Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu

DIA-Università di Trieste

Tel. (Parisini) 334 6936615

Email: parisini@units.it, fenu@units.it,

URL: http://control.units.it

Trasformate di Laplace

Importanza dei modelli dinamici

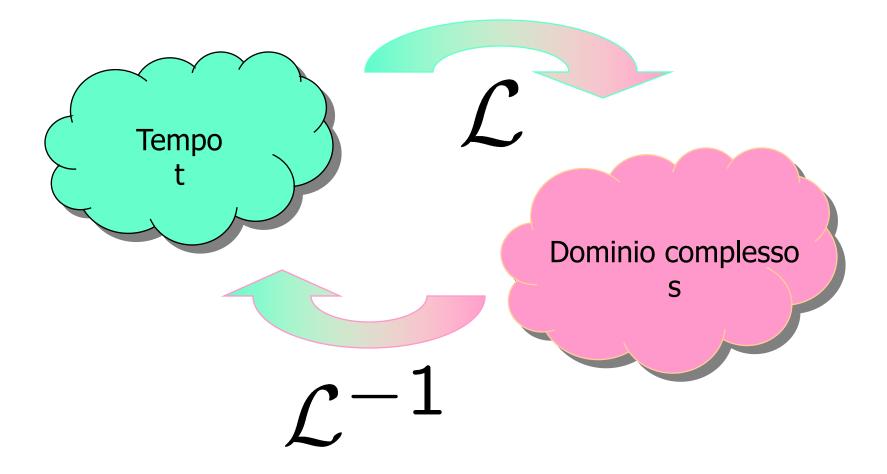


Risolvere equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti)



Metodi per risolverle ???

La trasformata di Laplace e' un OPERATORE funzionale



Definizione:

søgnet: censel.

si considerano funzioni non nulle solo per $t \ge 0$ continue a tratti, senza comportamento impulsivo per t = 0 (ed altre ipotesi sempre verificate dalle funzioni considerate in questo corso)

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,d\,t = F(s)$$

$$s = \sigma + j\,\omega$$
 Funzioni del tempo Funzioni complesse

Perche' queste trasformate sono utili?



1. Hanno molte proprieta' che aiutano a risolvere le equazioni differenziali

2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate "notevoli"

1. Linearita':

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale: $f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$



$$L[f'] = sF(s) - f(0)$$

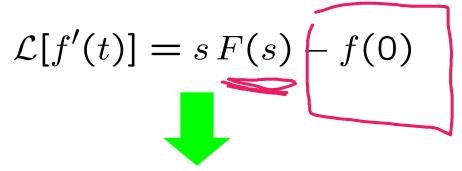
$$f' = s d f$$

$$L[f''] = s \cdot L[f'] - f'(6)$$

$$S[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$S'F(s) - sf(0) - f'(0)$$

3. Trasformata della derivata: f(t), f'(t)



Derivate di ordine "n"

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0)$$

4. Traslazione in frequenza: se $k \in C$

$$\mathcal{L}[e^{kt}f(t)] = F(\underline{s-k})$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left(t^{2}f(t)\right) =$$

$$= (-1)^{2} d^{2}f(s)$$

$$d \leq 2$$

6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a \in R^{+}$$

7. Moltiplicazione per t^n :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$



Def: integrale di convoluzione – f, g non nulle per $t \geq 0$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

$$\int_{0}^{t} \frac{1}{n} dn = t \cdot \frac{1}{t}$$

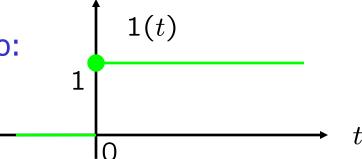
$$\int_{0}^{t} \frac{1}{n} dn = t \cdot \frac{1}{t}$$

$$\int_{0}^{t} \frac{1}{t} \frac{1}{t} dn = t \cdot \frac{1}{t}$$

$$\left(t - 3\right) \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} - \frac{3}{t} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{5^{2}} - \frac{3}{5} = \frac{1 - 3s}{5^{2}}$$

1. Trasformata del gradino unitario:

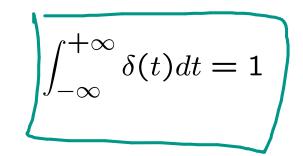


$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t)e^{-st}dt$$

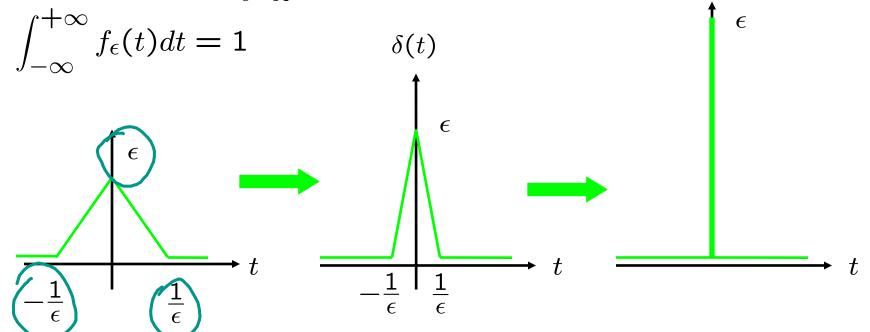
$$= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Definizione: $\delta(t)$ di Dirach

