contiene il materiale annotato del 15/03/2019 e del 25/02/2019

Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

Segnali a tempo discreto

Definizione: segnale a tempo discreto

- Consideriamo una sequenza di istanti di tempo

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$$

- Si definisce segnale a tempo discreto una successione di valori associati alla sequenza temporale considerata

$$w_k \triangleq w(t_k)$$

- Se vale che $t_k - t_{k-1} = T_s, \forall k$ allora

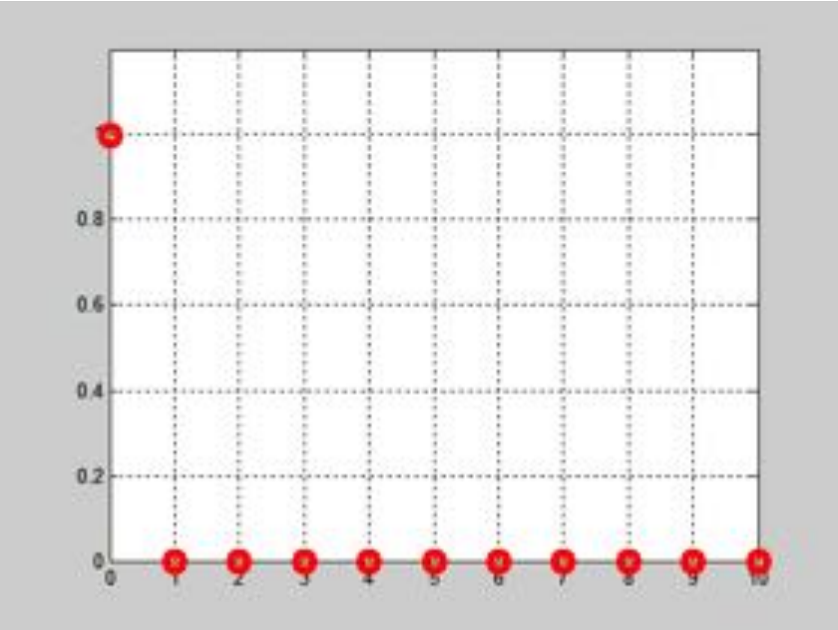
$$w_k = w(k\,T_s)$$

Alcuni segnali canonici a tempo discreto

Per semplicità in ciò che segue trascuriamo di indicare esplicitamente l'intervallo T_s

Impulso unitario

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \quad \text{per} \quad k = 0 \\ 0 \quad \text{per} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

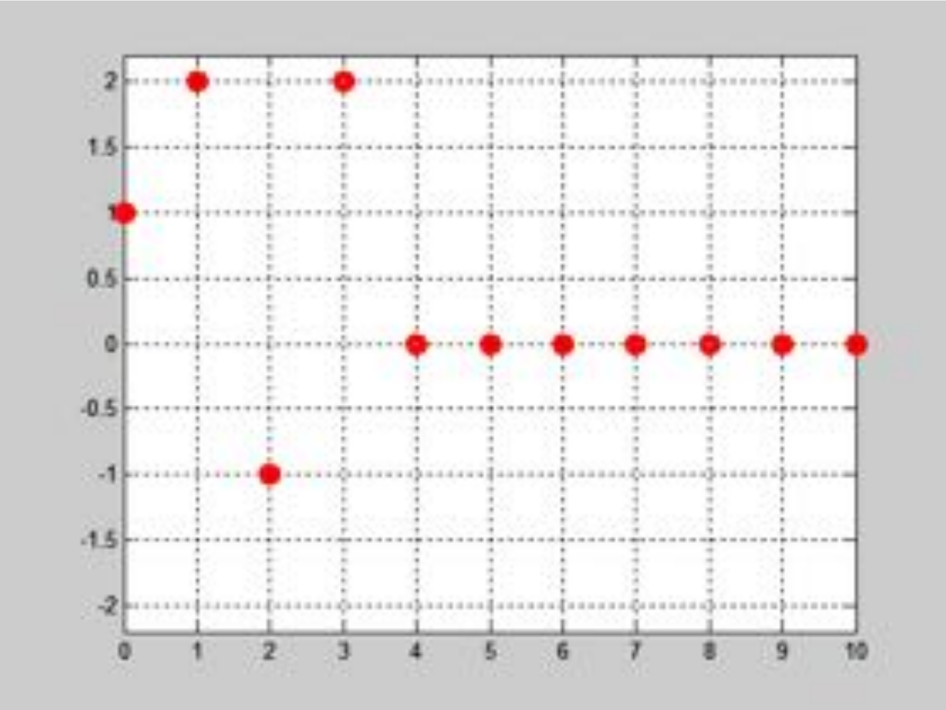


Impulso traslato

$$\delta(k-h) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = h \\ 0 & \text{per} \quad k \neq h \end{cases}$$

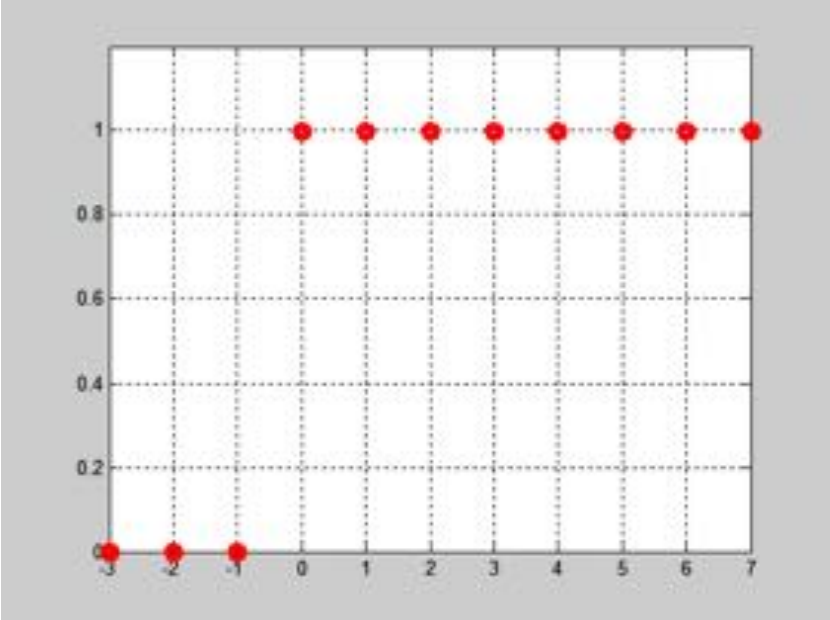
- Una sequenza qualsiasi a tempo discreto può venir sempre espressa come sommatoria di segnali δ opportunamente traslati

