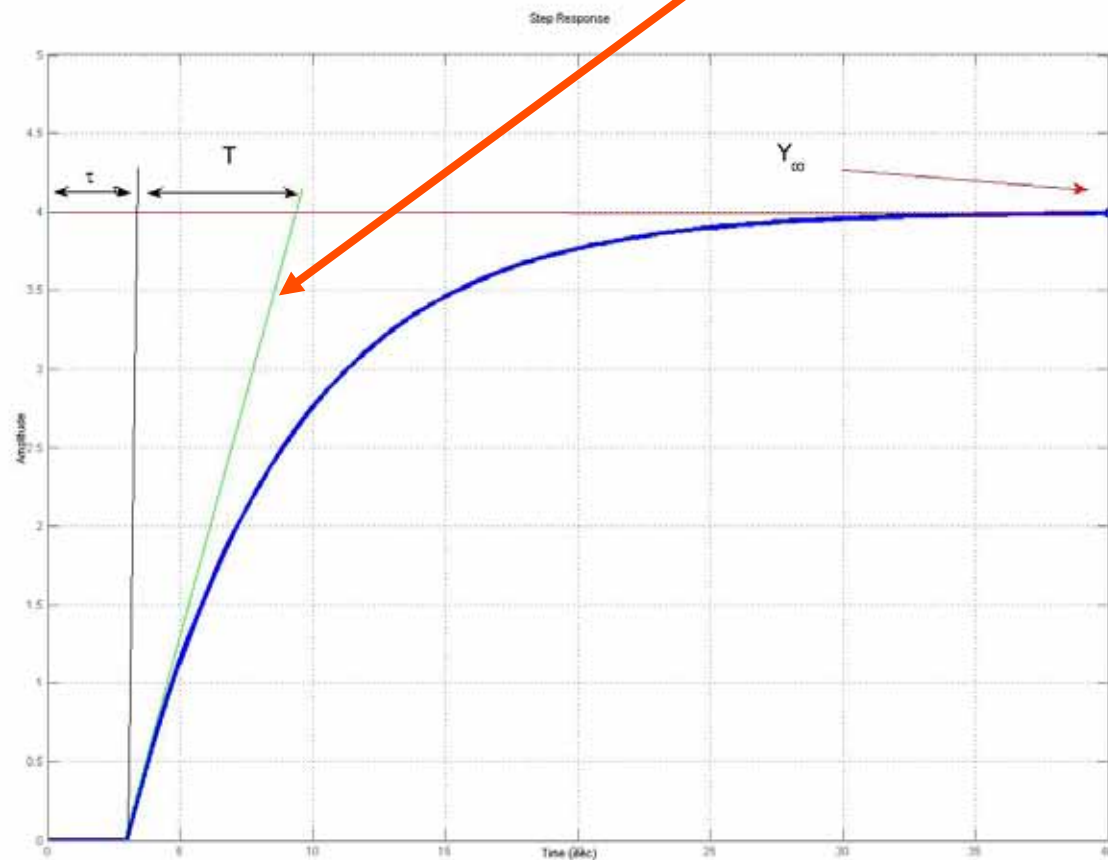
$$y(t) = \mu \bar{U} \left(1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} \right) 1(t - \tau)$$

Metodo della tangente

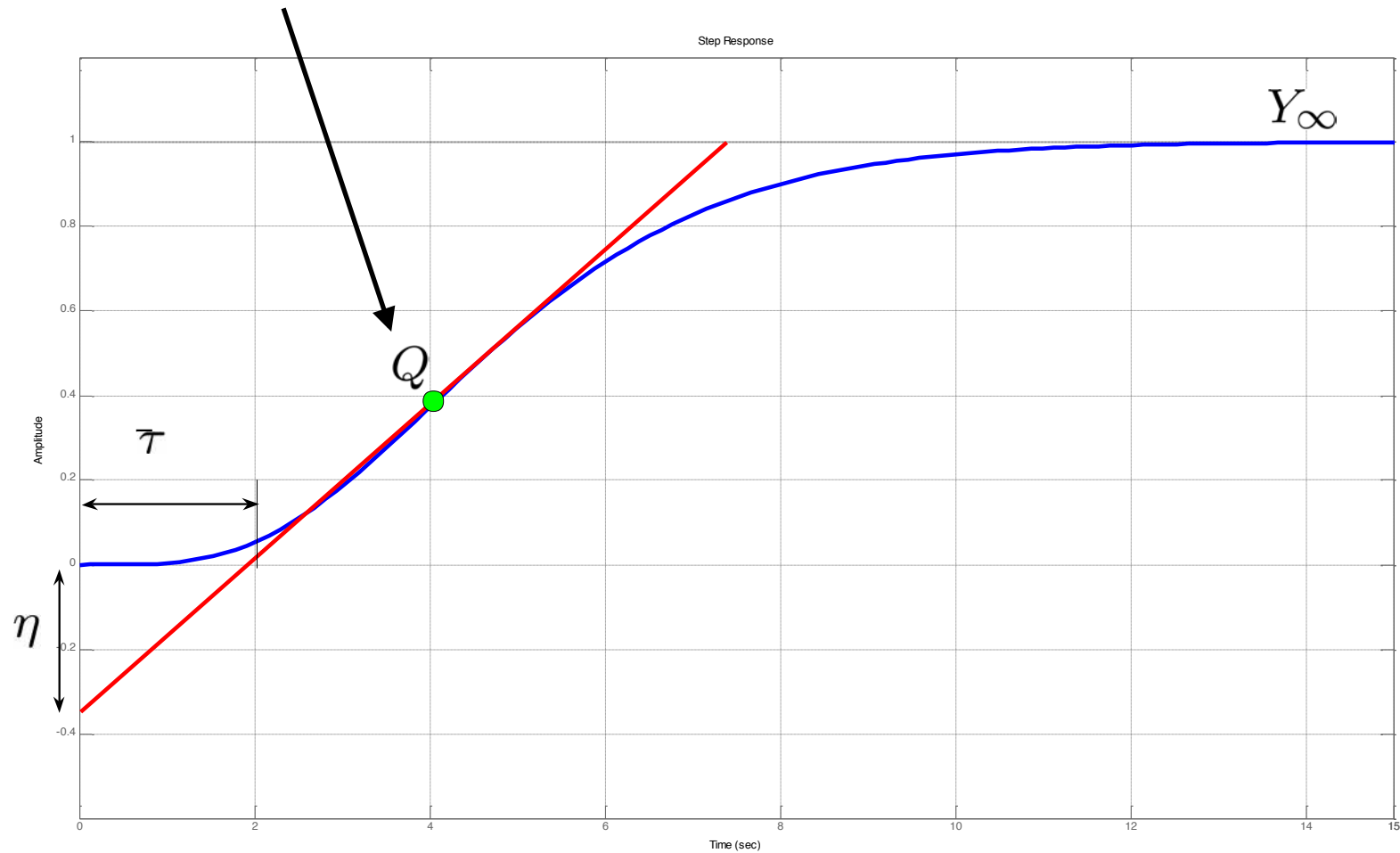
Retta tangente per $t = \tau$ è tangente a pendenza massima

- Analisi sul modello:
 - Risposta del modello ad un gradino in ingresso di ampiezza

$\bar{U}$



Punto di flesso



Metodo della tangente: applicazione "reale"

Metodo della tangente: parametri del modello

- Guadagno statico $\mu = \frac{Y_\infty}{\bar{U}}$
- Costante di tempo T del polo  dal grafico

– oppure

$$\eta : Y_\infty = \tau : T \implies T = \frac{\tau Y_\infty}{\eta}$$

- Ritardo finito τ  dal grafico

Osservazioni

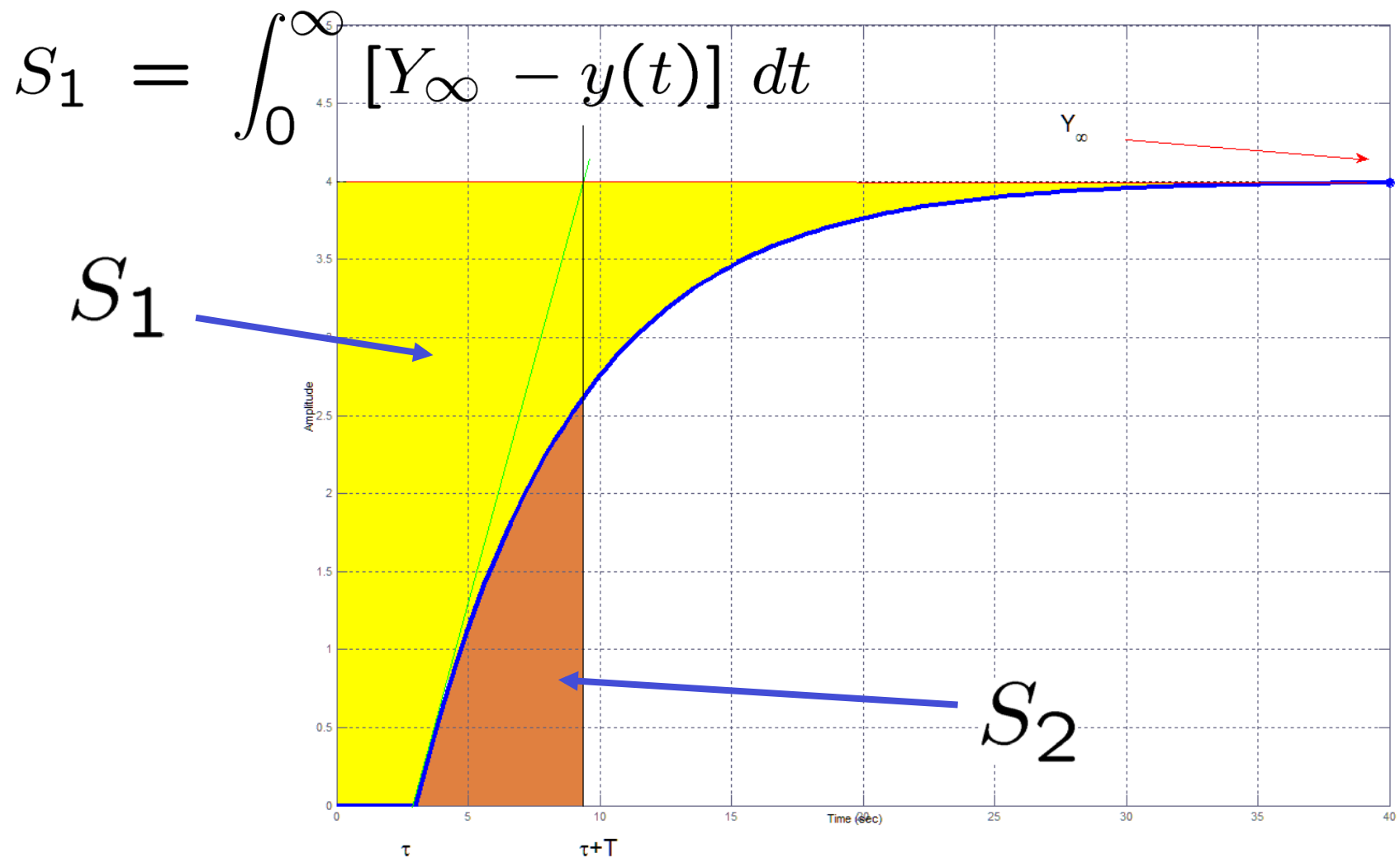
- Problemi nell'applicazione sperimentale, causati dagli **errori** di misura e dal **rumore** di misura.
- In tali casi è difficile valutare il punto di massima pendenza della curva e la retta tangente in quel punto.
- E se la risposta del sistema allo scalino presentasse **sottoelongazioni**? Il metodo in tal caso fornisce risultati scadenti.
- In definitiva **metodo poco accurato**.

