

# **Analisi dei sistemi retroazionati**

**Prestazioni dei sistemi di controllo**

**Stabilità a ciclo chiuso: criterio di Nyquist, margini di guadagno e di fase, criterio di Bode**

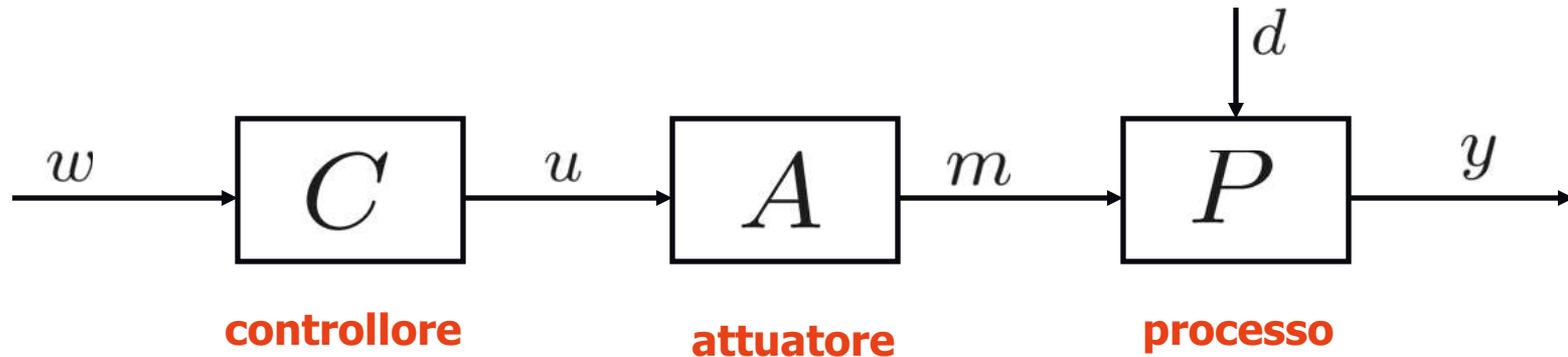
**Il luogo delle radici**

# Introduzione

- In questa parte del corso affronteremo lo **studio dei sistemi LTI retroazionati**, introducendo definizioni, proprietà e strumenti che saranno poi utili (ed utilizzati) nella fase di progetto del controllore.
- L'analisi non può essere svolta considerando assieme sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto:
  - Gli **strumenti** che abbiamo a disposizione (ad es. i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza [cfr. Parte 8] ) e che vedremo nel seguito sono per la maggior parte **adoperabili con profitto solo** nel caso di **sistemi a tempo continuo**.
- Per questo motivo in ciò che segue consideriamo **solamente sistemi LTI a tempo continuo**.

# ● Sistemi di controllo

## - Anello aperto

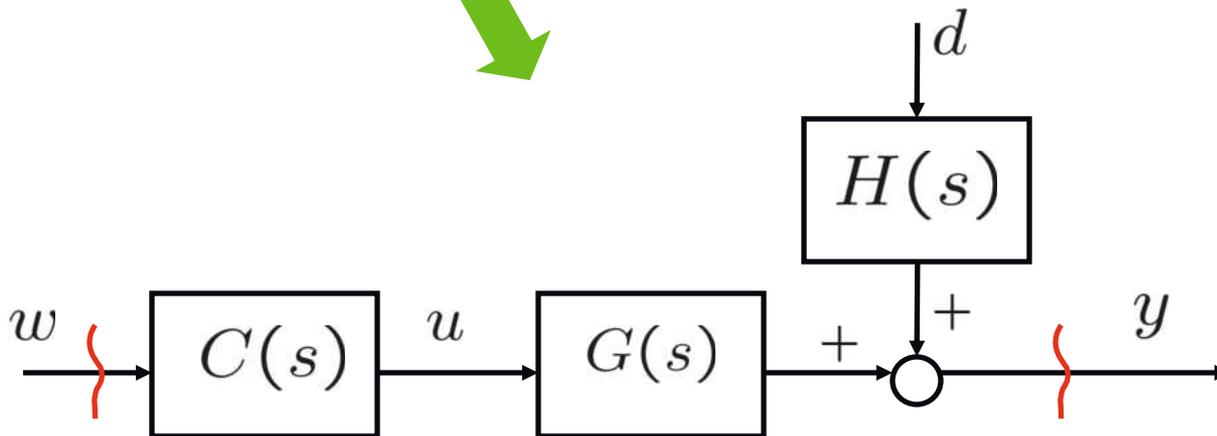
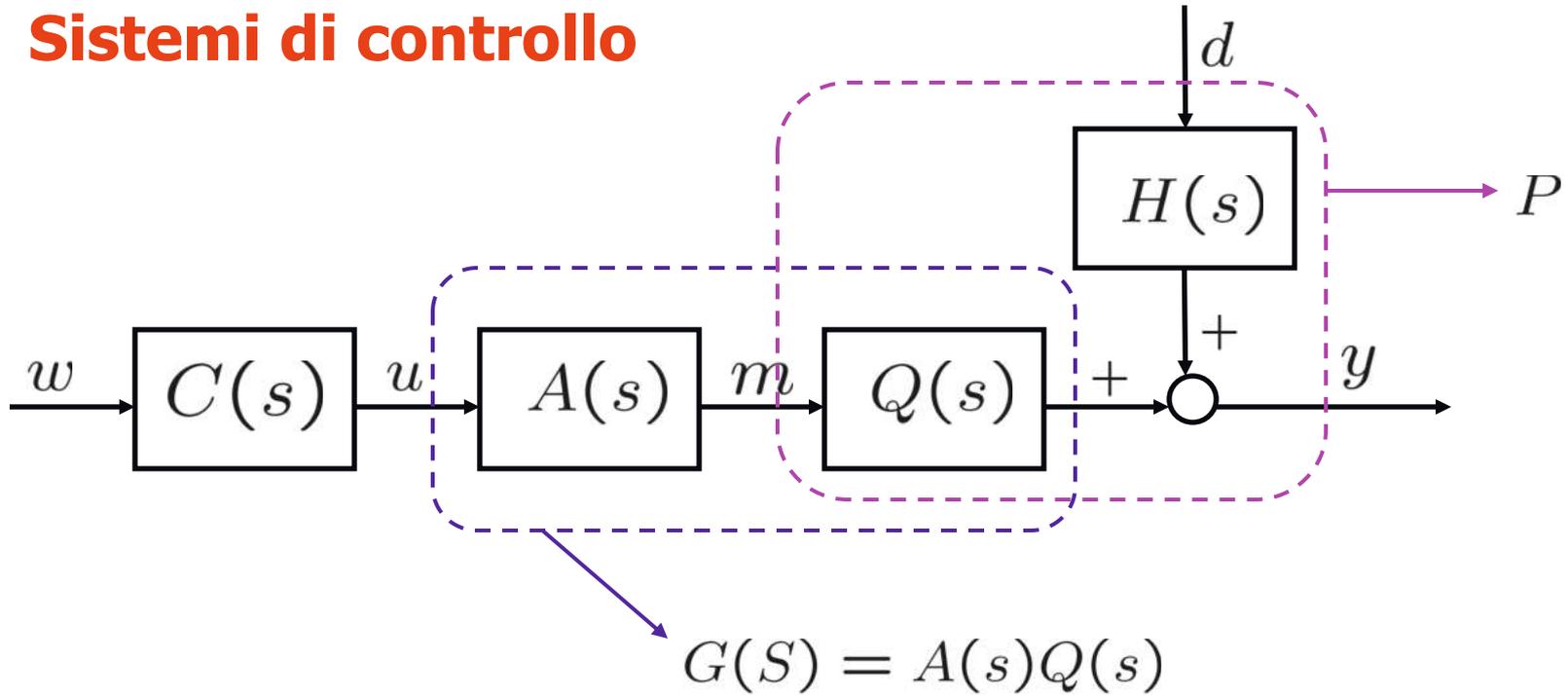


Ipotesi:

$C, A, P$

sistemi  
dinamici  
lineari

- **Sistemi di controllo**



## ● Prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$



$$C(s)G(s) = 1$$



$$C(s) = G(s)^{-1}$$



Quindi il controllore  
"perfetto" in a.a. deve  
invertire la dinamica  
del sistema

Passa-tutto  
con  $\mu = 1$

## ● Limitazioni

- cancellazioni polo-zero nel semipiano destro ( $\text{Re} \geq 0$ )
- non si può stabilizzare in a.a. un sistema instabile
- $C(s)$  potrebbe avere più zeri che poli ( $\Rightarrow$  non realizzabile)
- scarsa robustezza nei confronti di incertezze su  $G(s)$

## ● Esempi

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

$$C_0(s) = \frac{0.1(1 + 2s)(1 + 0.1s)}{1 + s} \longrightarrow \text{Non realizzabile}$$

$$C_1(s) = \frac{0.1(1 + 2s)(1 + 0.1s)}{(1 + s)(1 + 0.01s)} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\longrightarrow F_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_1(s)G(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}$$

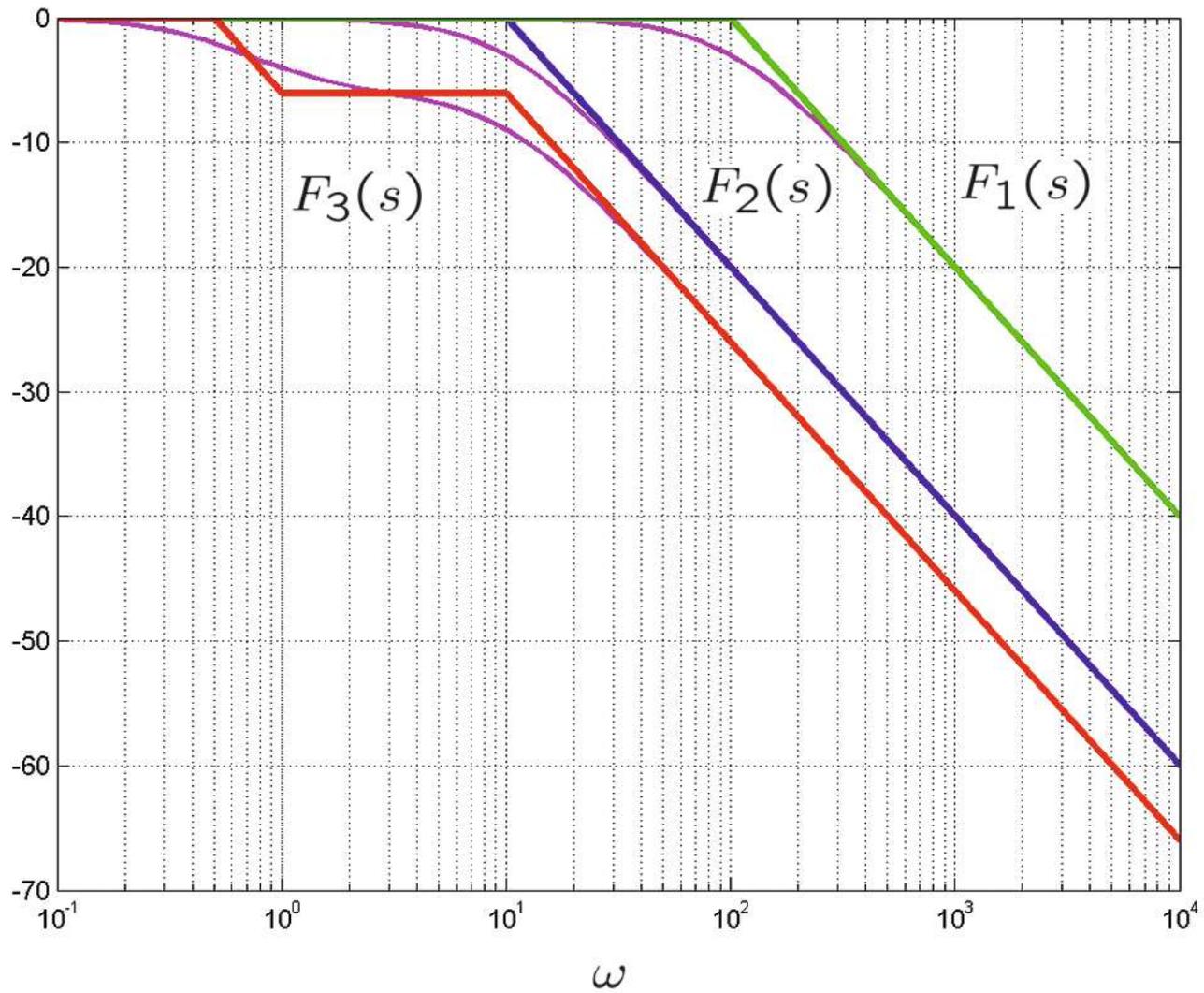
Filtro P.B. con  $B \simeq [0, 100]$

$$C_2(s) = \frac{0.1(1 + 2s)}{1 + s} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

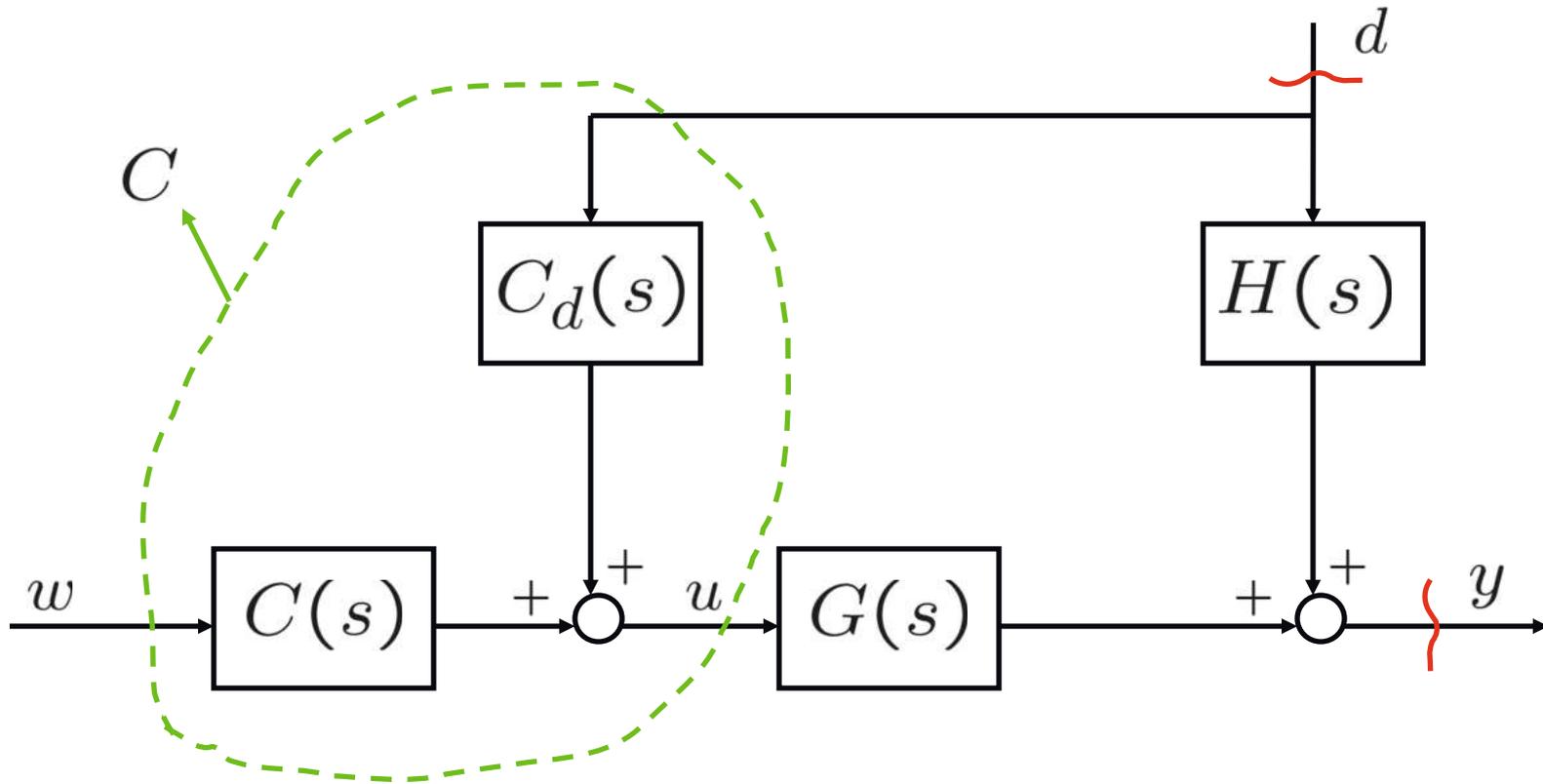
$$\longrightarrow F_2(s) = \frac{1}{1 + 0.1s} \quad \text{Filtro P.B. con } B \simeq [0, 10]$$

$$C_3(s) = 0.1 \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\longrightarrow F_3(s) = \frac{1 + s}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \quad \text{Filtro P.B. con } B \simeq [0, 0.5]$$



- Compensazione del disturbo in a.a.



Si presuppone quindi la misurabilità del disturbo  $d(t)$

- **Prestazione ideale**

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0 = H(s) + C_d(s) \cdot G(s)$$



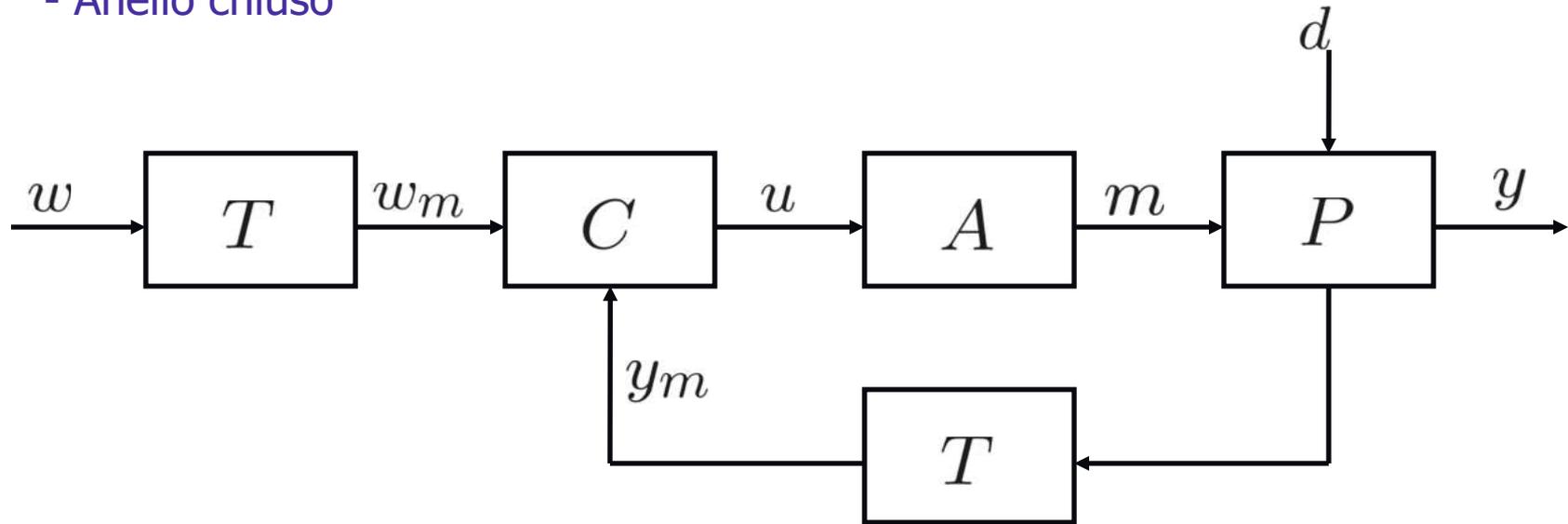
Si impone la perfetta compensazione del disturbo

$$\longrightarrow C_d(s) = -G(s)^{-1}H(s)$$

Limitazioni: analoghe alle precedenti

# ● Sistemi di controllo

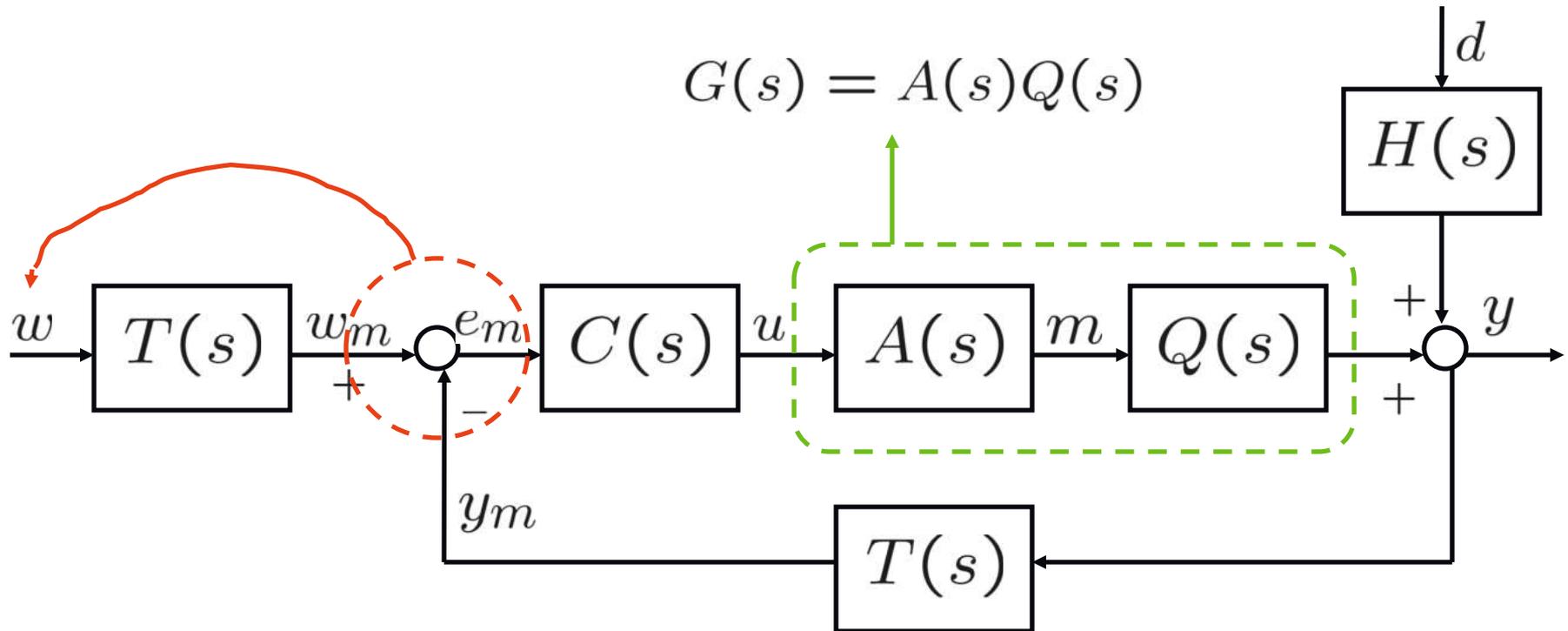
- Anello chiuso



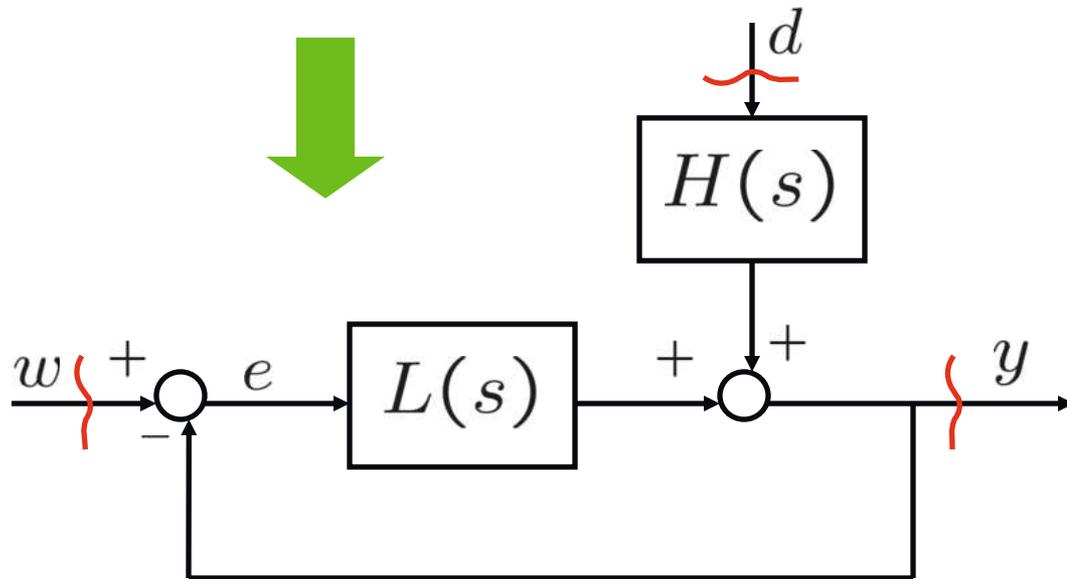
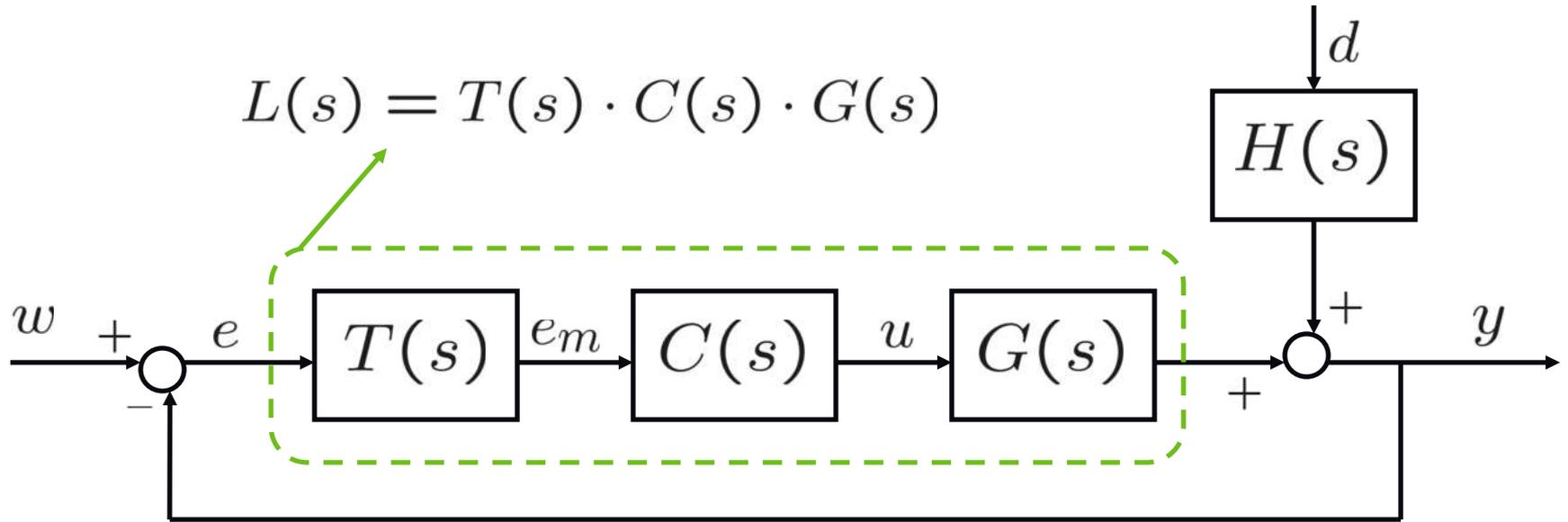
Trasduttore

Ipotesi: -  $T, A, C, P$  sistemi lineari

- azione di controllo basata su  $w_m - y_m = e_m$



$$\begin{aligned}
 E_m(s) &= W_m(s) - Y_m(s) = \\
 &= T(s)[W(s) - Y(s)] = T(s) \cdot E(s)
 \end{aligned}$$



- **Prestazioni ideali**

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$

In realtà:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \neq \underline{1}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \neq \underline{0}$$

## ● Soluzione realistica

-  $F(s)$  : Filtro passa-basso con banda passante suff. ampia e guadagno  $\mu_F = 1$

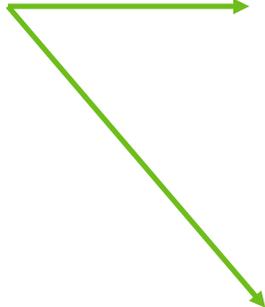
-  $M(s)$  :  $|M(j\omega)| \simeq 0$   
nella banda di  $\omega$  in cui lo spettro di  $d(t)$  è significativo

