Stabilità per sistemi a tempo continuo

Analisi degli autovalori

Analisi del polinomio caratteristico, criterio di Routh-Hurwitz

Calcolo di e^{At}

Esercizi

Stabilità per sistemi a tempo continuo

1. Criteri basati sull'osservazione della matrice A e sui coefficienti del suo polinomio caratteristico

- esempio 1

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- traccia: $$\mathrm{tr}\,(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\,(s_i)$$

$\mathrm{tr}\,(A) = 1 \Rightarrow$ C'e' almeno un autovalore a parte reale positiva...instabilita'!

NB:

asintotica stabilità $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,(A) < 0$

asintotica stabilità $\not\Leftarrow$ $\mathrm{tr}\,(A) < 0$

- polinomio caratteristico:

$n = 3 \qquad \varphi(s) = \det(sI - A) = s^3 - s^2 - 7s + 6$

Regola:

asintotica stabilita` $\Longleftrightarrow$ $\text{Re}\,(s_i) < 0,\ \forall i$ $\Rightarrow$ $\{\varphi_i, i = 1, \ldots, n\} \neq 0$
e concordi

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^3 - s^2 - 7s + 6$$

$\Rightarrow$ non e' asintoticamente stabile

- esempio 2 $$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

  - traccia: $\text{tr}\,(A) = -1$ non possiamo concludere nulla...

  - polinomio caratteristico:

$n = 2$ $$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^2 + s - 5$$

Regola:

asintotica stabilità $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,(s_i) < 0,\ i = 1, 2$ $\Longleftrightarrow$ $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\} \neq 0$

e concordi

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^2 + s - 5$$

$\Rightarrow$ non e' asintoticamente stabile

Promemoria:

Se nel polinomio: $\left\{ \begin{array}{l} \text{mancano coefficienti} \\ \text{ci sono cambi di segno nei coefficienti} \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{sistema non asintoticamente stabile}}$

2.Criterio basato sullo studio del polinomio caratteristico:

Tabella di Routh

- <u>Quando conviene?</u> Quando il rango di A e' maggiore di 4, e dunque il grado del polinomio caratteristico e' tale che non esistono formule per trovarne le radici.

- <u>Cosa ci fornisce?</u> E' un criterio che non ci dice quali siano le radici, ma da' informazione sul segno della loro parte reale. Dunque ci permette di stabilire se il sistema e' stabile o meno.

▪esempio 1: $\varphi(s) = s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 7s^2 + 4s + 3$

Tabella con al massimo $n+1$ righe,

▪OSS: non sappiamo concludere a priori sul segno delle radici: i coefficienti sono tutti positivi!

$+\ 6$	1	5	7	3
$+\ 5$	2	12	4	
$-\ 4$	-1	5	3	
$+\ 3$	22	10		
$+\ 2$	$60/11$	3		
$-\ 1$	$-21/10$			
$+\ 0$	3			

Ci interessano i cambi di segno nella prima colonna; dunque puo' non essere necessario sviluppare tutti i calcoli, ma basta saper valutare il segno dei suoi elementi.

$$5 = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-1 = -\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$22 = -\frac{1}{-1}\det\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

4 cambi di segno!!

4 radici con parte reale positiva

- esempio 2: discutere la stabilita' di un polinomio parametrico

$$\varphi(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & 3 & 1+k \\
1 & \frac{(8-k)}{3} & \\
0 & (1+k) &
\end{array}$$

Condizioni per la stabilita':

$$\begin{cases} \dfrac{(8-k)}{3} > 0 \\ 1 + k > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < k < 8$$

- **esempio 3:** caso particolare, uno o piu' coefficienti della prima colonna della tabella si annullano.

$$\varphi(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 5$$

4	1	3	5
3	2	6	
2	0	5	
1	?		
0			

si sostituisce lo zero con ε e si procede come da regola

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 3 & 5 \\
3 & 2 & 6 & \\
2 & \varepsilon & 5 & \\
1 & \frac{6\varepsilon-10}{\varepsilon} & & \\
0 & 5 & &
\end{array}
$$

Dunque si passa a studiare il segno dei termini in ε nella prima colonna, considerando ε tendente a zero dapprima da destra e per verifica anche da sinistra.

$$\lim \varepsilon \to 0^+ \qquad \lim \varepsilon \to 0^-$$

$$
\begin{array}{c|c}
4 & + \\
3 & + \\
2 & + \\
1 & - \\
0 & +
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
4 & + \\
3 & + \\
2 & - \\
1 & + \\
0 & +
\end{array}
$$

Si hanno in entrambi i casi due cambi di segno, dunque due radici a parte reale positiva.

In ALTERNATIVA, si moltiplica il polinomio $\varphi(s)$ per un polinomio semplice e noto, a radici a parte reale negativa (che non alterano il risultato della tabella!) e si applica il metodo di Routh a questo nuovo polinomio $\alpha(s)$.

ad esempio...

$$\alpha(s) = \boxed{(s+1)}\varphi(s) = \ldots$$

$$\ldots = (s+1)(s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 5)$$

- esempio 4: caso particolare, una riga della tabella si annulla; una riga nulla di INDICE DISPARI si affronta nel seguente modo (S.D.).

$$\varphi(s) = 3s^5 + 2s^4 + 12s^3 + 8s^2 + 12s + 8$$

5	3	12	12
4	2	8	8
3	0	0	
2			
1			
0			

Significa che ci sono delle radici complesse!