Metodo delle aree

- Medesime ipotesi di partenza del metodo della tangente:
 - Il sistema viene modellato con la FdT

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s}$$

- Stavolta il calcolo dei parametri si basa sulla valutazione di due aree opportune
 - Metodo **facilmente implementabile** in via numerica
 - Intrinsecamente più **robusto** del precedente ad errori/rumori di misura



$$S_2 = \int_{\tau}^{\tau+T} y(t) dt = \int_0^{\tau+T} y(t) dt$$

Analisi della risposta del modello

$$S_1 = \mu U \tau + \int_0^{\infty} \mu U e^{-\frac{t}{T}} dt$$

$$S_1 = Y_{\infty} (\tau + T)$$

$$S_2 = \int_0^T \mu U \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) dt$$

NB

$$S_2 = \frac{Y_{\infty} T}{e}$$

Metodo delle aree: parametri del modello

- Guadagno statico $\longrightarrow \mu = \frac{Y_\infty}{U}$
- Dall'area S_1 il valore di $(T+\tau)$ $\longrightarrow (\tau + T) = \frac{S_1}{Y_\infty}$
- Dall'area S_2 il valore di T $\longrightarrow T = \frac{S_2 e}{Y_\infty}$
- Finalmente il valore di τ $\longrightarrow \tau = \frac{S_1}{Y_\infty} - \frac{S_2 e}{Y_\infty}$

Osservazioni

- Metodo **robusto al rumore/errori di misura**
 - Calcolo di integrali, quindi se rumore è a media nulla il suo effetto sull'integrale è molto limitato, trascurabile ...
- La risposta al gradino NON deve presentare sottoelongazioni (problema analogo alla tecnica della tangente)

Modello FOPD: osservazioni conclusive

- Quando è adatto un modello descritto da

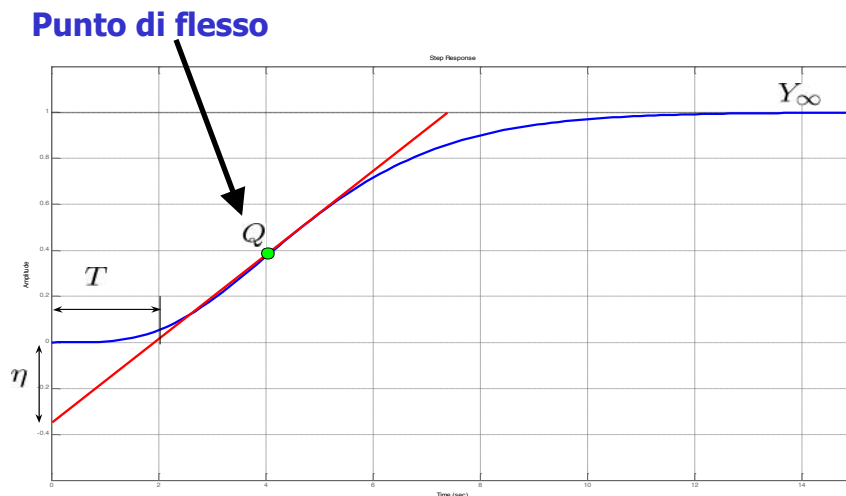
$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s} \quad ?$$

- Il sistema deve presentare una **risposta al gradino non oscillante, senza sottoelongazioni né sopraelongazioni**.
- Il modello mette in evidenza la presenza di **un polo dominante** e di un termine di **ritardo finito**: sottoelongazioni e/o sopraelongazioni sono descrivibili soltanto inserendo anche degli zeri opportuni nella FdT del modello.
- Una risposta oscillante sarebbe descritta inserendo almeno una coppia di poli complessi coniugati nella FdT del modello.

Modello FOPD: ancora osservazioni

- La presenza del termine di **ritardo finito** è **giustificata** nel caso in cui nel processo che avviene nel sistema ci sia un fenomeno di **trasporto di materia** (es. serbatoi con condotte di comunicazione) oppure **trasporto di energia** (es. sistemi termici [forni ecc.]).
- Altrimenti il **termine di ritardo finito** è **fittizio** (esiste solamente nel modello) senza alcuna corrispondenza nel sistema reale.
- In tal caso il termine di ritardo finito risulta accettabile quando **il sistema** in esame **risponde in maniera molto lenta** al gradino in ingresso.

Taratura PID: modello FOPD dalla tecnica della tangente



	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{U}{\eta}$		
PI	$0.9 \frac{U}{\eta}$	$3.3T$	
PID	$1.2 \frac{U}{\eta}$	$2.0T$	$0.5T$

U: valore del gradino del segnale di riferimento

Taratura PID: modello FOPD dalla tecnica delle aree

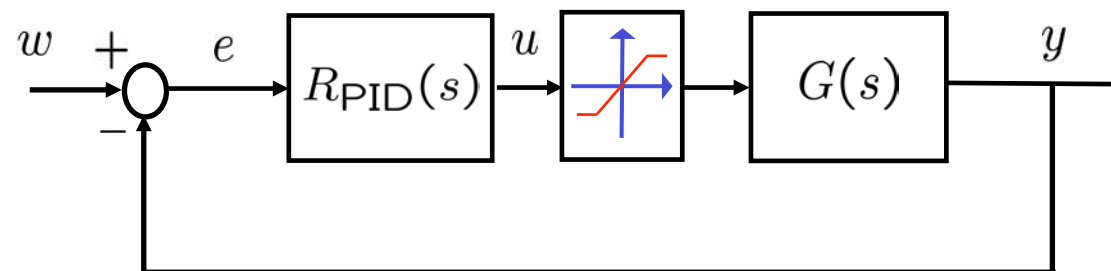
$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-\tau s}$	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{\mu\tau}$		
PI	$0.9 \frac{T}{\mu\tau}$	3τ	
PID	$1.2 \frac{T}{\mu\tau}$	2.0τ	0.5τ

Osservazioni

- Taratura simile a quella basata sull'analisi della risposta ad anello chiuso.
- Valori indicativi.
- Applicabile a sistemi con risposta al gradino non oscillante e con valore asintotico finito.

Il fenomeno del wind-up - cenni

- **Fenomeno non lineare** di interazione tra l'**azione di controllo di tipo integrale** e l'**attuatore**, la cui uscita è fisicamente limitata.
- NB non è specifico dei PID, ma può esserci **ogni volta** che il regolatore contiene un'**azione di tipo integrale**.
- Si manifesta con un **degrado di prestazioni** del sistema di controllo, durante manovre che portino a saturare l'uscita dell'attuatore.

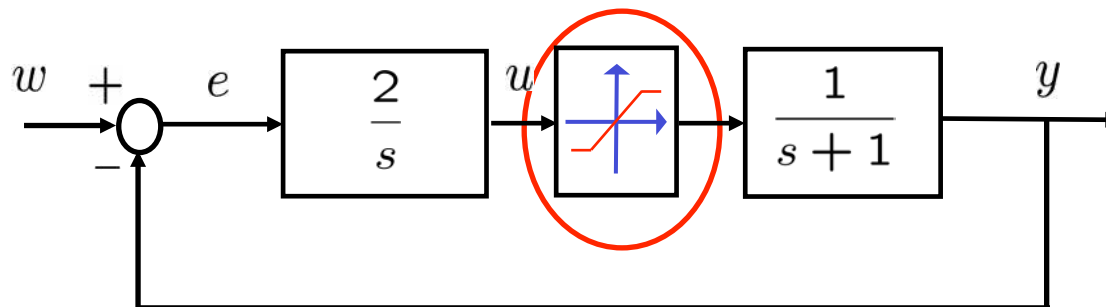
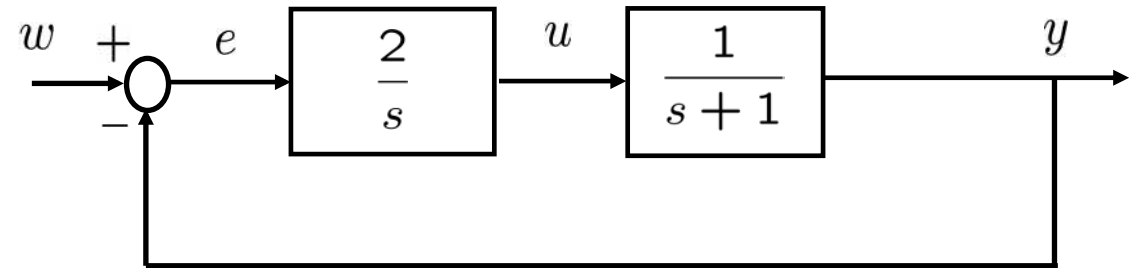


- **Cenni di spiegazione:** quando l'errore si mantiene dello stesso segno per un certo periodo (es start-up..) lo stato dell'integratore (e quindi la sua uscita) cresce in modulo, anche nel caso in cui l'uscita effettiva dell'attuatore sia limitata per saturazione (**l'integratore "si carica"**).
- In corrispondenza della variazione di segno dell'errore non c'è una pronta variazione del segnale di controllo, poiché si deve attendere la **"scarica" dell'integrale** prima di poter avere un segnale di comando che faccia uscire dalla saturazione l'attuatore.