## ● Analisi di sistemi retroazionati

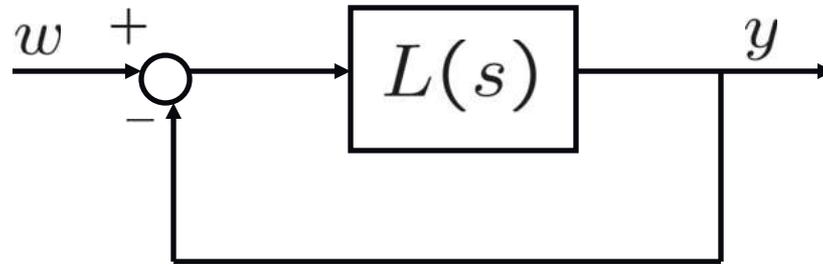
- Asintotica stabilità in anello chiuso

- Prestazioni in anello chiuso


$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$


$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$

## ● Stabilità di sistemi retroazionati



$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

Asintotica stabilità



Le radici di  
 $\varphi(s) + N(s)$   
 hanno  $\text{Re} < 0$

- **Diagramma di Nyquist**

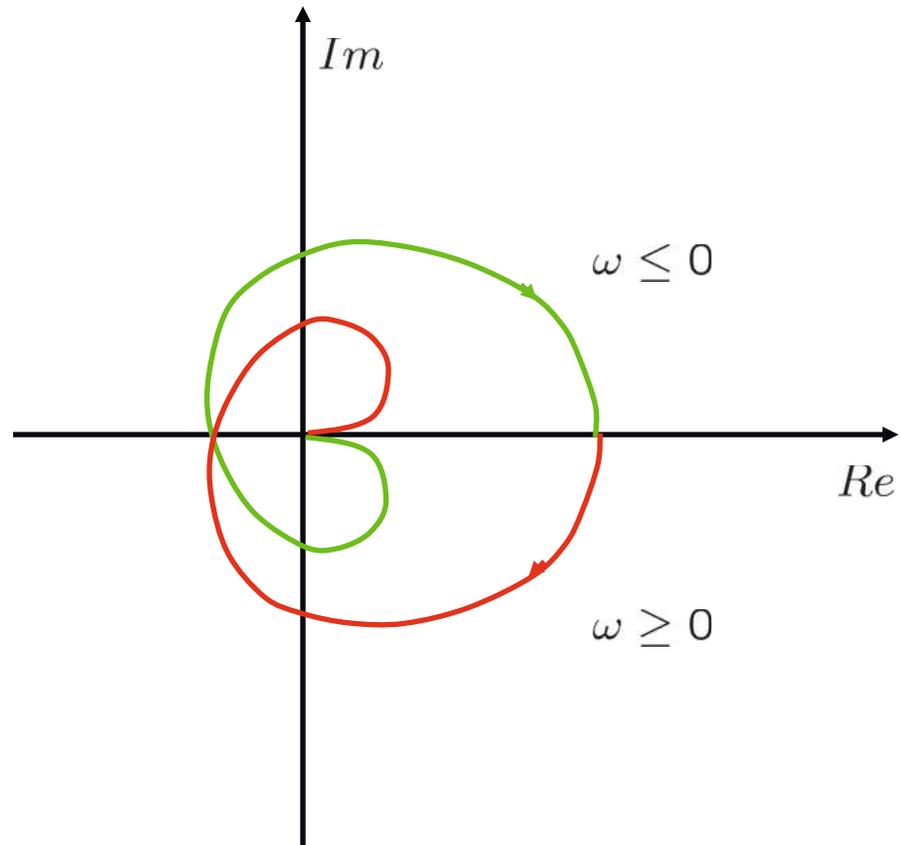
┌ = D.D.N = grafico di  $L(j\omega)$  per  $-\infty < \omega < +\infty$

= diagramma polare ( $\omega \geq 0$ )

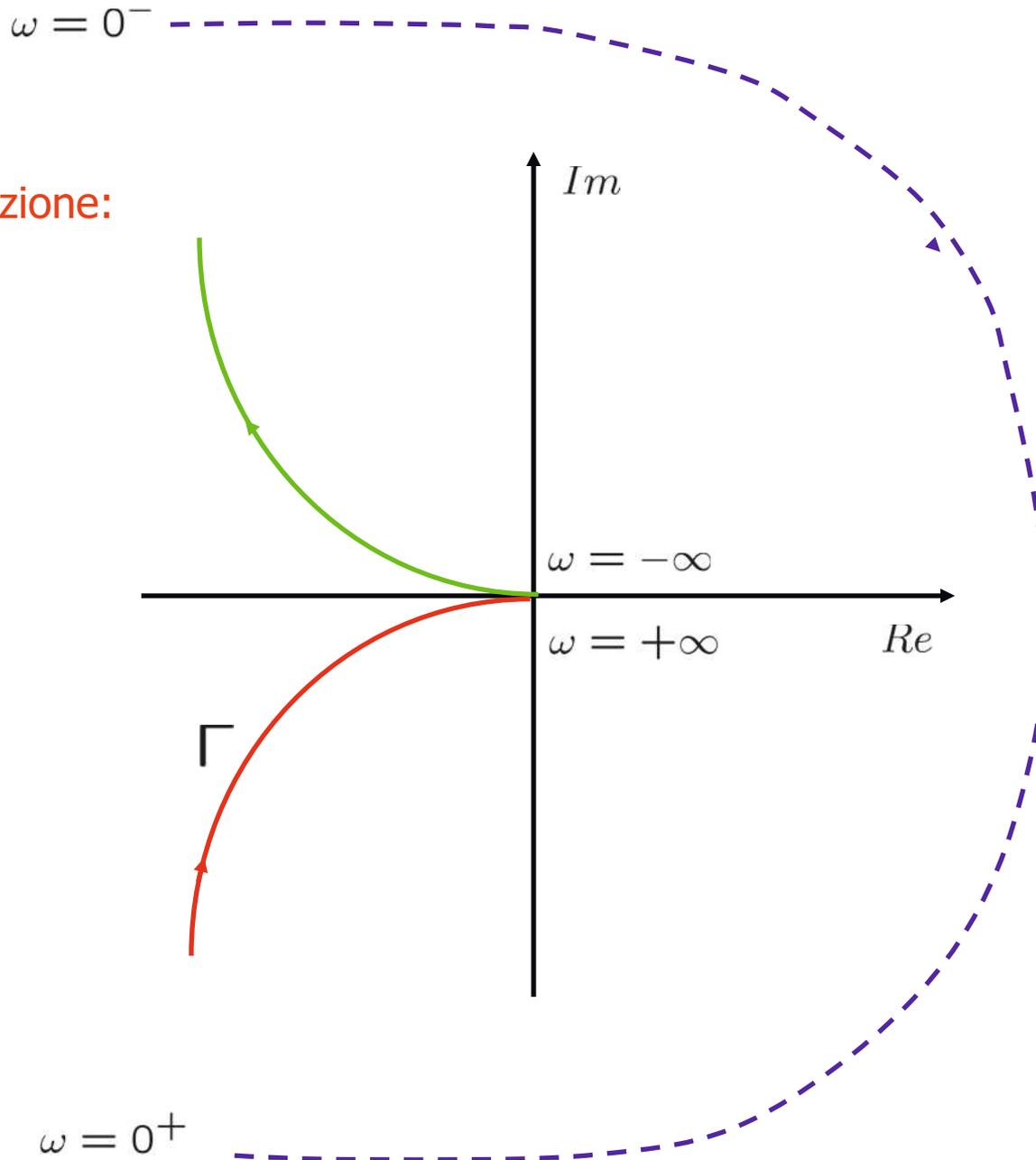
+

simmetrico rispetto all'asse reale

Osservazione:  $L(-j\omega) = L^*(j\omega)$



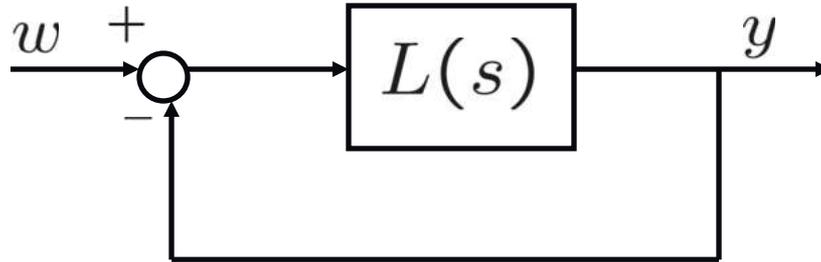
Attenzione:



**Convenzione:**

chiusura  
all'infinito in  
senso orario

## ● Criterio di Nyquist



$$1 + L(s) = 0$$

- $\Gamma$  D.D.N. di  $L(s)$
- $N$  num. di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto -1
- $P$  num. di poli di  $L(s)$  con  $\text{Re} > 0$

Asintotica stabilità



$N$  ben definito

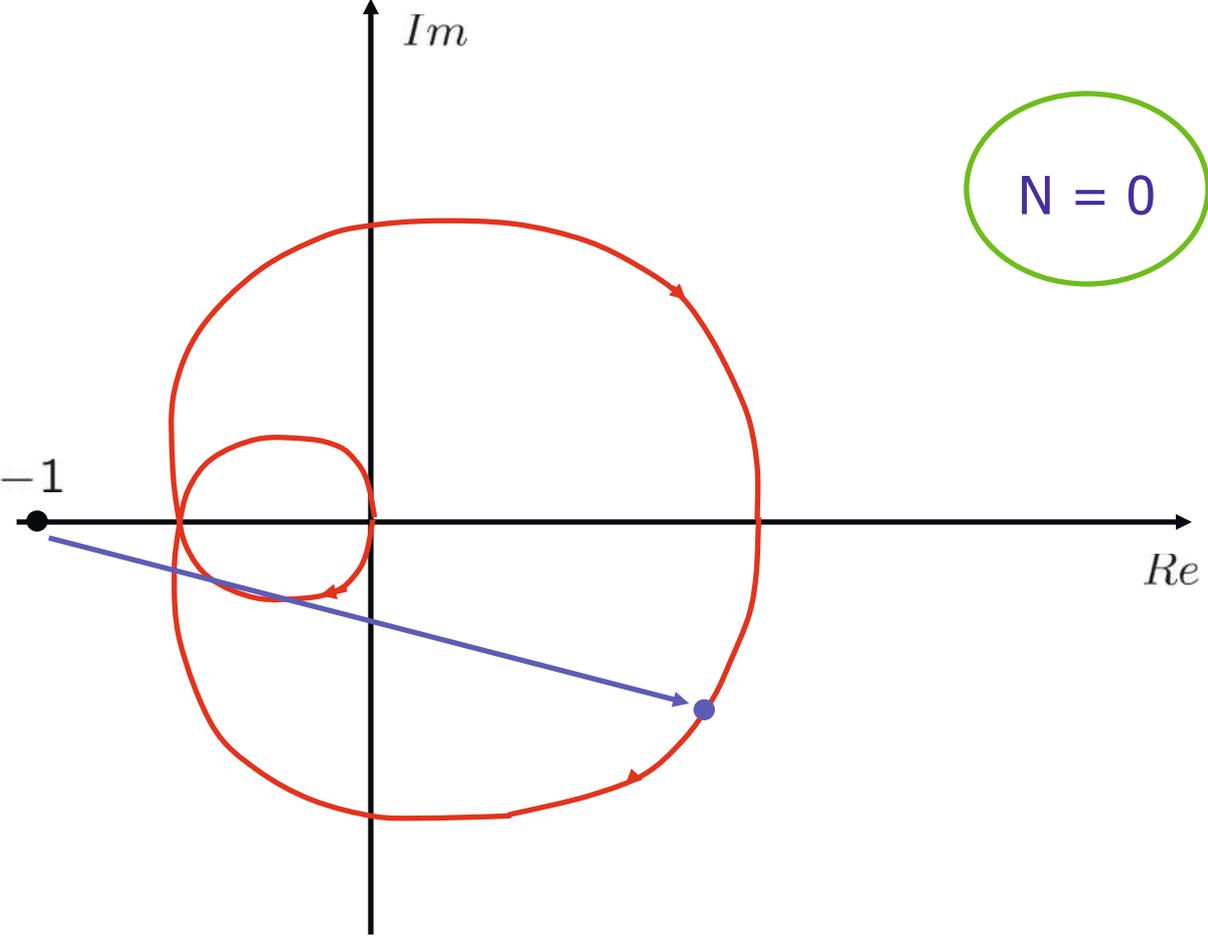
$N = P$

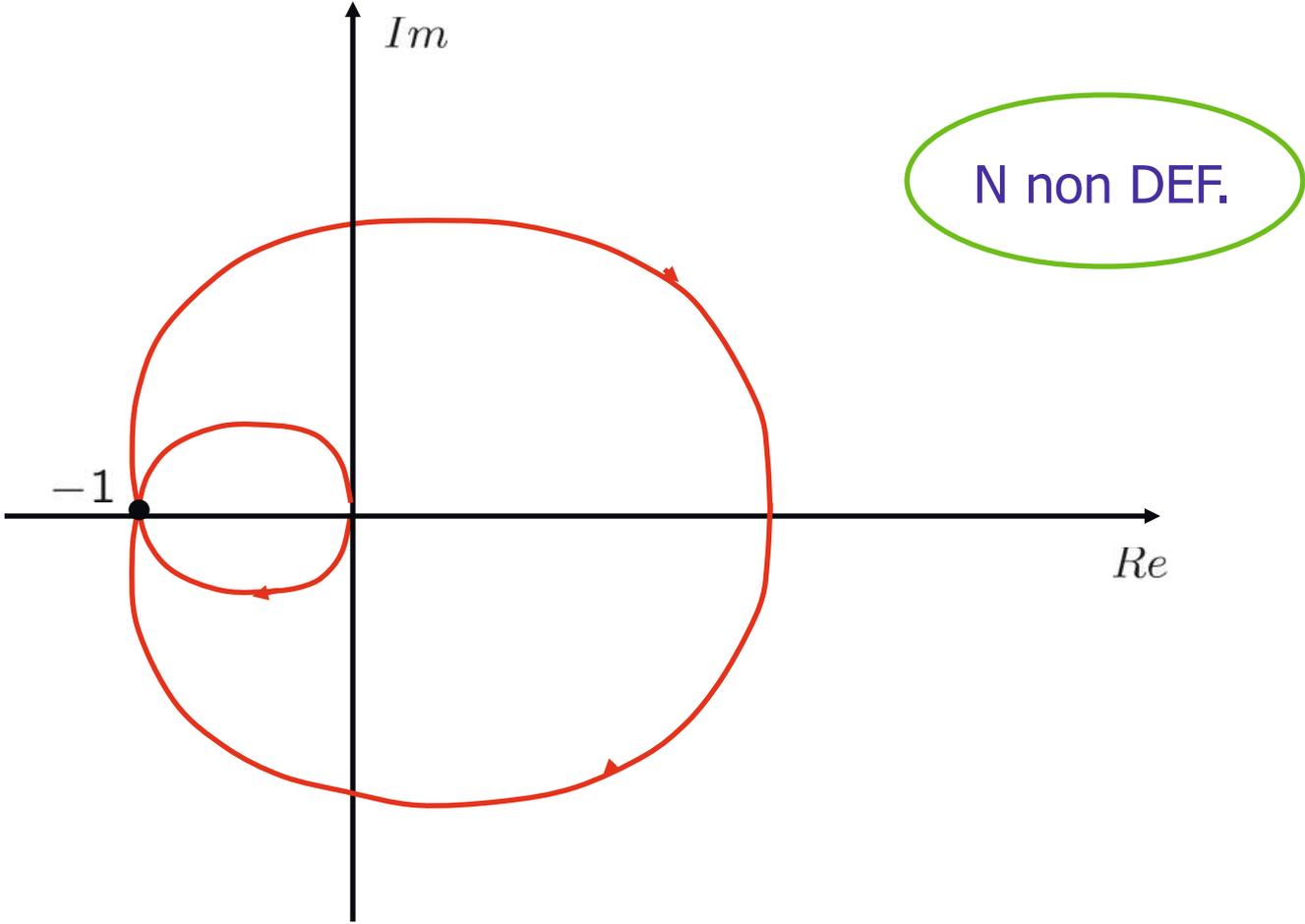
## ● Osservazioni

- conteggio di  $N$  ?

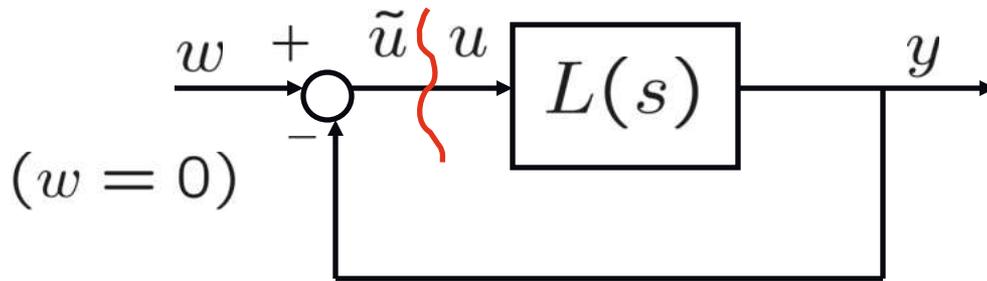
-  $N$  non definito  non as. stabilità

-  $N < 0$   non as. stabilità





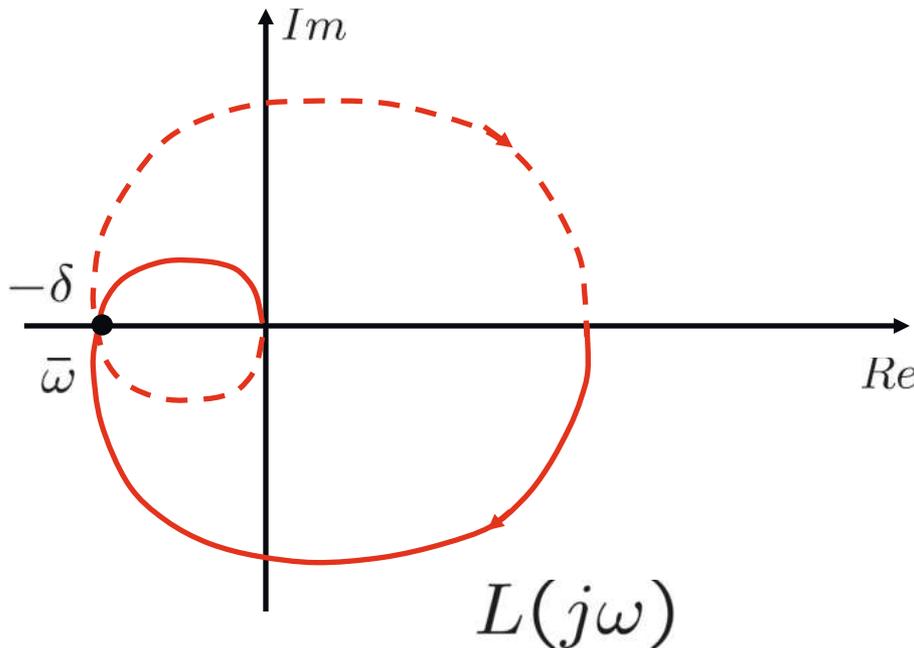
● Giustificazione intuitiva



$L(s)$  As. stabilità



$P = 0$



$L(j\bar{\omega}) = -\delta$



$|L(j\bar{\omega})| = \delta$

$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$

$$u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\longrightarrow y(t) \simeq |L(j\bar{\omega})| \sin[\bar{\omega}t + \arg(L(j\bar{\omega}))]$$

$$= \delta \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

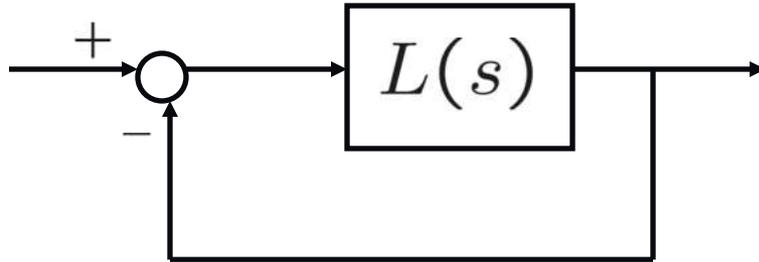
$$= -\delta \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\longrightarrow \tilde{u}(t) = \delta \sin(\bar{\omega}t)$$

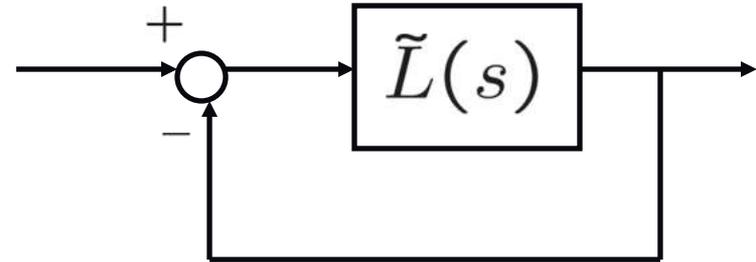
Quindi:

- $\delta > 1$   $\longrightarrow$  instabilità  $N \neq 0$  (= P)
- $\delta < 1$   $\longrightarrow$  as. Stabilità  $N = 0$  (= P)
- $\delta = 1$   $\longrightarrow$  non as. Stabilità  $N$  non definito

- **Stabilità di sistemi retroazionati incerti**



Modello nominale



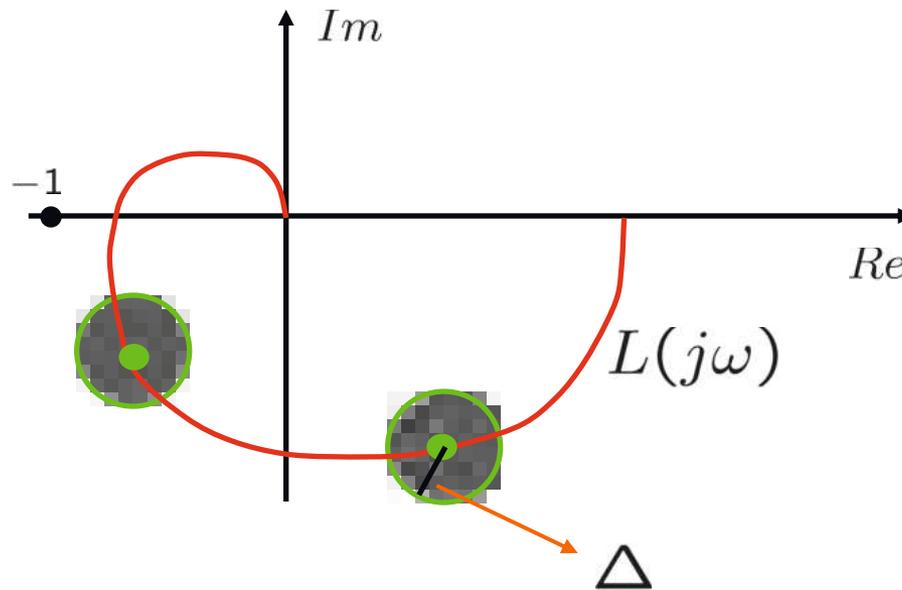
Modello “vero”

- In generale:  $\tilde{L}(s) \neq L(s)$
- Stabilità robusta:

**garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza**

## ● Tipici modelli dell'incertezza

$$- \tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s) \quad , \quad |\delta L(j\omega)| \leq \Delta$$



$$- \tilde{L}(s) = K \cdot L(s) \quad , \quad 0 < K < \bar{K}$$

- **Indicatori di stabilità robusta**

Sono parametri che misurano:

- l'ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la “**distanza**” del modello nominale dall'instabilità

- **Ipotesi**

- asintotica stabilità in condizioni nominali

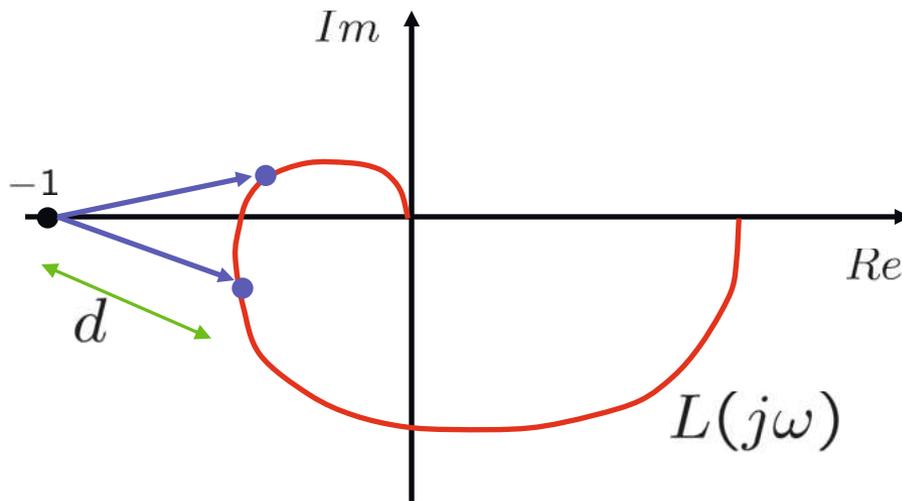
- $P=0$       Asintotica stabilità             $N = 0$

## ● Un indicatore di robustezza

Distanza di  $\Gamma$  dal punto  $-1$

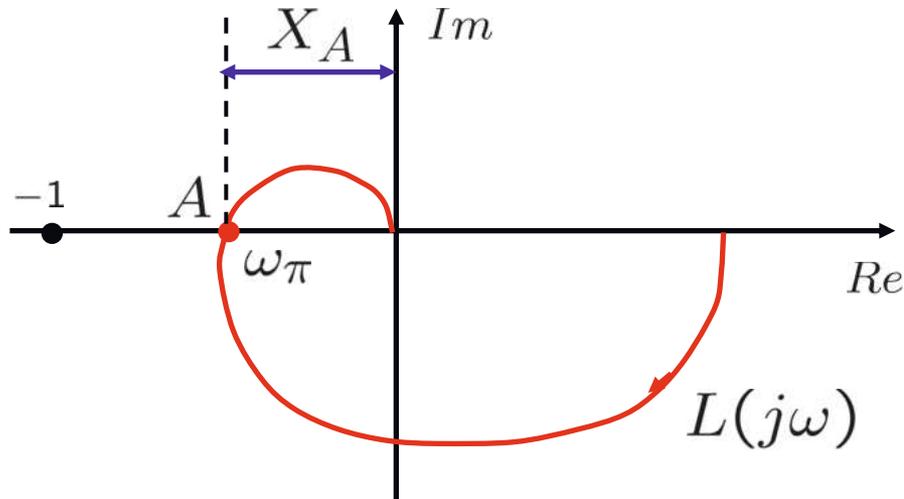
Margine di stabilità vettoriale

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$



Difetto: non è ricavabile **direttamente** dai diagrammi di Bode di  $L(j\omega)$

## ● Margine di guadagno



$$K_m = \frac{1}{X_A}$$

Margine di guadagno

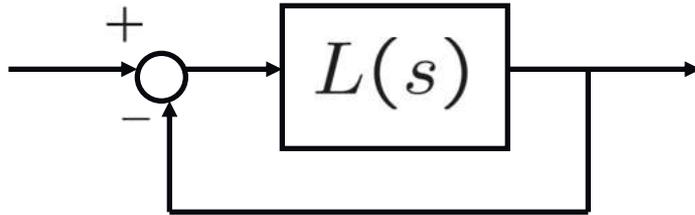
$$\arg L(j\omega) = -180^\circ$$

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

$$K_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

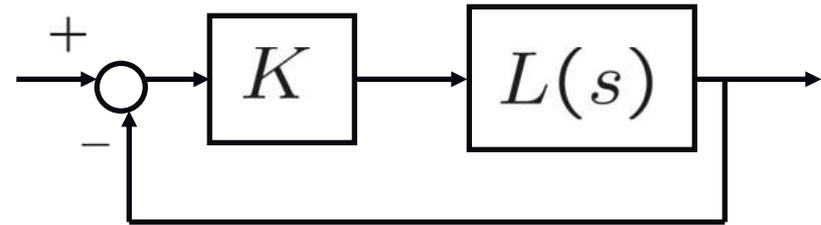
## ● Interpretazione

Nominale



$$K_m > 1$$

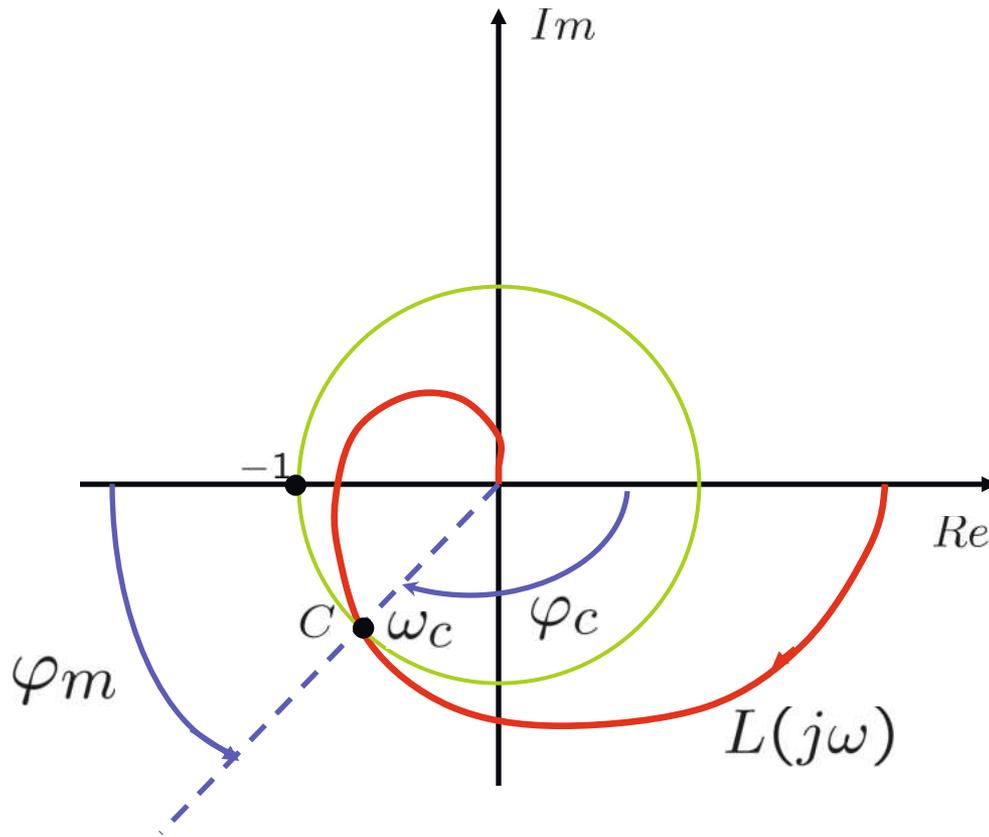
“vero”



$$\text{As.stabilità: } 0 < K < K_m$$

$K_m$  è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul guadagno d'anello