Si puo' proseguire l'algoritmo in due modi.

1. Il polinomio $\varphi(s)$ e' divisibile per un polinomio $\bar{\varphi}(s)$ di potenze pari, di grado massimo pari all'indice della riga superiore della tabella di Routh , i cui coefficienti sono proprio quelli di tale riga.

Infatti:

$$3s^5 + 2s^4 + 12s^3 + 8s^2 + 12s + 8 = \underbrace{\boxed{(2s^4 + 8s^2 + 8)}}_{\bar{\varphi}(s)}(\frac{3}{2}s + 1)$$

In questo caso trovo immediatamente le radici... oppure posso studiare sempre con il criterio di Routh-Hurwitz il quoziente, e cercare di fattorizzare il divisore. Se non si riesce a fattorizzare il divisore si procede con il secondo metodo.

2. Derivo il polinomio $\bar{\varphi}(s)$ di sole potenze pari ottenuto come al caso 1. e sostituisco gli zeri della riga nulla con i suoi coefficienti.

$$
\begin{array}{c|ccc}
5 & 3 & 12 & 12 \\
4 & 2 & 8 & 8 \\
3 & 8 & 16 & \\
2 & 4 & 8 & \\
1 & \boxed{0} & & \\
0 & \dots & &
\end{array}
$$

Ho di nuovo una riga dispari nulla. Bisogna di nuovo sostituire la riga 1 con la derivata del polinomio $\bar{\varphi}'(s)$ ottenuto con i coefficienti della riga 2...come prima.

5	3	12	12
4	2	8	8
3	8	16	
2	4	8	
1	8		
0	8		

Non ci sono cambi di segno, quindi non ci sono radici a parte reale positiva. Tuttavia potrebbero essere radici immaginarie pure, che NON provocano variazioni di segno nella prima colonna. Le radici immaginarie pure si "vedono" solo fattorizzando il polinomio ausiliario $\bar{\varphi}(s)$.

▪esempio 4: discutere la stabilita' di un polinomio parametrico

$$\varphi(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k$$

3	1	3
2	3	$1+k$
1	$\frac{(8-k)}{3}$	
0	$(1+k)$	

Condizioni trovate per la stabilita':

$$\begin{cases} \dfrac{(8-k)}{3} > 0 \\ 1 + k > 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < k < 8$$

Che cosa si puo' dire per $k = -1$ **e** $k = 8$ **?**

Comportamento per :

$$k = -1$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & 3 & 0 \\
1 & 3 & \\
0 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Avere un termine nullo nell'utlima riga della tabella di Routh (riga composta da un unico valore) significa che c'e' uno zero nell'origine nel polinomio analizzato!

Comportamento per :

$$k = 8$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & 3 & 9 \\
1 & \boxed{0} & \\
0 & \cdots &
\end{array}$$

Una riga dispari nulla!
Ci sono radici complesse. Procedo come nell'esempio visto in precedenza.

Calcolo di e^{At} :

Esamineremo due modi per calcolare e^{At}, per sapere la convergenza o divergenza nel tempo della risposta del nostro sistema .

Vedremo solo casi semplici, in cui non ci sono autovalori reali o complessi a molteplicita' maggiore di uno; cioe' la matrice A sara' sempre diagonalizzabile.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calcoliamo e^{At} diagonalizzando la matrice A .

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^3 - 2s^2 + s - 2$$

$$\begin{cases} p_1 = & 2 \\ p_2 = & +j \\ p_3 = & -j \end{cases}$$

Sappiamo dunque che $e^{\tilde{A}t}$ sara' dato da:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{jt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jt} \end{bmatrix}$$

....questo pero' vale nello spazio generato da una base di autovettori di A ...

Per ritornare nella base in cui ci e' stata assegnata A dobbiamo trovarne gli autovettori e dunque le matrici di cambio base.

$$e^{At} = M e^{\tilde{A}t} M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{jt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jt} \end{bmatrix} M^{-1}$$

Determinazione degli autovettori

Noti gli autovalori p_i , si tratta di trovare i vettori tali che:

$$A\,\bar{v}_i = p_i \bar{v}_i$$

$$\Downarrow$$

$$(A - p_i I)\,\bar{v}_i = 0$$

Dunque dobbiamo trovare il nucleo dell'applicazione lineare $(A - p_i I)$

$$\Rightarrow \quad ker(A - p_i I) = \,?$$

$$p_1 = 2, \quad p_2 = +j, \quad p_3 = -j$$

$$ker(A - p_1 I) = ker(A - 2I)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2 = v_3 \\ v_1 = v_3 \end{cases}$$

soluzione !

$$\boxed{\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{C}}$$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ker(A - p_2 I) = ker(A - jI)$$

$$\begin{bmatrix} 1-j & 1 & 0 \\ 0 & -j & 2 \\ 1 & 0 & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soluzione $\bar{v}_2$!

