Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformate di Laplace

Importanza dei modelli dinamici

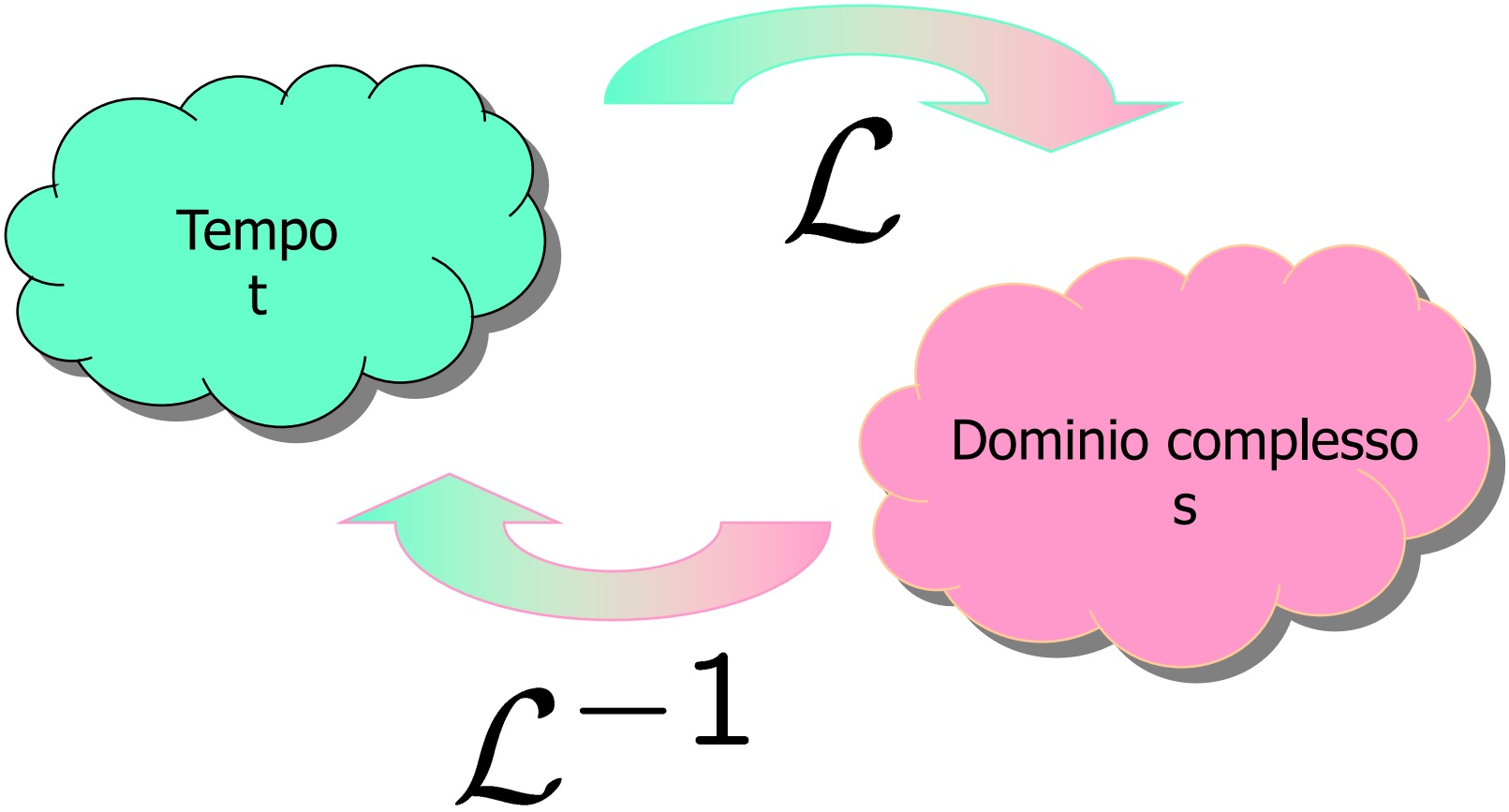


Risolvere equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti)



Metodi per risolverle ???