## ● Margine di fase



$$|L(j\omega_c)| = 1 = 0dB$$

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

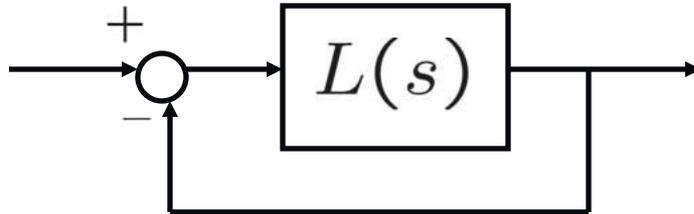
Margine di fase

$\omega_c$  : pulsazione critica

$\varphi_c$  : fase critica

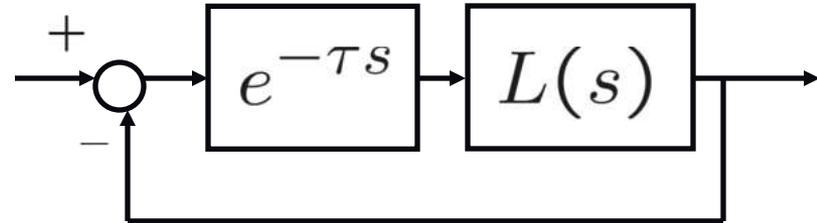
# ● Interpretazione

Nominale



$$\varphi_m > 0^\circ$$

“vero”



As. stabilità

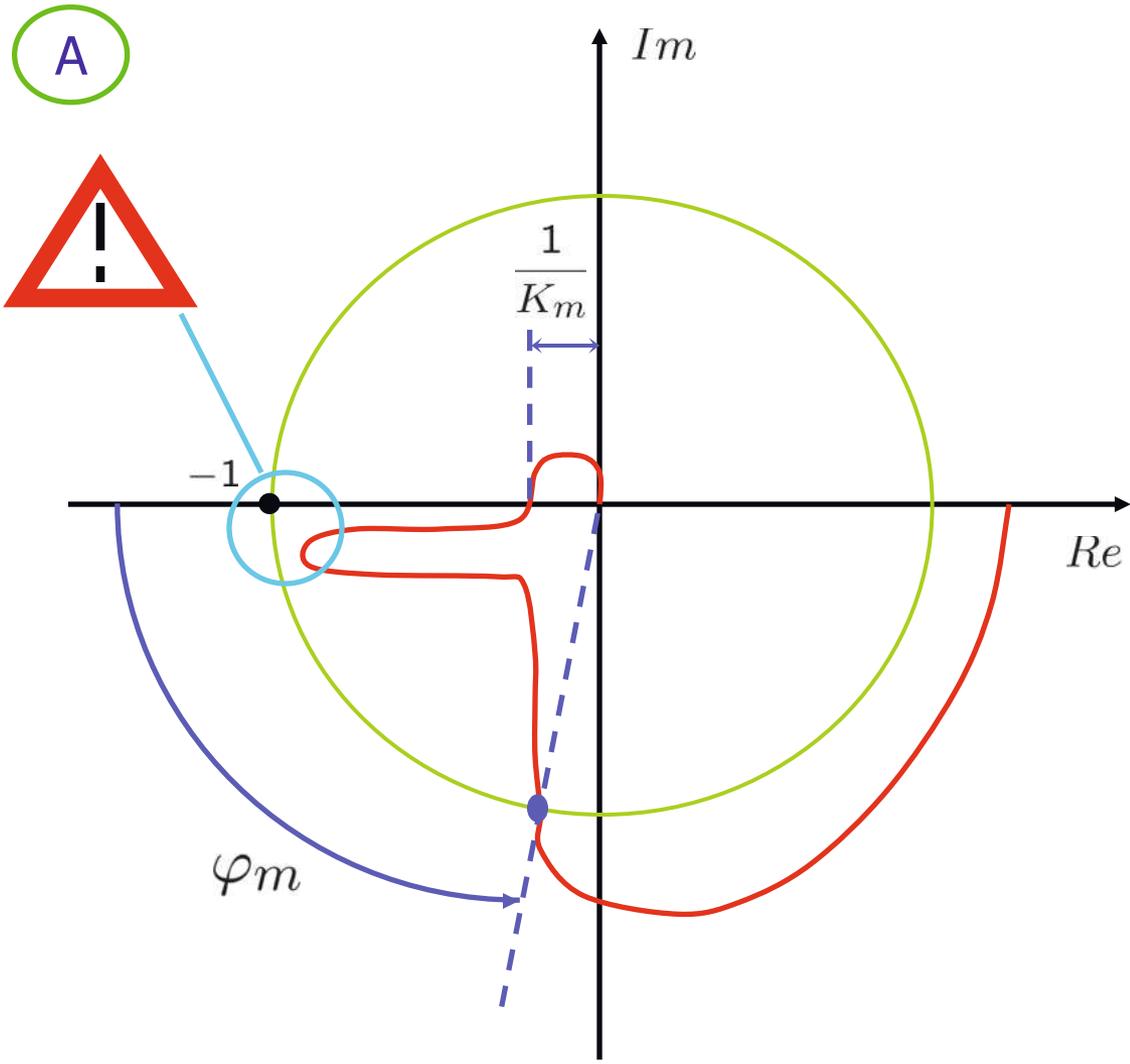
$$\omega_c \tau = \varphi_m \cdot \frac{\pi}{180}$$



$$0 < \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$\varphi_m$  è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul ritardo d'anello

● **Situazioni anomale**

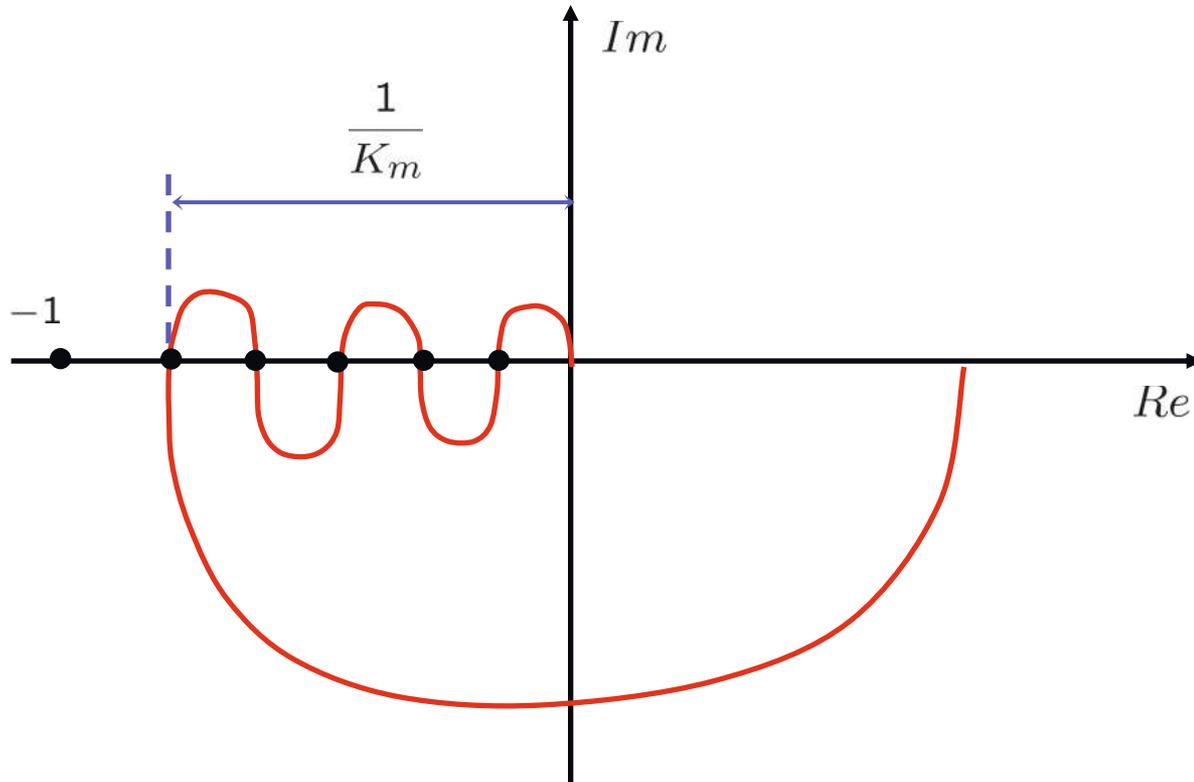


$$K_m \gg 1$$

$$\varphi_m \gg 0^\circ$$

Però il sistema è poco robusto

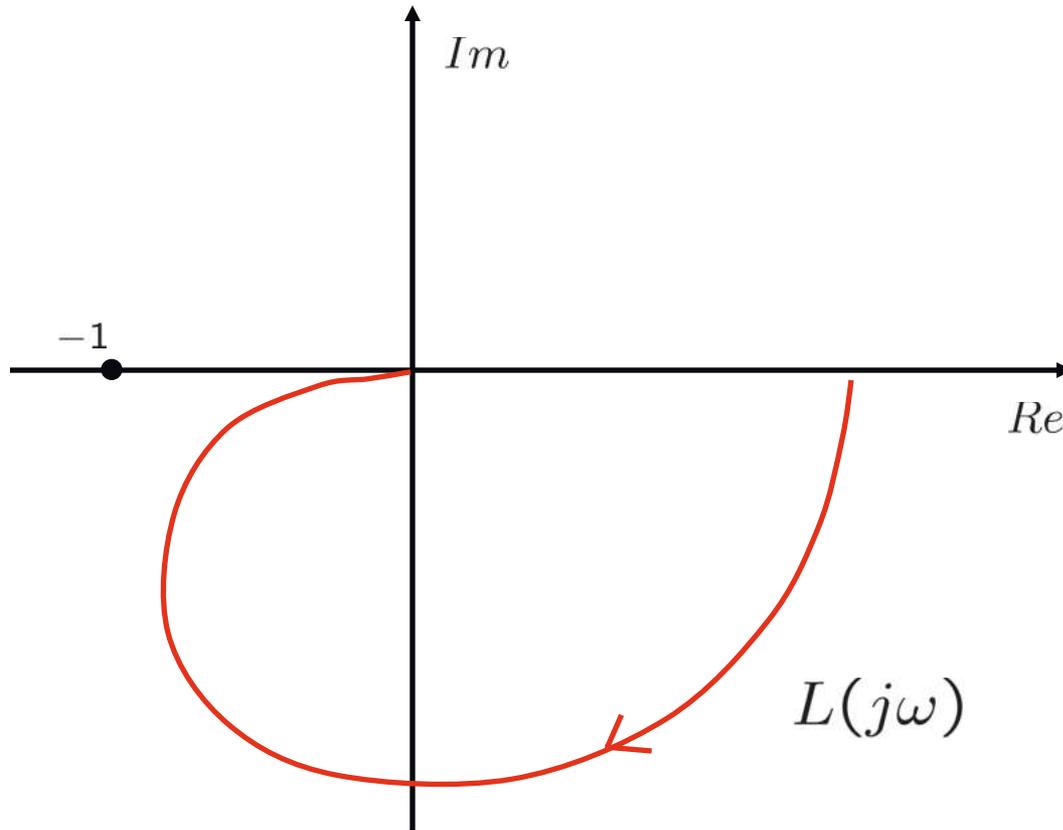
B



Affinchè  $K_m$  sia affidabile è necessario costruirlo nel caso peggiore

● **Casi particolari**

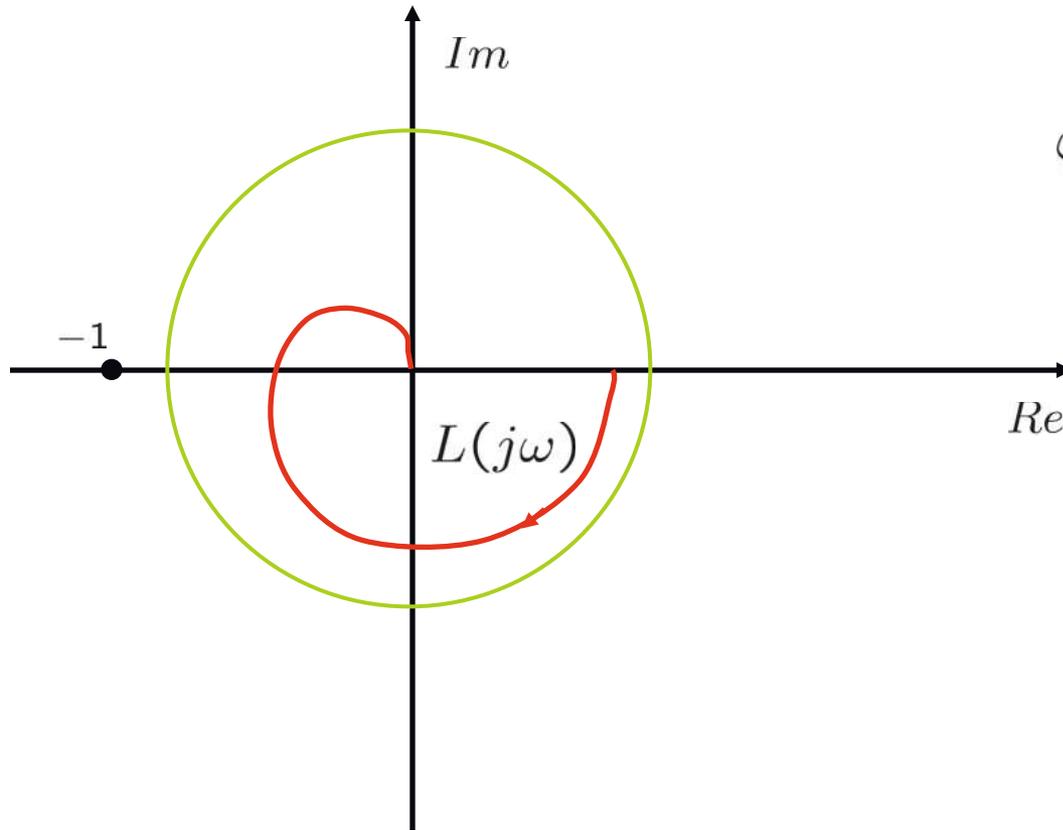
A



$$K_m = \infty$$

$$|\arg L(j\omega)| < 180^\circ, \quad \forall \omega \rightarrow \varphi_m > 0^\circ$$

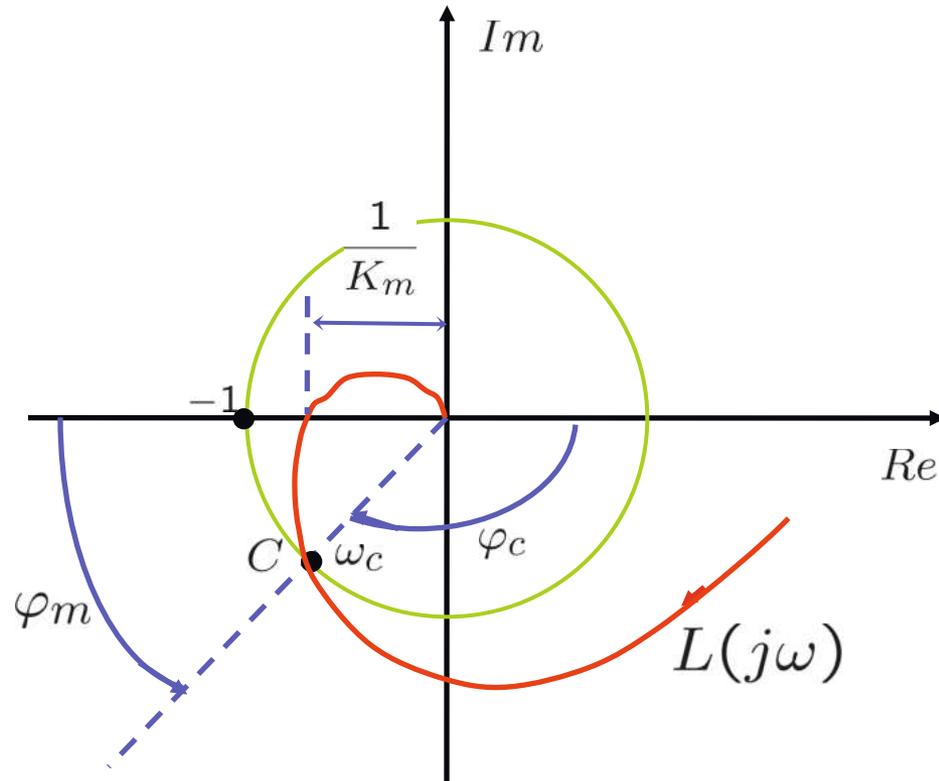
B



$$\varphi_m = \infty$$

$$|L(j\omega)| < 1 \quad , \quad \forall \omega \quad \rightarrow \quad K_m > 1$$

- **Margine di guadagno e di fase**



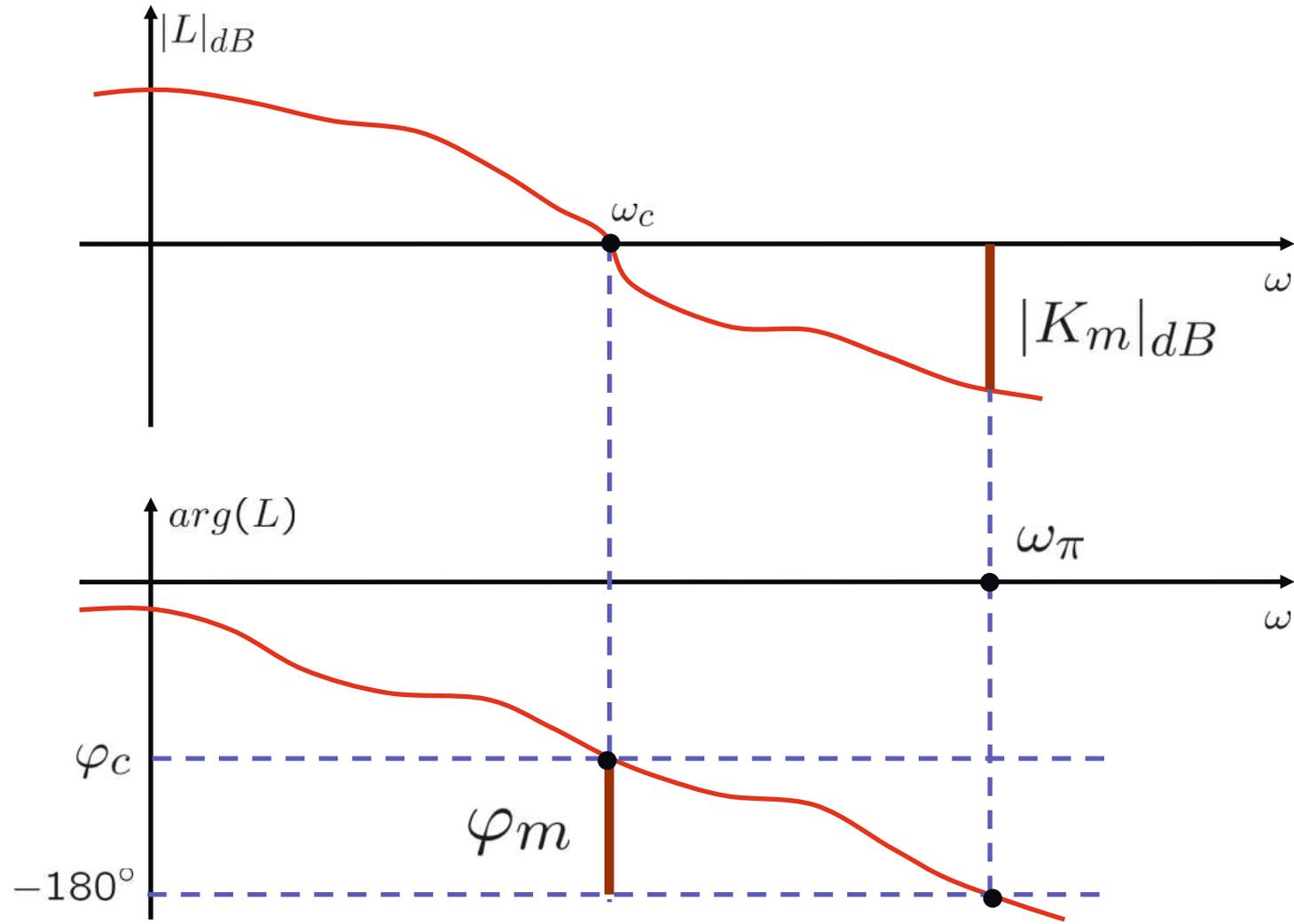
- **Margine di guadagno**

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad ; \quad \arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

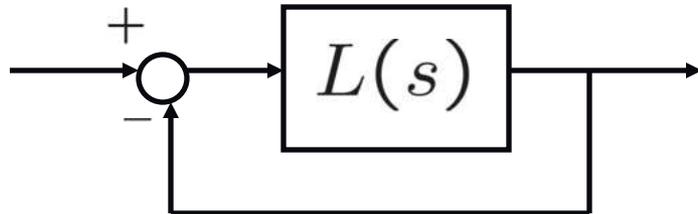
- **Margine di fase**

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \quad ; \quad \varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$
$$|L(j\omega_c)| = 1$$

● **Calcolo di  $K_m$  e  $\varphi_m$  dai diagrammi di Bode**



## ● Criterio di Bode



Condizioni di applicabilità:

1)  $P = 0$

2)  $|L(j\omega)|_{dB}$  attraversa una volta l'asse a 0 dB (dall'alto verso il basso)

$\mu$  guadagno d'anello

$\varphi_m$  margine di fase

Asintotica stabilità



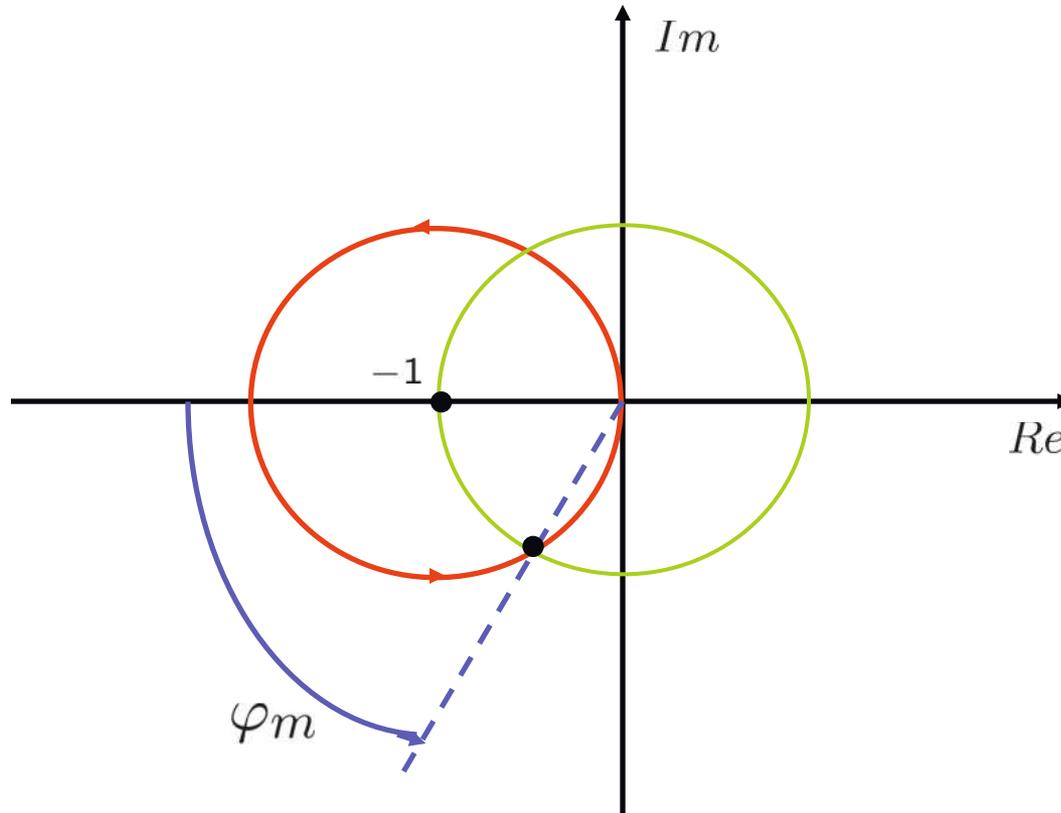
$$\mu > 0$$

$$\varphi_m > 0$$

## Perché è necessario $\mu > 0$ ?



Per escludere casi del tipo:



Instabile in a.c.