- Questo fatto può dar origine a **lunghi transitori**, con **sovraelongazioni eccessive** ed indesiderate sull'uscita controllata (**decadimento di prestazioni**).
- Più pericoloso ancora è il fatto che nel periodo in cui l'attuatore è saturato e l'integratore "si carica" il **sistema di controllo non** è assolutamente **reattivo nei confronti di disturbi** che possono avvenire nel sistema controllato.
- **NON** vediamo come si affronti il problema (esistono diverse strategie: il problema sarà trattato ad es. nel corso di "Controllo Ottimo e Robusto").

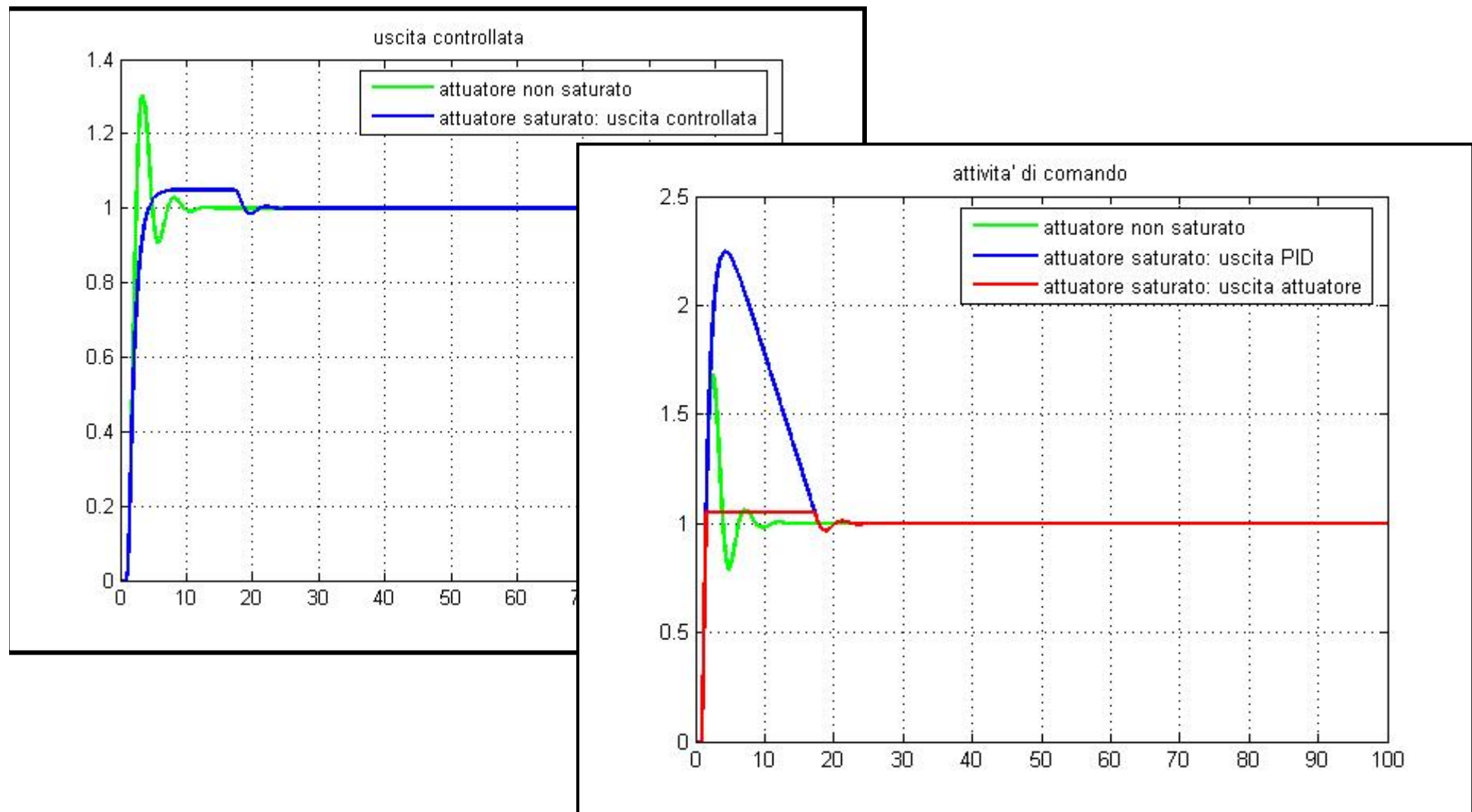
Un esempio

- Schema a blocchi del sistema

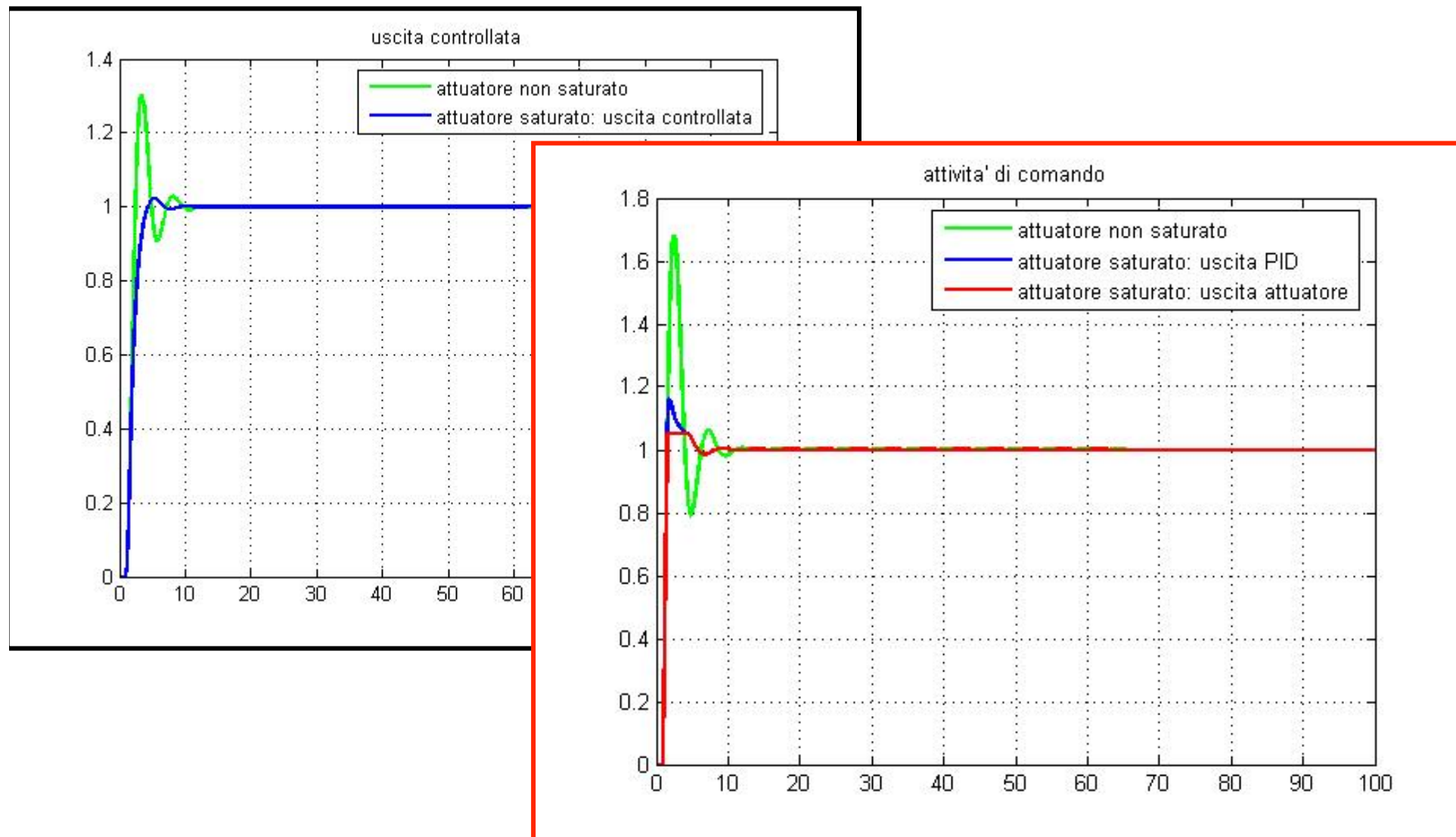


Saturazione tra
-1.05 e +1.05

- Prestazioni del sistema quando si manifesta il fenomeno del windup



- Prestazioni del sistema quando si applica uno schema di anti-windup (NON affrontiamo l'argomento).