La trasformata di Laplace e' un OPERATORE funzionale



Definizione :

si considerano funzioni non nulle solo per $t \geq 0$
continue a tratti, senza comportamento impulsivo per t = 0
(ed altre ipotesi sempre verificate dalle funzioni considerate in questo corso)

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

$$s = \sigma + j\,\omega$$

Funzioni del tempo

Funzioni complesse

Perche' queste trasformate sono utili?



1. Hanno molte proprieta' che aiutano a risolvere le equazioni differenziali

2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate "notevoli"

Proprieta'

1. Linearita' :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale: $f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$$

$$f' \Rightarrow \frac{df}{dt}$$

$$\mathcal{L}[f''] = s \cdot \mathcal{L}[f'] - f'(0)$$

$$s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Proprieta'

3. Trasformata della derivata: $f(t),\ f'(t)$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0)$$

Derivate di ordine "n"

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n\,F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0)$$

Proprieta'

4. Traslazione in frequenza: se $k \in C$

$$\mathcal{L}[e^{kt} f(t)] = F(s-k)$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

Proprieta'

6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \; a \in R^{+}$$

7. Moltiplicazione per t^n :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] =$$

$$= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

Proprieta'

Def: integrale di convoluzione – f, g non nulle per $t \geq 0$

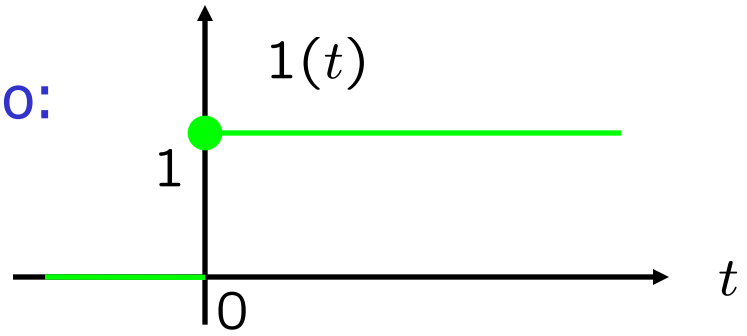
$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

Trasformate notevoli

1. Trasformata del gradino unitario:



$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t)e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$\int_0^t 1(\tau)\,d\tau = t \cdot 1(t)$$

$$\mathcal{L}\left[t \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^2}$$

$$(t-3) \cdot 1(t-3) \rightarrow e^{-3s} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$(t-3) \cdot 1(t) =$$