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



Si puo' vedere come il $\lim_{\epsilon \to \infty} f_{\epsilon}(t)$ di una successione di funzioni $f_{\epsilon}(t)$ tali che:



Prof. Thomas Parisini

Proprietà ed utilizzo

• integrale unitario (per definizione)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

proprietà di "estrazione" (sifting property)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \delta(t-T) dt = f(T)$$

- Utilizzo nello studio dei sistemi dinamici a tempo continuo:
 - condizioni iniziali;
 - comportamento ingresso/uscita del sistema (risposta all'impulso)

Trasformata di Laplace: espressione generale

 Ammettendo che la funzione abbia comportamento impulsivo a t = 0 (le altre condizioni su f(t) sono verificate)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^{-}}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Trasformata della derivata: espressione generale

 Ammettendo che la funzione abbia comportamento impulsivo a t= 0 (le altre condizioni su f(t) sono verificate)

Trasformata della derivata: f(t), f'(t) \mathcal{L} -trasformabili

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0^-)$$

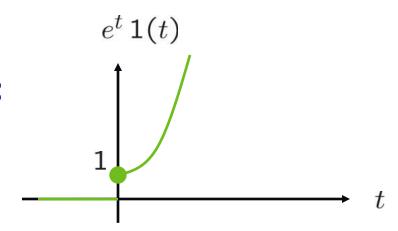
Derivate di ordine *n*

$$\mathcal{L}[f^{n}(t)] = s^{n} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{k}(0^{-})$$

2. Trasformata della $\delta(t)$ di Dirach

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = \int_{0^{-}}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

3. Trasformata dell'esponenziale $e^t \mathbf{1}(t)$:

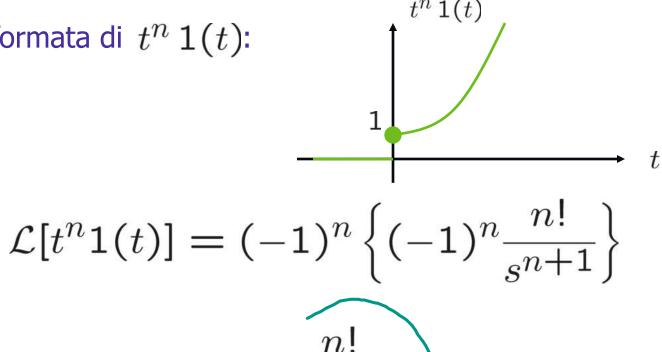


$$\mathcal{L}[e^{kt}1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(k-s)t} dt = \frac{1}{k-s} [e^{(k-s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$



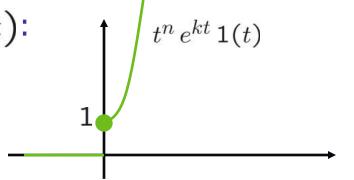
4. Trasformata di $t^n 1(t)$:



$$= \underbrace{\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

...basta applicare la proprieta' di moltiplicazione per $\,t^n\,$...

5. Trasformata di $t^n e^{kt} \mathbf{1}(t)$:



$$\mathcal{L}[t^n e^{kt} 1(t)] = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprieta' di moltiplicazione per $\,t^n\,$ e di traslazione in frequenza...

Trasformata di $\sin(\omega t)$ e di $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\,\sin\phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\,\sin\phi$$

6. Trasformata di $sin(\omega t) 1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{2j} \left\{\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right\}$$
$$= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

7. Trasformata di $cos(\omega t)$ 1(t):

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{2} \left\{\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

I (ckt sen(at) 1/4) }

cos (at) $(5-k)^{2}+\omega^{2}$

Applicazione:

Vogliamo risolvere l'equazione:



$$\frac{d^2y}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1+3t)u(t)$$

Con condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \qquad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

Se u(t) e' un gradino unitario ed applichiamo le proprieta' viste:

$$\left\{ s^{2}Y(s) - sy(0) - y(0) \right\} + \left\{ 3\left[sY(s) - y(0) \right] \right\} + \dots$$

$$\dots + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^{2}}$$

$$\left\{ s^{2}Y(s) - s \right\} + \left\{ 3\left[sY(s) - 1 \right] \right\} + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^{2}}$$

$$\left(s^{2} + 3s + 2 \right) Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^{2}}$$