## ● Osservazione

### Se

- $L(s)$  è a fase minima (  $\mu > 0$  , poli, zeri con  $Re < 0$  )
- $|L|_{dB}$  attraversa l'asse a 0dB una volta sola

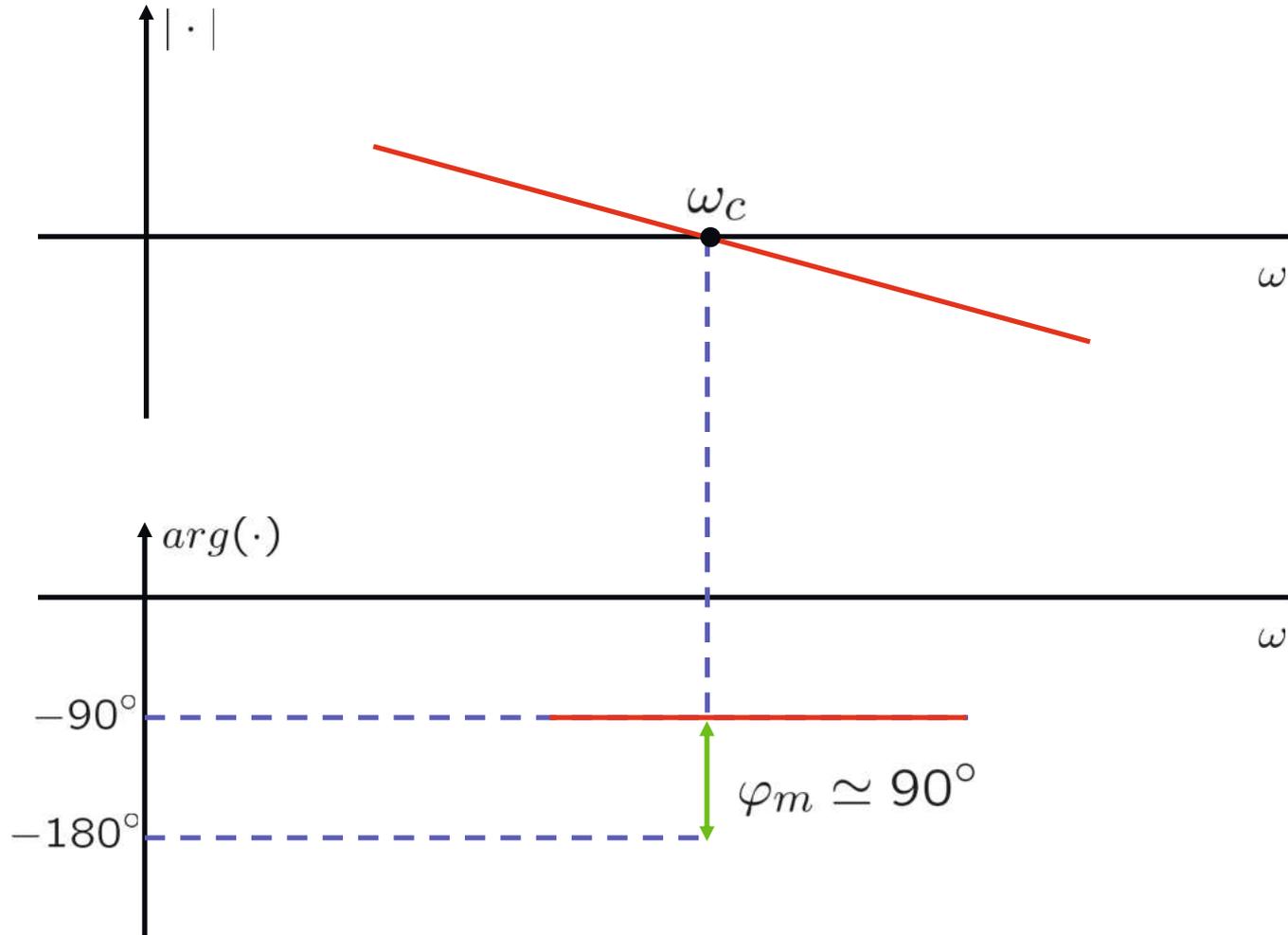
### Allora

- $P = 0$
- Bode applicabile
- $\mu > 0$
- diagrammi asintotici
 

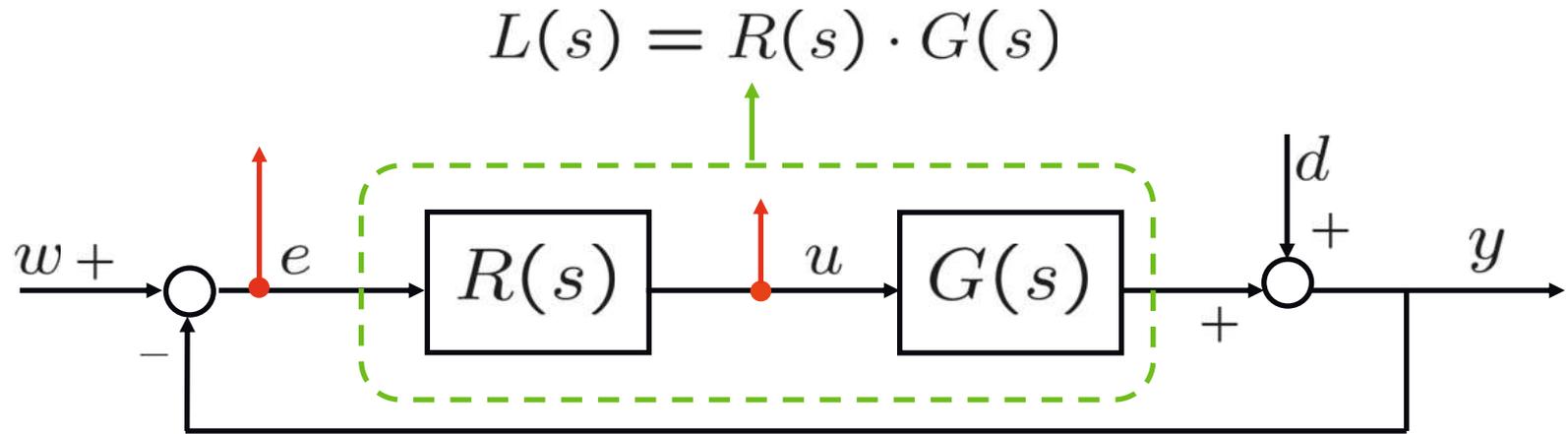
{	$ L _{dB}$	pendenza	$-K$
	$arg(L)$	valore	$-K \cdot 90^\circ$

● Criterio “empirico”

\* nelle ipotesi di validità \*



## ● Analisi di sistemi retroazionati



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

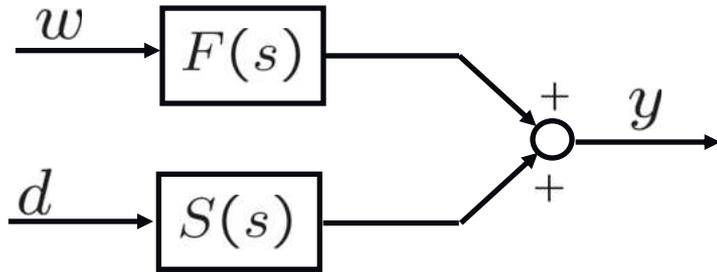
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} = -S(s)$$

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = Q(s)$$

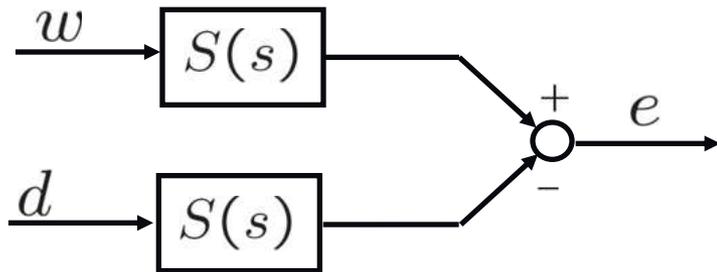
$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1 + L(s)} = -Q(s)$$



F. di sensitività  
complementare

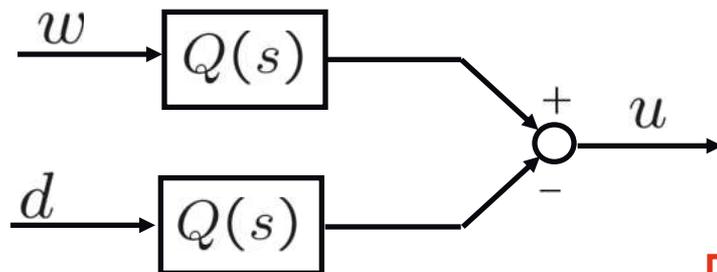
Caso  
"ideale"

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \approx 1$$



F. di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \approx 0$$



F. di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \approx 0$$

$$F(s) + S(s) = 1$$

- **Caso ideale**



$$F(s) \simeq 1$$

F. di sensitività  
complementare



$$S(s) \simeq 0$$

F. di sensitività

$$Q(s) \simeq 0$$

F. di sensitività  
del controllo

## ● Analisi di $F(s)$ - analisi statica

Valore di regime risp. allo scalino

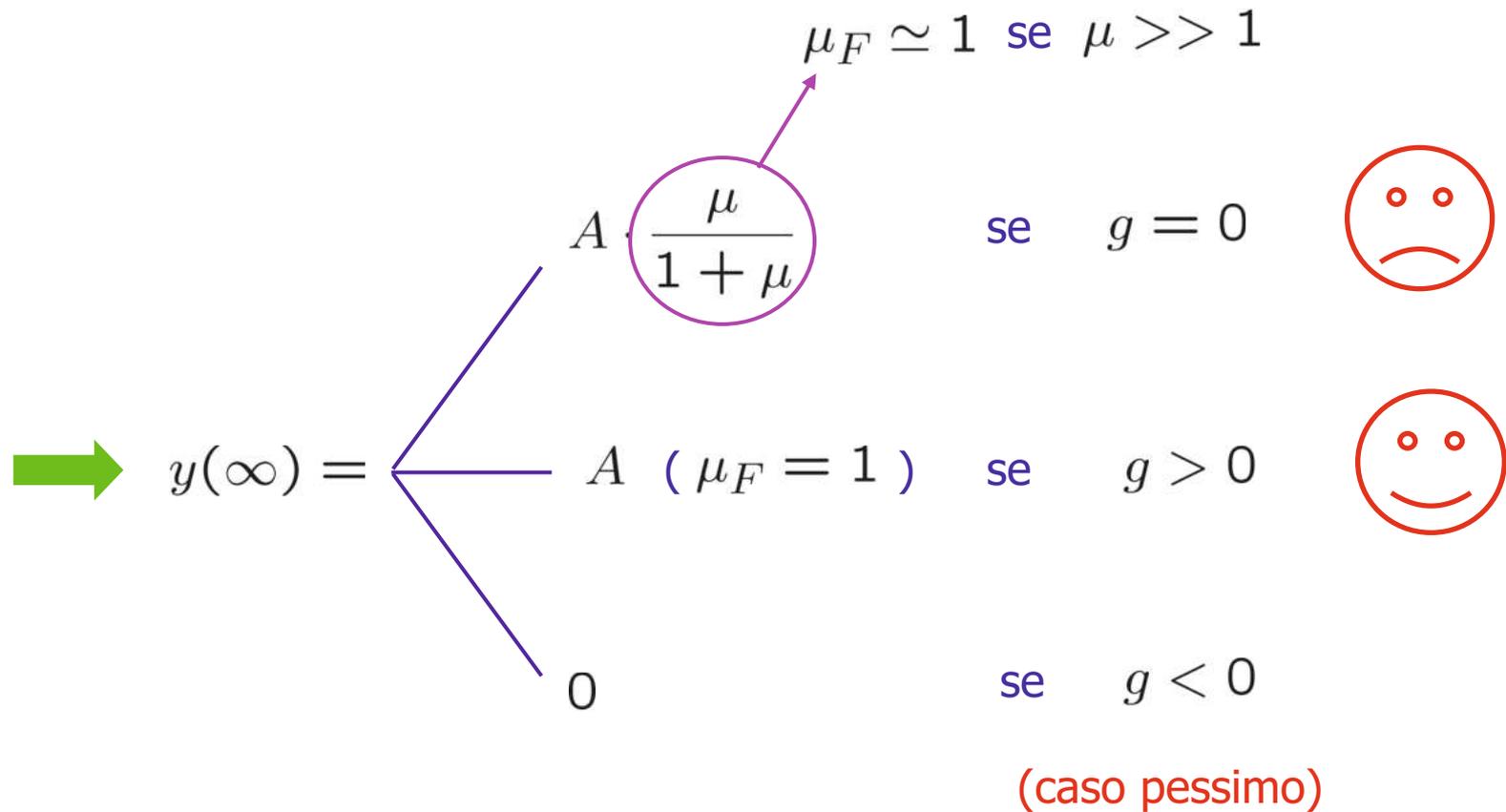
$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1$$

$$w(t) = A \cdot 1(t)$$

$$\rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot F(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{\mu}{s^g}}{1 + \frac{\mu}{s^g}}$$

$$= \boxed{A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu}}$$



- **Analisi di  $F(s)$  - poli & zeri**

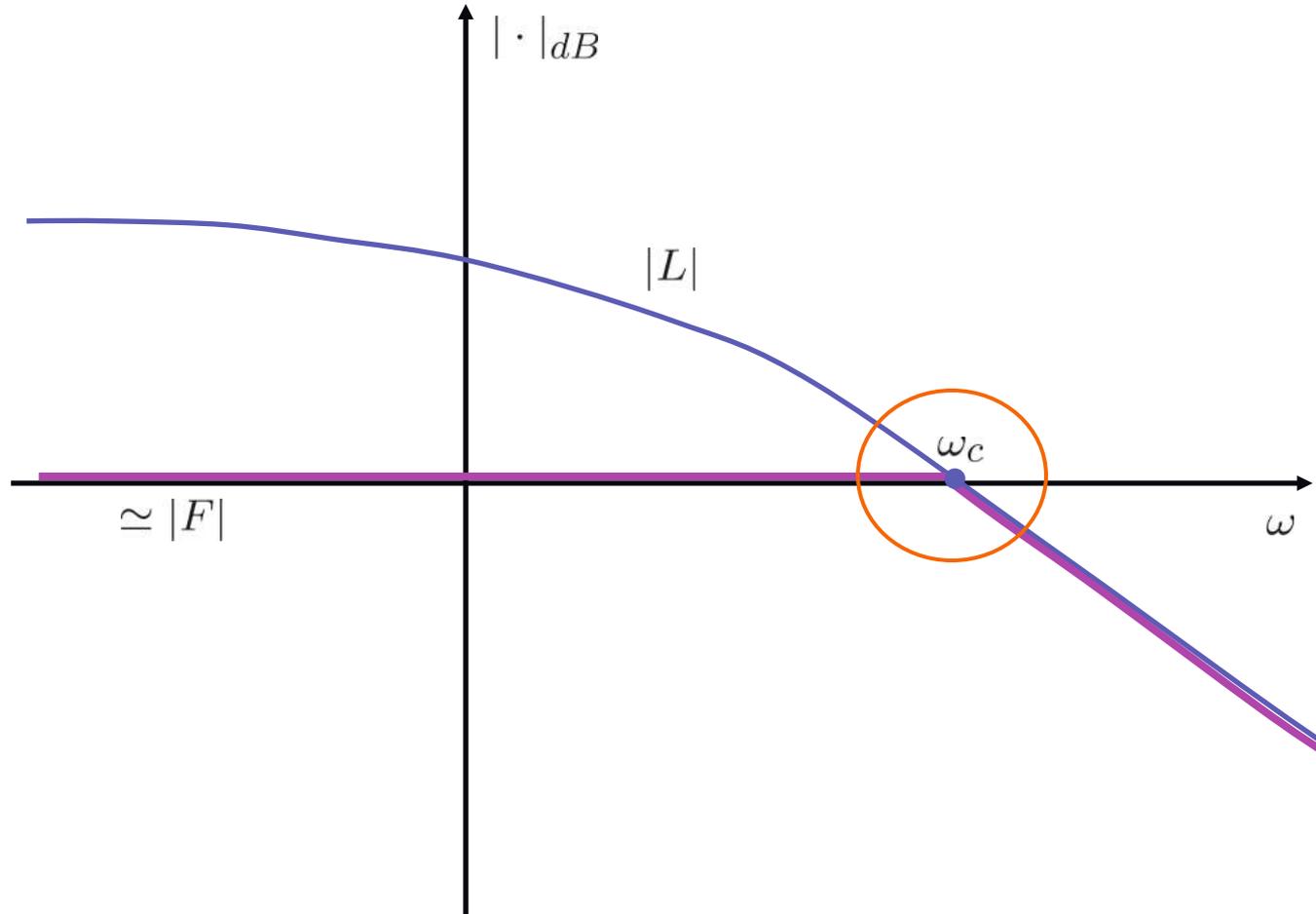
$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \quad \longrightarrow \quad F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

- zeri di  $F(s) \equiv$  zeri di  $L(s)$
- poli di  $F(s) \equiv$  radici di  $\varphi(s) + N(s)$

- **Analisi di  $F(s)$  - risposta in frequenza**

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

- **Situazione tipica**



## Quindi:

- $F(s)$  è un filtro passa-basso
- Banda passante:  $B \simeq [0, \omega_c]$
- Guadagno  $\mu_F \simeq 1$

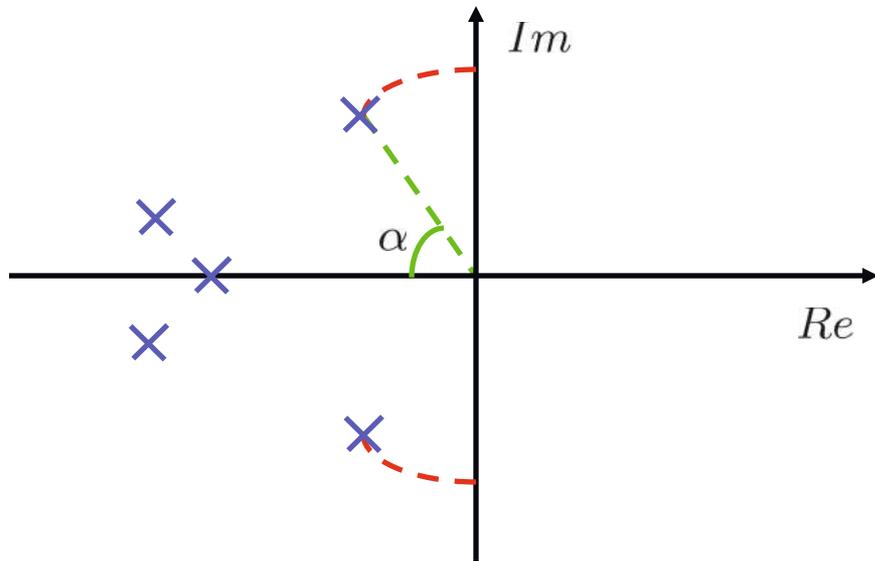
$$\mu_F = 1 \quad \text{se } g > 0$$

$$\mu_F = \frac{\mu}{1 + \mu} \quad \text{se } g = 0$$

- Poli dominanti di  $F(s)$  cadono in corrispondenza di  $\omega_c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- se reale} \quad \longrightarrow \quad \tau \simeq \frac{1}{\omega_c} \\ \text{- se complessi} \quad \longrightarrow \quad \omega_n \simeq \omega_c \\ \quad \xi = ? \end{array} \right.$$

# ● Smorzamento e margine di fase



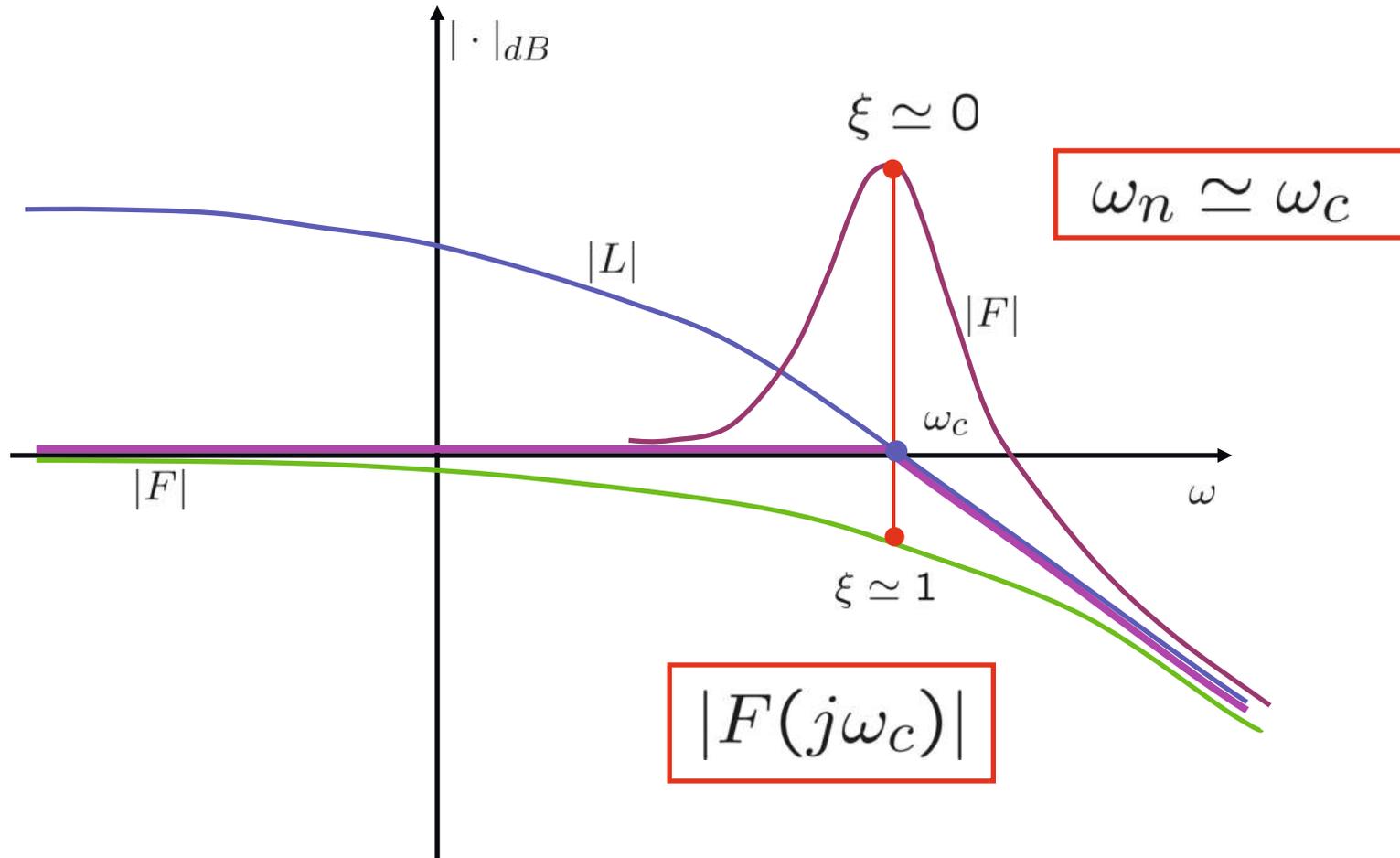
Poli di  $F(s)$

Basso smorzamento  $\longrightarrow$  Scarsa robustezza  $\longrightarrow$   $\varphi_m \simeq 0^\circ$

$\xi \simeq 0$

?

● Legame tra  $\xi$  e  $\varphi_m$



- **Calcolo di**  $|F(j\omega_c)|$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \longrightarrow \quad L(j\omega_c) = 1 \cdot e^{j\varphi_c}$$

con  $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$

$$\longrightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\underbrace{|1 + \cos \varphi_c|}_{\text{Re}} + j \underbrace{\sin \varphi_c}_{\text{Im}}}$$



$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + \sin^2 \varphi_c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_c + 2 \cos \varphi_c + \sin^2 \varphi_c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

- Consideriamo un generico sist. del secondo ordine:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \xi > 0$$

↳  $|F(j\omega_n)| = \left| \frac{\cancel{\omega_n^2}}{-\cancel{\omega_n^2} + 2j\xi\cancel{\omega_n^2}s + \cancel{\omega_n^2}} \right|$

$$= \left| \frac{1}{j2\xi} \right| = \frac{1}{2\xi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_n \simeq \omega_c \\ \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sin \frac{x}{2} \end{array} \right\} \longrightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}$$



$$\underbrace{\xi}_{\text{red bracket}} \simeq \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \simeq \frac{\varphi_m}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \simeq \underbrace{\frac{\varphi_m}{100}}_{\text{red bracket}}$$

## Regola empirica

- $\varphi_m < 75^\circ$   Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- $\varphi_m > 75^\circ$   Polo dominante reale con

$$\tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$$

## ● Riassumendo:

In un sistema di controllo in a.c.

- la **precisione statica** dipende da:

$$g, \mu \quad \mu_F = \begin{cases} 1 & g > 0 \\ \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \end{cases}$$

- la **precisione dinamica** dipende da

$$\omega_c, \varphi_m \quad B_F \simeq [0, \omega_c]$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

## ● Analisi di $S(s)$ - analisi statica

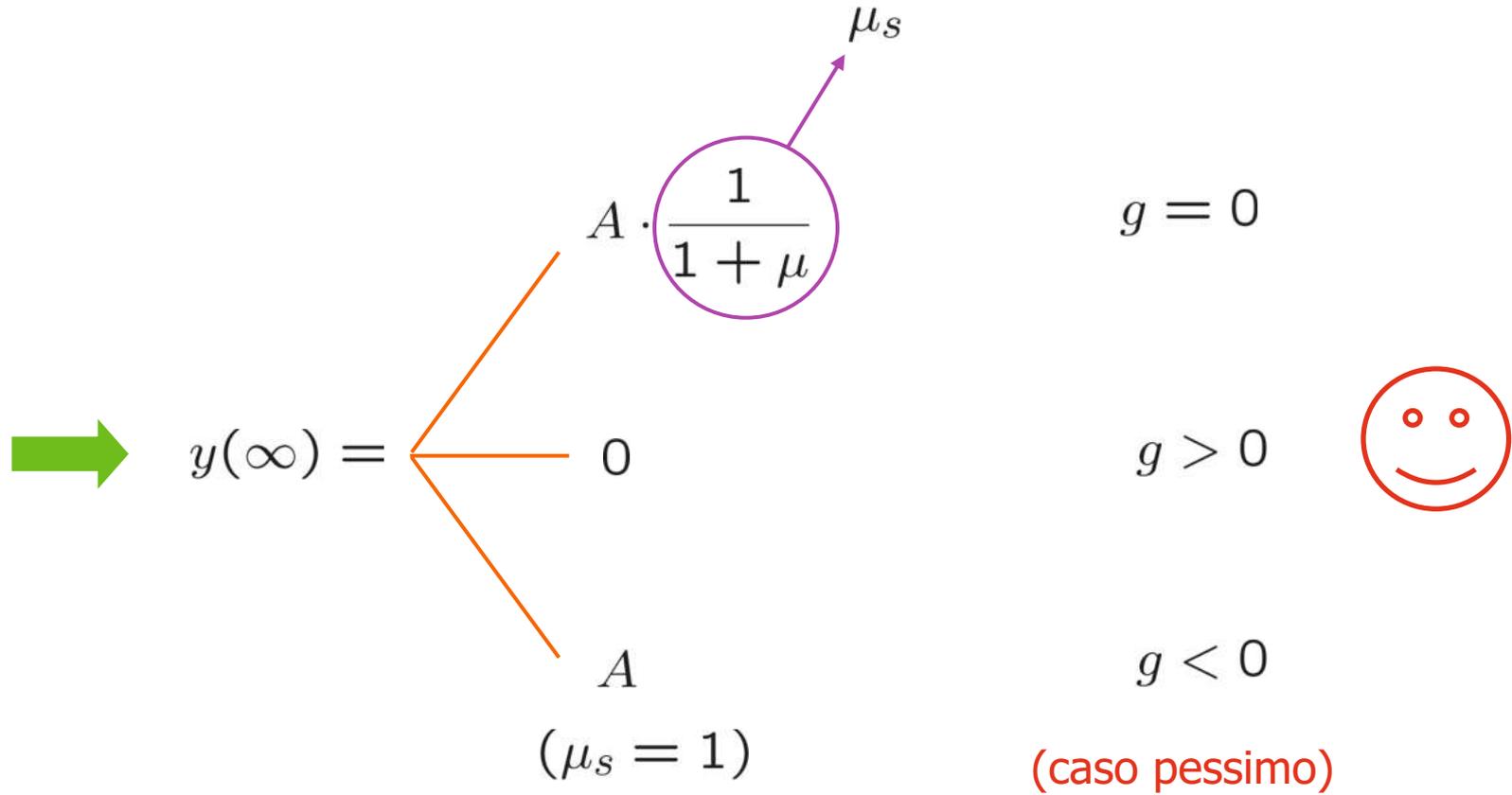
- valore di regime, risposta allo scalino:

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$\rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot S(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} A \cdot S(s)$$

$$= A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{s^g}} =$$

$$= A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu}$$



- valore di regime, risposta alla rampa:

$$d(t) = A \cdot t, \quad t \geq 0 \quad \longrightarrow \quad D(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$\hookrightarrow y(\infty) = \dots = A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu}$$

$$= \begin{cases} \infty & g = 0 \\ \frac{A}{\mu} & g = 1 \\ 0 & g > 1 \end{cases}$$

## Tabella riassuntiva:

Valori di regime  $y(\infty)$  in risposta a  $d(t)$

$e(\infty)$  in risposta a  $w(t)$

	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$
	$A \cdot 1(t)$	$A \cdot t \cdot 1(t)$	$A \cdot t^2/2 \cdot 1(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	$\infty$	$\infty$
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	$\infty$
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

- **Analisi di  $S(s)$  - poli & zeri**

$$S(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s) + N(s)} \quad \left( L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \right)$$

- zeri di  $S(s) \equiv$  poli di  $L(s)$

- poli di  $S(s) \equiv$  radici di  $\varphi(s) + N(s)$

$\equiv$

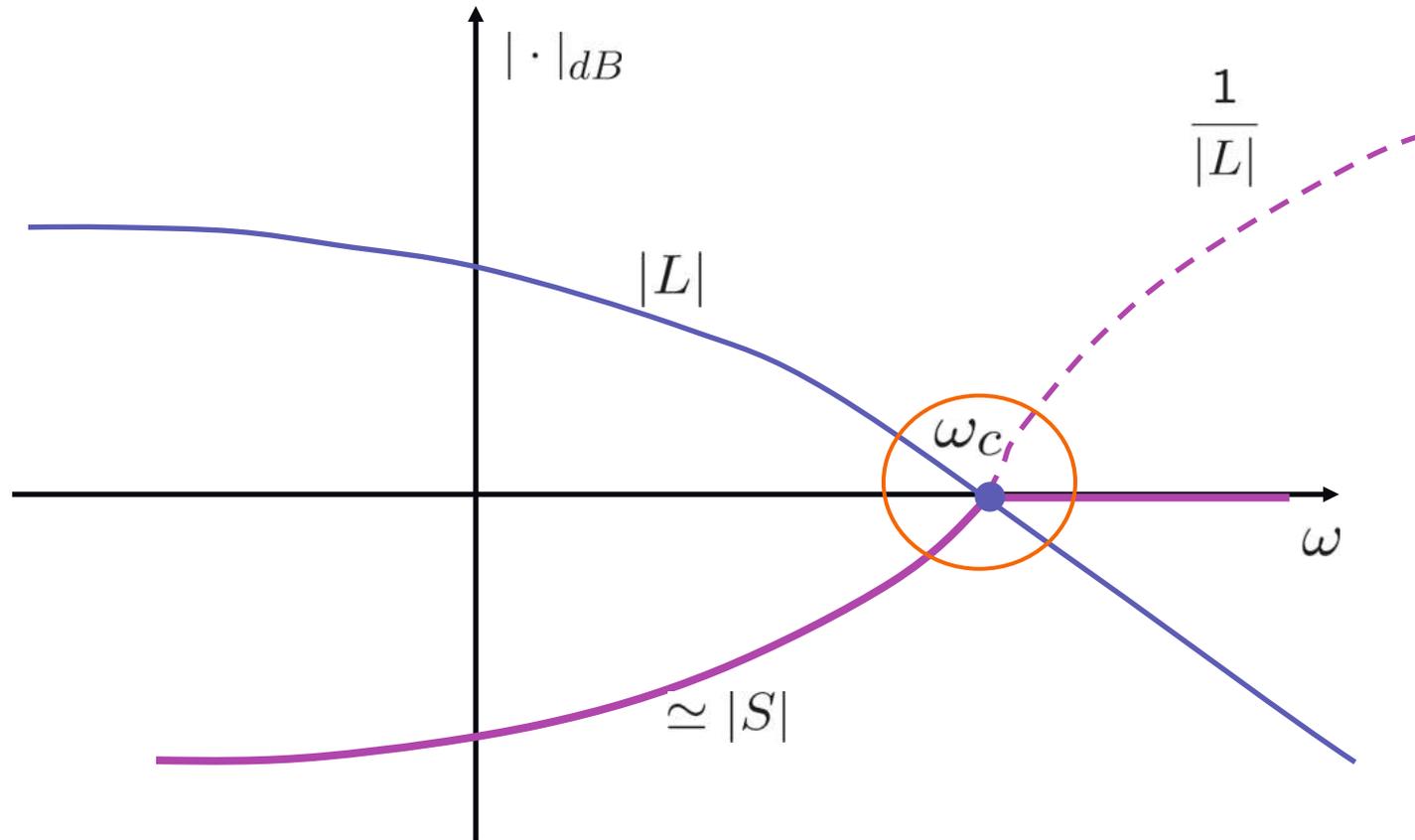
poli di  $F(s)$

# ● Analisi di $S(s)$ - risposta in frequenza

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \\ \frac{1}{|L(j\omega)|} & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \end{cases}$$