$$w(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1) + \\ -\delta(k-2) + 2\,\delta(k-3)$$



Gradino unitario

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$



- La sequenza 1(k) è utile per evidenziare che una sequenza w(k) è identicamente nulla per istanti di tempo negativi

$$w(k) = \hat{w}(k) \cdot 1(k) \iff w(k) = \begin{cases} \hat{w}(k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Segnale esponenziale

$$w(k) = \begin{cases} a^k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = a^k \cdot 1(k) \qquad a \in C$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = a^{kT_s} \cdot 1(kT_s)$$

Rampa unitaria

$$w(k) = \begin{cases} k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = k \cdot 1(k)$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = k \cdot T_s \cdot 1(kT_s)$$

Polinomio fattoriale di ordine h

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

- Si definisce **ricorsivamente**

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(h)}}{h!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-h+1)}{h!} & \text{per} \quad h>0,\ k \geq h \\ 0 & \text{per} \quad h>0,\ k<h \end{cases}$$

- Si ottiene

$$\frac{k^{(1)}}{1!} = k \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(2)}}{2!} = \frac{k(k-1)}{2!} \cdot 1(k)$$
$$= \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(3)}}{3!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$
$$= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(4)}}{4!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \cdot 1(k)$$
$$= \left(\frac{1}{24}k^4 - \frac{1}{3}k^3 + \frac{11}{24}k^2 - \frac{1}{4}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\dots$$

- la sequenza $$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

sarà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto!

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t^h}{h!} \cdot 1(t)$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$\frac{k^{(h)}}{h!} = \binom{k}{h} \cdot 1(k)$$

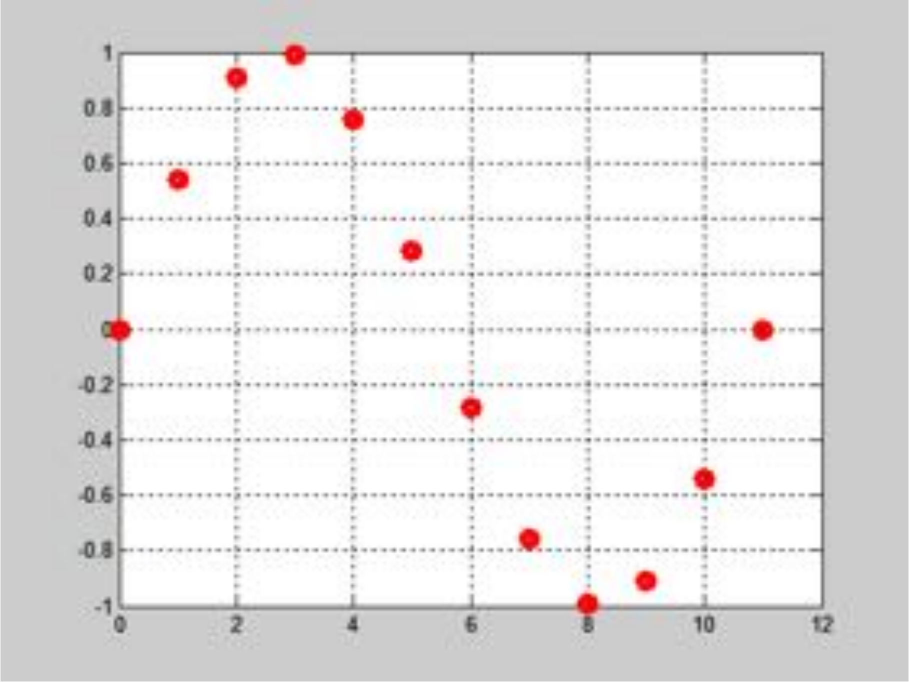
con

$$\binom{k}{h} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-h+1)}{h!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } h > 0 \\ k \geq h \end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } h = 0] \end{cases}$$

Segnale sinusoidale

$$w(k) = \begin{cases} \sin(\omega\, k) & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = \sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$$