Si e' ottenuta un'equazione algebrica da cui esplicitare Y(s):

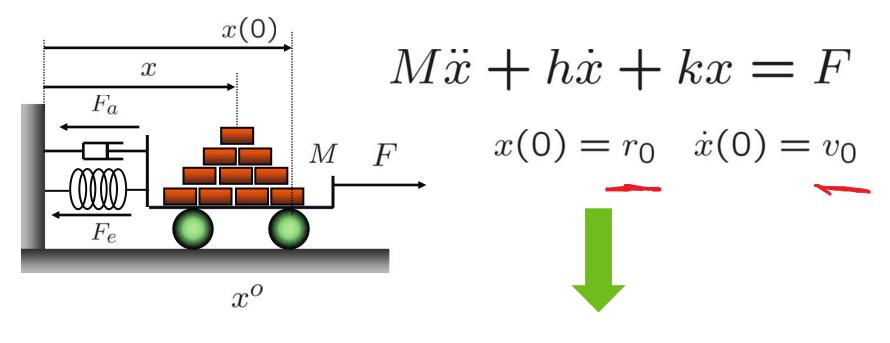
$$Y(s) = \underbrace{\left| \frac{s+3}{s^2+3\,s+2} \right|}_{s^2+3\,s+2} + \underbrace{\left| \frac{1}{s^2+3\,s+2} \right|}_{s^2+3\,s+2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

Da questa equazione si puo' tornare nel dominio del tempo,

ANTITRASFORMANDO

Applicazione:

sistema massa-molla (parte1, 32)



$$M\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \dots$$

... +
$$h\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s)$$

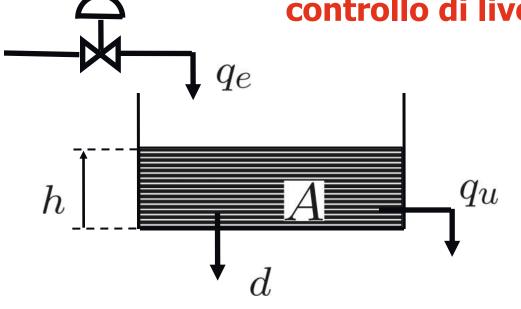


$$X(s)\{Ms^2+hs+k\}-\{Msr_0+hr_0+Mv_0\}=F(s)$$

$$X(s) = \frac{Msr_0 + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$
"Risposta" libera
dipende dalle condizioni iniziali
$$x(t)$$

Applicazione:

controllo di livello (parte 2, 1)



Ipotesi:

- -serbatoio infinito
- -no disturbo
- -controllore proporzionale

$$\begin{cases} \dot{h} = -\frac{1}{A} (k + \mu) h + \frac{\mu}{A} h^o \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

controllo di livello

Trasformiamo con Laplace, con C.I. nulle (h_0 e' il RIFERIMENTO!):

$$s H(s) = -\frac{1}{A} (k + \mu) H(s) + \frac{\mu}{A} \mathcal{L} \left\{ h^0(t) \right\}$$

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L}\left\{h^{0}(t)\right\}$$



Antitrasformate

A partire da F(s) si risale - sotto opportune ipotesi - ad f(t) calcolando :

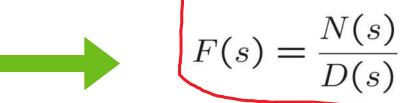
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{\sigma} - j\infty}^{\bar{\sigma} + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Che vale per f(t) CAUSALE, cioe' non nulla solo per $t \ge 0$

 $\bar{\sigma}>\alpha$, l'ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di F(s) sono a sinistra della retta individuata da $\bar{\sigma}$ non ne faremo uso ...

Antitrasformate

Ci interessa antitrasformare funzioni razionali fratte



$$deg(D) = n, deg(N) = m$$



Antitrasformate

Deve essere n>m



Se F(s) e' causale, questa condizione e' sempre verificata.