$0dB$   
 $-|L(j\omega)|_{dB}$

- **Situazione tipica**



➔ Filtro passa-alto con  $B \simeq [\omega_c, \infty)$

- **Attenuazione del disturbo**  $d(t)$

- solo in  $[0, \omega_c]$



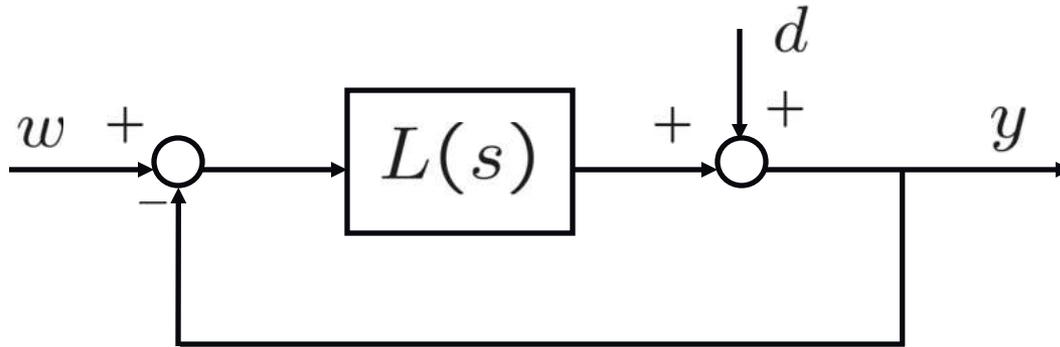
Banda del sistema  
di controllo

- tanto migliore

- quanto maggiore è  $\omega_c$

- quanto più  $|L(j\omega)| \gg 1$  in  $[0, \omega_c]$

- **Effetto di un ritardo**



$$L(s) = L'(s) \cdot e^{-\tau s}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} |L(j\omega)| = |L'(j\omega)| \\ \arg L(j\omega) = \arg L'(j\omega) - \omega\tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \end{array} \right.$$



- può modificare la **stabilità in anello chiuso**
- **analisi statica** invariata

$$\lim_{s \rightarrow 0} e^{-\tau s} = 1$$

- **analisi dinamica**

$\omega_c$  non cambia (diagramma del modulo invariato)

$\varphi_c$  diminuisce

$\varphi_m$  diminuisce   $\xi$  diminuisce

(ritardi  oscillazioni)

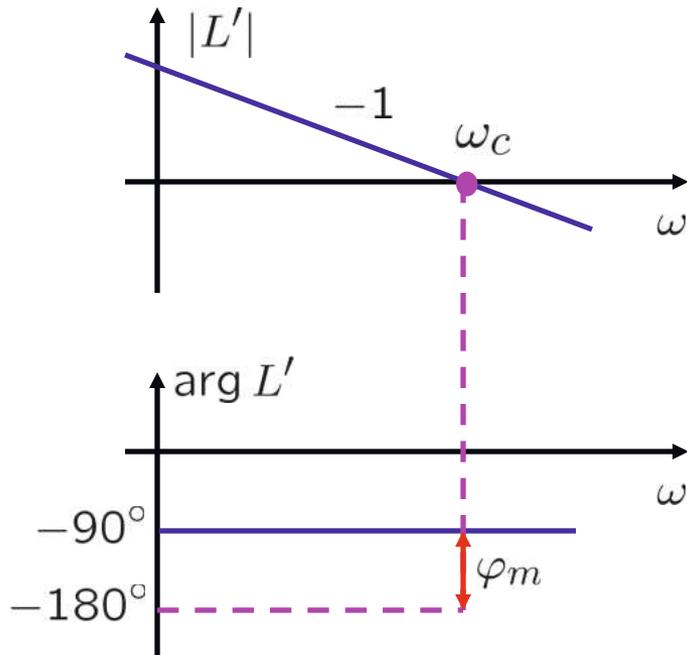
## ● Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\tau s}$$

$$w(t) = 1(t)$$

- $\tau = 0$  (no ritardo)

$$y(\infty) = 1$$



$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_m = 90^\circ$$

$$(\varphi_c = -90^\circ)$$

Polo dominante  
reale con

$$T \simeq \frac{1}{\omega_c} = 1$$

- $\tau > 0$

(taglio invariato)

$$y(\infty) = 1$$

$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= -90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$



$$\varphi_m = 90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Asintotica stabilità



$$\tau < \frac{\pi}{2} \simeq 1.57 \text{ sec}$$

$$\tau = 1$$

$$\rightarrow \varphi_m = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$$



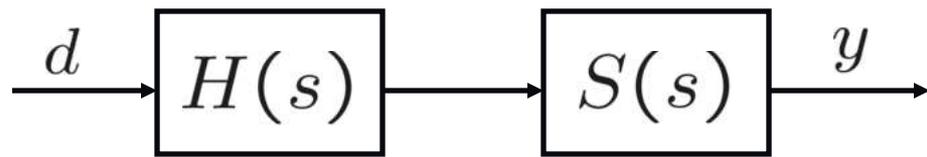
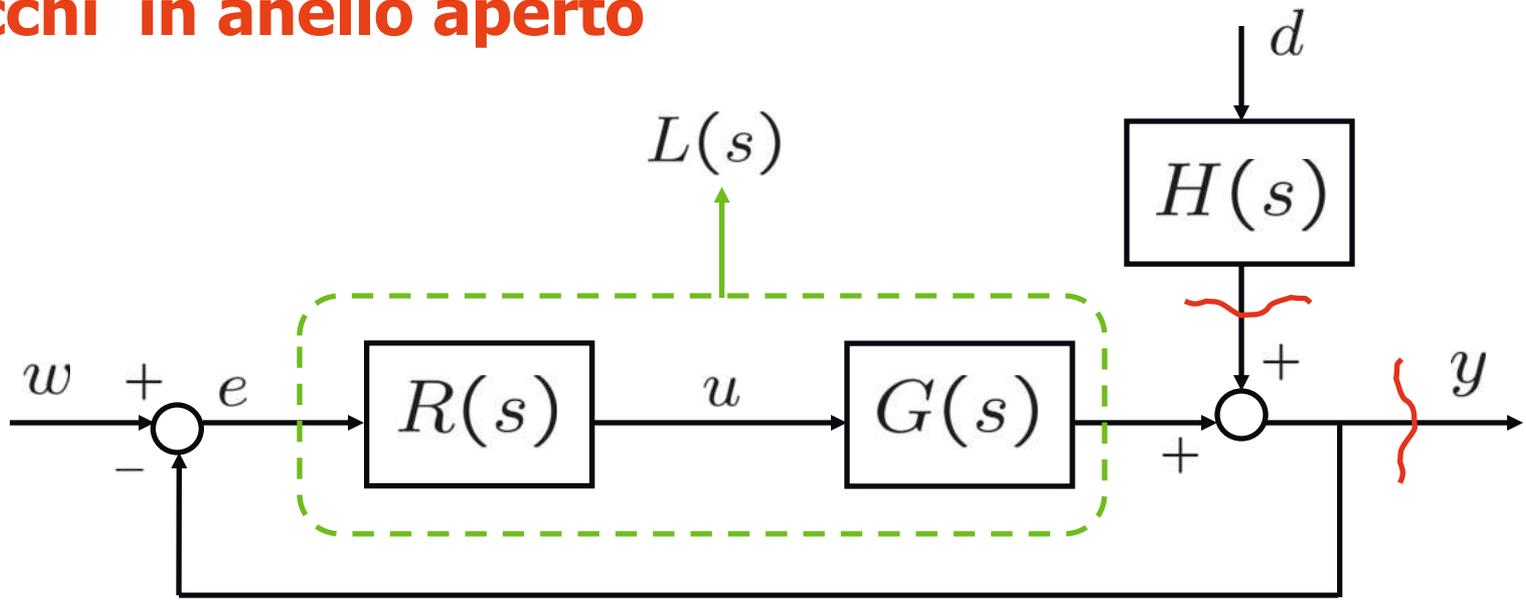
Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c = 1$$

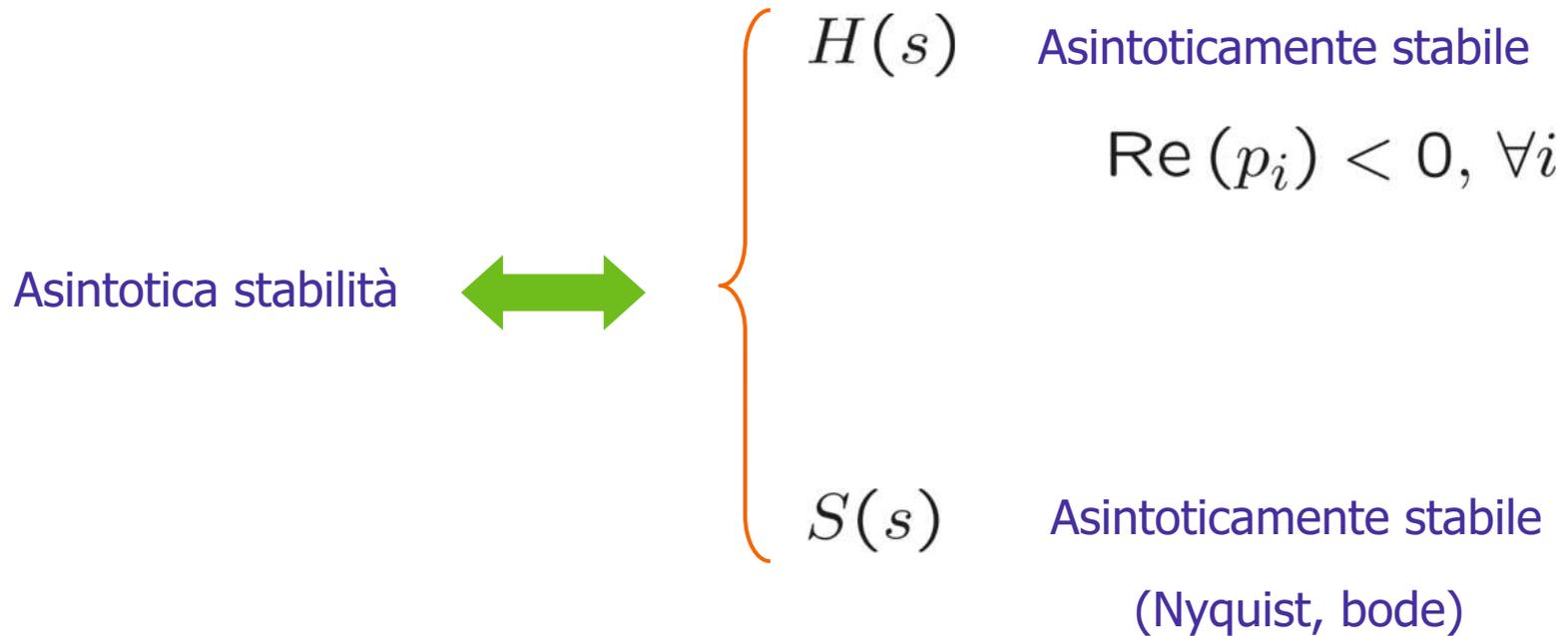
$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0.33$$

$$t_a \simeq \frac{5}{\xi \omega_n} \simeq 15 \text{ sec !!!}$$

● **Blocchi in anello aperto**



# ● Stabilità



- **Effetto di  $d$  su  $y$**

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

- **Analisi statica:** (supp.  $g_H = 0, g_L = 0$  )

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot M(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} M(s)$$

$$= A \cdot \frac{\mu_H}{1 + \mu_L} = A \cdot \mu_H \cdot \mu_S$$

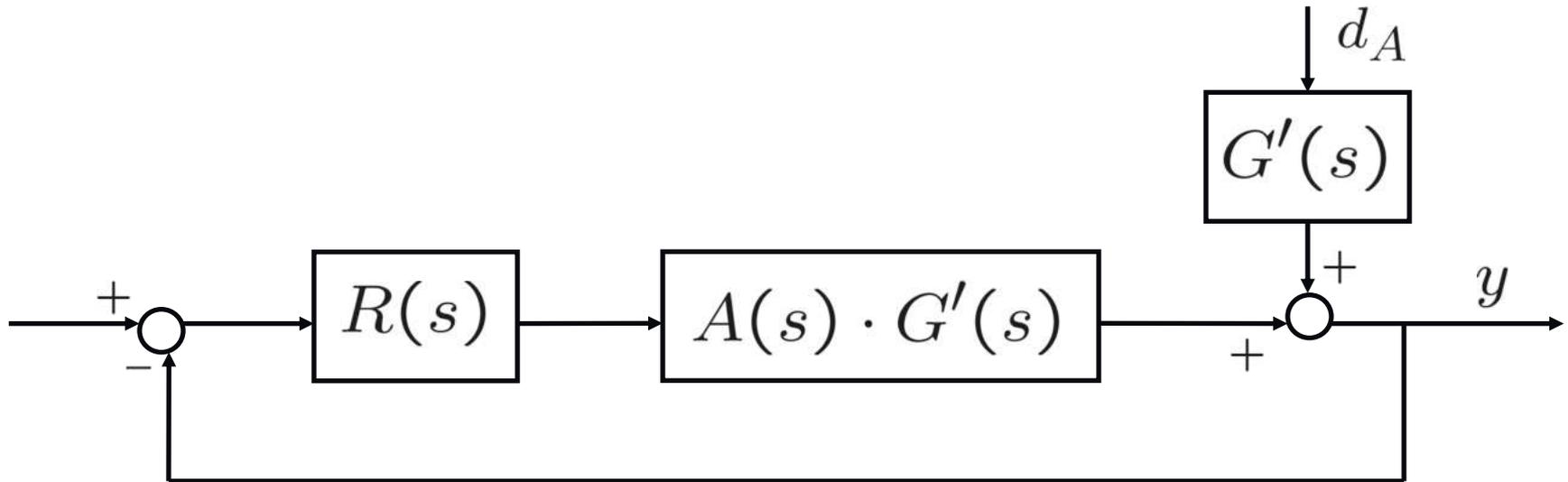
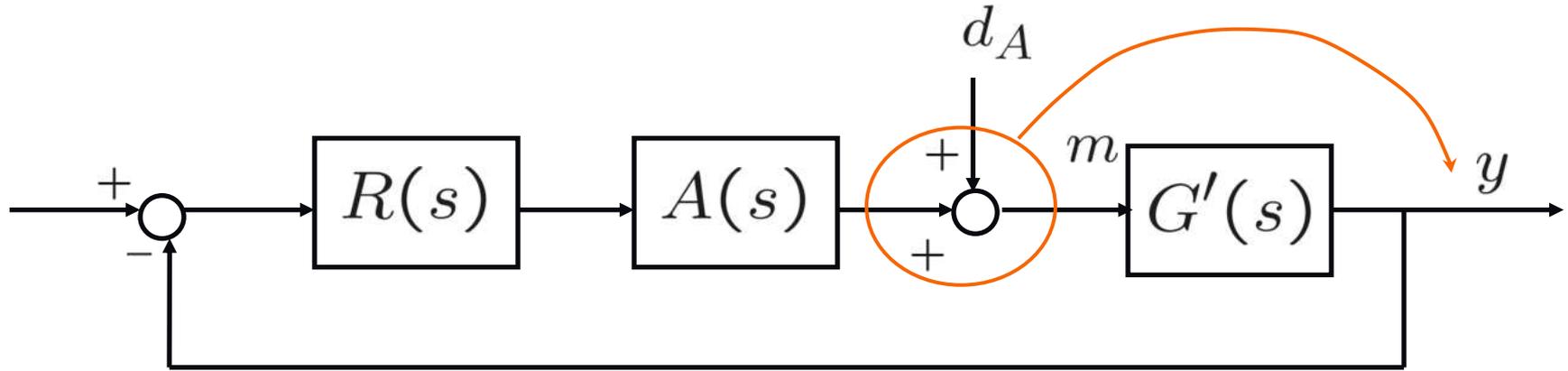
- Analisi dinamica:

$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |S(j\omega)|$$



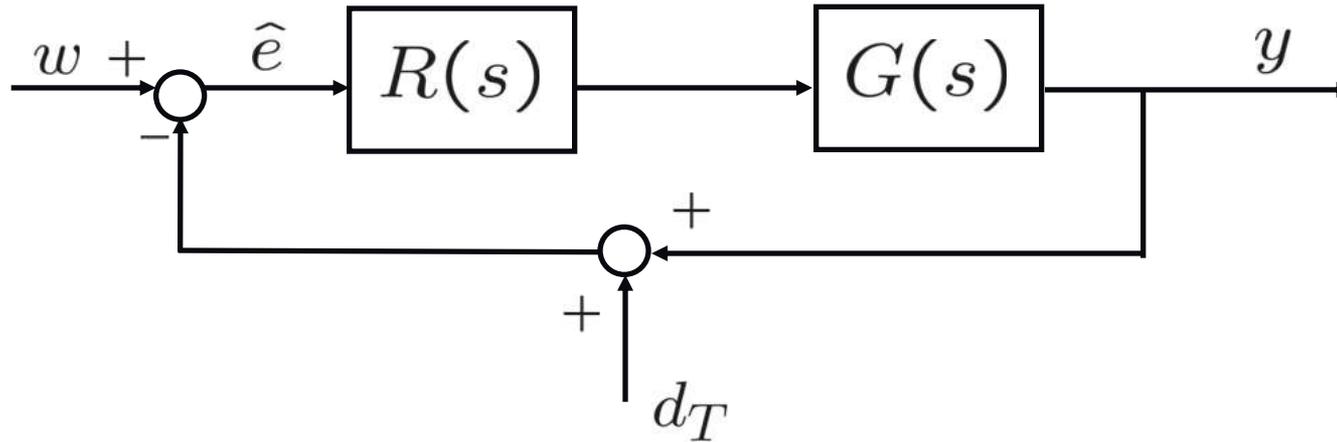
$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} \textcircled{+} |S(j\omega)|_{dB}$$

- Disturbi sull' attuatore

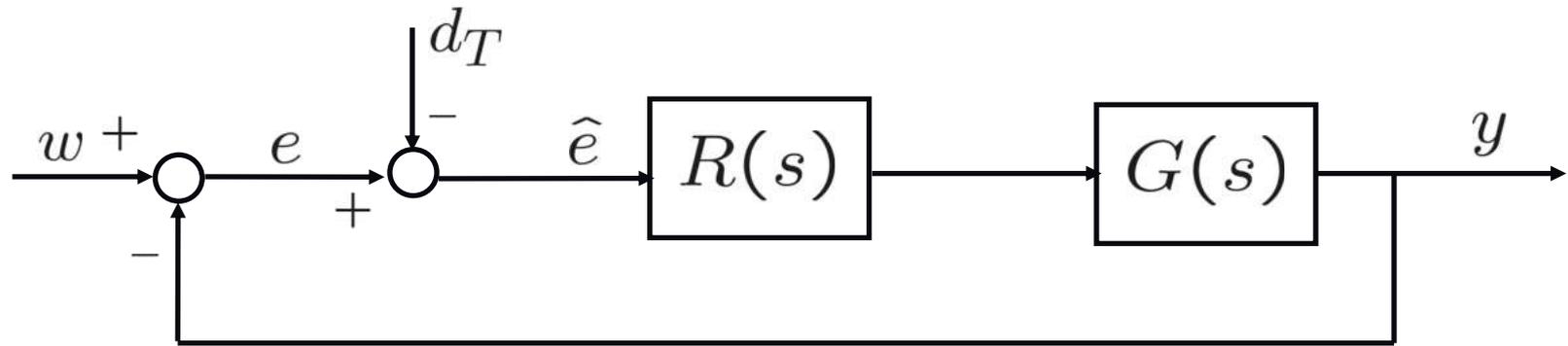


→ vedi caso precedente

- Disturbi sul trasduttore (in retroazione)



$$\hat{e} = w - (y + d_T) = \underbrace{w - y}_e - d_T$$



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s) \quad \text{Passa-basso con } B_F \simeq [0, \omega_c]$$



Disturbi a bassa frequenza  
vanno a influire su  $e(t)$

## ● Valore a regime risposta allo scalino

$$d_T(t) = A \cdot 1(t) \quad (\text{Hp: sistema as. stabile})$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \frac{1}{s}$$

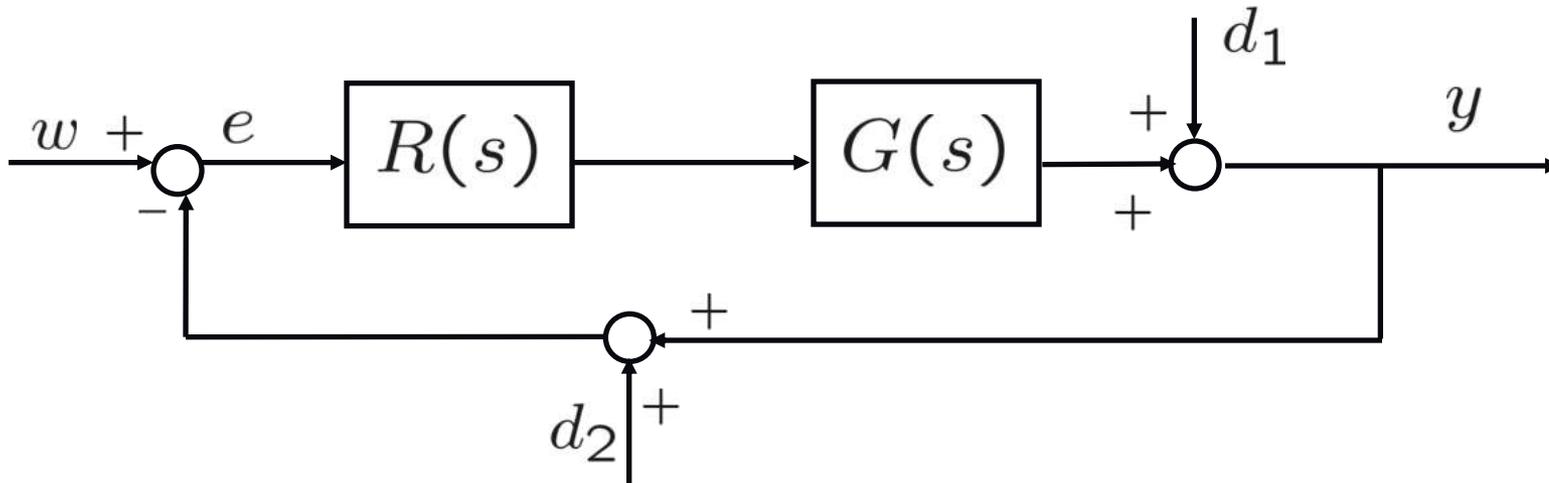
$$= \dots = \begin{cases} A \cdot \frac{1}{1 + \mu} & g = 0 \\ A & g > 0 \end{cases}$$



Compensazione del disturbo in catena diretta è in contrasto con la compensazione del disturbo in retroazione



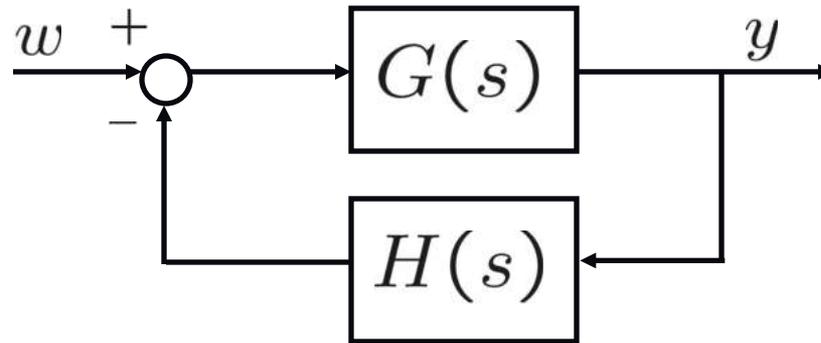
## ● Riassunto: attenuazione dei disturbi



Il sistema in anello chiuso è in grado di attenuare:

- $d_1$  a bassa frequenza  $\omega \ll \omega_c$
- $d_2$  ad alta frequenza  $\omega \gg \omega_c$

- Estensione



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)|}$$

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|H(j\omega)|} , \quad |G(j\omega)| \gg \frac{1}{|H(j\omega)|} \\ |G(j\omega)| , \quad |G(j\omega)| \ll \frac{1}{|H(j\omega)|} \end{array} \right.$$

## ● Esempio

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \quad H(s) = \frac{1}{(1+0.1s)}$$