Progetto di regolatori sul luogo delle radici

Esempi di utilizzo del luogo delle radici
Progetto di regolatori standard

Esempi di uso del luogo delle radici nel progetto

- Finora abbiamo utilizzato il luogo delle radici solamente per verificare le prestazioni ottenute progettando il controllare per tentativi, basandosi sui diagrammi (asintotici) della risposta in frequenza (del sistema regolatore + processo in anello aperto).
- In realtà è possibile fare uso del luogo delle radici per portare a termine tutto il progetto, anche senza far uso dell'analisi della risposta in frequenza (almeno nei casi in cui sappiamo tracciare con facilità il luogo delle radici). Negli esempi seguenti vedremo come poter fare

Progetto sul luogo delle radici – esempio

- Dato il sistema descritto da $G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 10)}$

determinare un **regolatore puramente proporzionale** tale da garantire che il **tempo di assestamento** nella risposta allo scalino unitario a ciclo chiuso sia non maggiore di

$$R(s) = \mu_R \quad \longrightarrow \quad t_{a1\%} \leq 2.5 \text{ s}$$

- Una specifica sul tempo di assestamento per la risposta allo scalino si può tradurre in una specifica sulla posizione dei poli dominanti per il sistema a ciclo chiuso, quindi può essere vantaggioso risolvere il problema facendo uso del luogo delle radici.

- In base a quanto visto in Parte 7, vale che (per un sistema del secondo ordine)

$$G(s) = \frac{\mu}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)} \quad \longrightarrow \quad t_{a1\%} \simeq \frac{5}{\sigma}$$

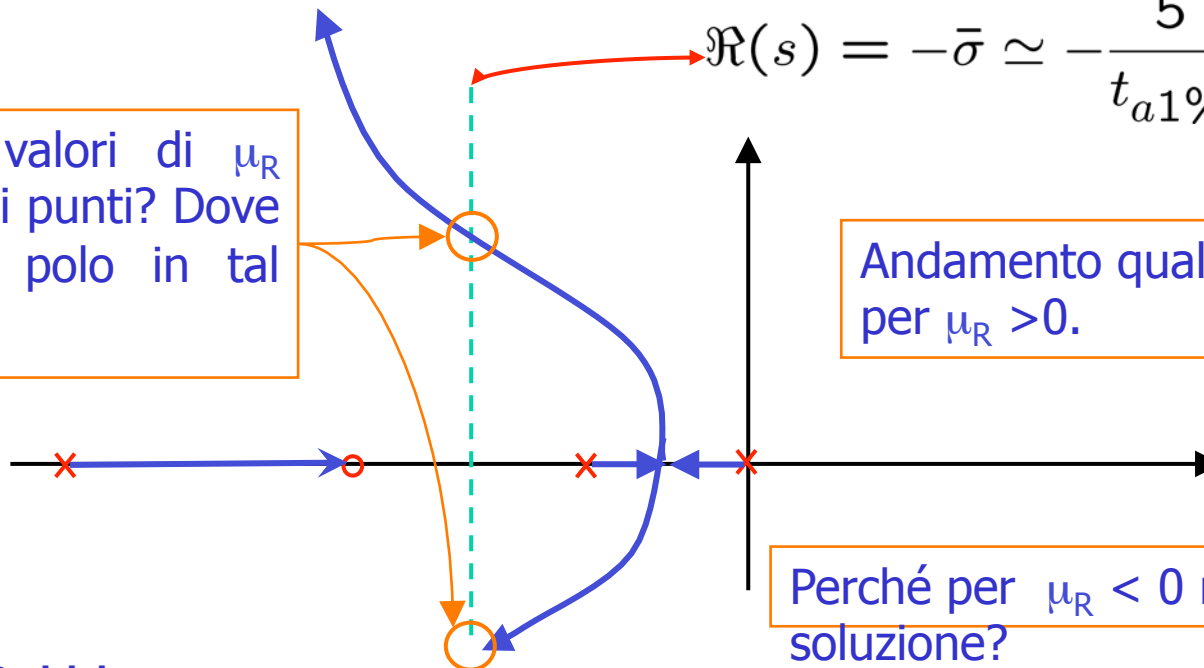
- Nel caso in esame, possiamo imporre che i poli dominanti siano situati a sinistra della retta individuata da

$$\Re(s) = -\bar{\sigma} \simeq -\frac{5}{t_{a1\%}} = -2$$

Per quali valori di μ_R trovo questi punti? Dove è il terzo polo in tal caso?

Andamento qualitativo del luogo per $\mu_R > 0$.

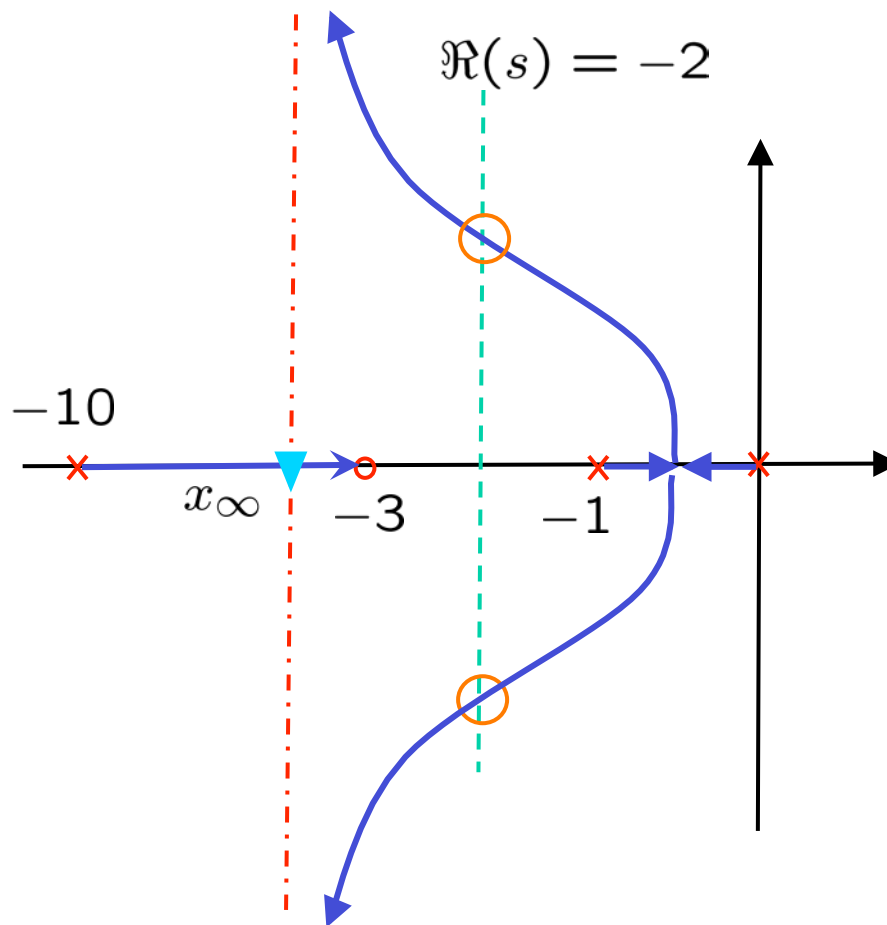
Perché per $\mu_R < 0$ non c'è soluzione?



- Tracciamento del **luogo diretto**:

- dati zeri e poli, individuazione delle porzioni del luogo diretto appartenenti all'asse reale;
- $(n-m) = 2 \rightarrow$ due asintoti perpendicolari all'asse reale;
- gli asintoti hanno origine dal punto

$$x_{\infty} = \frac{3 - 0 - 1 - 10}{2} = -4$$



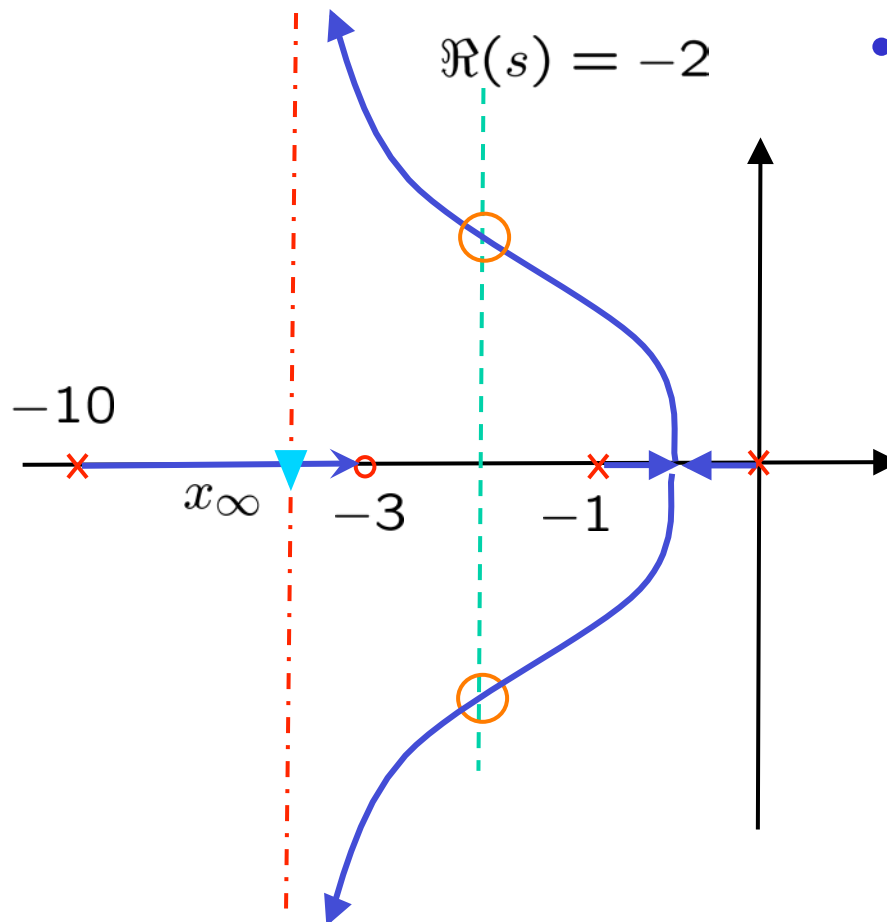
- ciò garantisce che esiste certamente soluzione al problema: il luogo intersecherà certamente la retta $\Re(s) = -2$

- punti critici:

$$Q(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+10}$$

$$Q(s) = 0 \rightarrow x_C \approx -0.54$$

Le altre soluzioni non sono punti del luogo cercato.