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1-j)v_1 = -v_2 \\ j\,v_2 = 2v_3 \\ v_1 = (j-1)v_3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{bmatrix} (j-1)\,\alpha \\ -2j\,\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{C}}$$

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} (j-1) \\ -2j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ker(A - p_3 I) = ker(A + jI)$$

$$\begin{bmatrix} 1+j & 1 & 0 \\ 0 & +j & 2 \\ 1 & 0 & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1+j)v_1 & = & -v_2 \\ -j\,v_2 & = & 2v_3 \\ v_1 & = & -(j+1)v_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{v}_3 = \bar{v}_2^*}$$

soluzione $\bar{v}_3$!

$$\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} -(j+1) \\ 2j \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque le matrici di cambio base sono:

$$M = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & (j-1) & -(1+j) \\ 1 & -2j & 2j \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = -10j$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \dots & \dots \\ -\frac{1}{10}(2+j) & \dots & \dots \\ -\frac{1}{10}(2-j) & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Si puo' verificare che:

$$e^{At} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{jt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jt} \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$e^{At} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & (j-1) & -(1+j) \\ 1 & -2j & 2j \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{jt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}j & -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}j & \frac{3}{10} - \frac{1}{10}j \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}j & -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}j & \frac{3}{10} + \frac{1}{10}j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & (-1+j)\,e^{jt} & (-1-j)\,e^{-jt} \\ e^{2t} & -2\,je^{jt} & 2\,je^{-jt} \\ e^{2t} & e^{jt} & e^{-jt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}j & -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}j & \frac{3}{10} - \frac{1}{10}j \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{10}j & -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}j & \frac{3}{10} + \frac{1}{10}j \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \ldots = \left\{\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}(3-j)e^{jt} + \frac{1}{10}(3+j)e^{-jt}\right\}$$

$$a_{12} = \ldots$$

per casa...

2.Calcoliamo e^{At} come $(sI - A)^{-1}$

Infatti confrontando queste due identita' :

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t),\ t \geq 0$$

Si ricava che :

$$\boxed{e^{At} \equiv \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}}$$

Bisogna dunque calcolare l'inversa della matrice simbolica :

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s & -2 \\ -1 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

E poi antitrasformare quanto ottenuto, elemento per elemento.

Inversa:

▪def: e' la trasposta della matrice dei cofattori di A, divisa per il determinante di A

COFATTORE dell'elemento i,j ; il segno va cambiato per i+j dispari

$$C_{ij} = \det\{\hat{A}_{ij}\}$$

a_{11}

$$\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s & -2 \\ -1 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$\hat{A}_{11}$

per praticita'...

Si calcolano i C_{ij} e si dispongono subito in ordine "trasposto".

$$C_{11} = s(s-1) \qquad C_{21} = 1 - s \qquad C_{31} = 2$$

$$C_{12} = -2 \qquad C_{22} = (s-1)^2 \qquad C_{32} = 2(1-s)$$

$$C_{13} = s \qquad C_{23} = -1 \qquad C_{33} = s(s-1)$$

Poi si cambia segno a quelli di "somma" di indici dispari.

Si calcola infine il determinante di $(sI - A)$ prendendo la riga (colonna) con piu' zeri. Abbiamo gia' fatto questo calcolo ricercando gli autovalori.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} s(s-1) & s-1 & 2 \\ 2 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 2 & 1 & s(s-1) \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^3 - 2s^2 + s - 2 = (s-2)(s+j)(s-j)$$

Ora non resta che antitrasformare i singoli elementi. Vediamo l'elemento a_{11}^{inv} della matrice e^{At}.
(Finire il resto per esercizio)

$$a_{11}^{inv} = \frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}$$

$$a_{11}^{inv} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-j)} + \frac{B^*}{(s+j)}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{s \to 2} \dfrac{s(s-1)}{(s^2+1)} = \dfrac{2}{5} \\ B = \lim_{s \to j} \dfrac{s(s-1)}{(s-2)(s+j)} = \dfrac{1}{10}(3-j) \\ B^* = \dfrac{1}{10}(3+j) \end{cases}$$

Dunque si ha:

$$a_{11}^{inv} = \frac{2}{5}\frac{1}{(s-2)} + \frac{1}{10}\frac{(3-j)}{(s-j)} + \frac{1}{10}\frac{(3+j)}{(s+j)}$$

Ed antitrasformando si ricava infine:

$$a_{11}^{inv} = \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}(3-j)e^{jt} + \frac{1}{10}(3+j)e^{-jt}$$

Che coincide con quanto gia' trovato!

Cercare di finire l'esercizio per casa

Stabilità per sistemi a tempo discreto

Analisi degli autovalori

Analisi del polinomio caratteristico, trasformazione bilineare + criterio di Routh-Hurwitz

Calcolo di A^k

Stabilità interna e BIBO

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) \end{aligned}$$

Analizzare la stabilità e la stabilità BIBO del sistema.

$$
\begin{aligned}
\underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k)
\end{aligned}
$$

Stabilità interna: il polinomio caratteristico del sistema è data da

$$
p(z) = (z+1)^2 \, (z+4)
$$

in cui si nota la presenza di una radice di modulo superiore all'unità ($z = -4$). Ciò permette di concludere che il sistema è **internamente instabile**.

$$\underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\ 1 \quad 0 \quad 1\ ]\ \underline{x}(k)$$

$$F(z) = C\,(zI - A)^{-1}\,B = \frac{6}{(z+1)\,(z+4)}$$

Stabilità BIBO: la funzione di trasferimento del sistema è pari a

$$F(z) = \frac{6}{(z+1)\,(z+4)}$$

ed anche in essa compare il modo instabile. ($z = -4$). È possibile concludere allora che il sistema è anche **BIBO instabile**.