$$t \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t)$$

$$\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s} = \frac{1-3s}{s^2}$$

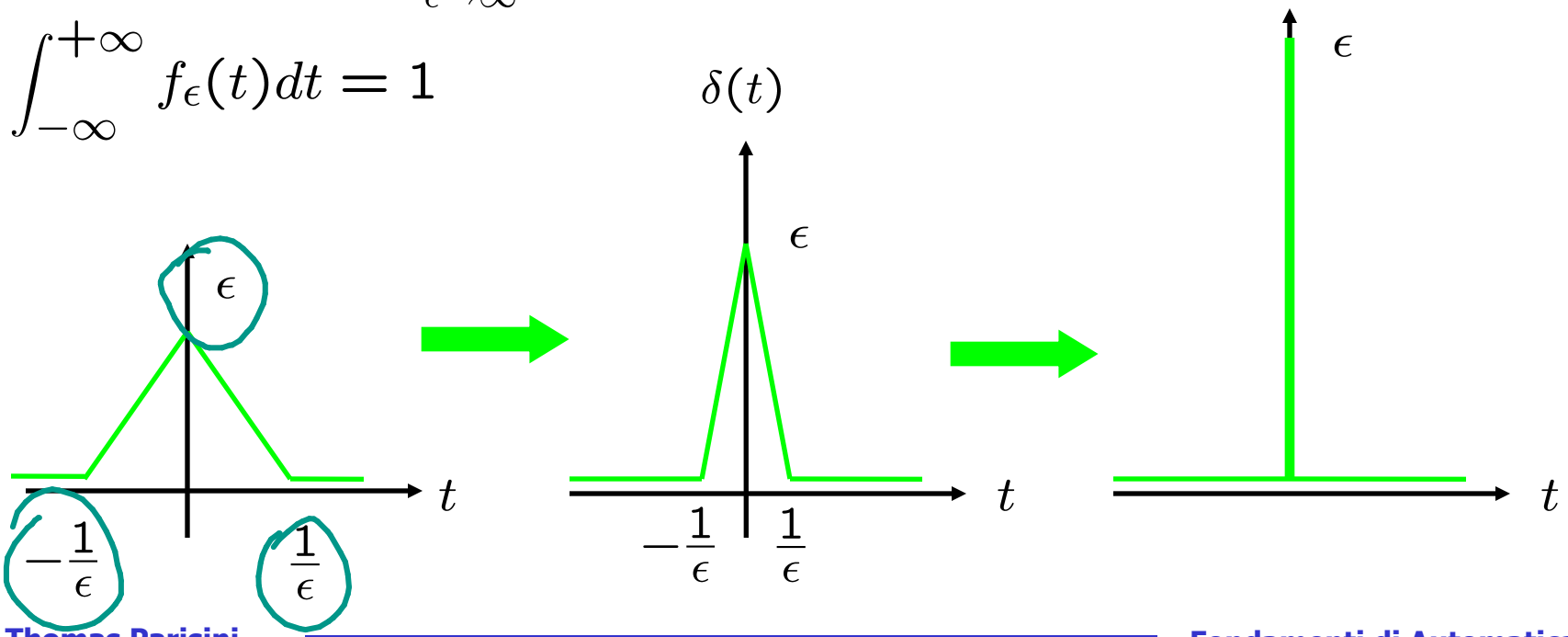
Definizione: $\delta(t)$ di Dirach

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Si puo' vedere come il $\lim_{\epsilon \to \infty} f_\epsilon(t)$ di una successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)dt = 1$$



Proprietà ed utilizzo

- integrale unitario (per definizione)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- proprietà di "estrazione" (**sifting property**)

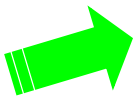
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \delta(t-T)dt \ = \ f(T)$$

- Utilizzo nello studio dei sistemi dinamici a tempo continuo:
  - condizioni iniziali;
  - comportamento ingresso/uscita del sistema (risposta all'impulso)

Trasformata di Laplace: espressione generale

- Ammettendo che la funzione abbia **comportamento impulsivo** a t = 0 (le altre condizioni su f(t) sono verificate)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$



Trasformata della derivata: espressione generale

- Ammettendo che la funzione abbia comportamento impulsivo a t= 0 (le altre condizioni su f(t) sono verificate)

Trasformata della derivata: $f(t),\ f'(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabili

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0^-)$$

Derivate di ordine ***n***

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n\,F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0^-)$$