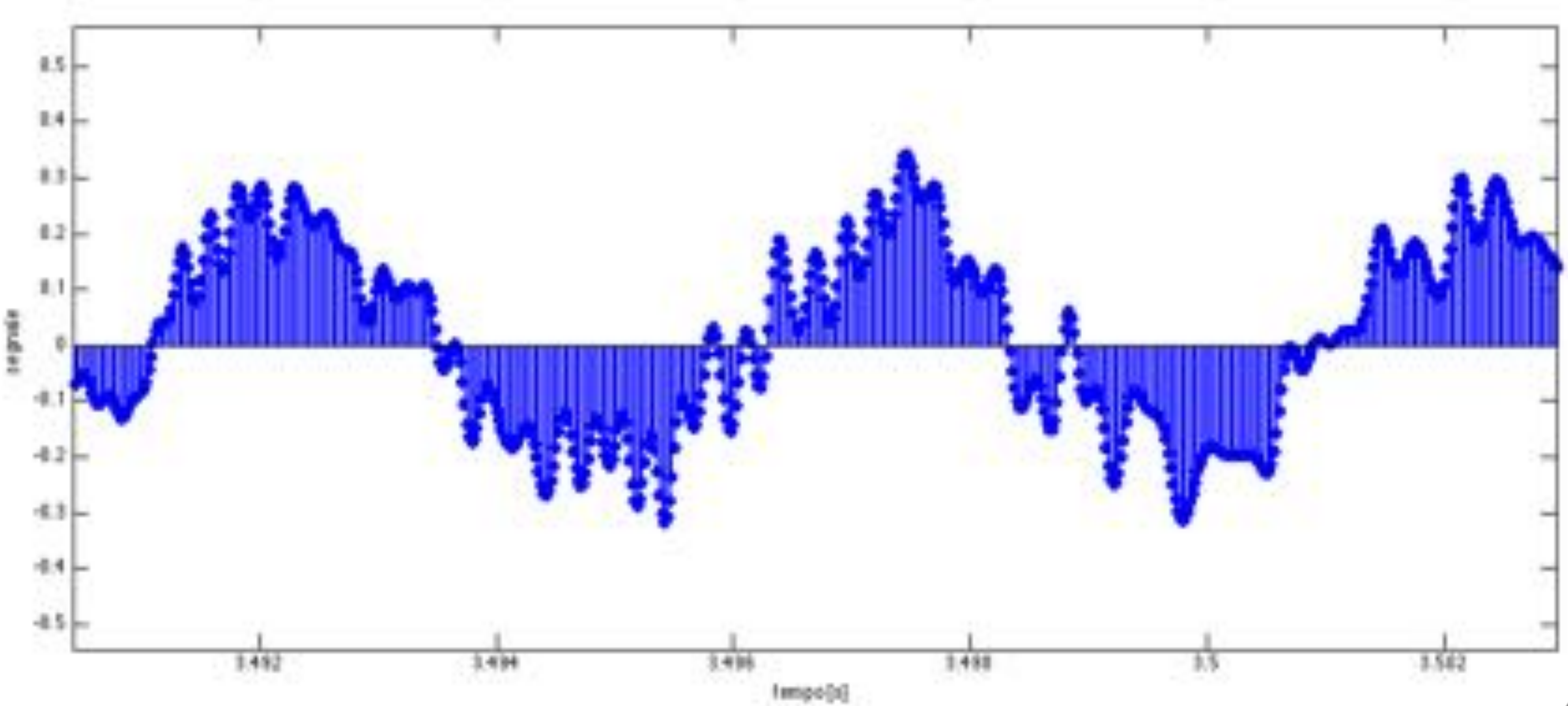
Evidenziando il campionamento

$$w(k\,T_s) = \sin(\Omega\, k\, T_s) \cdot 1(k\,T_s)$$

$$\Omega\, T_s = \hat{\omega}$$

Esempi

- segnali elettrici generati da suoni catturati attraverso un microfono (es. persona al telefono), sottoposti a campionamento e digitalizzazione