Stabilità interna e BIBO

Si consideri il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) \end{aligned}$$

Studiare la stabilità interna e la stabilità BIBO del sistema.

L'equazione caratteristica della matrice A è data da

$$\det[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 6 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0$$

che porta a

$$\det[\lambda I - A] = (\lambda - 1)\left[\lambda^2 + 5\lambda + 6\right] = 0$$

da cui

$$\lambda_1 = 1 \;;\; \lambda_2 = -2 \;;\; \lambda_3 = -3$$

Due degli autovalori hanno modulo maggiore dell'unità: **il sistema è internamente instabile**.

Poichè tutti gli autovalori della matrice A hanno modulo maggiore od uguale all'unità, certamente **il sistema è b.i.b.o. instabile**.

Utilizzo della trasformazione bilineare

Studiare la stabilità e la stabilità BIBO del sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) \end{aligned}$$

Stabilità: il polinomio caratteristico della matrice A è $\det(zI - A) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5 = 0$ e non è facilmente fattorizzabile. Per studiare la stabilità risulta allora più conveniente utilizzare la trasformazione bilineare e analizzare la stabilità del polinomio trasformato utilizzando il criterio di Routh.

Operativamente la trasformazione da compiere è

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5 = 0 \qquad \underset{z = \frac{w+1}{w-1}}{\longrightarrow} \qquad q(w) = 0$$

Il polinomio trasformato è

$$q(w) = 3w^3 - 19w^2 + 21w + 3$$

Utilizzando ora il criterio di Routh applicato al polinomio $q(w)$ si ottiene

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & \mathbf{3} & 21 \\
2 & \mathbf{-19} & 3 \\
1 & \dfrac{408}{19} & \\
0 & \mathbf{3} &
\end{array}
\longrightarrow
$$

Ci sono due variazioni di segno nella prima colonna dello schema: il polinomio $q(w)$ possiede due radici a parte reale positiva. Ciò significa che il polinomio originario $p(z)$ possiede due radici con modulo maggiore dell'unità (infatti le radici approssimate del polinomio $p(z)$ sono: $z_1 \approx -0.77$, $z_2 \approx 1.52$, $z_3 \approx 4.25$). Ciò significa che **il sistema è instabile**.

Stabilità b.i.b.o.: la funzione di trasferimento $H(z)$ è determinata da $H(z) = C(zI - A)^{-1}B$ ed è

$$H(z) = \frac{-5z + 10}{z^3 - 5z^2 + 2z + 5}$$

Dato che non ci sono state cancellazioni (il denominatore di $H(z)$ è il polinomio caratteristico della matrice A) **il sistema è b.i.b.o instabile**.

NB data la particolare struttura delle matrici B e C, per il calcolo della $H(z)$ è sufficiente determinare i termini in posizione $(3,1)$ e $(3,2)$ della matrice $(zI - A)^{-1}$.

Evoluzione libera dello stato

Sia assegnato il sistema **a tempo discreto** descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & x_1(k) + 4\,x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

con condizioni iniziali pari a $x_1(0) = x_2(0) = 1$. Dimostrare in almeno due modi diversi che il rapporto $x_1(k)/x_2(k)$ tende a 2 per $k \to \infty$.

Sistema in evoluzione libera.

$$\underline{x}(k) = A^k \underline{x}(0).$$

Il problema può essere risolto

- utilizzando la $\mathcal{Z}$-trasformata delle equazioni assegnate

- determinando l'espressione analitica della potenza di matrice A^k sfruttando la diagonalizzazione della matrice A.

Utilizzo della $\mathcal{Z}$-trasformata

$$\begin{cases} zX_1(z) - z = X_1(z) + 4X_2(z) \\ zX_2(z) - z = X_1(z) + X_2(z) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1(z) = \dfrac{z(z+3)}{(z+1)(z-3)} \\ X_2(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1)^k + \dfrac{3}{2}\,3^k\right] 1(k) \\ x_2(k) = \left[\dfrac{1}{4}(-1)^k + \dfrac{3}{4}\,3^k\right] 1(k) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x_1(k)}{x_2(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right) 3^k}{\left(\frac{3}{4}\right) 3^k} = 2}$$

Utilizzo della forma diagonale della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \longrightarrow$$

autovalori distinti $\lambda_1 = 3,$ $\lambda_2 = -1$

$$\ker(A - 3I) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow$$

$$\ker(A + I) = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D_A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^k = P\, D_A{}^k\, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}3^k + \frac{1}{2}(-1)^k & 3^k - (-1)^k \\ \frac{1}{4}\left(3^k - (-1)^k\right) & \frac{1}{2}3^k + \frac{1}{2}(-1)^k \end{bmatrix}$$

$$x(k) = A^k\, x(0)$$

$$\begin{cases} x_1(k) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^k + \frac{3}{2}\,3^k\right] 1(k) \\ x_2(k) = \left[\frac{1}{4}(-1)^k + \frac{3}{4}\,3^k\right] 1(k) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x_1(k)}{x_2(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)3^k}{\left(\frac{3}{4}\right)3^k} = 2}$$

Stabilità al variare di un parametro

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= 2x_1(k) - 2x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= 2x_1(k) - \gamma x_2(k) \\ x_3(k+1) &= -2x_1(k) + \gamma x_2(k) \\ y(k) &= x_3(k) \end{cases}$$

dove γ è un parametro che può assumere qualsiasi valore reale.