Altrimenti la teoria delle trasformate ricorre alle funzioni generalizzate...che non vedremo

Antitrasformate (bis)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Come si opera nel caso in cui fosse m = n?



$$deg(D) = n, deg(N) = m$$

$$F(s) = a_n + \frac{\hat{N}(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n, deg(\hat{N}) < n$$

Nel caso in cui m=n, (funzioni razionali **non strettamente proprie**) nel segnale ottenuto come antitrasformata comparirà un impulso di Dirac.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)^{m_1}(s - z_2)^{m_2} \cdots (s - z_r)^{m_r}}{(s - p_1)^{n_1}(s - p_2)^{n_2} \cdots (s - p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = m \qquad n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$$

• avremo r zeri: $z_1, z_2, ..., z_r \in \mathcal{C}$

di molteplicita' m_j j=1,...,r

ullet avremo q poli: $p_1, p_2, ..., p_q \in \mathcal{C}$

di molteplicita' n_i i=1,...,q

Vogliamo scrivere F(s) come:

$$F(s) = \frac{C_{1,1}}{(s-p_1)} + \dots + \frac{C_{1,n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_{2,1}}{(s-p_2)} + \dots + \frac{C_{2,n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_{q,1}}{(s-p_q)} + \dots + \frac{C_{q,n_q}}{(s-p_q)^{n_q}}$$

Per la proprieta' di linearita' la sua antitrasformata si potra' calcolare cosi':

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j} \right]$$

Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

Infatti si ha che:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right] = C_{i,j} - C_{i,j} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

Ancora per le proprieta' di linearita', traslazione in frequenza e moltiplicazione per $\,t^n\,$.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j-1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$



Se sappiamo calcolare i coefficienti $\,C_{i,j}\,$ abbiamo automaticamente la f(t)

- Metodo 1: basato sul principio di identita' dei polinomi -→va bene per poli a molteplicita' unitaria
- Metodo 2: basato sul calcolo dei residui
 → va bene per poli multipli

Risolviamo l'esercizio (parte2, 23) lasciato in sospeso, con entrambi i metodi



Per analogia col caso massa-
$$Y_l(s) = \frac{s+3}{s^2+3\,s+2}$$

b. "Risposta" forzata
$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

a. Metodo 1 - qui conviene perche' ci sono poli a molteplicita' unitaria

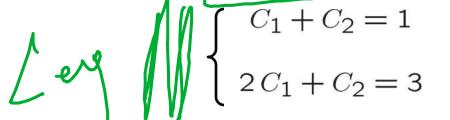
$$p_1 = -1$$

 $p_2 = -2$ $Y_l(s) = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+2)}$

$$Y_l = \frac{s(C_1 + C_2) + 2C_1 + C_2}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$









$$C_2 = -1$$

$$\int Y_l(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^-$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y_l(s)\} = y_l(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}] \cdot 1(t)$$

$$= y_l(t) = [2e^{-t}]$$

$$-t - e^{-t}$$

$$^t \rfloor \cdot 1(t)$$

$$\frac{5+3}{(5+2)(5+1)}$$

$$= \frac{5+3}{(5+2)(5+1)}$$

$$= \frac{5+2}{5+2} + \frac{5+2}{5+1} = \frac{5+2}{(5+2)}$$

$$\frac{5+2}{(5+1)} = \frac{5+2}{(5+1)} = \frac{5+2}{(5+1)}$$

 $\frac{(3+3)(3+2)}{(5+2)(5+1)} = (7+2)(7+2)$ (5+2)(5+1) (5+1) $\frac{1}{1}$ $\frac{1}$ $lim \frac{1}{5-9-2}$

$$\frac{5+3}{(5+1)(5+2)^3}$$
=\frac{5+1}{(5+1)} \big(\frac{5+2}{5+2}\big)^2 \\
+\frac{C_{2,3}}{(5+2)^3}

 $(C_{2,1})(5+7)^{2}$ $V(5)(5+2) = (5+2)^{3}$

 $(4m)/(3)(+2)^{3} = C_{9,3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{(5+2)} = \frac{3}{(2+2)} + \frac{3}{(2+3)} + \frac{3}$ + G, (5+2)2+ C, (5+2)

$$\frac{d}{ds}(\cdot) = \frac{C_{12} + O + 2C_{21}(5+2) + C_{13}(5+2) + C_{13}(5+2) + C_{13}(5+2)}{(5+2)^{2} - (5+2)^{2} + C_{13}(5+2)}$$

 $\lim_{So-Z} \frac{d}{ds}(\cdot) = \binom{1}{2}e$

$$\frac{d^2}{ds^2}(\cdot) = 2C_{2,1} + C_{1}(5+1)$$

 $lin 1 d(.) = C_{2,1}$ 5-0-22 d(52)

b. Metodo 2

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right) \qquad \begin{cases} p_1 = -1, n_1 = 1 \\ p_2 = -2, n_2 = 1 \\ p_3 = 0, n_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = -1, n_1 = 1 \\ p_2 = -2, n_2 = 1 \\ p_3 = 0, n_3 = 2 \end{cases}$$



$$Y_f = \left(\frac{C_{1,1}}{(s+1)}\right) + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s^2} + \frac{C_3}{s}$$

Per calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ si applica questa formula:

$$C_{i,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{ds^{(n_i - j)}} F(s) (s - p_i)^{n_i} \right\}$$

Per poli di molteplicita' unitaria:

$$C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

Detta formula di Heaviside

Derivata prima del denominatore!