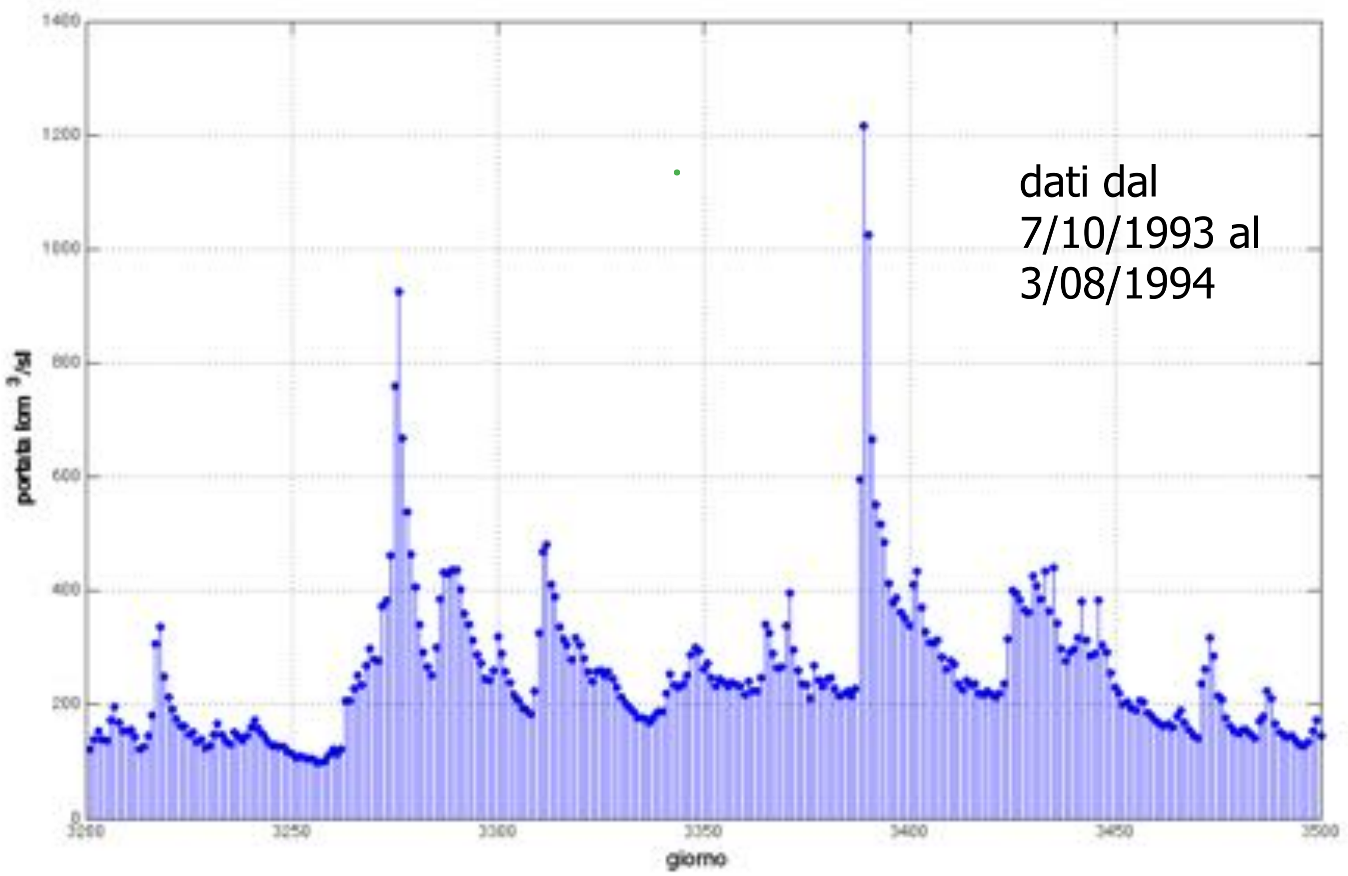


Dave Bowman: “Open the pod bay doors, HAL. “
HAL: “I'm sorry, Dave. I'm afraid I can't do that. “

[2001: A Space Odyssey (1968)]

durata: 7 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV (16 bit)

- segnali intrinsecamente a tempo discreto, come ad esempio quelli delle cosiddette *serie temporali* (dati metereologici, geofisici, economici ecc.)



portata media giornaliera del Danubio a Donauwörth, dal 1/1/1985 al 31/12/2004 – fonte: Università di Würzburg – 7300 campioni (1 campione al giorno)

Equazioni alle differenze

Definizione

- A partire dalla sequenza $\{u(k)\}$ $k = 0, 1, 2, \cdots$ si vuole elaborare una seconda sequenza discreta $\{y(k)\}$ $k = 0, 1, 2, \cdots$

- Il campione generico della sequenza $\{y(k)\}$ viene calcolato nel medesimo istante in cui viene acquisito un nuovo campione di $\{u(k)\}$

- La legge di calcolo del nuovo valore di $y(k)$ è ricorsiva: il campione all'istante k viene determinato in funzione di al più tutti i campioni agli istanti precedenti

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(1), y(0), u(k), u(k-1), \cdots, u(1), u(0)\right)$$

- Supponiamo ora che il termine generico $y(k)$ dipenda soltanto da un numero finito di valori passati sia della sequenza $\{y(k)\}$ che della sequenza $\{u(k)\}$

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- In tal caso l'equazione si dice **equazione alle differenze di ordine *n***, dove ***n*** è la "*distanza temporale*" massima tra gli elementi della sequenza incognita, che compaiono nell'equazione.

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Le equazioni alle differenze finite rappresentano l'analogo a tempo discreto delle equazioni differenziali nel caso a tempo continuo.

- Ricapitolando, una **equazione alle differenze finite** è una equazione che ha come **incognita** una **funzione a tempo discreto (una successione o sequenza)**.

- L' equazione alle differenze esprime il legame tra la successione incognita ed altre successioni note, eventualmente assegnando anche opportune condizioni iniziali. Il legame viene espresso tramite una relazione che lega tra loro e/o alle successioni note i valori della successione incognita ad istanti discreti di tempo diversi:

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Il termine **equazione alle differenze** deriva dal fatto che è possibile definire le **differenze finite**

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$$

Differenza di ordine *1*

$$\nabla^2 y(k) = \nabla y(k) - \nabla y(k-1)$$

Differenza di ordine *2*

$$\nabla^3 y(k) = \nabla^2 y(k) - \nabla^2 y(k-1)$$

Differenza di ordine *3*

$$\cdots$$

$$\nabla^n y(k) = \nabla^{n-1} y(k) - \nabla^{n-1} y(k-1)$$

Differenza di ordine *n*

- I termini $y(k)$, $y(k-1)$ ecc. si possono allora esprimere in funzione delle differenze finite $\nabla^h y(k)$ appena definite [una sorta di rapporti incrementali]

$$y(k) = y(k)$$

$$y(k-1) = y(k) - \nabla y(k)$$

$$y(k-2) = y(k) - 2\nabla y(k) + \nabla^2 y(k)$$

$$\cdots$$

- Sostituendo nell'equazione

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

si ottiene

$$\hat{f}\Big(y(k), \nabla y(k), \nabla^2 y(k), \cdots, \nabla^n y(k),$$
$$u(k), \nabla u(k), \nabla^2 u(k), \cdots, \nabla^m u(k)\Big) = 0$$

- Le due espressioni sono equivalenti, ma la prima delle due (quella ricorsiva) è quella che verrà utilizzata in questo corso.

Un semplice esempio

- Partiamo dall'equazione alle differenze di ordine 2

successione nota

successione incognita

$$\boxed{u(k)} = -a_1\, u(k-1) - a_2\, u(k-2) + b_0\, \boxed{e(k)}$$

- Sostituiamo ai termini $u(k-1),\, u(k-2)$ le espressioni

$$u(k-1) = u(k) - \nabla u(k)$$

$$u(k-2) = u(k) - 2\,\nabla u(k) + \nabla^2 u(k)$$

- Si ottiene l'equazione equivalente

$$a_2 \nabla^2 u(k) - (a_1 + 2a_2)\,\nabla u(k) + (a_2 + a_1 + 1)\,u(k) = b_0 e(k)$$

Osservazioni e definizioni

- Nel caso in cui la funzione $f\,(\cdots)$ sia lineare si ottiene una **equazione lineare alle differenze di ordine n**:

$$y(k) = b_0(k)u(k) + b_1(k)u(k-1) + \cdots + b_m(k)u(k-m) +$$

$$-a_1(k)y(k-1) - a_2(k)y(k-2) - \cdots - a_n(k)y(k-n)$$

- Le equazioni lineari alle differenze rappresentano l'analogo delle equazioni differenziali lineari del caso a tempo continuo.