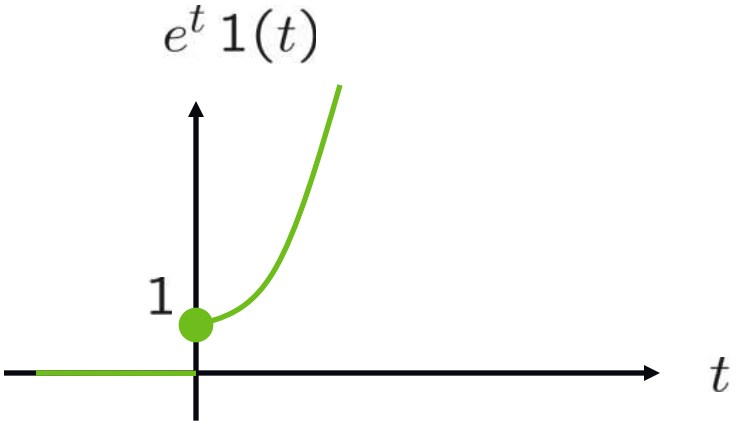
Trasformate notevoli

2. Trasformata della $\delta(t)$ di Dirach

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1$$

Trasformate notevoli

3. Trasformata dell'esponenziale $e^t\,1(t)$:

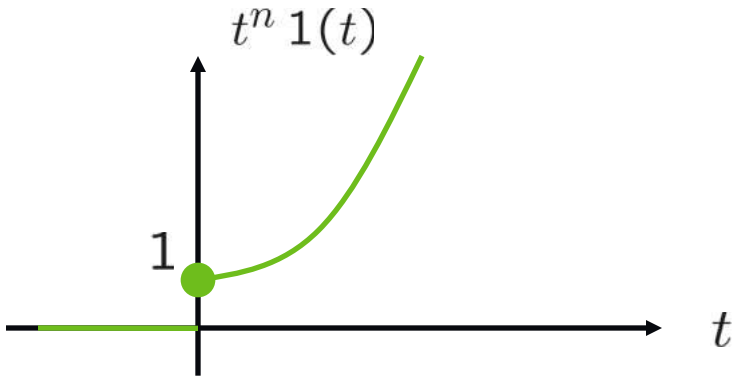


$$\mathcal{L}[e^{kt}1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(k-s)t}dt = \frac{1}{k-s}[e^{(k-s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

Trasformate notevoli

4. Trasformata di $t^n\,1(t)$:



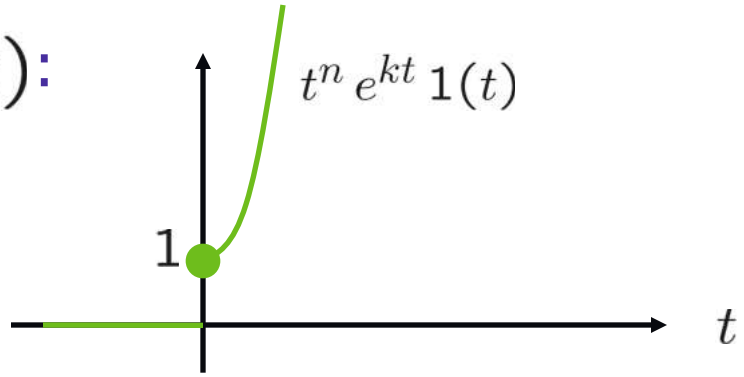
$$\mathcal{L}[t^n 1(t)] = (-1)^n \left\{ (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

...basta applicare la proprieta' di moltiplicazione per t^n ...

Trasformate notevoli

5. Trasformata di $t^n\, e^{kt}\, 1(t)$:



$$\mathcal{L}[t^n\, e^{kt}\, 1(t)] = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprieta' di moltiplicazione per t^n e di traslazione in frequenza...

Trasformate notevoli

Trasformata di $\sin(\omega t)$ e di $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\,\sin\phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\,\sin\phi$$

Trasformate notevoli

6. Trasformata di $\sin(\omega t)\,1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\cdot 1(t)\right]=\frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Trasformate notevoli

7. Trasformata di $\cos(\omega t)\,1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\cdot 1(t)\right]=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Applicazione:

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$\frac{d^2y}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1+3t)u(t)$$

Con condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Se $u(t)$ e' un gradino unitario ed applichiamo le proprieta' viste:

$$\left\{s^2\,Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right\} + \{3\,[s\,Y(s) - y(0)]\} + \ldots$$

$$\ldots + 2\,Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$\left\{s^2\,Y(s) - s\right\} + \{3\,[s\,Y(s) - 1]\} + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$(s^2 + 3\,s + 2)\,Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Si e' ottenuta un'equazione algebrica da cui esplicitare $Y(s)$:

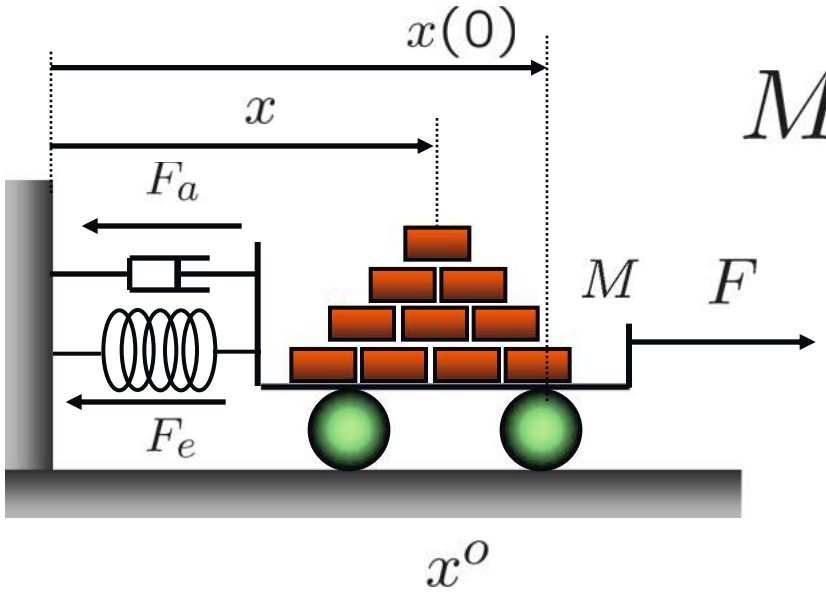
$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} + \frac{1}{s^2+3s+2}\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}\right)$$

Da questa equazione si puo' tornare nel dominio del tempo,

ANTITRASFORMANDO

Applicazione:

sistema massa-molla (parte1, 32)



$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$

$$x(0) = r_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$M\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \ldots$$

$$\ldots + h\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)\{Ms^2+hs+k\}-\{Msr_0+hr_0+Mv_0\}=F(s)$$

$$X(s)=\frac{Msr_0+hr_0+Mv_0}{Ms^2+hs+k}+\frac{F(s)}{Ms^2+hs+k}$$

"Risposta" libera

dipende dalle condizioni iniziali

?

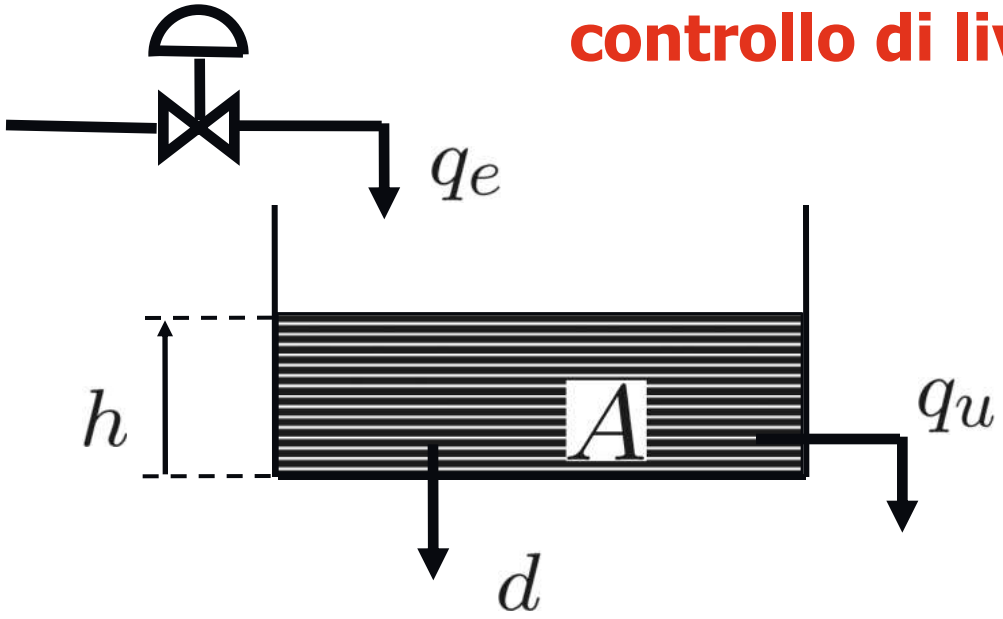
$x(t)$

"Risposta" forzata

dipende dall'ingresso

Applicazione:

controllo di livello (parte 2, 1)