Analizzare la stabilità del sistema al variare del parametro γ, discutendo separatamente i casi della stabilità asintotica e di quella semplice.

Equazione caratteristica del sistema:

$$p(z) = \det(zI - A) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\det\begin{bmatrix} z-2 & 2 & 0 \\ -2 & z+\gamma & 0 \\ 2 & -\gamma & z \end{bmatrix} = z\left[z^2 + (\gamma - 2)z + (4 - 2\gamma)\right] = 0$$

Il polinomio catatteristico del sistema ha una radice per $z = 0$ qualsiasi sia γ. Per studiare la stabilità del sistema quindi è sufficiente studiare la dipendenza delle radici del polinomio $\left[z^2 + (\gamma - 2)z + (4 - 2\gamma)\right]$ dal parametro γ.

trasformazione bilineare $$w = \frac{z+1}{z-1}$$

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & 1 & (\gamma-2) & (4-2\gamma) \\
1 & & 1 & (\gamma-1) \\
\hline
 & 1 & (\gamma-1) & (3-\gamma)\cdot \mathbf{2^0} \\
1 & & 1 & \\
\hline
 & 1\cdot \mathbf{2^2} & \gamma\cdot \mathbf{2^1} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cc|c}
 & (3-\gamma) & 2\gamma & 4 \\
-1 & & (\gamma-3) & (3-3\gamma) \\
\hline
 & (3-\gamma) & (3\gamma-3) & (7-3\gamma) \\
-1 & & (\gamma-3) & \\
\hline
 & (3-\gamma) & (4\gamma-6) &
\end{array}
$$

$$q(w) = (3-\gamma)w^2 + 2(2\gamma-3)w + (7-3\gamma)$$

criterio di Routh

$$
\begin{array}{c|cc}
2 & (3-\gamma) & (7-3\gamma) \\
1 & 2(2\gamma-3) & \\
0 & (7-3\gamma) &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{cases}
3-\gamma & > & 0 \\
2\gamma-3 & > & 0 \\
7-3\gamma & > & 0
\end{cases}
$$

per la **stabilità asintotica** dovrà essere $\dfrac{3}{2} < \gamma < \dfrac{7}{3}$

$$q(w) = (3-\gamma)w^2 + 2(2\gamma-3)w + (7-3\gamma)$$

per $\gamma = \frac{7}{3}$ il polinomio $q(w)$ presenta radici in $w = 0$ ed in $w = -5$, mentre per $\gamma = \frac{3}{2}$ presenta due radici immaginarie in $w = \pm j\frac{\sqrt{15}}{3}$

il polinomio originario $p(z)$ in tali condizioni presenta radici semplici a modulo unitario

Si avrà **stabilità semplice** per $\gamma = \dfrac{3}{2}$ e per $\gamma = \dfrac{7}{3}$.

Stabilità interna: ancora utilizzo della trasformazione bilineare

Analizzare la stabilità del sistema

$$\begin{cases} x(n+1) & = & A\,x(n) + B\,u(n) \\ y(n) & = & C\,x(n) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & (1+3k) \end{bmatrix} \qquad B = 0 \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & (1+3k) \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda(1+3k) + k$$