Dunque finiamo l'esercizio:

$$C_{1,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2 \longrightarrow p_1$$

$$C_{2,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \longrightarrow p_2$$

$$C_{3,0} = \frac{d}{ds} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-\frac{7}{4}} \longrightarrow (s)$$

$$C_{3,0} = \frac{d}{ds} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4}$$

$$C_{3,0} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$p_{3,0} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

Espressione finale di
$$Y_f(s)$$
 :
$$Y_f = \left(\frac{2}{(s+1)}\right) - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \left| \frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \right| \cdot 1(t) \quad t \ge 0$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

5 (M 52 + h 5 + k)

CSP TO O 2 neels 2 compl. coming

Applicazione:

sistema massa-molla

$$\begin{cases} X(s) = \frac{Mr_0s + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k} \\ r_0 = 0, \quad v_0 = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

Se F(t) e' un gradino

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$



Espandendo in fratti semplici:



$$\Delta = h^2 - 4kM$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s + \frac{h}{2M} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_2}{s + \frac{h}{2M} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_3}{s}$$

$$x(t) = \left[C_1 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_2 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_3 \right] \cdot 1(t)$$

$$t > 0$$

Vedi (parte 1,34)
$$(t) = [C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + C_3] \cdot 1(t)$$

Si e' gia' visto l'andamento della x(t) a seconda che le radici siano reali o complesse.



segno di $\sqrt{\Delta}$!

Applicazione:

controllo di livello

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L}\left\{h^{0}(t)\right\}$$

$$H(s) = \left[\frac{C_1}{s + \frac{(k+\mu)}{A}} + \frac{C_2}{s} \right] \qquad h^0(s) = h^0 \frac{1}{s}$$



$$h^{0}(t) = h^{0}1(t)$$

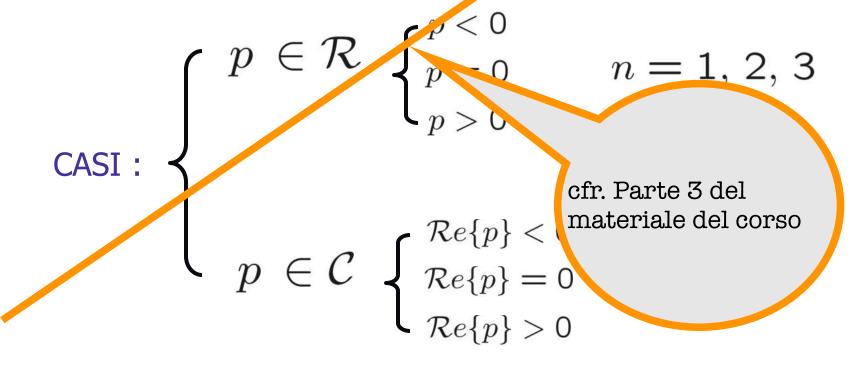
$$h^0(s) = h^0 \frac{1}{s}$$

dopo qualche passaggio ...

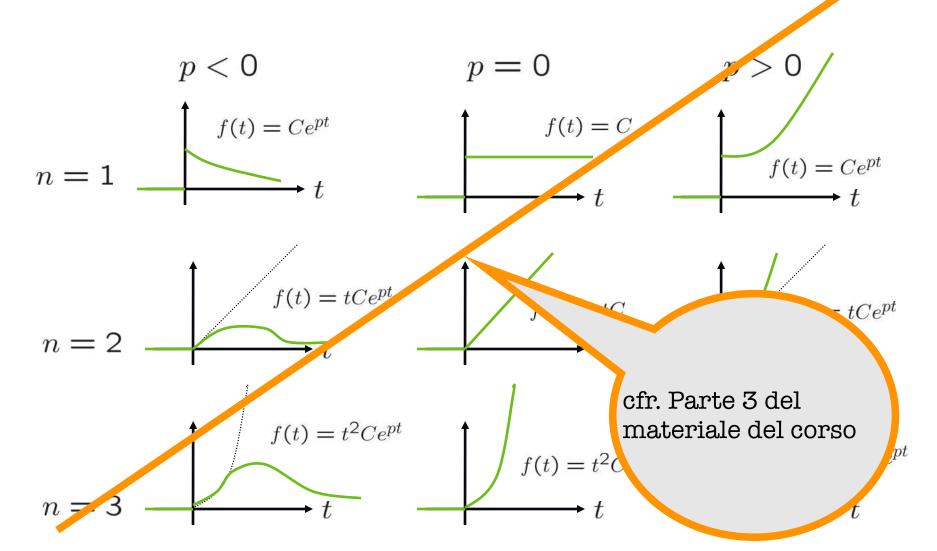
$$h(t) = \frac{\mu \, h^0}{k+\mu} \, \left(1 - e^{-\frac{\left(k+\mu\right)}{A}} \, t\right) \cdot 1(t)$$
 vedi (parte 2, 4)