→  $F(s) = \dots = \frac{10(1+0.1s)}{11 + 2.1s + 1.2s^2 + 0.1s^3}$

$$\mu_F = \frac{10}{11}$$

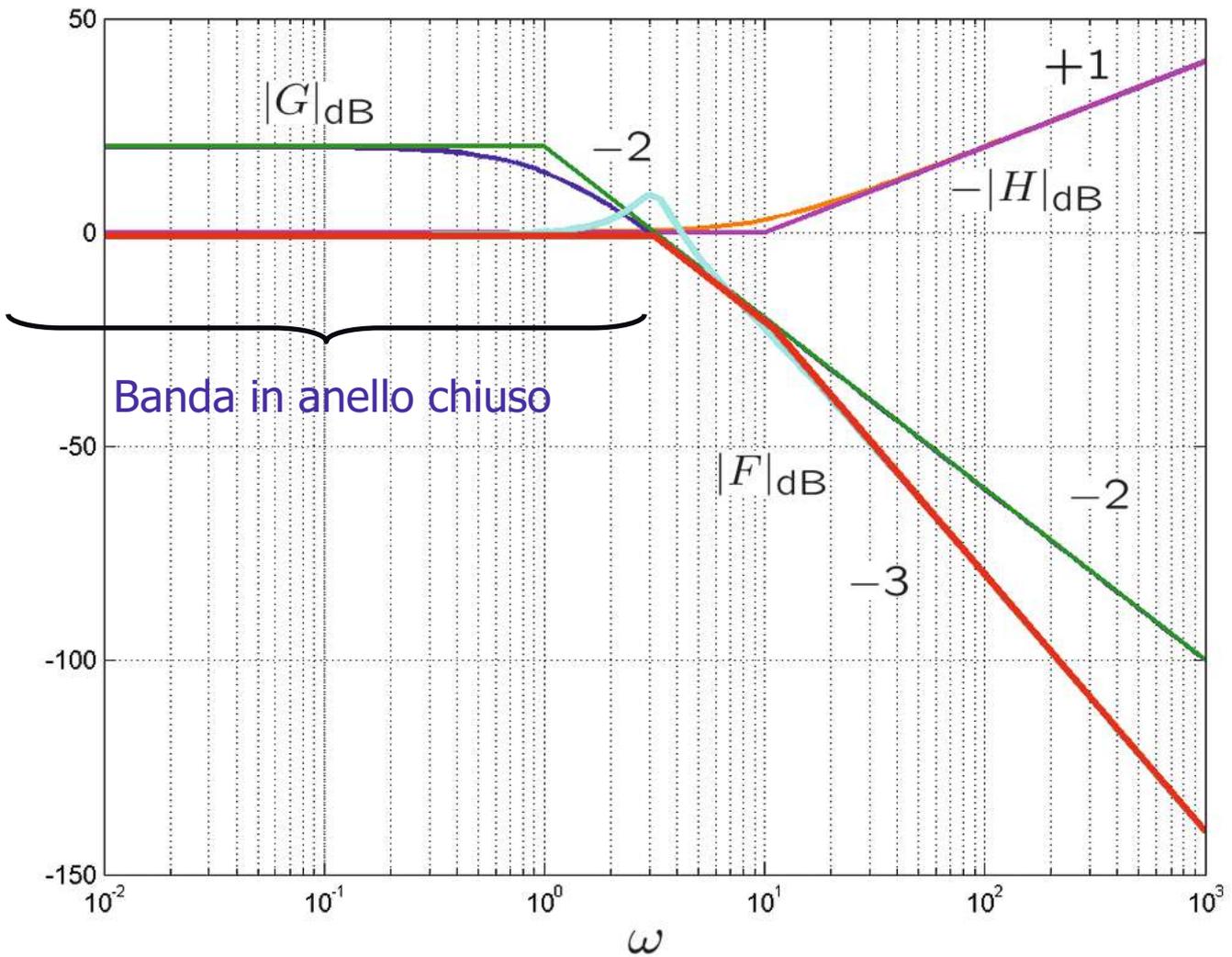
Poli:

$$-11$$

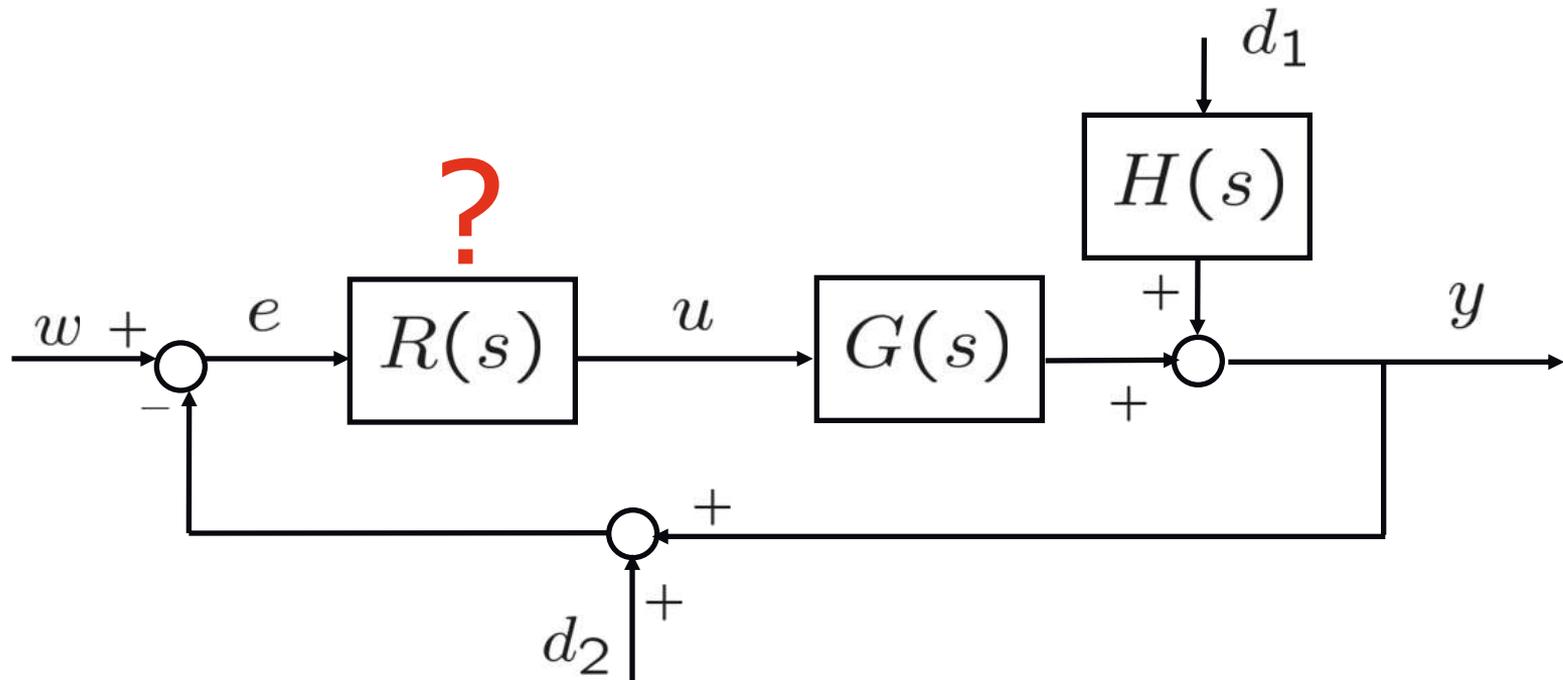
$$-0.5 \pm j3.12$$

$$\omega_n \simeq 3.16$$

$$\xi \simeq 0.16$$



- **Problema di progetto del controllore**



Determinare  $R(s)$  in modo che il sistema soddisfi  
alcuni requisiti (specifiche)

## ● Principali requisiti

- Asintotica Stabilità   $\mu > 0$   
 $\varphi_m > 0$  (Bode)
- Precisione statica   $g > 0$  e/o  $\mu$  elevato
- Precisione dinamica
  - velocità di risposta   $\omega_c$  elevata
  - smorzamento   $\varphi_m$  elevato

- Attenuazione del disturbo  
in andata



$\omega_c$  elevata

$|L(j\omega)|$  elevato per  $\omega \ll \omega_c$

- Attenuazione del disturbo  
in retroazione



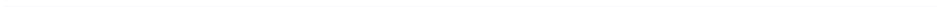
$\omega_c$  non troppo elevata

$|L(j\omega)|$  piccolo per  $\omega \gg \omega_c$

- Stabilità robusta   $\varphi_m$   
 $K_m$  elevati
- Moderazione controllo   $|R(j\omega)|$  piccolo per  $\omega \gg \omega_c$









# Il luogo delle radici

## Definizioni e proprietà

# Introduzione

- Un po' di storia: è una metodologia proposta inizialmente da Evans (negli anni '50)
- A che cosa serve?
  - Tecnica **grafica** di **analisi e sintesi di sistemi di controllo** per **sistemi SISO**
  - Può essere estesa al caso di sistemi MIMO (**ma non lo vedremo !**)

## Introduzione (2)

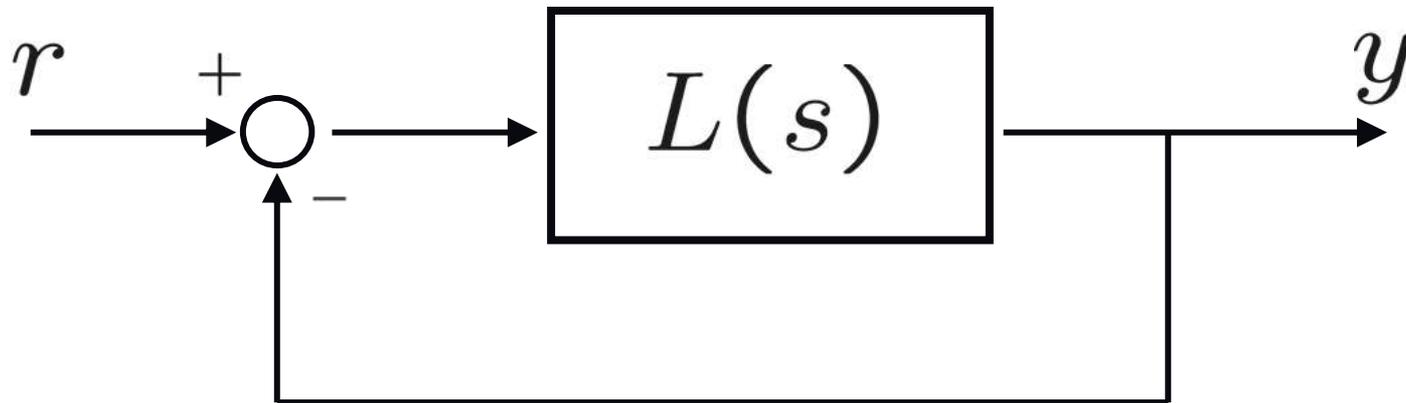
- La tecnica del luogo delle radici permette di **indagare** sull'**influenza dei parametri** di un sistema dinamico lineare sul **comportamento dinamico** del sistema stesso.
- Si studia la dipendenza delle radici dell'equazione caratteristica dai parametri del sistema.

# Sistemi a tempo continuo vs sistemi a tempo discreto

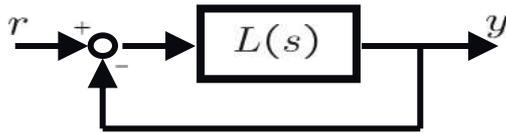
- Le regole di tracciamento dei luoghi sono le medesime sia che si stia analizzando un sistema lineare a tempo continuo che a tempo discreto.
- Le proprietà dei luoghi e le tecniche di utilizzo sono analoghe nei due casi (tempo continuo – tempo discreto).
- Per semplicità allora le **regole di tracciamento** e le **proprietà** dei luoghi verranno descritte ed analizzate **soltanto per sistemi dinamici lineari a tempo continuo**.
- Dell' utilizzo del luogo delle radici per sistemi a tempo discreto daremo solamente alcuni brevi cenni.

## Definizione di luogo delle radici

- Facciamo riferimento ad un sistema LTI di tipo SISO, a tempo continuo, retroazionato secondo lo schema

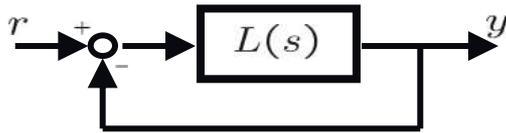


cioè un sistema di controllo a semplice ciclo di reazione.



## Definizione (2)

- Vogliamo avere informazioni sulle caratteristiche della dinamica del sistema a ciclo chiuso, a partire da caratteristiche di ciclo aperto del sistema stesso.
- L'evoluzione dinamica di un sistema lineare è governata dalle radici dell'equazione caratteristica.



## Definizione (3)

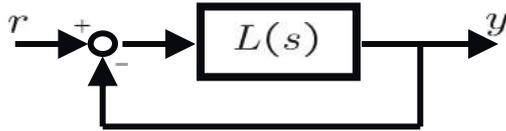
- Il **luogo delle radici** mette allora in relazione i **poli di ciclo chiuso** del sistema con **poli e zeri di ciclo aperto** del sistema stesso.
- Il **parametro** rispetto al quale si studiano le variazioni dei poli di ciclo chiuso è il **guadagno della catena di ciclo aperto**.

## Vantaggi del metodo

- Fornisce una rappresentazione grafica sintetica che permette di ricavare la posizione di tutti i poli di ciclo chiuso del sistema (non solo la posizione approssimata dei poli dominanti [cfr. metodi basati su risposta in frequenza – Parte 8 e Parte 10] )
- È applicabile anche a sistemi instabili ad anello aperto.
- Più in generale è applicabile in situazioni in cui il criterio di Bode non è utilizzabile.

## Svantaggi del metodo

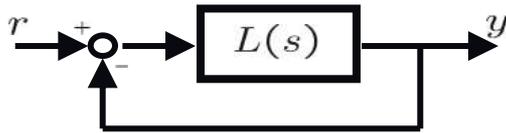
- È applicabile solamente ai casi in cui la funzione di trasferimento d'anello sia razionale.
- Di conseguenza non è utilizzabile nei casi in cui ci sia la presenza di ritardi di tempo finiti nella funzione di trasferimento d'anello.



## Definizione (4)

- Per il tracciamento del luogo si fa riferimento alla forma fattorizzata della funzione di trasferimento d'anello che mette in evidenza zeri e poli

$$L(s) = \rho \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad \text{con } m \leq n$$

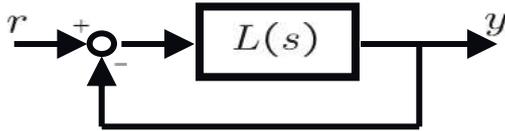


## Definizione (5)

- Nell'espressione di  $L(s)$ 
  - $z_j, p_i$  sono zeri e poli (eventualmente complessi o nulli), cambiati di segno
  - $\rho$  è la costante di trasferimento, legata al guadagno  $\mu$  dalla

relazione

$$\rho = \mu \frac{\prod_{i: p_i \neq 0} p_i}{\prod_{j: z_j \neq 0} z_j}$$



## Definizione (6)

- I poli di ciclo chiuso sono le radici dell'equazione caratteristica

$$1 + L(s) = 0$$

ovvero

$$1 + \rho \frac{\prod_j (s + z_j)}{\prod_i (s + p_i)} = 1 + \rho \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}} = 0$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} = T(s)$$

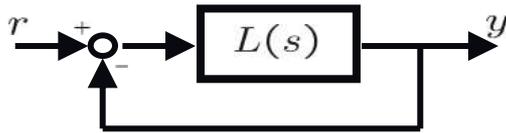
## Il luogo delle radici: definizione

- Luogo delle radici: è il luogo del piano complesso descritto dalle radici dell'equazione

$$1 + \rho \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

al variare di  $\rho$ , con  $\rho \neq 0$

- In particolare
  - per  $\rho > 0$  il luogo si dice **luogo diretto LD**
  - per  $\rho < 0$  il luogo si dice **luogo inverso LI**



$$L(s) = \rho \frac{s + 2}{s(s + 1)}, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

## Esempio

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + (1 + \rho)s + 2\rho = 0$$

- Al variare di  $\rho$  i poli di ciclo chiuso possono essere reali coincidenti, reali distinti oppure complessi coniugati, a parte reale negativa oppure positiva.
- Al variare di  $\rho$  cambiano allora le proprietà di stabilità e dei transitori di risposta del sistema di ciclo chiuso

## Caratterizzazione del luogo

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{1}{|\rho|} \\ \angle N(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k + 1) 180^\circ & , \rho > 0 , k \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{LD} \\ 2k 180^\circ & , \rho < 0 , k \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{LI} \end{cases} \end{array} \right.$$

## Caratterizzazione del luogo (2)

- La **seconda equazione** caratterizza completamente il luogo:  
la utilizzeremo per **tracciare geometricamente il luogo**

$$\angle N(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k + 1) 180^\circ & , \rho > 0 & , k \in \mathbb{Z} & \mathbf{LD} \\ 2k 180^\circ & , \rho < 0 & , k \in \mathbb{Z} & \mathbf{LI} \end{cases}$$

- La prima equazione risulta utile invece per “tarare” il luogo al variare del valore di  $\rho$ .

$$\left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{1}{|\rho|}$$

## Semplice interpretazione geometrica

- Dalle espressioni di  $N(s)$  e  $D(s)$  definite in precedenza si ottiene che

$$\angle N(s) = \angle \prod_j (s + z_j) = \sum_j \angle (s + z_j) = \sum_j \theta_j$$

$$\angle D(s) = \angle \prod_i (s + p_i) = \sum_i \angle (s + p_i) = \sum_i \varphi_i$$

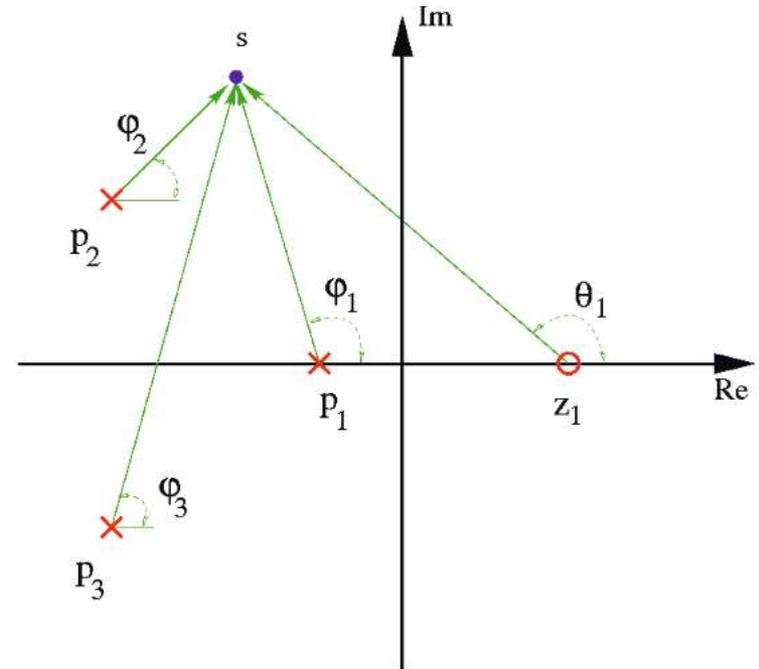
quindi in definitiva

$$\angle N(s) - \angle D(s) = \sum_j \theta_j - \sum_i \varphi_i$$

# Semplice interpretazione geometrica (2)

- Graficamente

$$L(s) = \rho \frac{(s - 2)}{(s + 1)(s^2 + 6s + 13)}$$



- Il punto  $s$  appartiene al luogo diretto se e solo se la quantità

$$\sum_j \theta_j - \sum_i \varphi_i$$

risulta multiplo dispari di  $180^\circ$ , appartiene invece al luogo inverso se e solo se essa risulta multiplo pari di  $180^\circ$

## Taratura del luogo

- Dalle espressioni di  $N(s)$  e  $D(s)$  definite in precedenza si ottiene che

$$|N(s)| = \prod_j |s + z_j| = \prod_j \nu_j$$

$$|D(s)| = \prod_i |s + p_i| = \prod_i \eta_i$$

quindi in definitiva

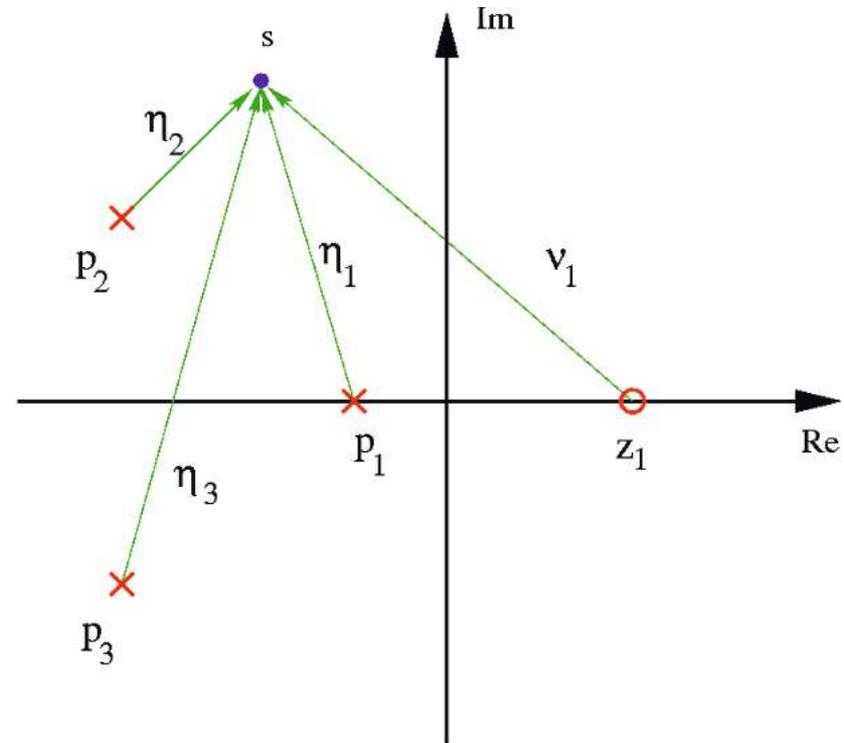
$$\left| \frac{N(s)}{D(s)} \right| = \frac{1}{|\rho|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\prod_j \nu_j}{\prod_i \eta_i} = \frac{1}{|\rho|}$$

## Taratura del luogo: ancora un'interpretazione geometrica (2)

- Graficamente

$$L(s) = \rho \frac{(s - 2)}{(s + 1)(s^2 + 6s + 13)}$$

- Determinato un punto del luogo e calcolate le sue distanze da zeri e poli, è possibile determinare il valore di  $|\rho|$  utilizzando la relazione



$$|\rho| = \frac{\prod_i |s + p_i|}{\prod_j |s + z_j|} = \frac{\prod_i \eta_i}{\prod_j \nu_j}$$

## Un semplice esempio

- Si tracci il luogo delle radici di  $L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+3)}$

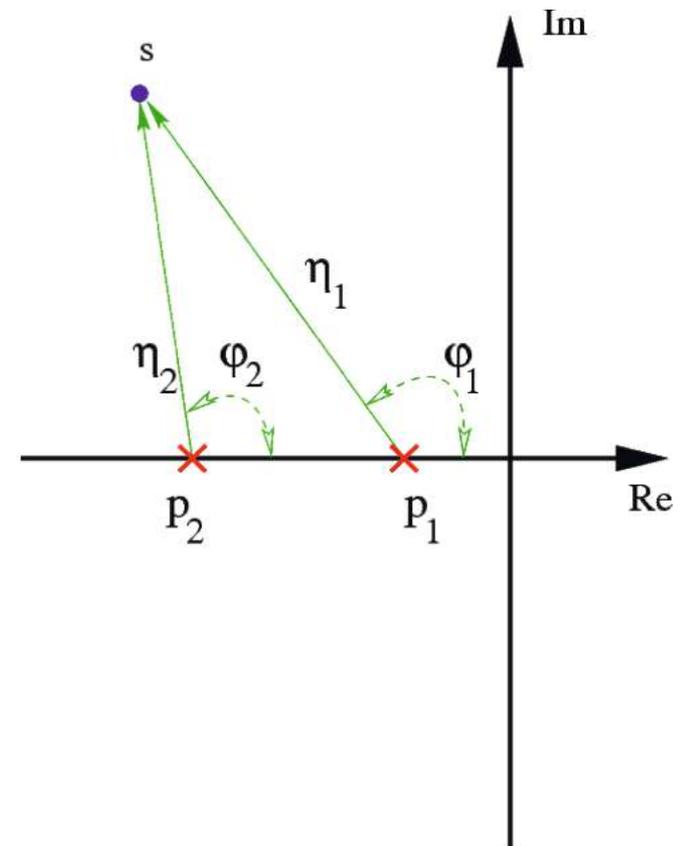
- Dovrà valere la relazione

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = (2k + 1) 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

per il luogo diretto e la relazione

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = 2k 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

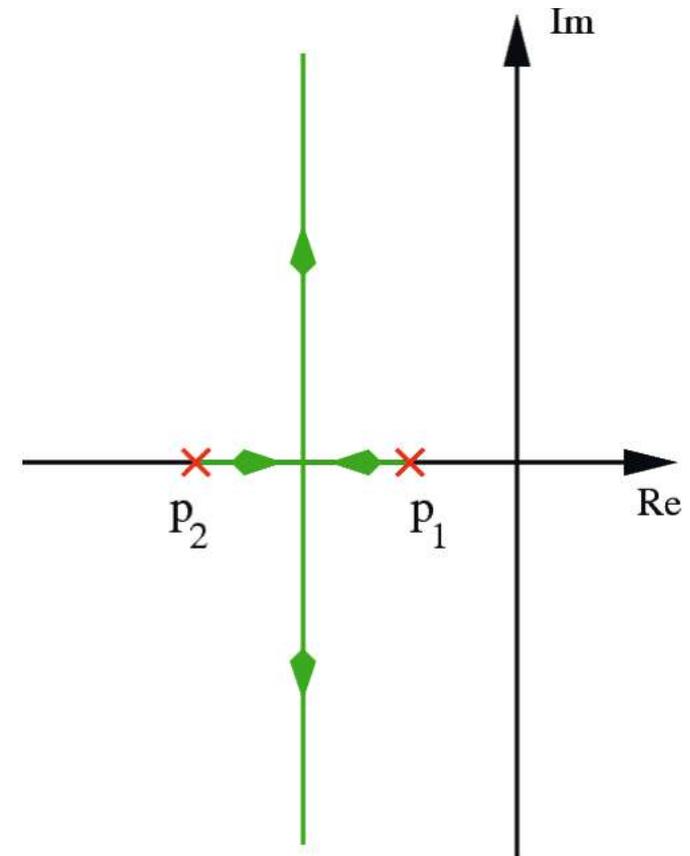
per il luogo inverso.



## Un semplice esempio (2): luogo diretto

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = (2k + 1) 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

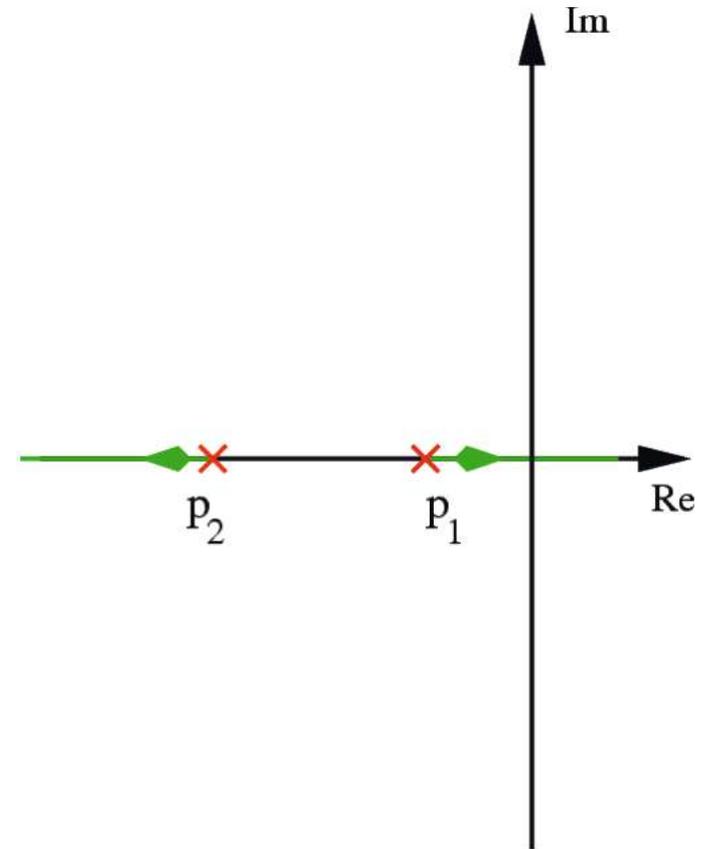
- La relazione è soddisfatta per tutti i punti del segmento dell'asse reale compreso tra i due poli e per tutti i punti dell'asse di simmetria di tale segmento (geometricamente lo si verifica in modo agevole).
- Le frecce indicano la taratura del luogo al crescere di  $|p|$ .



## Un semplice esempio (3): luogo inverso

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = 2k 180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Gli unici punti del piano appartenenti al luogo inverso sono quelli delle due semirette uscenti dai poli, sull'asse reale (anche in questo caso esiste una facile verifica geometrica).
- Le frecce indicano la taratura del luogo al crescere di  $|\rho|$ .



## Un semplice esempio (4): verifica

- Partendo dalla  $1 + L(s) = 0$

si ottiene  $s^2 + 4s + (3 + \rho) = 0$

che ha per soluzioni  $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{1 - \rho}$

- Al variare di  $\rho$  in  $\mathbb{R}$  si ottengono i comportamenti descritti.

Il tracciamento di un luogo delle radici in generale non segue questa modalità.

Delle semplici regole permettono di tracciare il luogo in maniera qualitativa.

# **Il luogo delle radici**

## **Regole di tracciamento**

## Regole di tracciamento

- **Regola 1:** il luogo è costituito da  $2n$  rami:  $n$  rami costituiscono il luogo diretto,  $n$  il luogo inverso [dove  $n$  è il grado del polinomio a denominatore in  $L(s)$ ].

$$L(s) = \rho \frac{N(s)}{D(s)}$$

Diagram illustrating the degrees of the numerator and denominator polynomials in the transfer function  $L(s)$ . The numerator  $N(s)$  is circled in orange and labeled "grado  $m$ ". The denominator  $D(s)$  is also circled in orange and labeled "grado  $n$ ".

$$1 + L(s) = 0$$

$$\Rightarrow D(s) + \rho N(s) = 0$$

Equazione polinomiale di grado  $n$ :  
 ammette  $n$  radici, che variano con  
 continuità al variare di  $\rho$ .

- **Regola 2:** Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale

$$D(s) + \rho N(s) = 0$$

L'equazione del luogo ha coefficienti reali: le sue radici sono reali oppure complesse coniugate.

- **Regola 3:** i rami “partono” dai poli di  $L(s)$

$$D(s) + \rho N(s) = 0 \quad \xRightarrow{|\rho| \rightarrow 0} \quad D(s) = 0$$

- **Regola 4:** per  $|\rho| \rightarrow \infty$   $m$  rami “tendono” agli zeri di  $L(s)$ , gli altri  $(n-m)$  rami tendono all’infinito

$$D(s) + \rho N(s) = 0 \quad \xRightarrow{|\rho| \rightarrow \infty} \quad N(s) = 0$$

grado  $m$

L’equazione degenera: possiede soltanto  $m$  radici al finito, coincidenti con gli zeri di  $L(s)$ .

- **Regola 5:** i rami che tendono all'infinito lo fanno lungo asintoti che intersecano l'asse reale in punti (**centroidi**) di ascissa

$$x_{\infty} = \frac{1}{n - m} \left( \sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i \right)$$

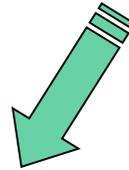
e formano con l'asse reale angoli dati da

$$\vartheta_{\infty} = \begin{cases} \frac{(2k + 1) 180^{\circ}}{n - m}, & k = 1, 2, \dots, n - m - 1, \quad \rho > 0 \\ \frac{2k 180^{\circ}}{n - m}, & k = 1, 2, \dots, n - m - 1, \quad \rho < 0 \end{cases}$$

## Giustificazione della regola (5)

- Nel caso in cui sia  $|p_i|$  che  $|s_i|$  siano molto grandi è lecito scrivere

$$1 + \rho \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \rho \frac{s^m + s^{m-1} \sum_{j=1}^m z_j + \dots}{s^n + s^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i + \dots} = 0$$



Dividendo il polinomio a denominatore per il numeratore e rielaborando ...