trasformazione bilineare $z = \frac{w+1}{w-1}$

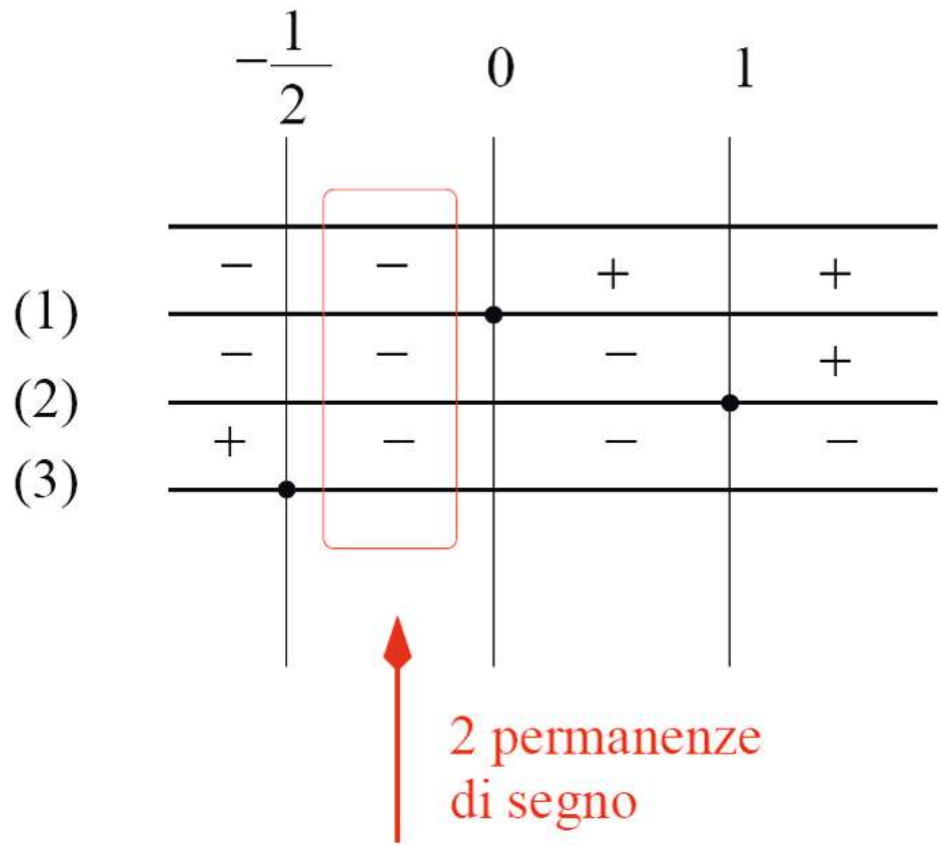
$$q(w) = kw^2 + (k-1)w - (1+2k) = 0$$

criterio di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 2 & k & -(1+2k) \\ 1 & (k-1) & \\ 0 & -(1+2k) & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 2 & k & -(1+2k) \\ 1 & (k-1) & \\ 0 & -(1+2k) & \end{array}$$

$$\begin{aligned} k &\geq 0 \\ (k-1) &\geq 0 \\ (2k+1) &\leq 0 \end{aligned}$$



$\boxed{\text{per } -\frac{1}{2} < k < 0}$ ⇒ 2 permanenze di segno nello schema di Routh

⇓

2 radici a parte reale negativa per $q(w)$

⇓

2 radici con modulo inferiore all'unità per $p(\lambda)$

⇓

stabilità asintotica

stabilità semplice

per $k = 0 \quad \longrightarrow$ il polinomio $q(w)$ si abbassa di grado: una radice in w diventa asintotica e ciò equivale ad avere una radice in $\lambda = +1$ per $p(\lambda)$

per $k = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow$ il polinomio $q(w)$ perde il termine noto e quindi presenta una radice per $w = 0$. Per il polinomio $p(\lambda)$ ciò significa avere una radice in $\lambda = -1$

Riassumendo

$$
\begin{cases}
-\dfrac{1}{2} < k < 0 & \Longrightarrow \quad \text{stabilità asintotica} \\[2em]
\text{per } k = -\dfrac{1}{2} & \Longrightarrow \quad \text{stabilità semplice} \\[2em]
\text{per } k = 0 & \Longrightarrow \quad \text{stabilità semplice} \\[2em]
\text{altrove} & \Longrightarrow \quad \text{instabilità}
\end{cases}
$$

Risposta libera dello stato

- Dato il sistema descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k) \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

determinare l'espressione analitica dell'evoluzione libera dello stato, a partire dalla condizione iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

- Il movimento dello stato è determinato in generale dall''espressione:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

- Nel caso analizzato si deve determinare la sola evoluzione libera:

$$x_l(k) = A^k x(0)$$

- Ci sono due possibili alternative:
  1. utilizzare la Z—trasformata
  2. calcolare direttamente la matrice A^k

- **Utilizzo della Z-trasformata**

$$x_l(k) = A^k x(0)$$

$$X_l(z) = z\,(zI - A)^{-1}\,x(0)$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z + 0.5 & -2 \\ 0 & z - 0.1 \end{bmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{2z + 1} & \dfrac{40}{(2z + 1)(10z - 1)} \\ 0 & \dfrac{10}{10z - 1} \end{bmatrix}$$

$$X_l(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{20z(10z - 21)}{(10z - 1)(2z + 1)} \\ -\dfrac{100z}{10z - 1} \end{bmatrix}$$

- Ora non rimane che antitrasformare:

$$X_l(z) = \left[\begin{array}{c} \dfrac{20\,z\,(10\,z - 21)}{(10\,z - 1)\,(2\,z + 1)} \\ -\dfrac{100\,z}{10\,z - 1} \end{array} \right]$$

$$X_{l\,1}(z) = \frac{20\,z\,(10\,z - 21)}{(10\,z - 1)\,(2\,z + 1)}$$

$$\frac{X_{l\,1}(z)}{z} = \frac{20\,(10\,z - 21)}{(10\,z - 1)\,(2\,z + 1)} = \frac{C_1}{z - \frac{1}{10}} + \frac{C_2}{z + \frac{1}{2}}$$

$$C_1 = \lim_{z \to \frac{1}{10}} \frac{20\,(10\,z - 21)}{10\,(2\,z + 1)} = -\frac{100}{3} \qquad C_2 = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{20\,(10\,z - 21)}{2\,(10\,z - 1)} = \frac{130}{3}$$

$$X_{l\,1}(z) = -\frac{100}{3}\,\frac{z}{\left(z - \frac{1}{10}\right)} + \frac{130}{3}\,\frac{z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

$$X_{l\,2}(z) = -\frac{100\,z}{10\,z - 1} = -10\,\frac{z}{\left(z - \frac{1}{10}\right)}$$

- In definitiva:

$$X_l(z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{100}{3}\dfrac{z}{\left(z - \frac{1}{10}\right)} + \dfrac{130}{3}\dfrac{z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ -10\,\dfrac{z}{\left(z - \frac{1}{10}\right)} \end{bmatrix}$$

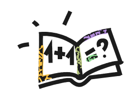
- L'espressione cercata vale allora:

$$x_l(k) = \begin{bmatrix} \left\{-\dfrac{100}{3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^k + \dfrac{130}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right\} \cdot 1(k) \\ -10\left(\dfrac{1}{10}\right)^k \cdot 1(k) \end{bmatrix}$$