- Per trovare i punti d'intersezione cercati si può operare come segue:

- con la sostituzione di variabile

$$s = w - 2$$

si trasforma il luogo cercato in quello originato dall'equazione caratteristica

$$\hat{G}(w) = -\frac{1}{\rho}$$

- di questo luogo si vogliono cercare i valori di ρ che corrispondono a radici (a ciclo chiuso) con $\text{Re}(w)=0$ [cioè proprio con $\text{Re}(s) = -2$]

- Per risolvere il nuovo problema è sufficiente applicare il criterio di Routh-Hurwitz all'equazione caratteristica

$$1 + \rho \hat{G}(w) = 0$$

- Sostituzione di variabile $s = w - 2$

$$G(s) = -\frac{1}{\rho} \quad \longrightarrow \quad \frac{w+1}{w^3 + 5w^2 - 22w + 16} = -\frac{1}{\rho}$$

$$w^3 + 5w^2 + (\rho - 22)w + \rho + 16 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (\rho - 22) \\ 2 & 5 & (\rho + 16) \\ 1 & \frac{1}{5} \cdot \left(\rho - \frac{63}{2} \right) & \\ 0 & (\rho + 16) & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \rho = 31.5$$

- Per completezza i punti del luogo di $G(s)$ cercati saranno allora le soluzioni di

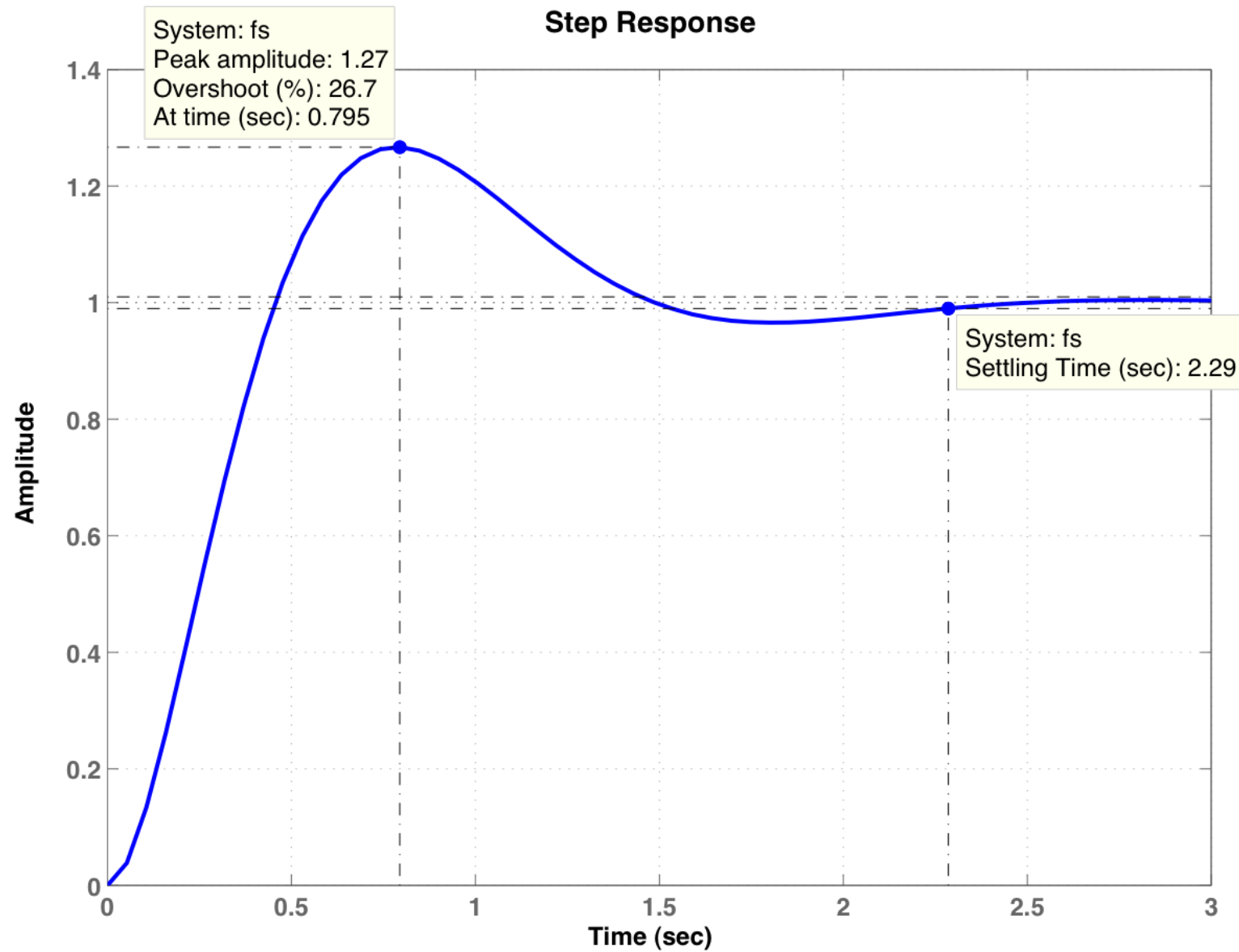
$$G(s) = -\frac{2}{63}$$

$$G(s) = -\frac{2}{63} \quad \rightarrow \quad 2s^3 + 22s^2 + 83s + 189 = 0$$

$$s_{1,2} = -2 \pm 3.08 \quad s_3 = -7.00$$

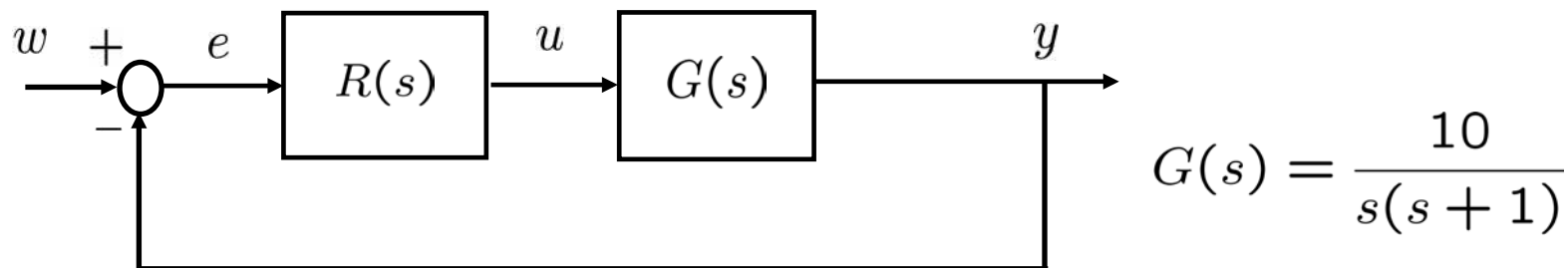
- I poli dominanti a ciclo chiuso possiedono allora

$$\omega_n \approx 3.67 \quad \xi \approx 0.54$$



Ancora un esempio

- Si vuole progettare (per tentativi, facendo uso del luogo delle radici) un regolatore $R(s)$ per il sistema



che garantisca il rispetto delle specifiche seguenti:

- errore a regime alla rampa unitaria

$$w(t) = t \cdot 1(t) \quad \Rightarrow \quad |e_{\infty}| \leq \frac{1}{10}$$

- poli dominanti:

$$\omega_n = 2 \quad \xi \geq 0.5$$

- Se la FdT del regolatore non ha poli in $s = 0$ allora vale che:

$$R(0) = \mu_R \quad \mu_R > 0$$

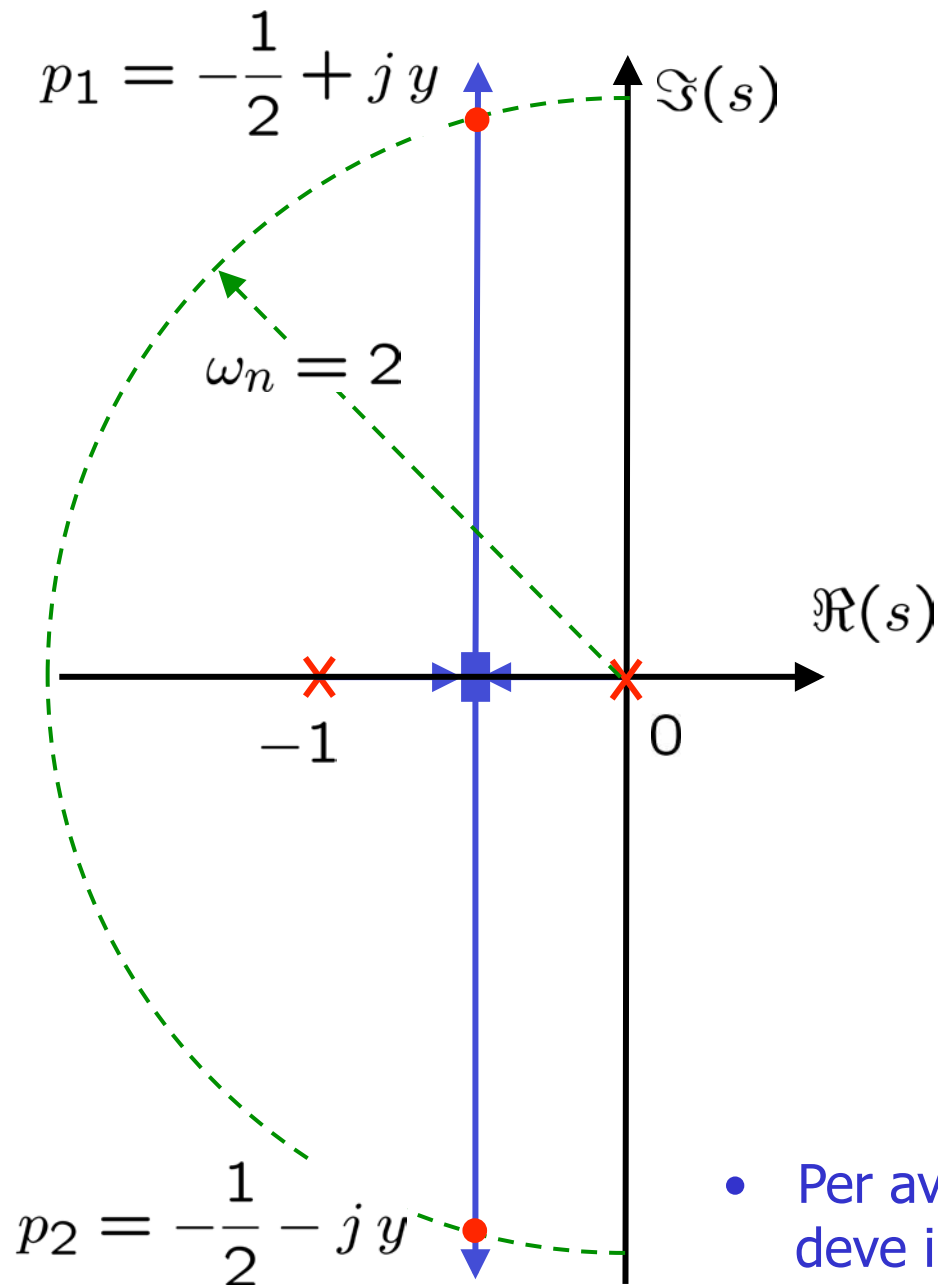


$$|e_\infty| = \frac{1}{10 \mu_R} \leq \frac{1}{10} \implies \mu_R \geq 1$$

E se il regolatore esercitasse un'azione di controllo di tipo integrale? Provare per esercizio

- Supponiamo per ora di realizzare un regolatore puramente proporzionale e proviamo, per capire se le richieste siamo o meno soddisfatte, a tracciare il luogo delle radici di

$$L(s) = \rho \frac{1}{s(s+1)} \quad \rho = 10 \mu_R$$



- Proprietà del luogo:
 - centroide ed asintoti

$$x_\infty = -\frac{1}{2}$$

$$\theta_{\infty, k} = \begin{cases} +90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

- punti critici

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = 0$$

$$s_c = -\frac{1}{2}$$

- Per avere i punti del luogo con $\omega_n = 2$ si deve imporre che

$$|p_{1,2}| = 2$$

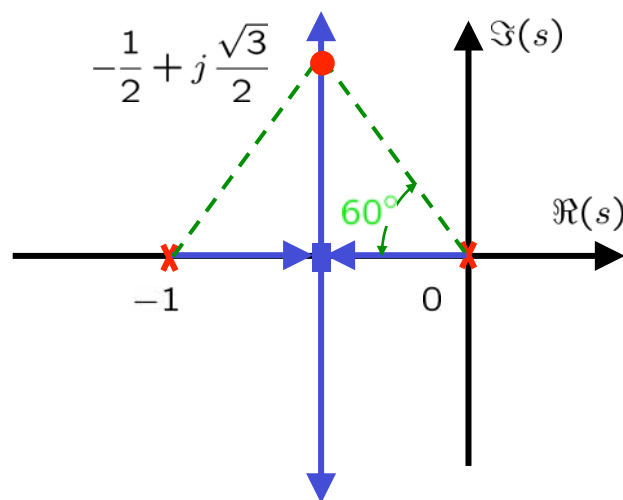
$$|p_{1,2}| = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

- I poli appena trovati tuttavia **NON** possiedono lo smorzamento desiderato:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \Rightarrow \quad \xi \approx 0.35$$



- Proviamo allora ad imporre piuttosto di avere poli di ciclo chiuso con coeff. di smorzamento pari a 0.5:



– ma in questo modo si ottiene

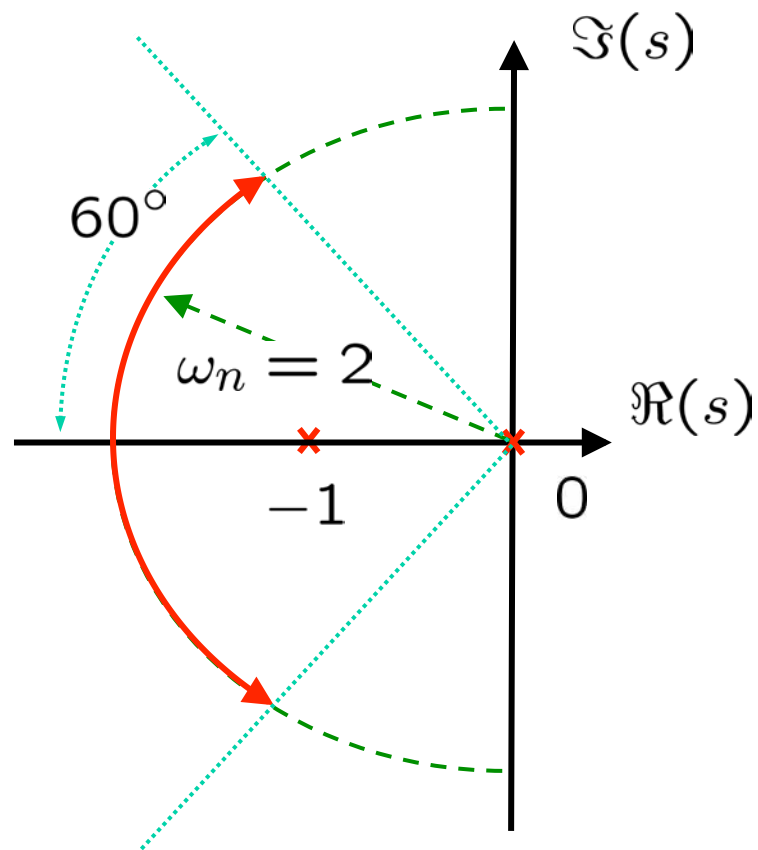
$$\omega_n = 1$$

– inoltre

$$\rho = 1 \Rightarrow \mu_R = \frac{1}{10}$$



- Nessuno degli approcci tentati finora è utile a risolvere il problema: allora è necessario che il regolatore $R(s)$ sia dinamico [si deve necessariamente modificare la forma del luogo delle radici per soddisfare le richieste].



- Il luogo finale, per soddisfare la seconda specifica deve intersecare l'arco evidenziato (in rosso) in figura.
- Per soddisfare la prima specifica, la costante di guadagno in corrispondenza degli eventuali punti di intersezione dovrà essere maggiore di 10.

- Idea: spostare il centroide degli assi verso sinistra, mantenendo gli asintoti verticali.
- Per ottenere ciò, il regolatore $R(s)$ deve essere una **rete anticipatrice**:

$$R(s) = \mu_R \frac{s + z}{s + p} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \rho \frac{(s + z)}{s(s + 1)(s + p)}$$

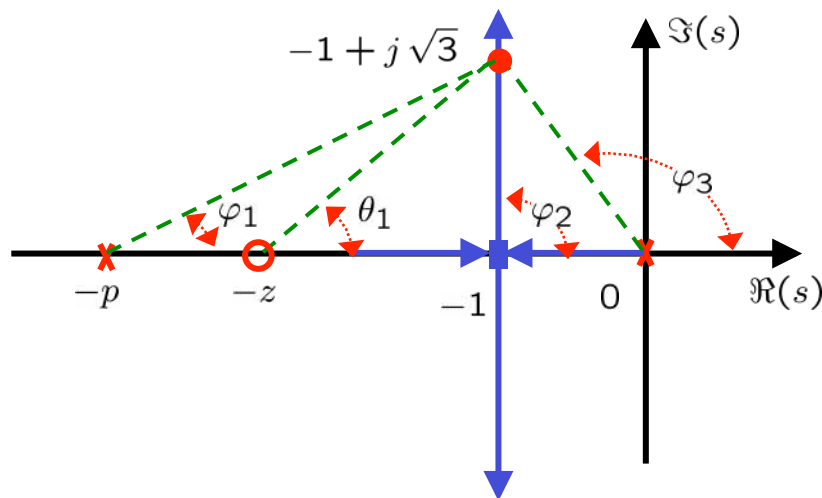
$$x_\infty = \frac{1}{2} [z - 0 - 1 - p] < -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z < p$$

$$R(s) = \mu_R \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \mu_R > 0$$

- Come procedere? La rete viene individuata assegnando i valori dei tre parametri μ_R , T ed α .
- Imponiamo che il luogo delle radici di $L(s)$ passi per i punti

$$-1 \pm j\sqrt{3}$$

così siamo certi di soddisfare del tutto la seconda richiesta (pulsazione naturale e smorzamento dei poli dominanti). Solo dopo sarà da verificare se anche la prima specifica può essere soddisfatta.