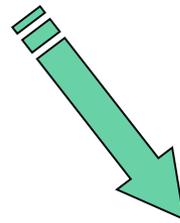
$$\frac{1}{s^{n-m} + s^{n-m-1} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) + \dots} = -\frac{1}{\rho}$$

- Per  $|\rho|$  ed  $|\sigma|$  molto grandi [muovendosi lungo uno degli asintoti] è lecito affermare che i termini di grado inferiore ad  $(n-m-1)$  nell'espressione appena trovata non influiscano sugli asintoti. L'andamento asintotico del luogo sarà allora equivalente a quello descritto dalla

$$\frac{1}{\left[ s + \frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) \right]^{n-m}} = -\frac{1}{\rho}$$

che possiede i medesimi coefficienti per i termini  $s^{n-m}$  e  $s^{n-m-1}$

$$\frac{1}{\left[ s + \frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) \right]^{n-m}} = -\frac{1}{\rho}$$



$$(s - x_{\infty})^{n-m} = -\rho$$

Ascissa del centroide  
degli asintoti

$$x_{\infty} = \frac{1}{n-m} \left( \sum_{j=1}^m z_j - \sum_{i=1}^n p_i \right)$$

$$(s - x_\infty)^{n-m} = -\rho$$

$$s - x_\infty \triangleq \eta e^{j\vartheta_\infty}$$



$$\eta^{n-m} e^{j(n-m)\vartheta_\infty} = -\rho$$



$$\eta = \sqrt[n-m]{|\rho|}$$

Inclinazione degli asintoti

rispetto all'asse reale

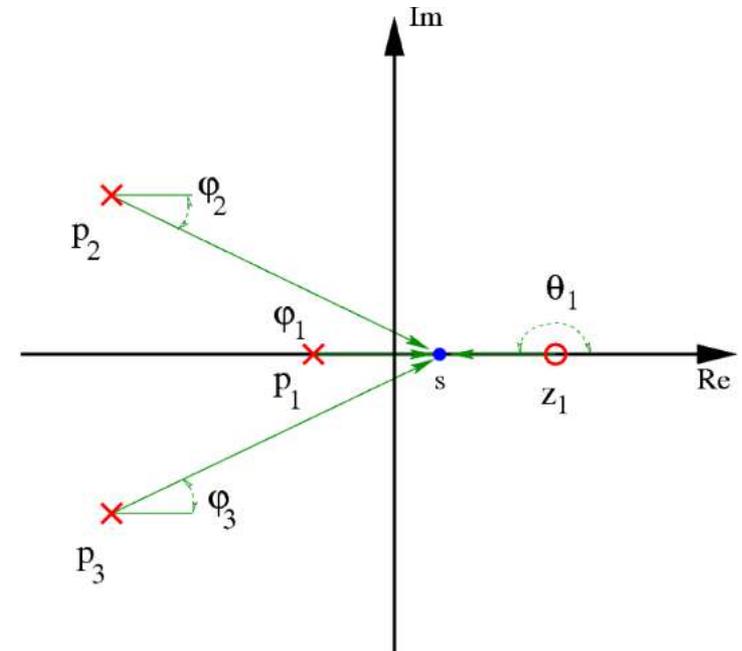
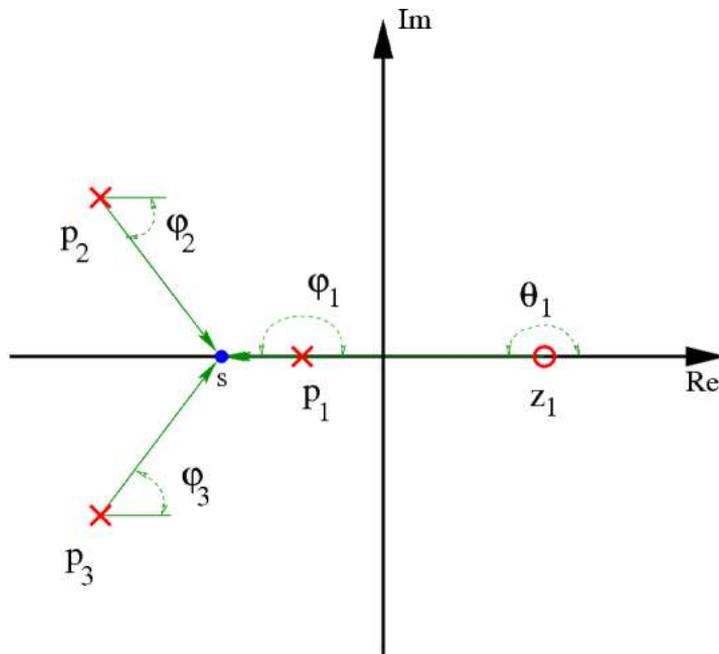
$$\vartheta_\infty = \begin{cases} \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, & k = 1, 2, \dots, n-m-1, \quad \rho > 0 \\ \frac{2k180^\circ}{n-m}, & k = 1, 2, \dots, n-m-1, \quad \rho < 0 \end{cases}$$

## Regole di tracciamento (continua...)

- **Regola 6:** tutti i punti dell' **asse reale**, esclusi i punti di singolarità di  $L(s)$ , appartengono al luogo (dalla Regola 2)
- **Regola 7:** appartengono al **luogo diretto** tutti i punti dell' asse reale che “lasciano” alla loro destra un numero **dispari** di singolarità di  $L(s)$
- **Regola 8:** appartengono al **luogo inverso** tutti i punti dell' asse reale che “lasciano” alla loro destra un numero **pari** di singolarità di  $L(s)$

# Giustificazione delle regole 7 ed 8

- Una coppia di zeri o poli complessi coniugati fornisce sempre un contributo di fase nullo o multiplo di  $360^\circ$ , una singolarità reale dà sempre un contributo di  $\pm 180^\circ$  (zero/polo) se è situata a destra del punto dell'asse reale considerato, un contributo nullo altrimenti.



## Regole di tracciamento (continua...)

- **Regola 9:** angoli d'uscita dai poli.

– Poli tutti distinti

polo in  $-p_k$

$$\varphi_k = \begin{cases} \sum_j \vartheta_j - \sum_{i \neq k} \varphi_i + (2\lambda + 1) 180^\circ & \rho > 0, \lambda \in \mathbb{Z} \\ \sum_j \vartheta_j - \sum_{i \neq k} \varphi_i + 2\lambda 180^\circ & \rho < 0, \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-p_k + z_j)$$

$$\varphi_i = \angle(-p_k + p_i), \quad i \neq k$$

- **Regola 9:** angoli d'uscita dai poli.

- Poli multipli: polo in  $-p_k$  con molteplicità  $h_k$

$$\varphi_k = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \left[ \sum_j \vartheta_j - \sum_{i \neq k} \varphi_i + (2\lambda + 1) 180^\circ \right], & \lambda = 0, 1, \dots, h_k - 1 \quad \rho > 0 \\ \frac{1}{h_k} \left[ \sum_j \vartheta_j - \sum_{i \neq k} \varphi_i + 2\lambda 180^\circ \right], & \lambda = 0, 1, \dots, h_k - 1 \quad \rho < 0 \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-p_k + z_j)$$

$$\varphi_i = \angle(-p_k + p_i), \quad i \neq k$$

- **Regola 10:** angoli d'arrivo agli zeri

- Zeri tutti distinti

zero in  $-z_k$

$$\vartheta_k = \begin{cases} -\sum_{j \neq k} \vartheta_j + \sum_i \varphi_i + (2\lambda + 1) 180^\circ & \rho > 0, \lambda \in \mathbb{Z} \\ -\sum_{j \neq k} \vartheta_j + \sum_i \varphi_i + 2\lambda 180^\circ & \rho < 0, \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-z_k + z_j), \quad j \neq k$$

$$\varphi_i = \angle(-z_k + p_i)$$

- **Regola 10:** angoli d'arrivo agli zeri

- Zeri multipli: zero in  $-z_k$  con molteplicità  $h_k$

$$\varphi_k = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \left[ -\sum_{j \neq k} \vartheta_j + \sum_i \varphi_i + (2\lambda + 1) 180^\circ \right], & \lambda = 0, 1, \dots, h_k - 1 \quad \rho > 0 \\ \frac{1}{h_k} \left[ -\sum_{j \neq k} \vartheta_j + \sum_i \varphi_i + 2\lambda 180^\circ \right], & \lambda = 0, 1, \dots, h_k - 1 \quad \rho < 0 \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-z_k + z_j), \quad j \neq k$$

$$\varphi_i = \angle(-z_k + p_i)$$

# Giustificazione

- È sufficiente applicare la relazione che definisce il luogo delle radici in un intorno dello zero o polo considerato

$$\angle N(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k + 1) 180^\circ & , \rho > 0 & , k \in \mathbb{Z} & \mathbf{LD} \\ 2k 180^\circ & , \rho < 0 & , k \in \mathbb{Z} & \mathbf{LI} \end{cases}$$

# Esempio: tracciamento qualitativo di un luogo delle radici

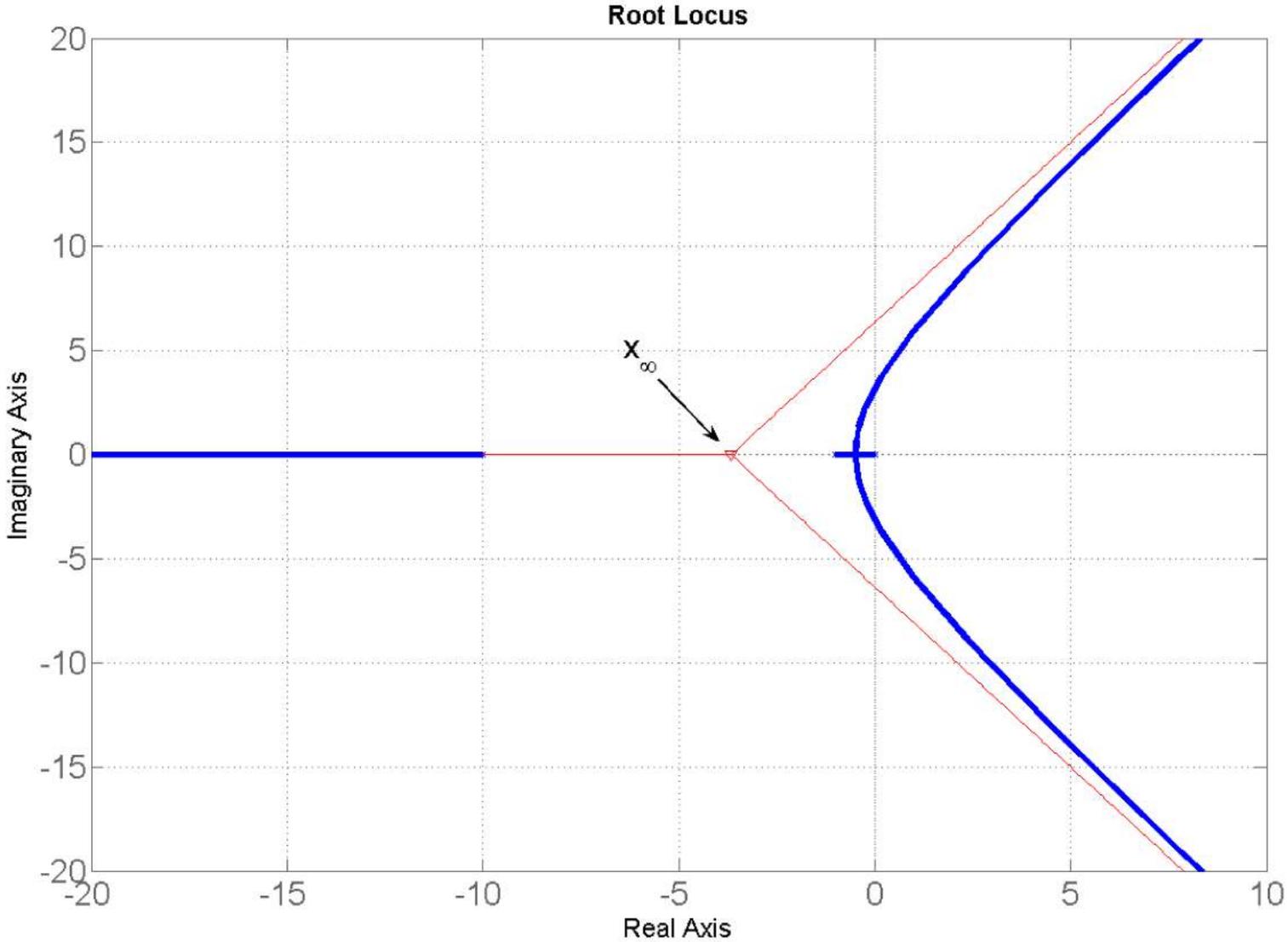
- $L(s) = \rho \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$

- Asintoti  $\vartheta_{\infty} = (2k+1) \cdot 60^{\circ}, \quad k = 0, 1, 2$

- Centroide  $x_{\infty} = \frac{-1-10}{3} = -\frac{11}{3}$

**LUOGO DIRETTO**

- Angoli d'uscita dai poli  $\varphi_0 = 180^{\circ}, \quad \varphi_{-1} = 0^{\circ}$   
 $\varphi_{-10} = 180^{\circ}$



# Esempio:

## tracciamento qualitativo di un luogo delle radici

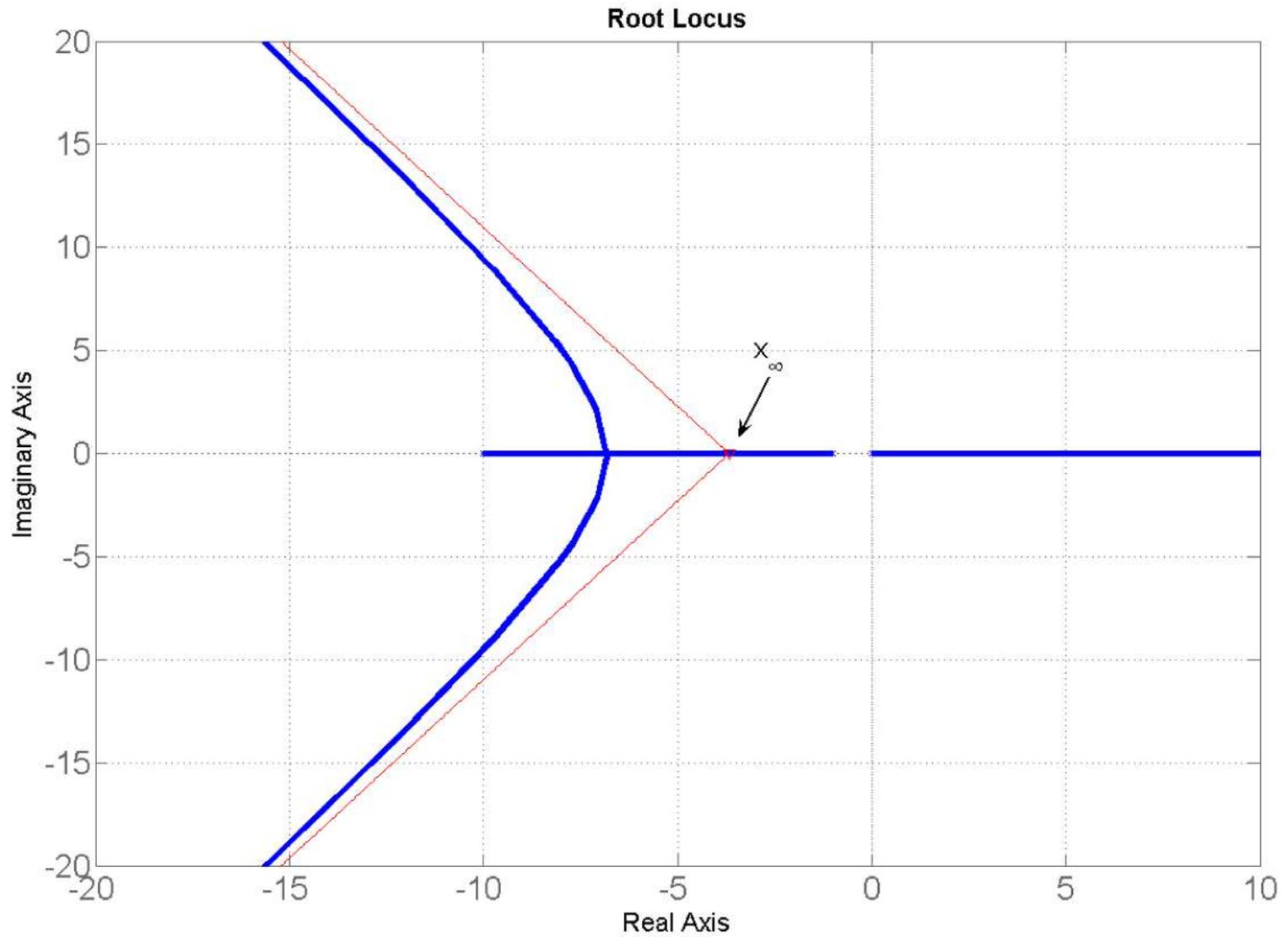
- $$L(s) = \rho \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

- Asintoti  $\vartheta_{\infty} = 2k \cdot 60^{\circ}, \quad k = 0, 1, 2$

- Centroide  $x_{\infty} = \frac{-1 - 10}{3} = -\frac{11}{3}$

**LUOGO INVERSO**

- Angoli d'uscita dai poli  $\varphi_0 = 0^{\circ}, \quad \varphi_{-1} = 180^{\circ}$   
 $\varphi_{-10} = 0^{\circ}$

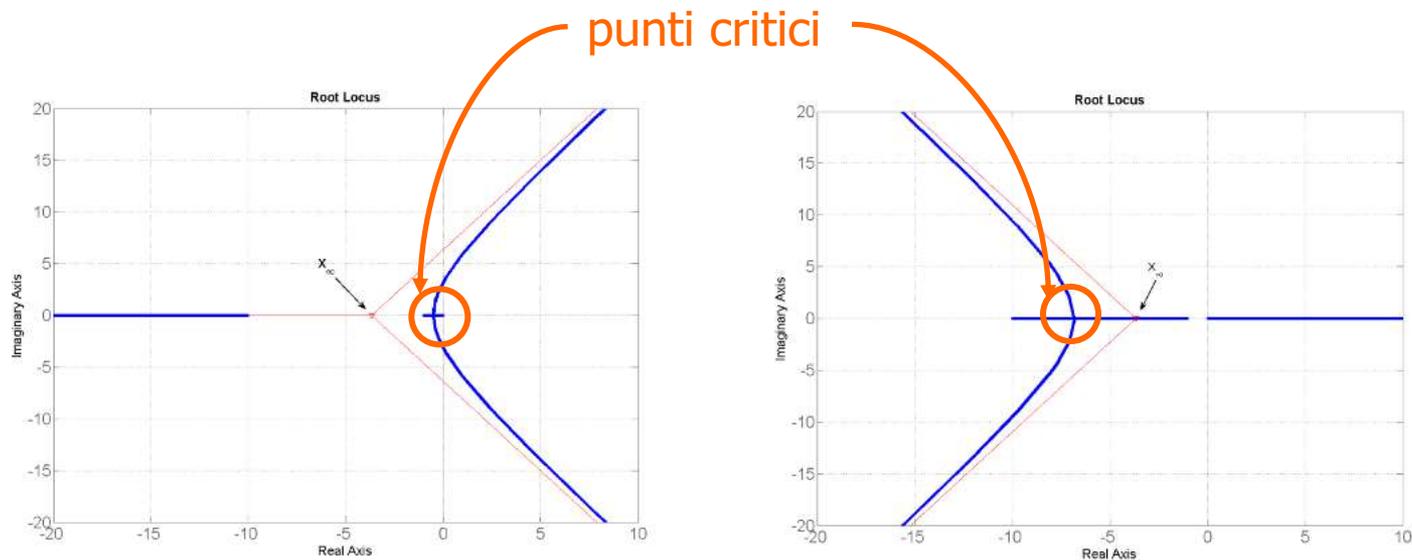


# **Luogo delle radici**

**Le proprietà differenziali**  
**La derivata logaritmica**

# Regole di tracciamento (continua...)

- Osservazione:** i diversi rami del luogo possono incrociarsi in punti particolari del piano complesso [si veda l'esempio precedente]. I punti d'incrocio hanno proprietà caratteristiche per la fdt  $L(s)$  [sono punti di stazionarietà sia per il modulo che per la fase] e vengono detti **punti critici**.



- **Definizione:** si dice **punto critico** di molteplicità  $h$  un punto del piano complesso  $s_c$  per il quale oltre a valere la

$$1 + \bar{\rho}T(s_c) = 0$$

per un opportuno valore di  $\rho$  (quindi è un punto del luogo delle radici) valgono le seguenti

$$\frac{dT(s_c)}{ds} = \frac{d^2 T(s_c)}{ds^2} = \dots = \frac{d^h T(s_c)}{ds^h} = 0$$

- In base alla definizione, per **determinare i punti critici** è necessario risolvere l'equazione

$$\frac{dT(s)}{ds} = 0$$

- **Osservazione:** un **punto critico di molteplicità  $h$**  può venire definito anche come punto multiplo (radice multipla) del luogo delle radici oggetto di studio, in particolare come **radice multipla di molteplicità  $h+1$**  per il luogo.

- **Regola 11:** un **punto critico di molteplicità  $h$**  corrisponde ad un punto comune a  **$2(h+1)$  rami del luogo** delle radici.
  
- **Regola 12:** le tangenti ai rami del luogo che si incrociano nel punto critico formano tra loro angoli di ampiezza

$$\frac{180^\circ}{h+1}$$

Orientando i rami nel verso di  $|\rho|$  crescente, essi risultano alternativamente “entranti” nel punto critico ed “uscenti” da esso.

# Giustificazione

- Sia  $s_c$  un punto critico di molteplicità  $h$  per il luogo delle radici per un opportuno valore del parametro  $\rho$

$$1 + \bar{\rho}T(s_c) = 0$$

- Si supponga di far **variare di poco** il valore del parametro  $\rho$  nell'intorno del valore corrispondente al punto critico, in modo da esplorare il luogo delle radici in un intorno opportuno del punto critico stesso.

- Sia allora  $\hat{\rho} = \bar{\rho} + \epsilon$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$
- L'equazione del luogo avrà soluzione in qualche punto non distante dal punto critico

$$1 + \hat{\rho}T(s_c + \delta) = 0, \quad \delta \in \mathbb{R}$$

con

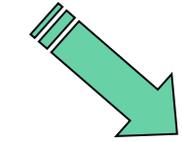
$$\angle T(s_c + \delta) = \angle T(s_c) = \phi = \begin{cases} (2k + 1) 180^\circ & \text{(LD)} \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2k 180^\circ & \text{(LI)} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$T(s_c + \delta) \approx T(s_c) + \frac{\delta^{h+1}}{(h+1)!} \left. \frac{d^{h+1} T(s)}{ds^{h+1}} \right|_{s=s_c} + \dots$$

$$\hat{\rho} = \bar{\rho} + \epsilon$$

$$1 + \hat{\rho} T(s_c + \delta) = 0$$

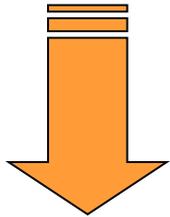
$$\underbrace{1 + \bar{\rho} T(s_c)}_{= 0} + \epsilon T(s_c) + (\bar{\rho} + \epsilon) \frac{\delta^{h+1}}{(h+1)!} T^{(h+1)}(s_c) = 0$$



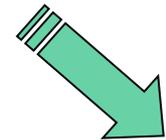
$$\delta^{h+1} = -(h+1)! \frac{\epsilon}{\bar{\rho} + \epsilon} \frac{T(s_c)}{T^{(h+1)}(s_c)}$$



$$\delta = \sqrt[h+1]{-(h+1)! \frac{\epsilon}{\bar{\rho} + \epsilon} \frac{T(s_c)}{T^{(h+1)}(s_c)}}$$


 $\alpha_0$ 

$$\angle \delta = \frac{1}{h+1} \left[ \underbrace{\angle T(s_c) - \angle T^{(h+1)}(s_c)}_{\phi} + \angle \left( -\frac{\epsilon}{\bar{\rho} + \epsilon} \right) \right]$$



$$\angle \delta = \frac{1}{h+1} \alpha_0 + \begin{cases} (2k+1) \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ 2k \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots, h \\ \text{(LD)} \quad \bar{\rho}, \hat{\rho} > 0 \end{matrix}$$

$$\angle \delta = \frac{1}{h+1} \alpha_0 + \begin{cases} 2k \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ (2k+1) \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots, h \\ \text{(LI)} \quad \bar{\rho}, \hat{\rho} < 0 \end{matrix}$$

- Analizziamo il risultato per il **luogo diretto LD**

$$\angle \delta = \frac{1}{h+1} \alpha_0 + \begin{cases} (2k+1) \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ 2k \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots, h \\ \text{(LD)} \quad \bar{\rho}, \hat{\rho} > 0 \end{matrix}$$

- I rami del luogo formano tra loro angoli pari a  $\frac{180^\circ}{h+1}$
- Ci sono  **$2(h+1)$**  rami del luogo che passano per il punto critico

- I rami alternativamente “entrano” ed “escono” dal punto critico, se li si tara nel verso di  $|\rho|$  crescente

$$\angle \delta = \frac{1}{h+1} \alpha_0 + \begin{cases} (2k+1) \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ 2k \frac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \dots, h \\ \text{(LD)} \quad \bar{\rho}, \hat{\rho} > 0 \end{matrix}$$

infatti per  $\epsilon > 0$   $|\rho|$  cresce, mentre per  $\epsilon < 0$   $|\rho|$  decresce sul luogo LD ed i rami a  $|\rho|$  crescente si alternano a quelli con  $|\rho|$  decrescente.

- A risultati analoghi si arriva analizzando il risultato ottenuto per il luogo inverso LI.

## Regole di tracciamento (continua...)

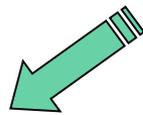
- **Osservazione:** in corrispondenza di **punti critici semplici reali** il luogo delle radici presenta il seguente comportamento:
  - **Due rami** del luogo confluiscono verso il punto critico stando sull'**asse reale** e da esso divergono **altri due rami** con **direzione ortogonale all'asse reale**, interessando quindi punti complessi del piano.
- La conoscenza dei punti critici è importante, in particolare perchè i punti critici reali individuano i punti in cui il luogo “abbandona” l'asse reale e di conseguenza individuano i valori del parametro  $\rho$  che fanno diventare complessi coniugati parte dei poli di ciclo chiuso del sistema.

# Esempio: tracciamento qualitativo di un luogo delle radici

- Determinare i punti critici del luogo delle radici di

$$L(s) = \rho \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

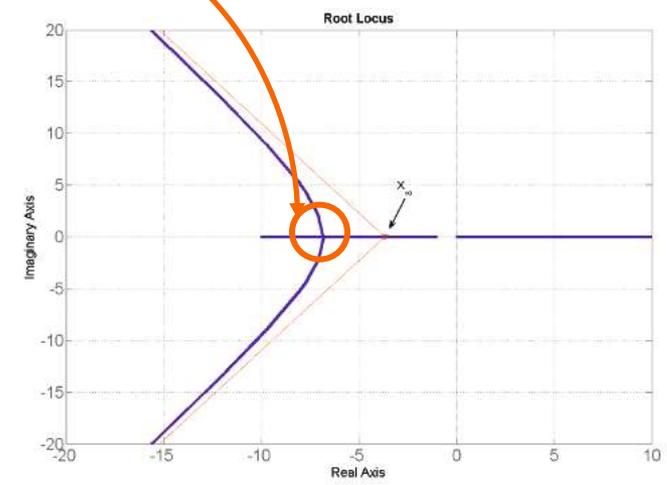
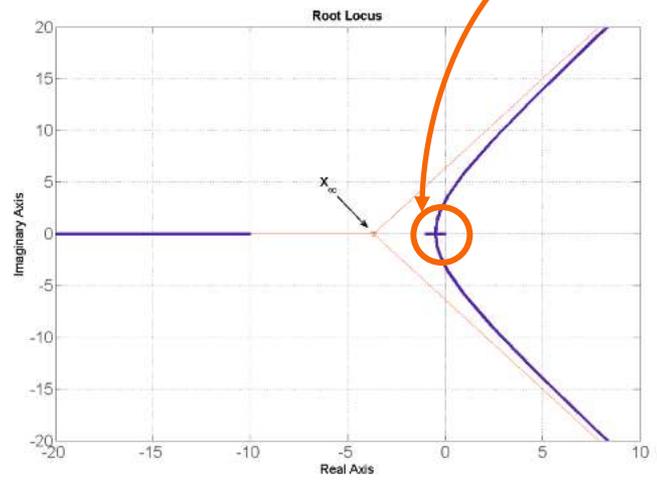
– Si tratta di risolvere la  $\frac{dT(s)}{ds} = 0$



$$3s^2 + 22s + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \begin{cases} \frac{-11 - \sqrt{91}}{3} \\ \frac{-11 + \sqrt{91}}{3} \end{cases}$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} \frac{-11 - \sqrt{91}}{3} \\ \frac{-11 + \sqrt{91}}{3} \end{cases}$$

punti critici



# Proprietà differenziali

- Al momento abbiamo gli strumenti per determinare
  - L' inclinazione delle tangenti al luogo in corrispondenza delle singolarità (zeri e poli);
  - I punti critici del luogo;
  - L' inclinazione dei rami del luogo in corrispondenza dei punti critici.
- Inoltre abbiamo gli strumenti per determinare le proprietà asintotiche del luogo, quali l' inclinazione degli asintoti e la posizione del centroide.