- **Calcolo diretto della matrice $\mathbf{A}^{\mathbf{k}}$**

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori sono distinti e pari a $\begin{cases} \lambda_1 = -0.5 \\ \lambda_2 = 0.1 \end{cases}$

  quindi la matrice è diagonalizzabile (perché? )

- Il polinomio caratteristico è ovviamente

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 0.5)(\lambda - 0.1)$$

Autovettori:

$$Az = \lambda_1 z \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

λ_1

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = -0.5 \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -0.5z_1 + 2z_2 = -0.5z_1 \\ 0.1z_2 = -0.5z_2 \end{cases}$$

(per esempio)

$$z_2 = 0 \Rightarrow z^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Az = \lambda_2 z$$

λ_2

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0.1 \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -0.5z_1 + 2z_2 = 0.1z_1 \\ 0.1z_2 = 0.1z_2 \end{cases}$$

(per esempio)

$$z_2 = \frac{3}{10}z_1 \Rightarrow z^{(2)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Diagonalizzazione:

$$M = \left[z^{(1)} \middle| z^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = M^{-1} A M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Calcolo di A^k

$$A^k = M\tilde{A}^k M^{-1} = M \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^k \end{bmatrix} M^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & \left(-\frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^k\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^k \end{bmatrix}$$

Ora finalmente è possibile determinare l'evoluzione libera dello stato!

Evoluzione libera dello stato:

$$A^k = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & \left(-\frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^k\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^k \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$x_l(k) = A^k\, x(0)$$

$$x_l(k) = \begin{bmatrix} \left\{-\frac{100}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^k + \frac{130}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\} \cdot 1(k) \\ -10\left(\frac{1}{10}\right)^k \cdot 1(k) \end{bmatrix}$$

Stabilità interna al variare di un parametro

- Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{cases} x(k+1) & = \begin{bmatrix} -0.1 & 2 & 0 \\ 0 & 1.2 & \alpha \\ 0 & -0.1 & 2.1\,\alpha \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$

- Analizzare la stabilità interna del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

- L'equazione caratteristica del sistema assegnato è data da

$$\det(zI - A) = \underbrace{(z + 0.1)}\underbrace{\left[z^2 - z\,(2.1\,\alpha + 1.2) + 2.62\,\alpha\right]} = 0$$

Un autovalore è fisso, indipendente dal parametro α ed è associato ad un modo asintoticamente stabile.

I coefficienti di questo polinomio variano al variare di α. La stabilità può dipendere quindi dal valore di α.

- Per l'analisi di stabilità del sistema è sufficiente allora analizzare, al variare di α, la posizione delle radici dell'equazione

$$p(z) = \left[z^2 - z\,(2.1\,\alpha + 1.2) + 2.62\,\alpha\right] = 0$$

- Con la trasformazione bilineare si ottiene:

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \; z, w \in \mathbb{C} \qquad p(z) = \left[z^2 - z\,(2.1\,\alpha + 1.2) + 2.62\,\alpha\right]$$

$$q(w) = \left(-\frac{1}{5} + \frac{13}{25}\alpha\right) w^2 + \left(2 - \frac{131}{25}\alpha\right) w + \left(\frac{11}{5} + \frac{118}{25}\alpha\right)$$

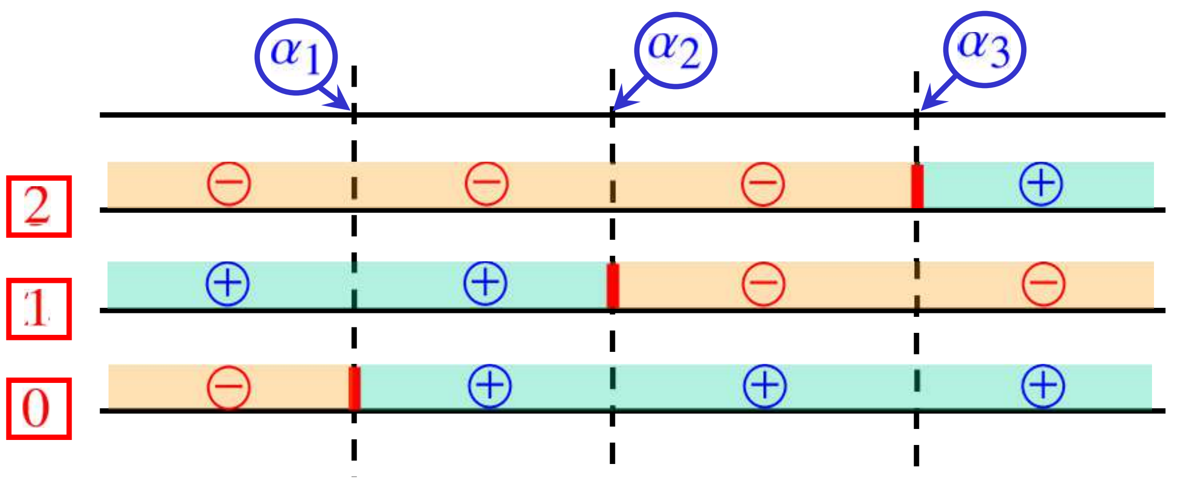
- Per l'analisi di stabilità ora si può applicare il criterio di Routh—Hurwitz:

$$\begin{array}{c|cc}
2 & \left(-\frac{1}{5} + \frac{13}{25}\alpha\right) & \left(\frac{11}{5} + \frac{118}{25}\alpha\right) \\
1 & \left(2 - \frac{131}{25}\alpha\right) & \\
0 & \left(\frac{11}{5} + \frac{118}{25}\alpha\right) &
\end{array}$$