- La condizione di passaggio del luogo per il punto desiderato si traduce in

$$\theta_1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = (2k + 1)180^\circ$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

- Da considerazioni geometriche $\varphi_2 = 90^\circ \quad \varphi_3 = 120^\circ$
- In definitiva:

$$\arctan \left[\frac{\sqrt{3}T}{1-T} \right] - \arctan \left[\frac{\sqrt{3}\alpha T}{1-\alpha T} \right] = 30^\circ + 2k 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{4T-1}{2T(1+2T)} \quad T \neq 1$$

- Scegliendo allora ad esempio di posizionare lo zero della rete in $z = -2$ si ottiene

$$T = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad R(s) = 2\mu_R \frac{s+2}{s+4}$$

- Ora non resta che imporre che il luogo LD di $L(s)$ passi per i punti desiderati

$$L(s) = \rho \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 4)} \quad \rho = 20\mu_R$$

$$\hat{s} = -1 + j\sqrt{3} \quad |L(\hat{s})| = \frac{1}{|\rho|}$$

$$|\rho| = 6 \quad \longrightarrow \quad \mu_R = 0.3$$



- Come fare per aumentare il guadagno statico del regolatore senza modificare (o “quasi”) il resto del luogo?
- Si può utilizzare in aggiunta una rete di tipo “**rete ritardatrice**”, in modo da aumentare il guadagno statico del regolatore (in definitiva il regolatore finale diverrà una rete a sella).

$$R_1(s) = \mu_R \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \quad T = 0.5, \alpha = 0.5, \mu_R > 0$$

$$R_2(s) = \mu_2 \frac{1 + T_2 s}{1 + \alpha_2 T_2 s} \quad T_2 > 0, \alpha_2 > 1, \mu_2 > 0$$

$$L(s) = R_1(s) R_2(s) G(s)$$

- Per garantire che il luogo complessivo rimanga “uguale” a quello appena studiato nella zona d’interesse $(-1 \pm j\sqrt{3})$, **polo e zero di $R_2(s)$** devono essere **molto vicini tra loro** e “abbastanza” distanti dalla zona d’interesse.
- In tal modo i contributi (sia in modulo che in fase) della nuova coppia polo/zero sono pressoché ininfluenti nell’intorno dei punti di interesse.

$$L(s) = \rho \frac{(s+2) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{s(s+1)(s+4) \left(s + \frac{1}{\alpha_2 T_2}\right)} \quad \rho = 6 \frac{\mu_2}{\alpha_2}$$

- Ciò che si vuole imporre è che per $\rho=6$ il luogo passi **molto vicino** ai punti imposti in precedenza: per semplificare il problema imponiamo che

$$\mu_2 = \alpha_2$$

e che

$$\hat{s} = -1 \pm j\sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{\left(\hat{s} + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(\hat{s} + \frac{1}{\alpha_2 T_2}\right)} \right| \approx 1$$

cioè praticamente

$$\frac{1}{T_2}, \frac{1}{\alpha_2 T_2} \ll |\hat{s}| = 2$$

- Sulla base delle scelte fatte finora, poniamo:

$$T_2 = 20$$

$$\alpha_2 T_2 > 20$$

$$(\alpha_2 > 1)$$

- Grazie alla rete ritardatrice il guadagno statico del regolatore ora può essere aumentato a piacere. Infatti

$$R(s) = 0.3 \cdot \alpha_2 \frac{(1 + 0.5s)(1 + 20s)}{(1 + 0.25s)(1 + 20\alpha_2 s)}$$

- La specifica sull'errore a regime diventa stavolta:

$$R(0) = 0.3 \alpha_2 \quad \alpha_2 > 0$$



$$|e_\infty| = \frac{1}{10 R(0)} \leq \frac{1}{10} \implies R(0) \geq 1$$

- Scegliamo

$$\alpha_2 = 5$$

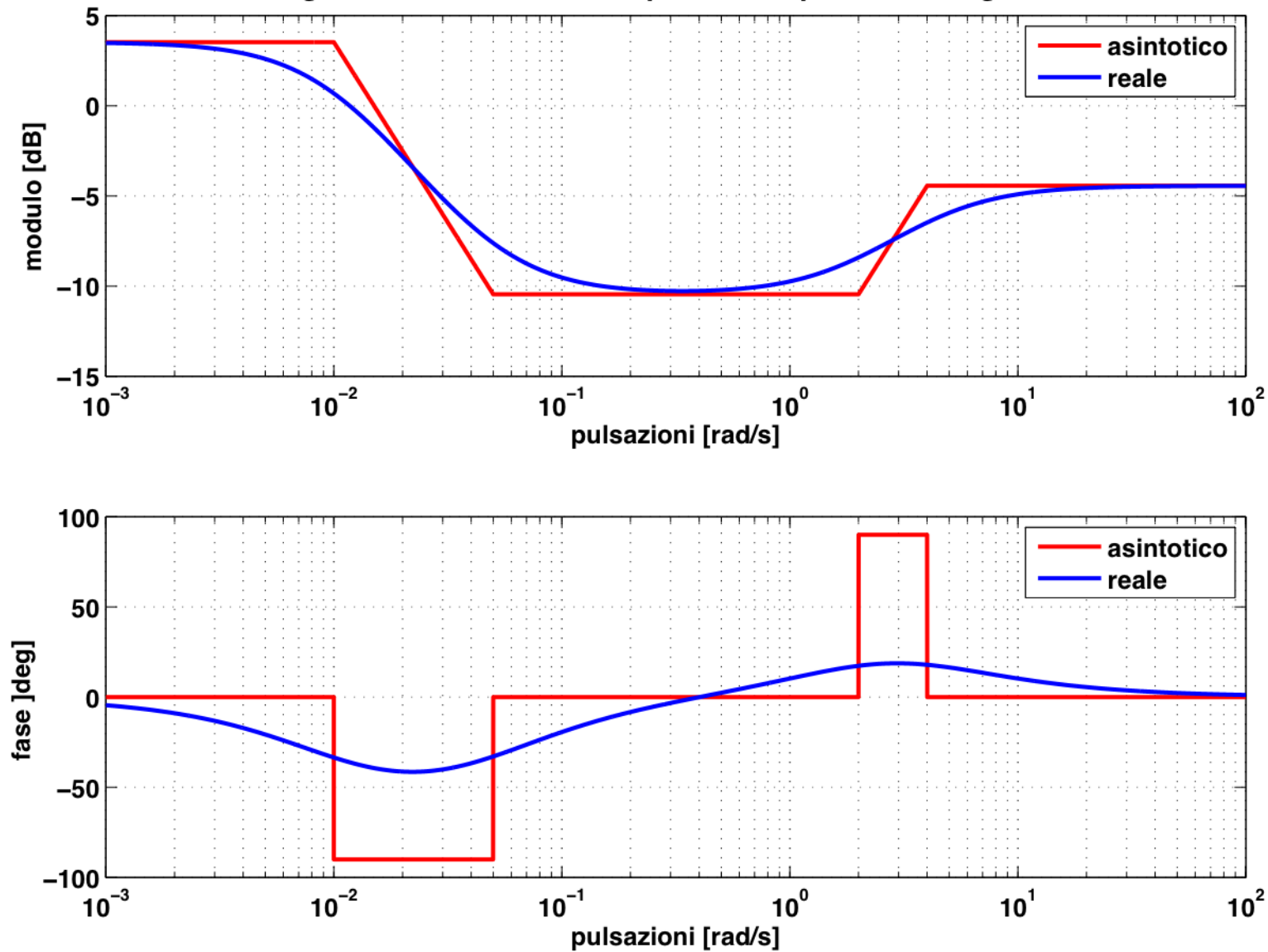
- Il regolatore finale ha l'espressione seguente:

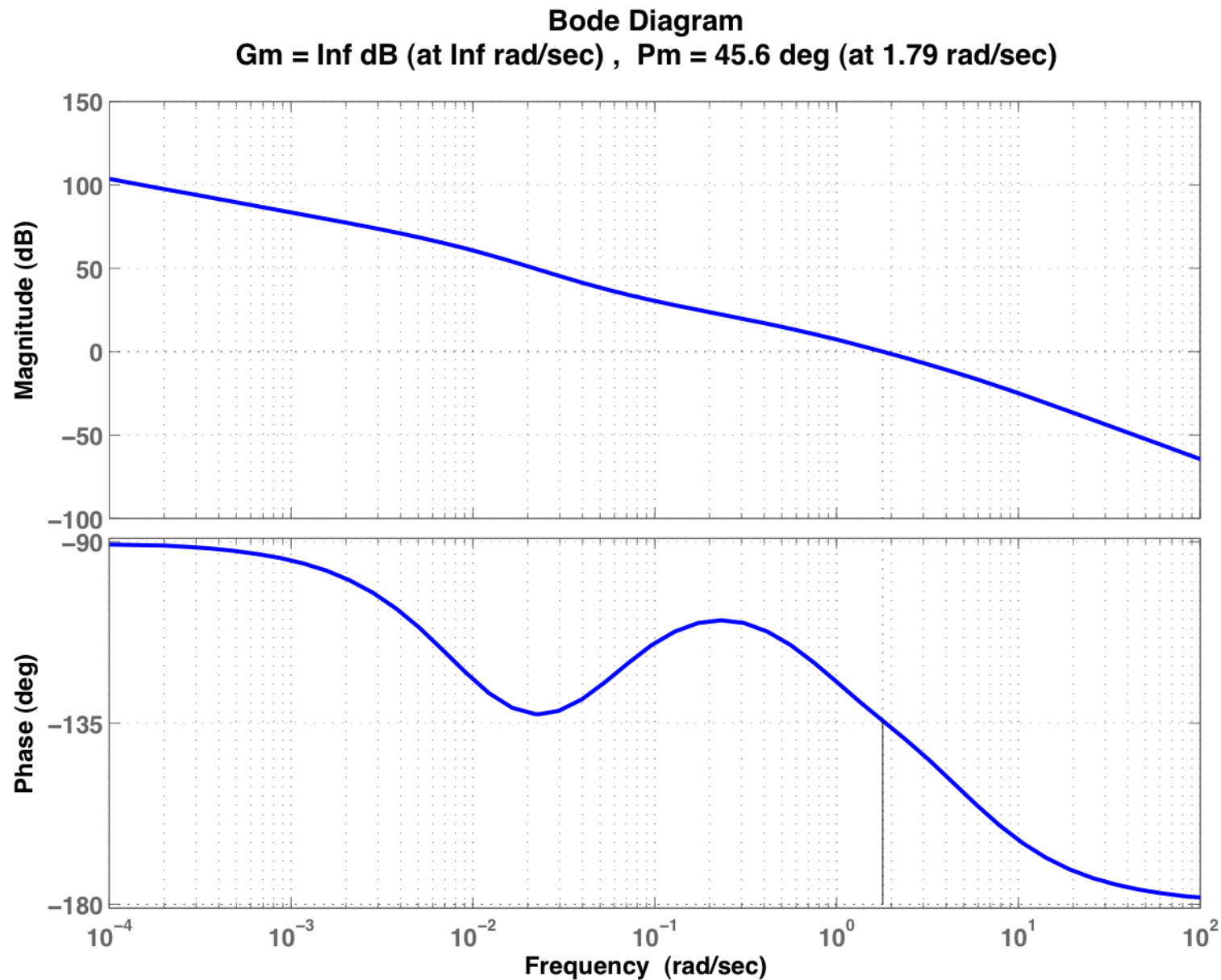
$$R(s) = 1.5 \frac{(1 + 0.5 s)(1 + 20 s)}{(1 + 0.25 s)(1 + 100 s)}$$