Studio qualitativo delle soluzioni

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-p)^n}\right] \Longrightarrow f(t) = \frac{C}{(n-1)!}t^{n-1}e^{pt}1(t)$$



$$p \in \mathcal{R}$$



Studio qualitativo delle soluzioni

Osservazioni:

•Per p < 0 l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero

•Per p=0 l'andamento e' divergente, con la molteplicita' del polo; e' limitata sse del polo e' unitaria

cfr. Parte 3 del materiale del corso

•Per p > 0 l'andamento e' SEMPRE divergente



se $p = \sigma + j\omega$ e' una radice del denominatore di F(s), allora lo sara' anche il suo complesso e conjugato

$$p^* = \sigma - j\,\omega$$

Nella scomposizione troveremo de coefficio di rati a (p, p^*) i coefficienti (C, C^*) : dunque accomposizione troveremo de coefficienti arti a recoefficienti (C, C^*) : dunque accomposizione troveremo de coefficienti arti a recoefficienti (C, C^*) : dunque accomposizione troveremo de coefficienti de coefficienti arti a recoefficienti (C, C^*) : dunque accomposizione troveremo de coefficienti de coefficienti arti a recoefficienti (C, C^*) : dunque accomposizione troveremo de coefficienti de coefficienti (C, C^*) : dunque accomposizione troveremo de coefficienti (C, C^*) : dunque accompositi (C, C^*) : dunque accompositi (C, C^*) : dunque accompositi (C, C^*) : dunque accomp

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{(s-p)^n} + \frac{\text{cfr. Parte 3 del materiale del corso}}{(s-p)^n} \right]$$





Sviluppando si ottiene:

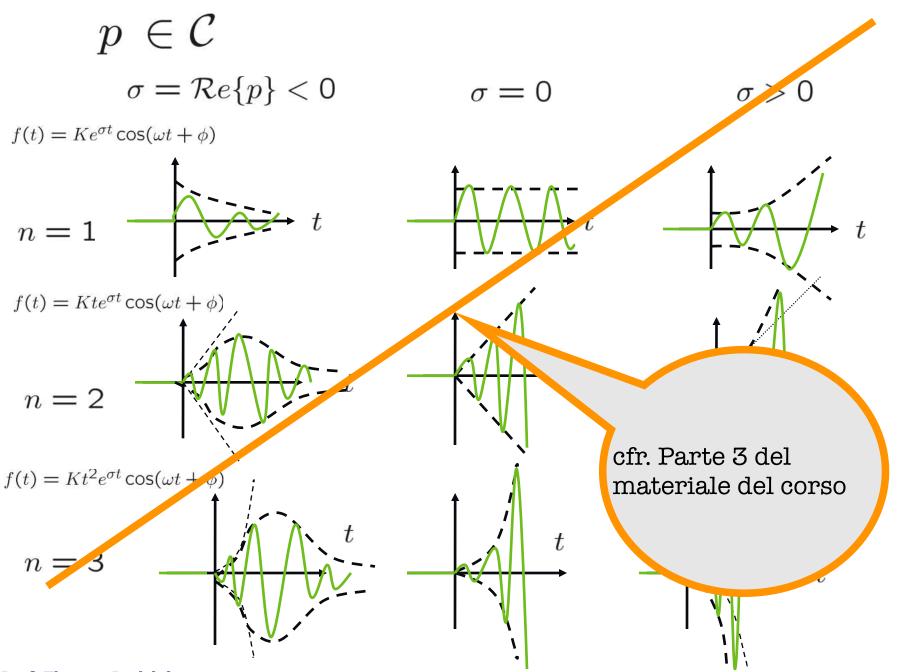
$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \left\{ C e^{(\sigma+j\omega)t} + C^* e^{(\sigma-j\omega)t} \right\} 1(t) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \left\{ C e^{j\omega t} + C^* e^{-j\omega t} \right\} 1(t)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \left\{ (C + e^*) \cos(\omega t) - C^* \right\} \sin^2(\omega t)$$

$$= \frac{2}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \left\{ (Re(C)) \cos(\omega t) - (Im(C)) \right\} \text{ cfr. Parte 3 del materiale del corso}$$

$$= K t^{n-1} e^{\sigma t} \cos((\omega t + \phi) 1)(t) \qquad K = 2 \frac{|C|}{(n-1)!},$$



Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Studio qualitativo delle soluzioni

Osservazioni:

 $\text{ •Per } \mathcal{R}e\{p\} < 0 \quad \text{l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero}$

•Per $\mathcal{R}e\{p\}=0$ la funzione e' limitata unitaria

cfr. Parte 3 del materiale del corso

 $\operatorname{Re}\{p\}>0$ l'andamento e' SEMPRE d

Proprieta'

Vediamo ancora due proprieta' molto importanti:

Teorema del valore iniziale

IPOTESI: F(s) strettamente propria, cioe' n>m.