- In generale i coefficienti dell'equazione possono variare, al variare dell'istante di tempo considerato:

$$b_j = b_j(k),\ a_i = a_i(k)$$

Ancora definizioni

ordine n

- Se i valori dei coefficienti a_i, b_j sono costanti, si ha un' **equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti**.

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m) +$$
$$-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_n y(k-n)$$

- Questa **particolare classe** di equazioni alle differenze sarà quella di interesse nel corso.

Come si risolve un'equazione alle differenze, lineare, a coeff. costanti?

- Si può dimostrare che la **soluzione è unica** qualora siano noti i **valori iniziali** della sequenza incognita [ovviamente le altre sequenze che compaiono nell'equazione devono essere note] e l'**istante iniziale** [cioè le condizioni iniziali].

- Per ottenere campione per campione la sequenza incognita è possibile risolvere ricorsivamente l'equazione.

- Non è una tecnica efficiente! Esistono metodi più efficaci! Se ne riparlerà nel prosieguo del corso …

ordine 2

Esempio

- Si vuole risolvere l'equazione

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k)$$

a partire dall'istante $k = 0$, con condizioni iniziali

$y(k) = 0 \quad \forall k < -2$ $\qquad \boxed{y(-2) = 0\,,\ y(-1) = 0}$

e sequenza "*eccitante*" data da $u(k) = \delta(k)$

- La sequenza-soluzione risulta essere allora ("sequenza di Fibonacci")

$$y(0) = y(-1) + y(-2) + u(0) = 1 \qquad y(1) = y(0) + y(-1) + u(1) = 1$$

$$y(2) = y(1) + y(0) + u(2) = 2 \qquad y(3) = y(2) + y(1) + u(3) = 3$$

$$\cdots$$

$$\{y(k)\} = \{1\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 8\,,\ 13\,,\ 21\,,\ 34\,,\ \ldots\}$$

Esempio (continua…)

- Script in Matlab® per determinare i primi 10 campioni

```
N = 10; % i primi N+1 valori della sequenza soluzione
ym1 = 0; ym2 = 0; % valori iniziali
% y(-1) -> ym1  || y(-2) -> ym2

% preallocazione delle variabili
uk = zeros(N+1,1);
uk(1) = 1; % il primo campione e' pari ad 1, tutti gli altri
sono nulli
y_offset = 2; % due le condizioni iniziali su y
yk = zeros(N+1+y_offset,1); % prealloco anche per le
condizioni iniziali
% (continua…)
```

```
clc
disp('======================================');
disp('soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)');
disp('con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)');
fprintf(1, '\n valutati i primi %g valori della soluzione \n',N);
disp('======================================');
for k = 0 : N
    % ciclo sugli istanti di tempo per cui
    % si vuole risolvere l'equazione
    % alle differenze
    ik = k+1; % indice per i vettori uk ed yk
    yk(ik+y_offset) = yk(ik+y_offset-1) + ...
                      yk(ik+y_offset-2) + uk(ik);

    messaggio = sprintf('al passo %d valore di y %.2f',…
                         k,yk(ik+y_offset));
    disp(messaggio); % visualizza risultato
end % for
disp('======================================');
```

- Risultato visualizzato in Matlab®

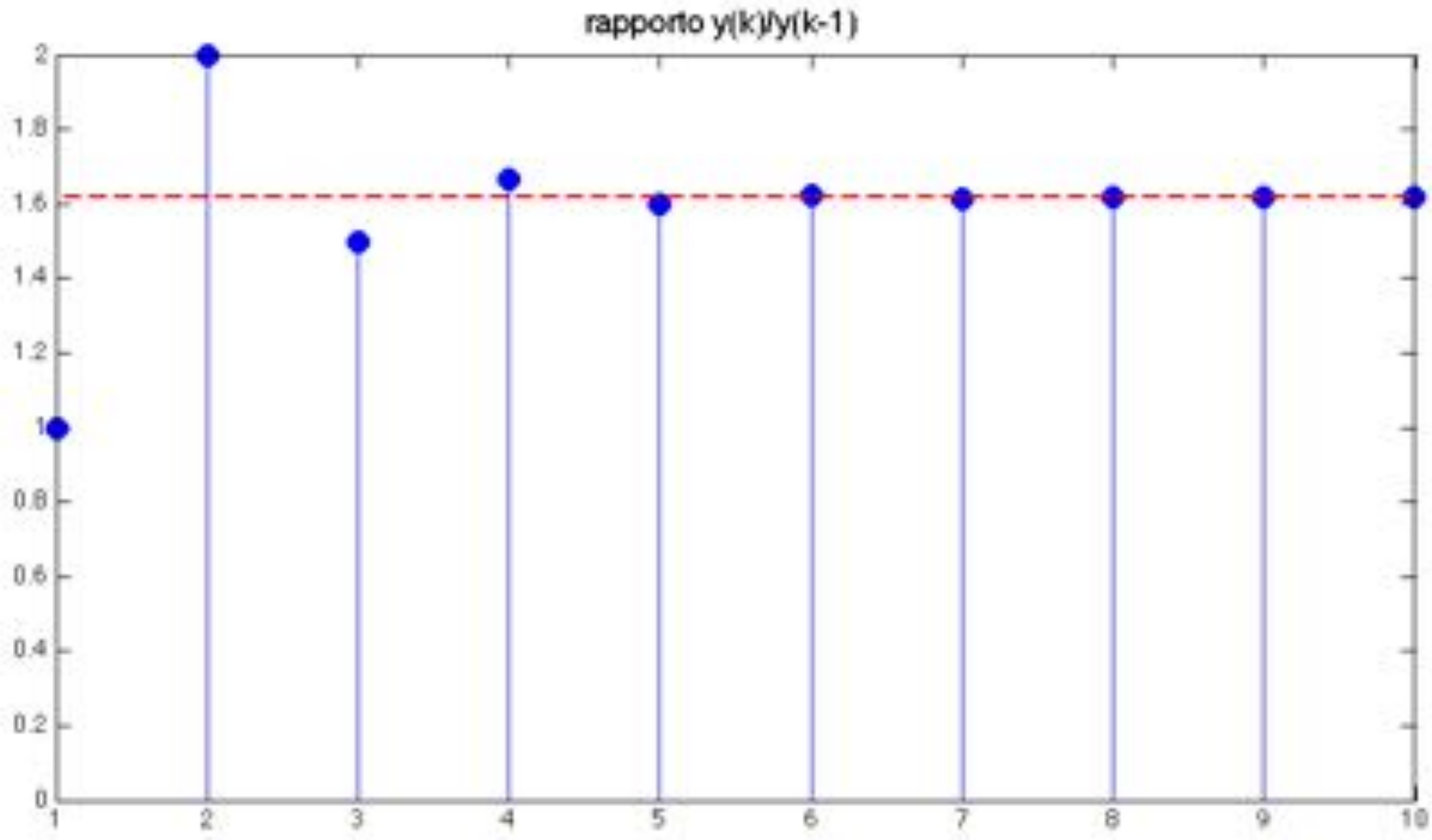
```
======================================
soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)
con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)

 valutati i primi 10 valori della soluzione
======================================
al passo 0 valore di y 1.00
al passo 1 valore di y 1.00
al passo 2 valore di y 2.00
al passo 3 valore di y 3.00
al passo 4 valore di y 5.00
al passo 5 valore di y 8.00
al passo 6 valore di y 13.00
al passo 7 valore di y 21.00
al passo 8 valore di y 34.00
al passo 9 valore di y 55.00
al passo 10 valore di y 89.00
======================================
```