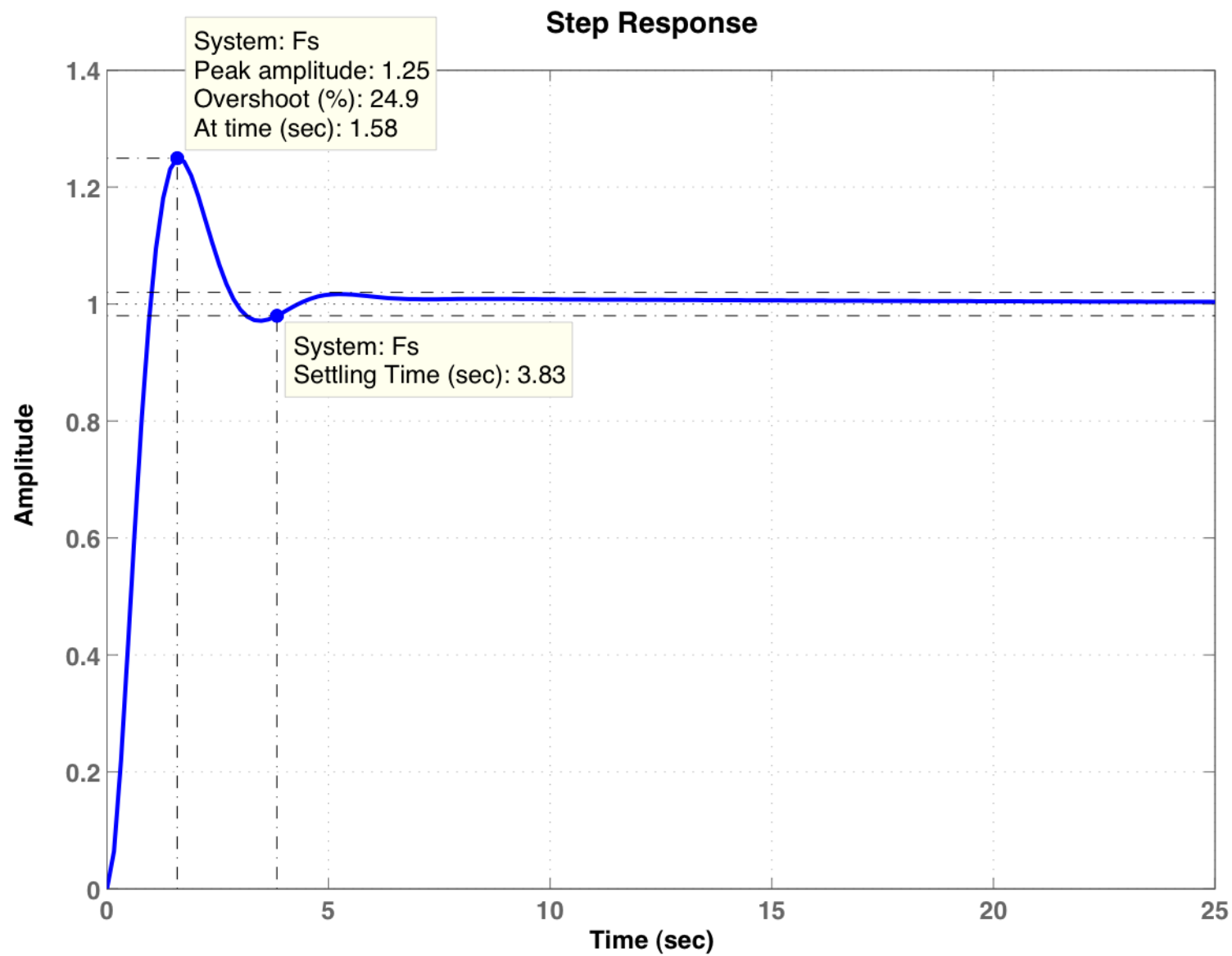
- Come si nota, abbiamo realizzato una rete a sella.

La risposta in frequenza della rete $R(j\omega)$

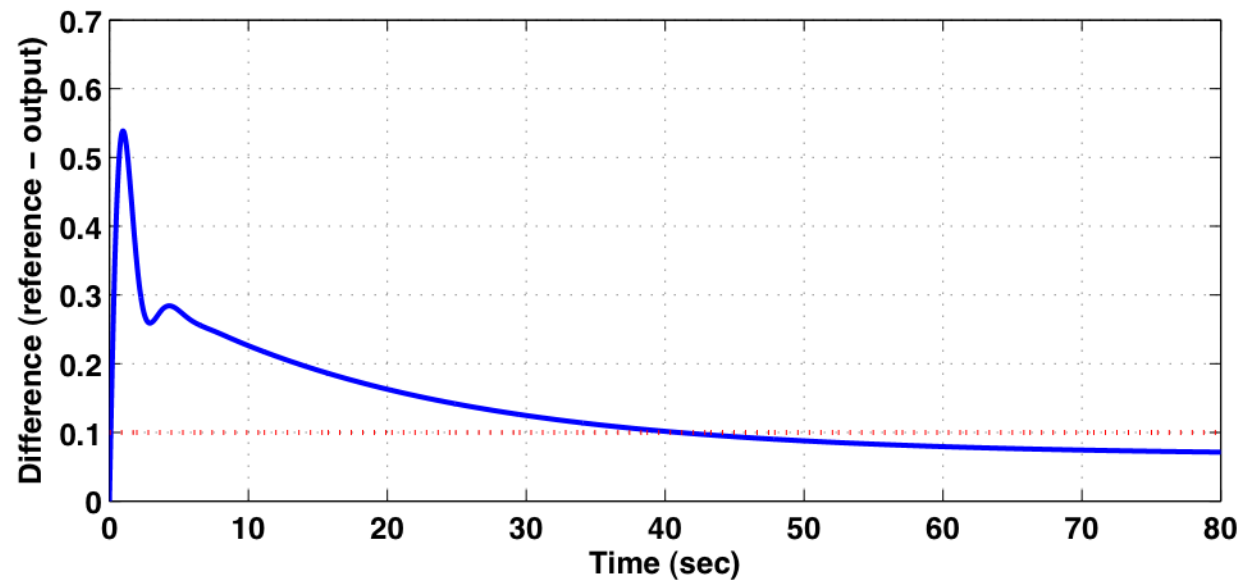
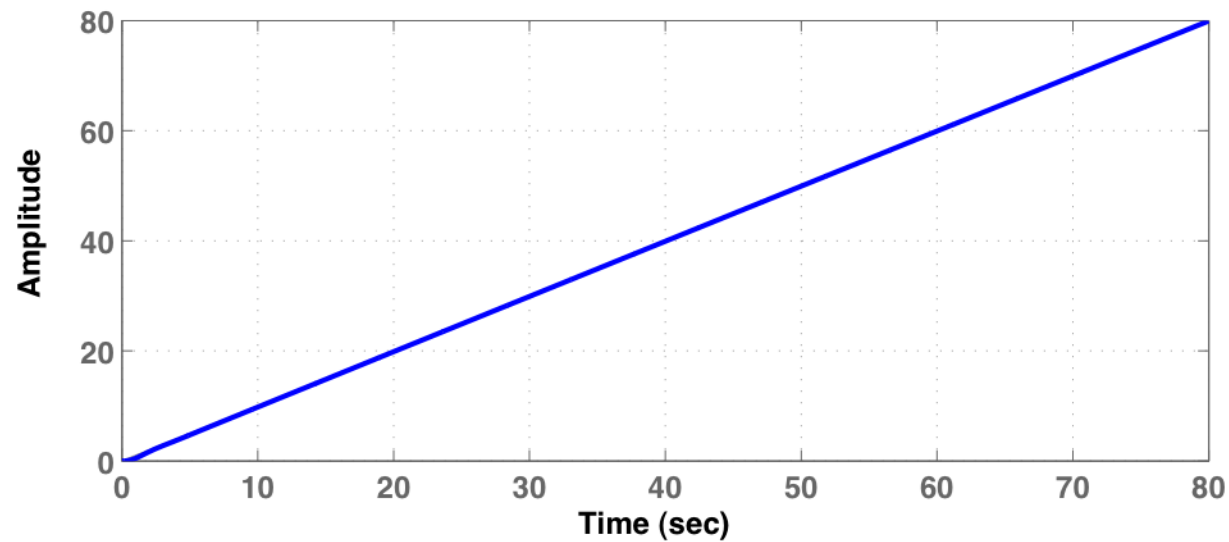
Diagrammi di Bode della risposta in frequenza del regolatore







Linear Simulation Results



Risposta in frequenza di $G(s)$, $L(s)$ ed $R(s)$