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$$

solo per chi e' curioso:

se f(t) ha impusi - $\delta(t)$ - nell'origine il teorema non vale in questa forma ...

riflettere sul perche'!

Proprieta'

Teorema del valor finale

IPOTESI: Tutti poli sono nel semipiano sinistro, con al piu' un polo di molteplicita' unitaria nell'origine.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)$$

E' un teorema molto utile: si trova subito il valore regime della f(t) senza fare troppi calcoli!

Teorema del valor finale: esempi

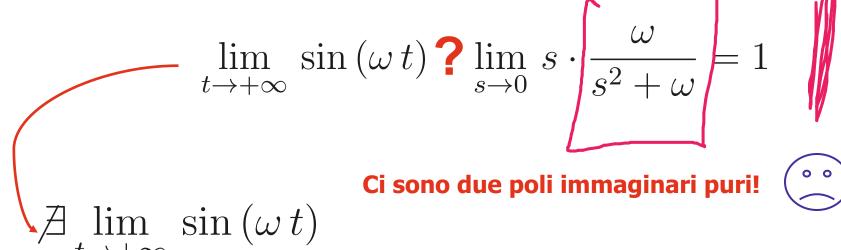
Applicazione corretta:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s+1}$$

C'e' un solo polo a parte reale negativa



Applicazione scorretta:



$$\frac{5+3}{(5+1)(5+2)}$$

$$y(0) = \frac{5+3}{(5+1)(5+2)}$$

$$y(0) = \frac{3}{5} (6) = \frac{7}{5}$$

$$y(0) = \lim_{5 \to +\infty} \frac{5}{5} \frac{1}{5}$$

$$y(0) = lim S - 2
5-900 (5+1)(5+2)$$

$$\frac{1}{2}(5) = \frac{54}{5}(5) - \frac{1}{9}(0)$$

$$= \frac{-25}{(5+1)(5+2)}$$



1. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)^2} \longrightarrow \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{2,2}}{(s+2)^2}$$

$$C_1 = \lim_{s \to (-1)} \left\{ \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)^2} (s+1) = -2 \right\}$$

$$C_{2,1} = \lim_{s \to (-2)} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)^2} (s+2)^2 \right\} = 2$$

$$C_{2,2} = \lim_{s \to (-2)} \left\{ \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)^2} (s+2)^2 \right\} = 7$$

Antitrasformiamo:

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} + \frac{7}{(s+2)^2}$$

$$f(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 7te^{-2t}$$



fine!

2. Carica e scarica di un circuito RC parallelo:

Equazioni di stato

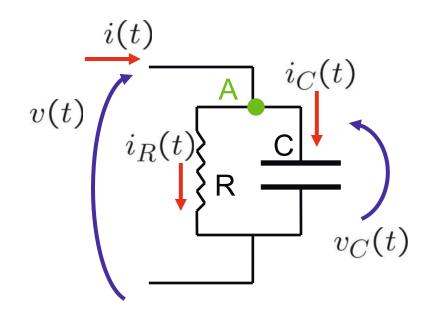
Per il secondo principio di Kirchhoff (al nodo A):

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} + C\frac{d}{dt}v_C(t)$$

$$v_R(t) = v_C(t) = v(t)$$

$$\frac{y(t)}{R} + C\frac{d}{dt}y(t) = u(t)$$



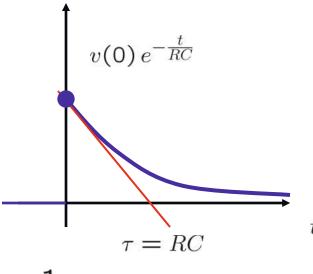
$$\begin{cases} i(t) = u(t) \\ v_C(t) = y(t) \end{cases}$$

a) Ingresso nullo, ma con condizioni iniziali diverse da zero : il circuito si scarica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = 0$$

Applichiamo Laplace:

$$\frac{Y(s)}{RC} + sY(s) - y(0) = 0$$



$$\frac{Y(s)}{RC} + sY(s) - y(0) = 0$$

$$Y(s) = y(0) \frac{RC}{sRC + 1} = y(0) \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$



$$v(t) = v(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$



b) Soluzione ad ingresso diverso da zero, ma condizioni iniziali nulle : il circuito si carica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = \frac{u(t)}{C}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{C} \frac{RC}{sRC + 1} = \frac{U(s)}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Se l'ingresso e' un gradino in corrente:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right) \frac{1}{sC}$$

Allora espandiamo in fratti semplici...