Esempio (continua…)

- Quale è il comportamento della sequenza soluzione? Diverge? Converge ad un valore finito?
- Il comportamento da che cosa dipende? Dalle condizioni iniziali? Dal segnale di eccitazione?
- Provare a cambiare le condizioni iniziali ed a risolvere di nuovo in maniera ricorsiva l'equazione…
- Provare ad utilizzare un altro segnale di eccitazione (con ampiezza limitata)…

- ultima parte dello script

```
%--analisi del termine k-esimo della successione--
% viene disegnato l'andamento del rapporto
% y(k)/y(k-1) per k=2,3,....
rapporto_k_km1 = yk(y_offset+2:end)./yk(y_offset+1:end-1);
figure('Name','successione di Fibonacci');
stem(rapporto_k_km1,'fill');
title('rapporto y(k)/y(k-1)');
hold on;
Fidia_n = (1+sqrt(5))/2;
plot(ones(size(rapporto_k_km1))*Fidia_n, 'r--');
```



$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \qquad u(k) = \delta(k)$$

$$y(-2) = 0\,,\; y(-1) = 0 \qquad y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

Un altro esempio

- Proviamo a modificare l'equazione alle differenze, in questo modo

$$y(k) = y(k-1) - y(k-2) + u(k)$$

- A parità di condizioni iniziali e di segnale eccitante, come evolve la soluzione stavolta?

$$y(-2) = 0\,,\ y(-1) = 0 \qquad u(k) = \delta(k)$$

$$y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

$$\{y(k)\} = \{\boxed{1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -1\,,\ 0}\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -1\,,\ 0\,,\ \cdots\}$$

Osservazioni

- La formulazione presentata finora per le equazioni alle differenze non è l'unica possibile.

- L'espressione
$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$
esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**, che fornisce il valore all'istante attuale della successione incognita $\{y(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{y(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k)\}$

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Esiste anche la possibilità di esprimere le equazioni alle differenze tramite una **relazione ricorsiva in avanti**

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

- Questa relazione fornisce allora un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{y(k)\}$[in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{y(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k)\}$.

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

Ancora altre osservazioni

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva "all'indietro", in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all'istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$

$\{u(k)\}$ nota $\forall k \geq 0$ $\qquad$ $\{y(k)\}$ incognita $\forall k \geq 0$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(-n),\ y(-n+1),\ y(-n+2),\ \cdots\ y(-1)$$

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “in avanti”, in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

$$\{u(k)\}\ \text{nota}\,\forall k \geq 0 \qquad\qquad \{y(k)\}\ \text{incognita}\,\forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(0),\ y(1),\ y(2),\ \cdots\ y(n-1)$$