Ipotesi:
-serbatoio infinito
-no disturbo
-controllore proporzionale

$$\begin{cases} \dot{h} = -\dfrac{1}{A}(k+\mu)\,h + \dfrac{\mu}{A}h^o \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

controllo di livello

Trasformiamo con Laplace, con C.I. nulle (h_0 e' il RIFERIMENTO !):

$$s\,H(s) = -\frac{1}{A}\,(k+\mu)\,H(s) + \frac{\mu}{A}\,\mathcal{L}\left\{h^0(t)\right\}$$

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k+\mu)} \cdot \mathcal{L}\left\{h^0(t)\right\}$$



$h(t)$

Antitrasformate

A partire da $F(s)$ si risale - sotto opportune ipotesi - ad $f(t)$ calcolando :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, j} \int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

Che vale per $f(t)$ CAUSALE, cioe' non nulla solo per $t \geq 0$

$\bar{\sigma} > \alpha$, l'ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di F(s) sono a sinistra della retta individuata da $\bar{\sigma}$. **... non ne faremo uso ...**

Antitrasformate

Ci interessa antitrasformare funzioni razionali fratte

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

$$n > m$$

Non applicheremo mai la definizione di antitrasformata!

Antitrasformate

Deve essere n>m

Se $F(s)$ e' causale, questa condizione e' sempre verificata.

Altrimenti la teoria delle trasformate ricorre alle funzioni generalizzate...che non vedremo

Antitrasformate (bis)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

Come si opera nel caso in cui fosse $m = n$?

$$F(s) = a_n + \frac{\hat{N}(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(\hat{N}) < n$$

Nel caso in cui $m = n$, (funzioni razionali **non strettamente proprie**) nel segnale ottenuto come antitrasformata comparirà un impulso di Dirac.

Espansione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s-z_1)^{m_1}(s-z_2)^{m_2}\cdots(s-z_r)^{m_r}}{(s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}\cdots(s-p_q)^{n_q}}$$

$$m_1+m_2+\ldots+m_r = m \qquad n_1+n_2+\ldots+n_q = n$$

- avremo r zeri: $z_1, z_2, \ldots, z_r \in \mathcal{C}$

  di molteplicita' $m_j \qquad j = 1, \ldots, r$

- avremo q poli: $p_1, p_2, \ldots, p_q \in \mathcal{C}$

  di molteplicita' $n_i \qquad i = 1, \ldots, q$

Espansione in fratti semplici

Vogliamo scrivere $F(s)$ come:

$$F(s) = \frac{C_{1,1}}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{C_{1,n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{2,1}}{(s-p_2)} + \ldots + \frac{C_{2,n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{q,1}}{(s-p_q)} + \ldots + \frac{C_{q,n_q}}{(s-p_q)^{n_q}}$$

Espansione in fratti semplici

Per la proprieta' di linearita' la sua antitrasformata si potra' calcolare cosi':

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right]$$

Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

Espansione in fratti semplici

Infatti si ha che:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right] = \frac{C_{i,j}}{(j-1)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

Ancora per le proprieta' di linearita', traslazione in frequenza e moltiplicazione per t^n .

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j-1)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

Espansione in fratti semplici



Se sappiamo calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ abbiamo automaticamente la $f(t)$

- Metodo 1: basato sul principio di **identita'** dei polinomi -→va bene per poli a molteplicita' unitaria

- Metodo 2: basato sul **calcolo dei residui** -→ va bene per poli multipli

Espansione in fratti semplici

Risolviamo l'esercizio (parte2, 23) lasciato in sospeso, con entrambi i metodi

a. "Risposta" libera

$$Y_l(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Per analogia col caso massa-molla!

b. "Risposta" forzata

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}\left(\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}\right)$$

a. Metodo 1 - qui conviene perche' ci sono poli a molteplicita' unitaria

$$p_1 = -1 \qquad p_2 = -2$$

$$Y_l(s) = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+2)}$$

Espansione in fratti semplici

$$Y_l = \frac{s(C_1 + C_2) + 2C_1 + C_2}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$Y_l(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y_l(s)\} = y_l(t) = \left[2\,e^{-t} - e^{-2t}\right] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$