- **Ma**
  - la determinazione dei punti critici può non essere agevole;
  - la determinazione dell'inclinazione del luogo in corrispondenza di un punto critico almeno doppio (oppure semplice ma non reale) è ancor più disagiata;
- Vedremo **come** poter **determinare i punti critici** in maniera abbastanza agevole facendo uso di una particolare funzione (la cosiddetta *derivata logaritmica* ), ma tralasciamo l'analisi del secondo problema esposto (anch'esso potrebbe essere risolto agevolmente facendo uso della derivata logaritmica comunque).

# Introduzione alla derivata logaritmica

- Per poter determinare le proprietà differenziali in un punto qualsiasi del luogo dovremmo affidarci allo sviluppo in serie della fdt  $F(s)$  nell'intorno del punto scelto.
- Motivi di convenienza formale suggeriscono di analizzare lo sviluppo in serie del logaritmo naturale di  $F(s)$ , sfruttando il fatto che

$$T(s) = M(s) e^{j\phi(s)} \quad \Rightarrow \quad \Im \{ \ln T(s) \} = \phi(s)$$

## La derivata logaritmica

- **Definizione:** 
$$Q(s) \triangleq \frac{d \ln T(s)}{ds} = \frac{T'(s)}{T(s)}$$

- Definizioni operative:

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \frac{N'(s)}{N(s)} - \frac{D'(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{\prod_j (s + z_j)}{\prod_i (s + p_i)} \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s + z_j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s + p_i}$$

# Applicazione: determinazione dei punti critici

$$\frac{dT(s)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \frac{T'(s)}{T(s)} = 0$$

$$T(s) = \frac{\prod_j (s + z_j)}{\prod_i (s + p_i)}$$

$$Q(s) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{s + z_j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s + p_i} = 0$$

**Osservazione:** l'espressione trovata è molto utile se la  $T(s)$  viene espressa in forma fattorizzata, ma se così non è?

$$\frac{dT(s)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(s) = \frac{T'(s)}{T(s)} = 0$$

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$Q(s) = \frac{N'(s)}{N(s)} - \frac{D'(s)}{D(s)} = 0$$

# Esempio

- Determinare i punti critici del luogo delle radici di

$$L(s) = \rho \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$


$$-\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+10} = 0$$


$$3s^2 + 22s + 10 = 0$$

# Appendice

## Tecniche particolari per il tracciamento di luoghi delle radici

# Richiami: sviluppi in serie di una funzione razionale fratta di variabile complessa

- Consideriamo una funzione razionale fratta di variabile complessa

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{con } m \leq n \quad s \in \mathbb{C}$$

- Essa risulta infinitamente derivabile e sviluppabile in serie di potenze.
- Ci interessano
  - lo sviluppo nell'intorno di uno zero
  - lo sviluppo nell'intorno di un polo
  - lo sviluppo in serie asintotico (nell'intorno del “punto all'infinito”)

# Sviluppo in serie di Taylor

- Se  $-z_k$  è un punto in cui la  $G(s)$  è regolare [quindi anche uno zero di  $G(s)$ ]

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s + z_k)^n$$

$$c_n = \frac{1}{n!} G^{(n)}(s) \Big|_{s=-z_k}$$

# Sviluppo in serie di Laurent

- Se  $-p_k$  è un polo di  $G(s)$ , di molteplicità  $h_k$  allora lo sviluppo in serie nell'intorno di  $-p_k$  è dato da

$$G(s) = \underbrace{\sum_{n \geq 0} c_n (s + p_k)^n}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{\frac{\hat{c}_1}{s + p_k} + \frac{\hat{c}_2}{(s + p_k)^2} + \dots + \frac{\hat{c}_{h_k}}{(s + p_k)^{h_k}}}_{\text{parte principale}}$$

parte regolare

parte principale

$$\hat{c}_j = \frac{1}{(h_k - j)!} \lim_{s \rightarrow -p_k} \frac{d^{(h_k - j)}}{d s^{(h_k - j)}} \left[ G(s) (s + p_k)^{h_k} \right]$$

$$j = 1, 2 \dots h_k$$

# Sviluppo in serie asintotico

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \text{con } m \leq n \quad s \in \mathbb{C}$$

$$G(s) = \sum_{j=n-m}^{\infty} \frac{w_j}{s^j} \quad w_j = 0 \quad j = 0, 1 \dots n - m - 1$$

$$w_{n-m} = \frac{b_m}{a_n}, \quad w_{n-m+1} = \frac{b_{m-1} a_n - b_m a_{n-1}}{a_n^2}$$

$$w_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d s^j} \left[ s^{n-m} \frac{b_m + b_{m-1} s + b_{m-2} s^2 + \dots + b_0 s^m}{a_n + a_{n-1} s + a_{n-2} s^2 + \dots + a_0 s^n} \right] \Big|_{s=0}$$

# Regole di tracciamento: alcune nuove espressioni

- **Regola 5:** altra espressione per la determinazione del centroide e dell'inclinazione degli asintoti, facendo riferimento alla forma non fattorizzata della  $L(s)$

$$L(s) = \rho \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- Si ottengono

$$x_\infty = \frac{1}{n-m} \left( \frac{b_{m-1}}{b_m} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)$$

$$\vartheta_\infty = \frac{1}{n-m} \left[ \angle \left( \frac{b_m}{a_n} \right) - \phi + 2k 180^\circ \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

$$\phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

# Giustificazione

- Si considera lo sviluppo asintotico della  $T(s)$

$$T(s) = \frac{w_0}{s^{n-m}} + \frac{w_1}{s^{n-m+1}} + \dots$$

$$w_0 = \frac{b_m}{a_n}, \quad w_1 = \frac{b_{m-1} a_n - b_m a_{n-1}}{a_n^2}$$

- Si arresti lo sviluppo asintotico ai primi due termini e si consideri che un punto del luogo lungo l'asintoto possa venire espresso come

$$s = x_\infty + \lambda e^{j\vartheta_\infty}$$

$$\left. \begin{aligned} T(s) &= M(s) e^{j\phi(s)} \\ T(s) &\approx \frac{w_0}{s^{n-m}} + \frac{w_1}{s^{n-m+1}} \end{aligned} \right\} M e^{j\phi} s^{n-m+1} = w_0 s + w_1$$

$$s = x_\infty + \lambda e^{j\vartheta_\infty}$$



$$x_\infty = \frac{w_1}{(n-m)w_0} \quad \vartheta_\infty = \angle w_0$$

## Esempio

$$L(s) = \rho \frac{s^2 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 3s^2}$$



$$x_{\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1} - \frac{2}{1} \right) = 0$$

$$\vartheta_{\infty} = \frac{1}{2} \left[ \angle \left( \frac{1}{1} \right) - \phi + 2k 180^{\circ} \right] \quad k = 0, 1$$

$$\phi = \begin{cases} 180^{\circ} & \rho > 0 \\ 0^{\circ} & \rho < 0 \end{cases}$$

ritrovare gli stessi risultati applicando la regola (5) descritta nella slide #123.

# Regole di tracciamento: alcune nuove espressioni (continua...)

- **Regola 9:** angoli d'uscita dai poli.

– Poli multipli: polo in  $-p_k$  con molteplicità  $h_k$

$$T(s) = \frac{c_0}{(s + p_k)^{h_k}} + \frac{c_1}{(s + p_k)^{h_k-1}} + \dots$$

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow -p_k} T(s) (s + p_k)^{h_k}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{h_k} [\angle c_0 - \phi + 2k 180^\circ] \quad \phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

- **Regola 10:** angoli d'arrivo negli zeri.
  - Zeri multipli: zero in  $-z_k$  con molteplicità  $h_k$

$$T(s) = c_0 (s + z_k)^{h_k} + c_1 (s + z_k)^{h_k+1} + \dots$$

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow -z_k} T(s) \frac{1}{(s + z_k)^{h_k}}$$

$$\vartheta_k = \frac{1}{h_k} [\phi - \angle c_0 + 2k 180^\circ] \quad \phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

## Esempio

$$L(s) = \rho \frac{s^2 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 3s^2}$$

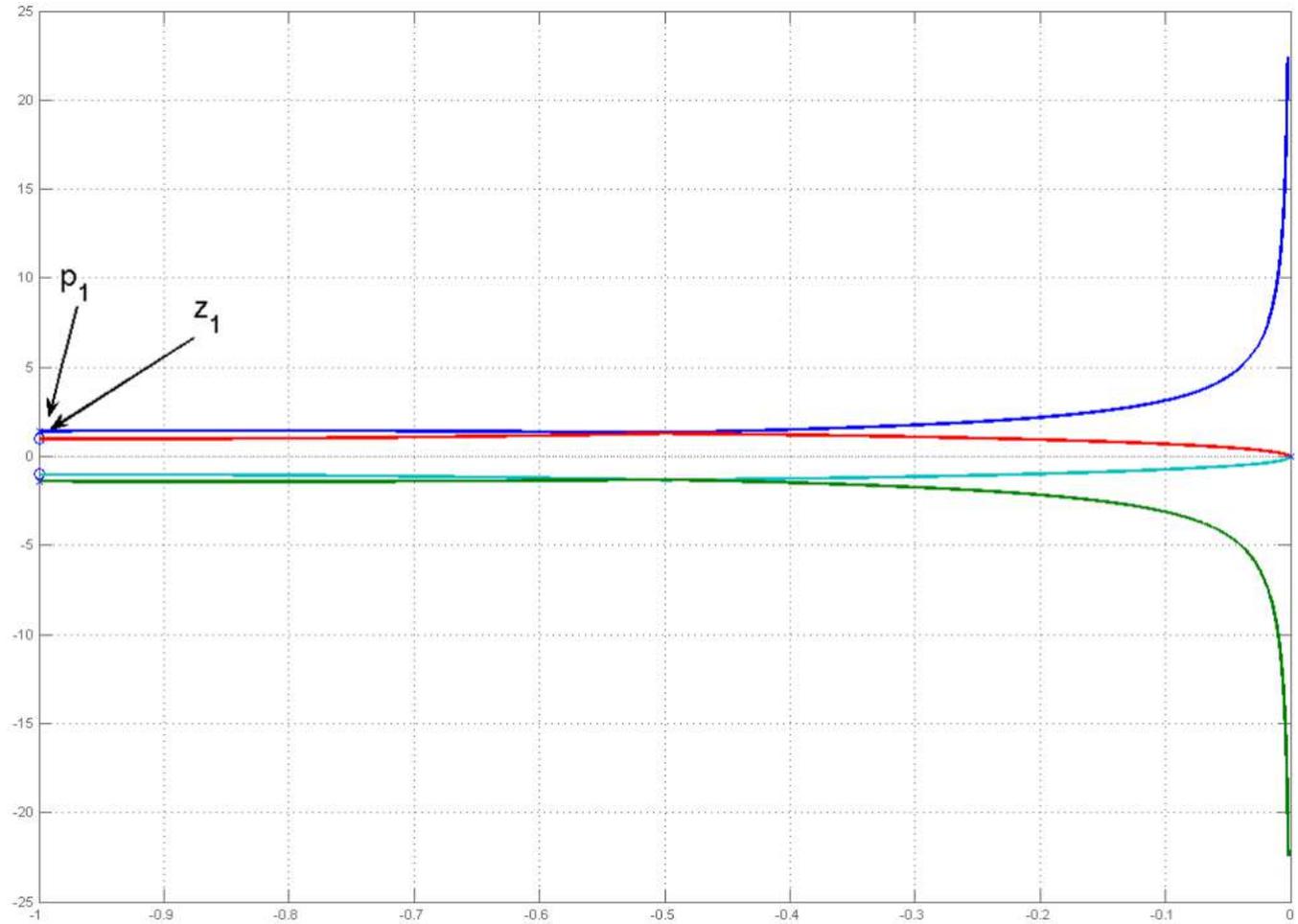
$$z_{1,2} = -1 \pm j \quad p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}, \quad p_{3,4} = 0$$

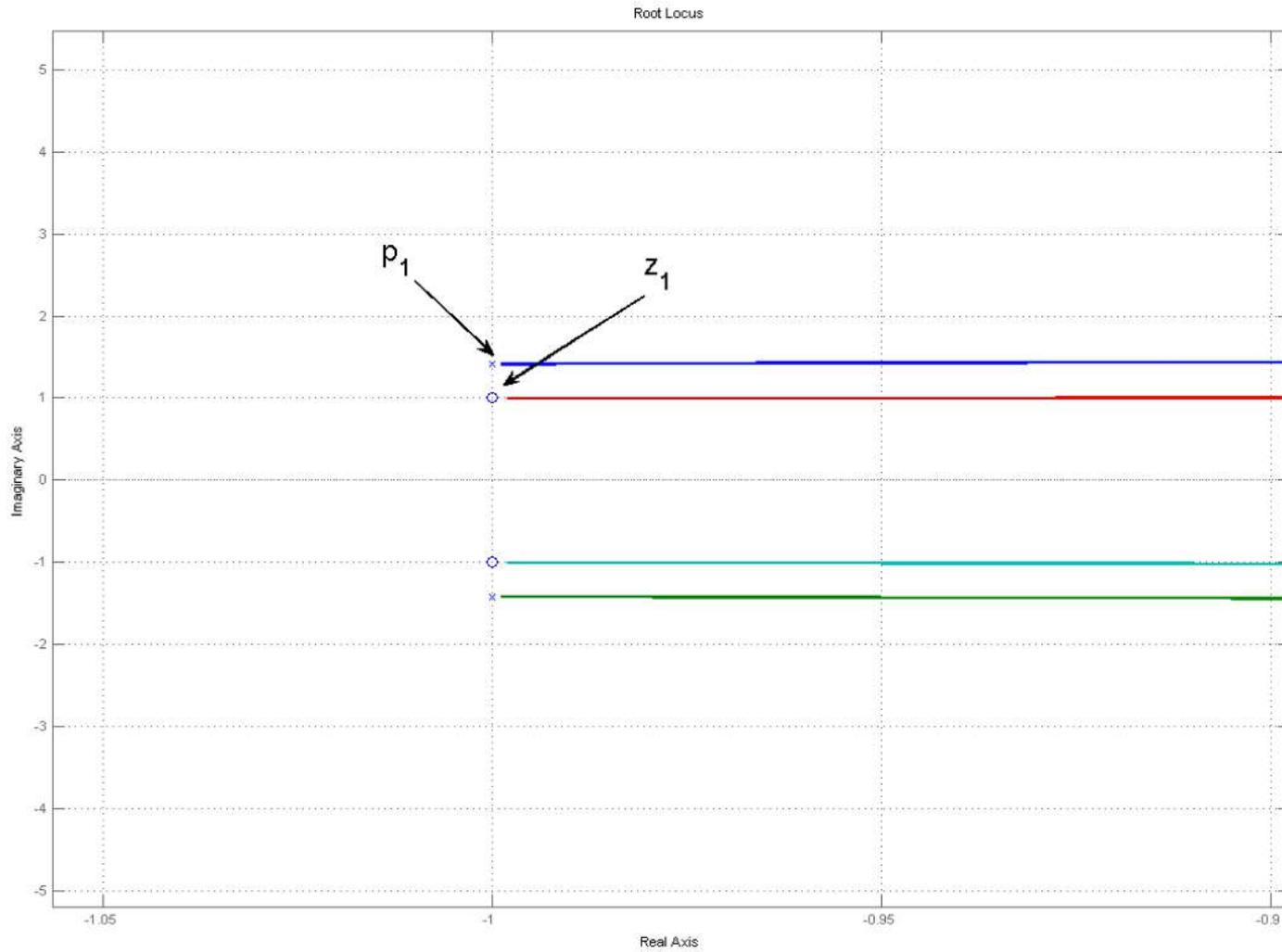
### Per il luogo LD

$$z_1 \quad \Rightarrow \quad c_0 = -1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_{z_1} = 0^\circ$$

$$p_1 \quad \Rightarrow \quad c_0 = -1 + j\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_{p_1} \approx -340^\circ 31'$$

**E per il luogo LI?**





# Utilizzo del luogo delle radici

## Analisi di prestazioni di sistemi di controllo

## Un esempio completo

- $L(s) = \rho \frac{s + 3}{s(s^2 + 2s + 2)}$
- 3 rami partono dai poli per  $|\rho| \rightarrow 0$
- Un ramo tende allo zero, per  $|\rho| \rightarrow \infty$
- Gli altri due rami tendono a 2 “zeri all’ infinito”, lungo 2 asintoti.

$$x_\infty = \frac{1}{2} \quad \vartheta_\infty = (2k + 1) 90^\circ, \quad k = 0, 1$$

- Il luogo LD contiene il tratto dell’ asse reale  $-3 \leq s \leq 0, \quad s \in \mathbb{R}$
- Punti critici:  $\frac{1}{s + 3} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1 + j} - \frac{1}{s + 1 - j} = 0$

$$2s^3 + 11s^2 + 12s + 6 = 0 \quad \implies \quad \text{no } s_c \text{ in LD}$$

- Angoli di uscita dai poli

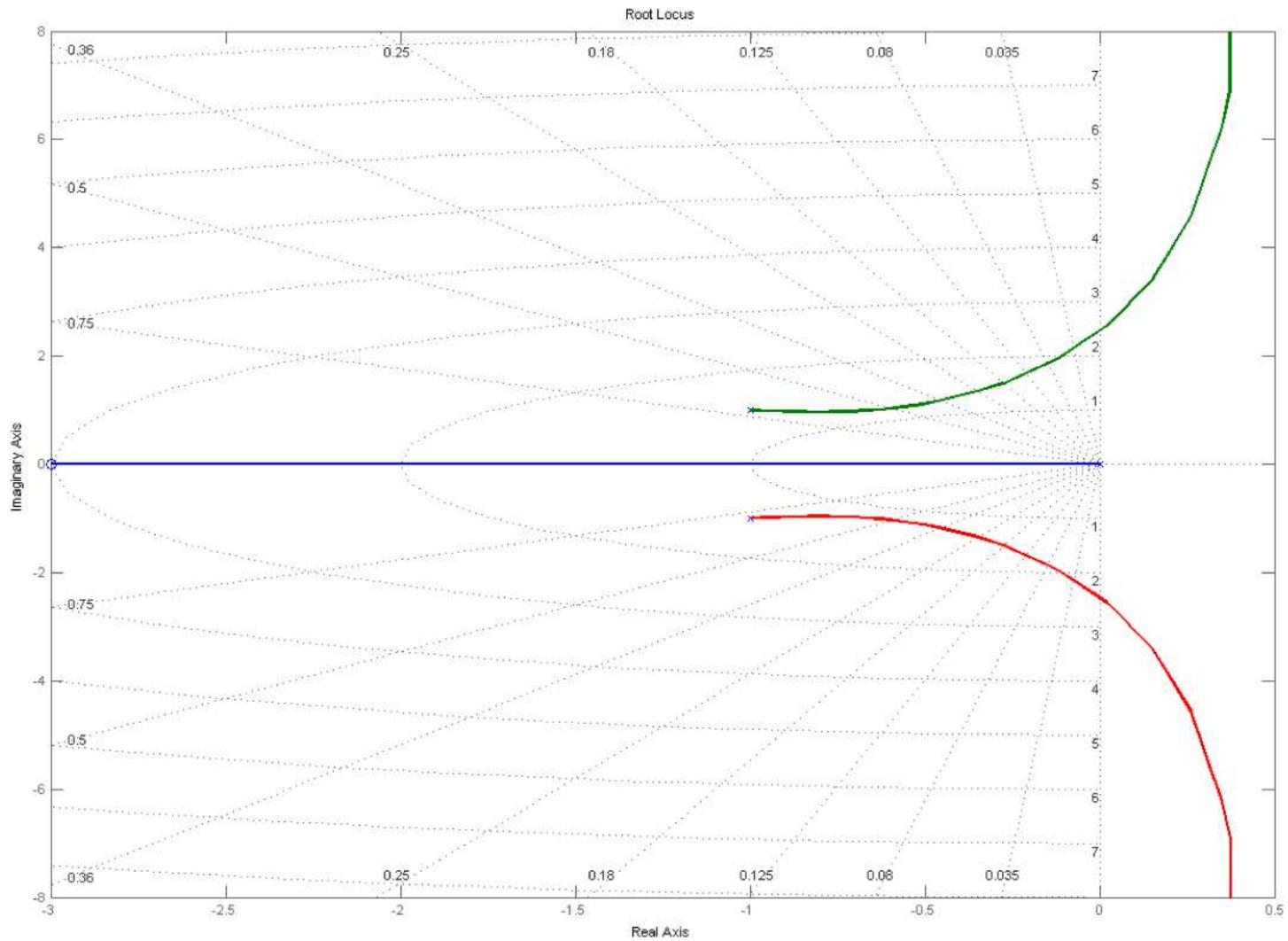
$$\varphi_0 = 180^\circ \quad \varphi_{-1+j} = \arctan 2 - 90^\circ - 135^\circ \approx -161^\circ$$

$$\varphi_{-1-j} = -\arctan 2 + 90^\circ + 135^\circ \approx 161^\circ$$

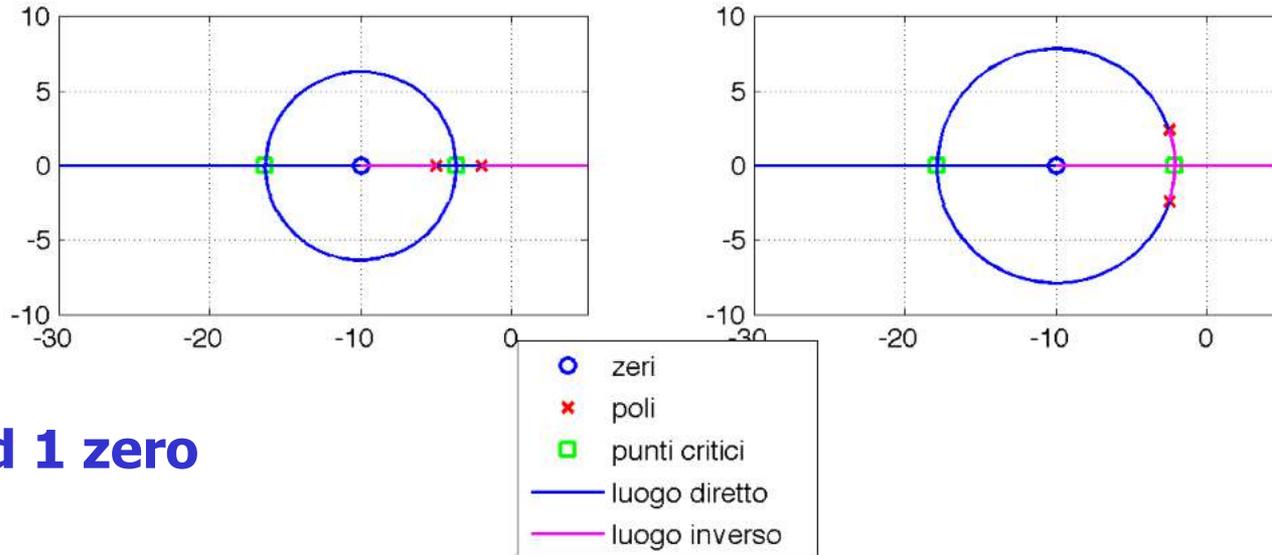
- Angolo d'arrivo allo zero  $\vartheta_1 = 0^\circ$

- Stabilità asintotica  $0 < \rho < 4$

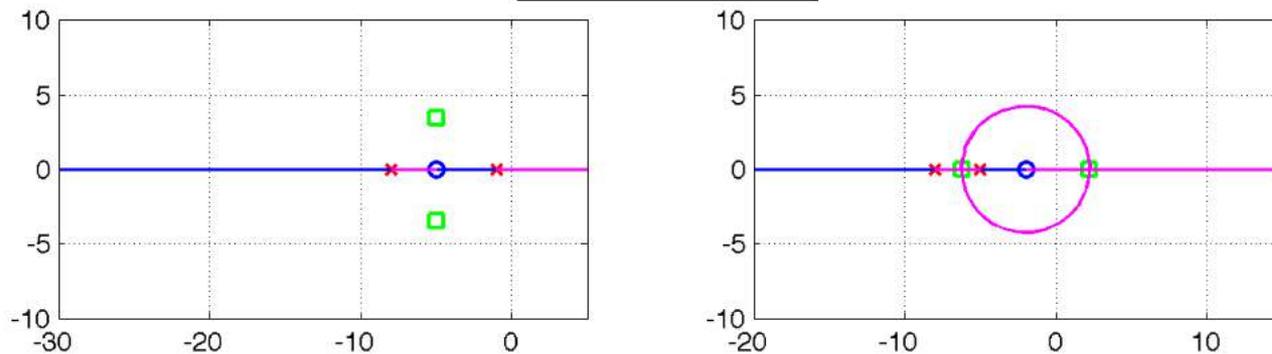
È sufficiente applicare il criterio di Routh - Hurwitz



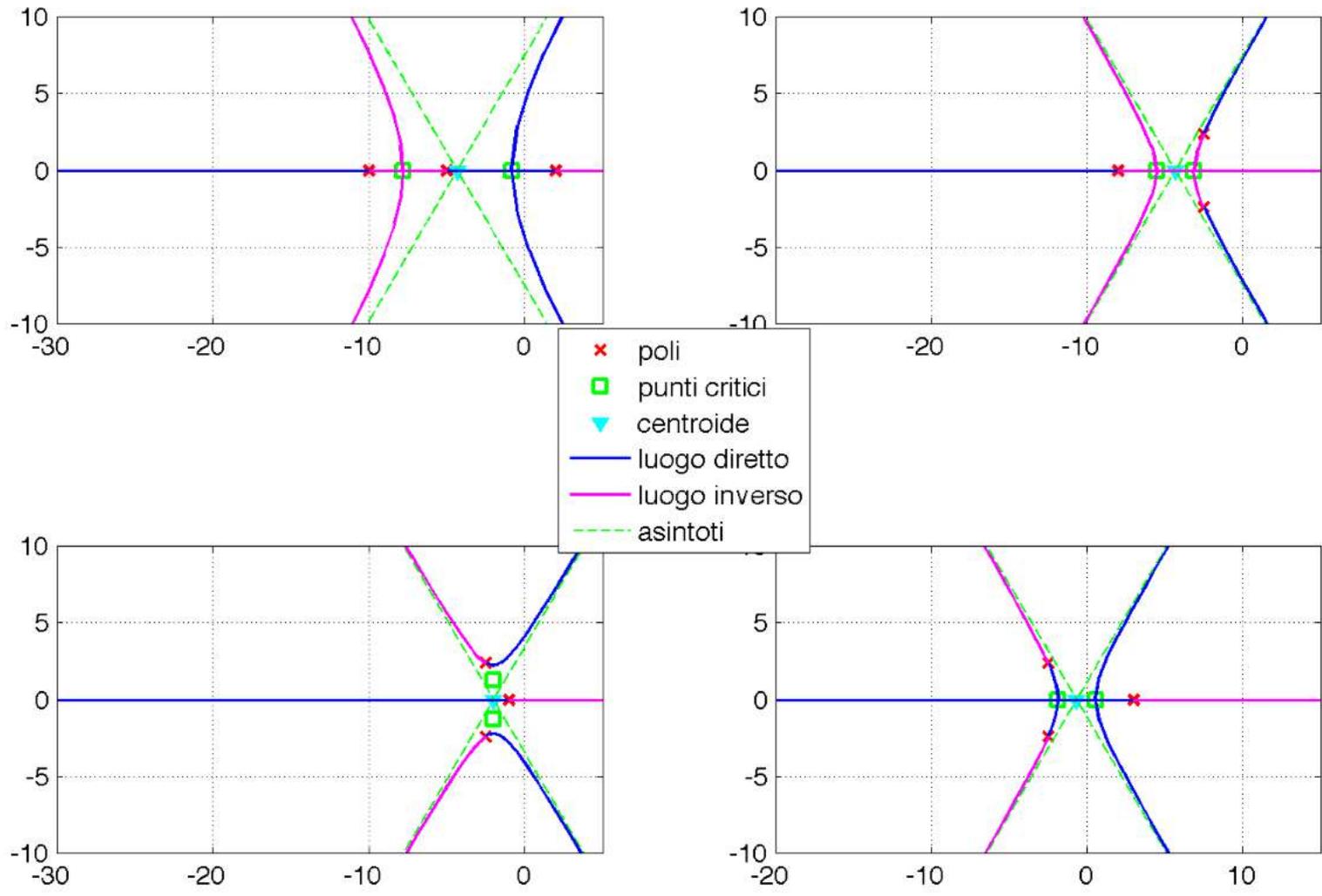
# Luoghi delle radici particolari



## 2 poli ed 1 zero



# 3 poli



# 3 poli ed 1 zero