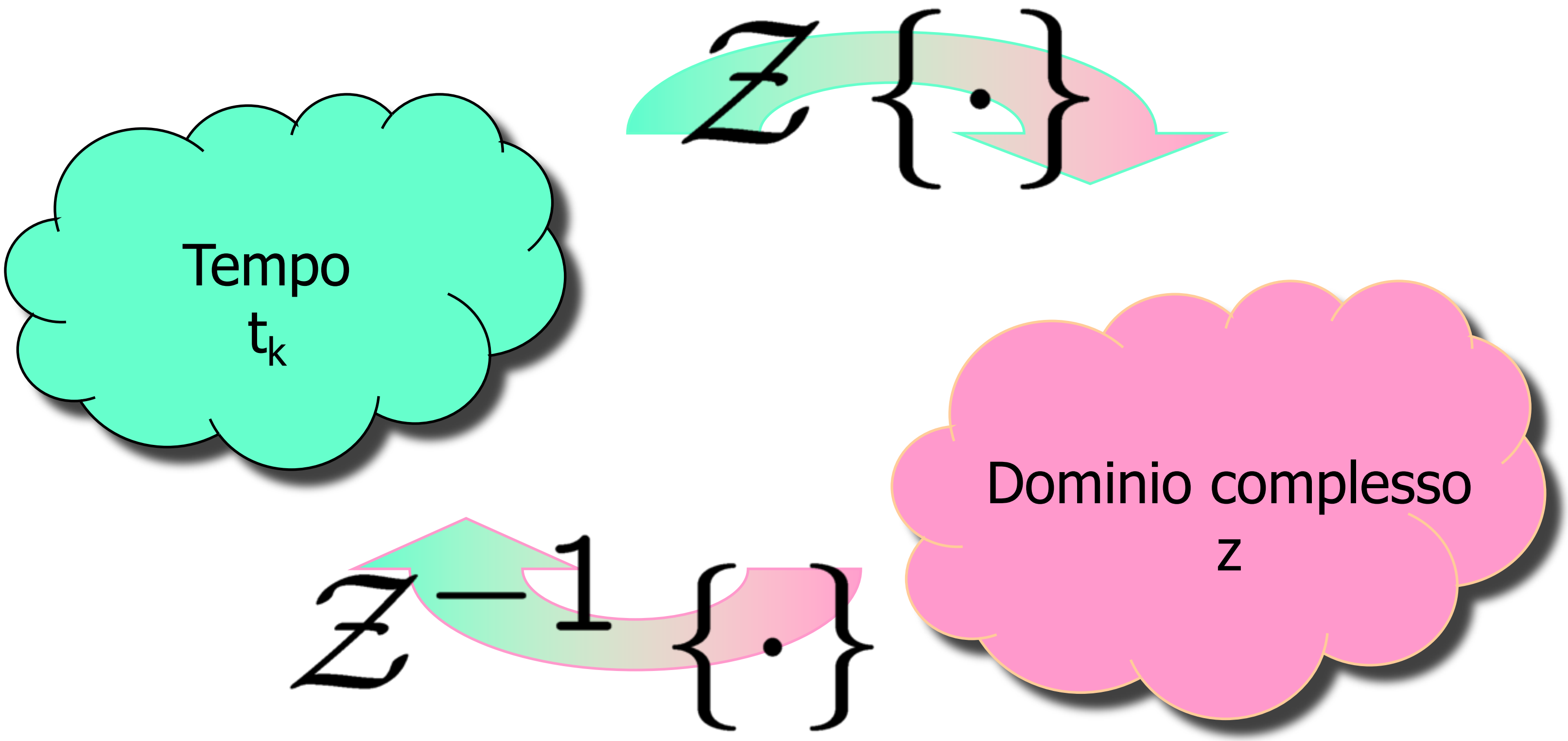
La Z-trasformata

Definizione, proprietà, trasformate elementari

Antitrasformazione

Teoremi

La Z-trasformata è un OPERATORE funzionale



La Z-trasformata: definizione

segnale causale

La Z-trasformata della successione $\{x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$

$0\,, \quad \forall k < 0$

è la funzione di variabile complessa $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$

Raggio di convergenza: tipicamente la serie che definisce la trasformata converge al di fuori di un cerchio nel piano della variabile complessa z :

$$|z| > R, \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

NON verrà richiesto il calcolo del raggio di convergenza!
Faremo l'ipotesi di operare sempre in una regione in cui la Z-trasf. esiste!

Nel caso di segnali campionati:

- Se il segnale a tempo discreto è stato generato per campionamento, si definisce la Z-trasformata della successione in maniera analoga :

$$\{x(kT_s), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$0\,, \quad \forall k < 0$$

SEMPRE segnale causale

$$\Updownarrow$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) z^{-k}$$

Notazioni ed osservazioni

- In generale non viene esplicitamente indicato l'intervallo di campionamento T_s con il quale è stata eventualmente ottenuta la sequenza $x(kT_s)$ ma semplicemente la si indica con $x(k)$
- Nella maggioranza dei casi, le Z-trasformate che considereremo saranno funzioni polinomiali (in particolare frazioni con polinomi a numeratore e denominatore).
- L'espressione di una Z-trasformata (nei casi di nostro interesse) può essere espressa tramite potenze di z oppure di z^{-1}

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{4+6z^{-1}+8z^{-2}} \quad \longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^2-2z}{4z^2+6z+8}$$

Sono due descrizioni diverse della stessa X(z)

- Dal punto di vista algebrico sono equivalenti. L'unica difficoltà sta nel definire zeri e poli, perché nelle due notazioni sono differenti [zeri e poli sono le radici dei polinomi a numeratore ed a denominatore]. Per poli e zeri useremo sempre la notazione con potenze di z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \textbf{Zeri}\text{: radici di } N(z) \\ \textbf{Poli}\text{: radici di } D(z) \end{cases}$$

- Per ammettere Z-trasformata nel modo in cui è stata definita, le sequenze che consideriamo devono essere **causali**, ovvero

$$x(k) \equiv 0, \quad \forall k < 0$$

Esempio

- Consideriamo la Z-trasformata

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5\,z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z+1)\,(z+2)}$$

- È immediato determinare zeri e poli dell'espressione analizzata.