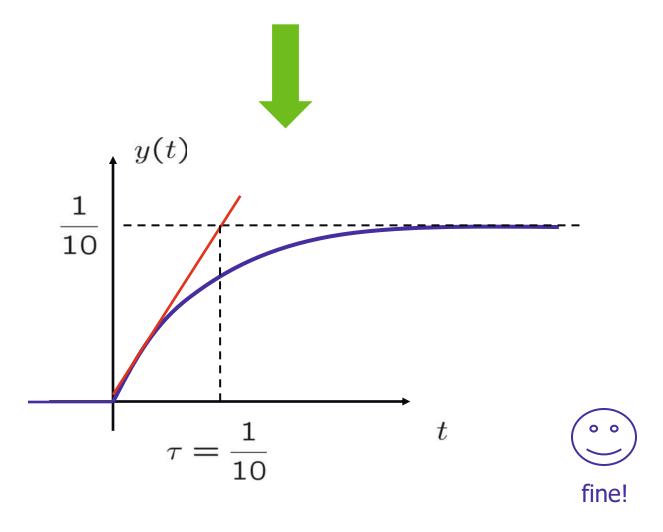


Se R=10, C=1 si ha RC=10 e dunque:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+10)} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s+10} + \frac{B}{s} \right]$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{s(s+10)}(s+10)_{|s=-10} = -\frac{1}{10} \\ B = \frac{1}{s(s+10)}(s)_{|s=0} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$y(t) = \left\{ -\frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10} \right\} 1(t) = \frac{1}{10}(1 - e^{-10t}) 1(t)$$



3. Antitrasformare la funzione:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Innanzitutto troviamo i poli:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + (1 - j2))(s + (1 + j2))}$$

Poi espandiamo in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s + (1 - j2))} + \frac{C_2^*}{(s + (1 + j2))}$$

Applichiamo la formula dei residui :

$$C_1 = \lim_{s \to 0} F(s) \, s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \longrightarrow (-1+j2)} F(s) (s + (1-j2)) = 3 + j4$$

$$C_2^* = \lim_{s \longrightarrow (-1-j2)} F(s) (s + (1+j2)) = 3 - j4$$



$$f(t)=1(t)+(3+j4)e^{-(1-j2)t}+(3-j4)e^{-(1+j2)t}$$
 Che non e' molto agevole perche' presenta coefficienti complessi...

Semplifichiamola sfruttando le formule di Eulero:

$$f(t) = 1(t) + 10e^{-t}(\cos(2t + \phi))$$
 $\phi = artan(\frac{4}{3})$

Ma si poteva anche accoppiare i poli complessi e coniugati:

$$\frac{3+j4}{(s+1-j2)} + \frac{3-j4}{(s+1+j2)} = \dots = \frac{6(s+1)-16}{(s+1)^2+(2)^2}$$

$$\dots = 6 \frac{(s+1)}{(s+1)^2+(2)^2} - 8 \frac{2}{(s+1)^2+(2)^2}$$

Antitrasformando -> ricordare la proprieta' di traslazione in frequenza:

$$f(t) = 1(t) + 6e^{-t}\cos 2t - 8e^{-t}\sin 2t$$
 fine!

Quello appena visto si dice metodo del **COMPLETAMENTO DEI QUADRATI**:

a. Si accoppiano i poli complessi e coniugati:

$$\frac{C_2}{(s+p)} + \frac{C_2^*}{(s+p^*)} \Longrightarrow \frac{as+b}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$\underset{\mathbb{Z}^{m\{p\}}}{\underbrace{(s+p)}}$$

b. Si "aggiustano" le costanti al numeratore per avere:

$$\left(\frac{K_1(s+\sigma)+K_2\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}$$

$$\left(K_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + K_2 e^{-\sigma t} \sin(\omega t)\right) 1(t)$$

4. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 6s + 8}{(s-1)^3(s+2)^2}$$

Abbiamo gia' i poli...stavolta facciamo attenzione agli zeri!!

Infatti ci sono delle semplificazioni fra numeratore e denominatore: un fattore (s+2) si elimina... Magari non ce ne siamo accorti... Ma facendo i calcoli nell'espansione in fratti semplici il coefficiente $C_{2,2}$ legato ad $(s+2)^2$ risultera' nullo!

$$C_{2,2} = \lim_{s \longrightarrow (-2)} F(s)(s+2)^2 = \dots = 0$$



Se nell'espansione un coefficiente risulta NULLO significa che ci sono delle semplificazioni di cui non ci si e' accorti.



fine!