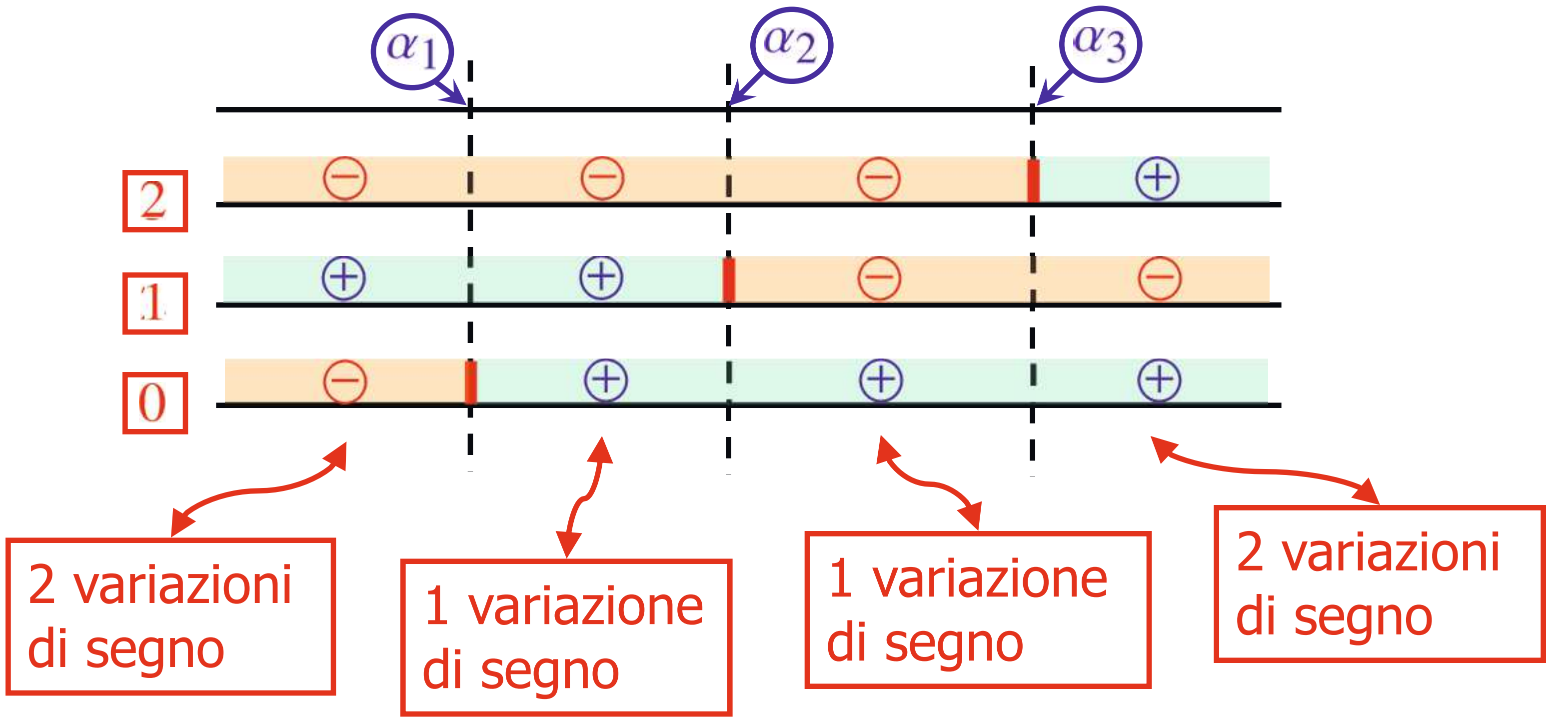
Si tratta di analizzare il segno degli elementi nella prima colonna della tabella.

- Studio del segno degli elementi in prima colonna nella tabella di Routh:

$$
\begin{array}{c|lcl}
2 & \left(-\frac{1}{5}+\frac{13}{25}\alpha\right) & \geq & 0 \\
1 & \left(2-\frac{131}{25}\alpha\right) & \geq & 0 \\
0 & \left(\frac{11}{5}+\frac{118}{25}\alpha\right) & \geq & 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c|lclcl}
2 & \alpha & \geq & \frac{5}{13} & = & \alpha_3 \\
1 & \alpha & \leq & \frac{50}{131} & = & \alpha_2 \\
0 & \alpha & \geq & -\frac{55}{118} & = & \alpha_1
\end{array}
$$



- In definitiva, analizzando variazioni e permanenze di segno tra gli elementi della prima colonna della tabella di Routh al variare di α si conclude che



- Per qualsiasi valore di α il polinomio $q(w)$ possiede almeno 1 radice a parte reale positiva, quindi il polinomio originale $p(z)$ possiede almeno una radice con modulo maggiore dell'unità: il **sistema** risulta allora **instabile per ogni valore di α**.