- Se la Z-trasformata fosse espressa tramite potenze di z^{-1}, lo zero in $z = 0$ non sarebbe più così facilmente individuabile

$$X(z) = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{1 + 3\,z^{-1} + 2\,z^{-2}} = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{(1 + z^{-1})\,(1 + 2\,z^{-1})}$$

Proprietà della Z-trasformata

- **Linearità**

$$\mathcal{Z}\left[c_1\, f(k) + c_2\, g(k)\right] \;=\; c_1\, \mathcal{Z}\left[f(k)\right] + c_2 \mathcal{Z}\left[g(k)\right]$$

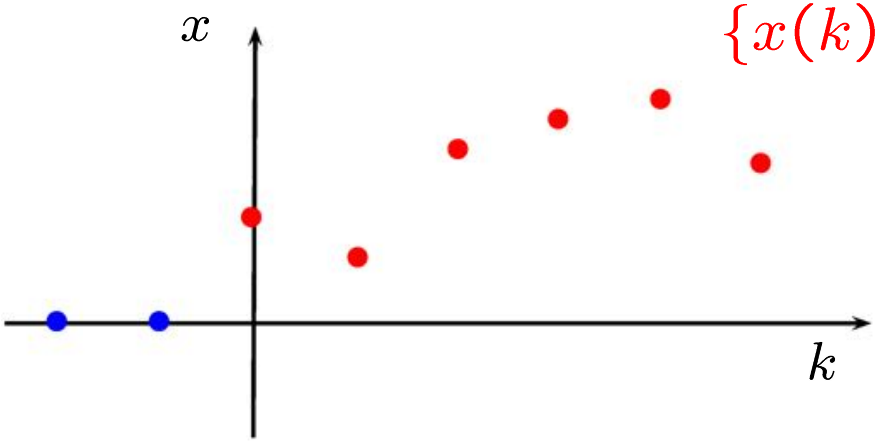
- **Traslazione nel tempo: anticipo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k+1)\right] \;=\; z\left[X(z) - x(0)\right]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di m campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k+m)\right] \;=\; z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)\, z^{-k}\right]$$

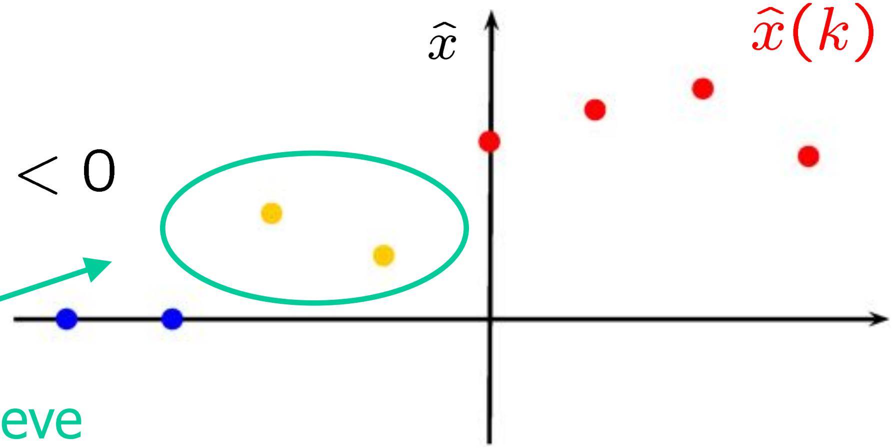
$\{x(k)\}$



anticipo di 2 passi

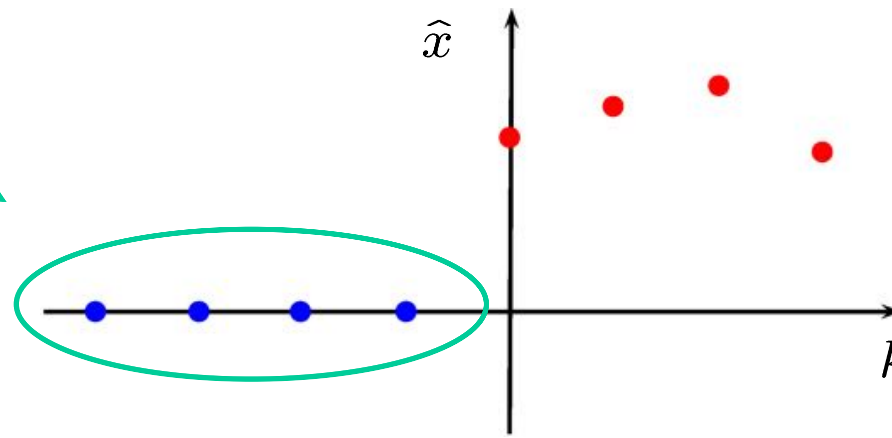
$$\hat{x}(k) = x(k+2)$$

$$\hat{x}(k) \equiv 0 \ \forall\, k < 0$$



il nuovo segnale deve essere anch'esso causale!

$$\{\hat{x}(k) = x(k+2)\}$$



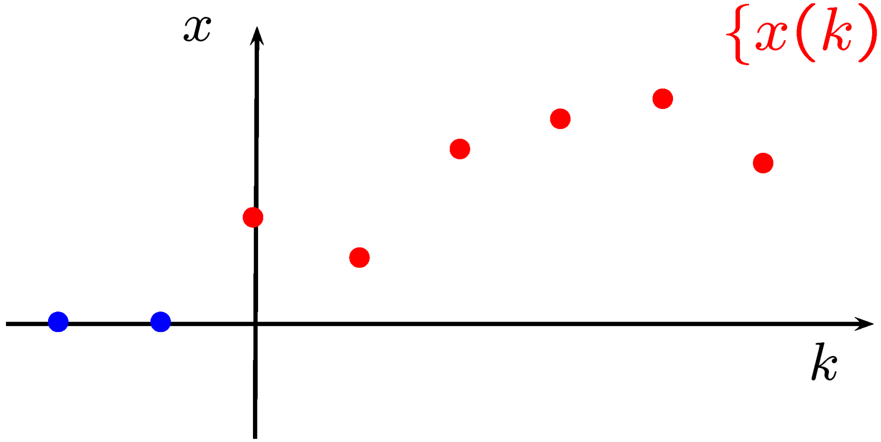
- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

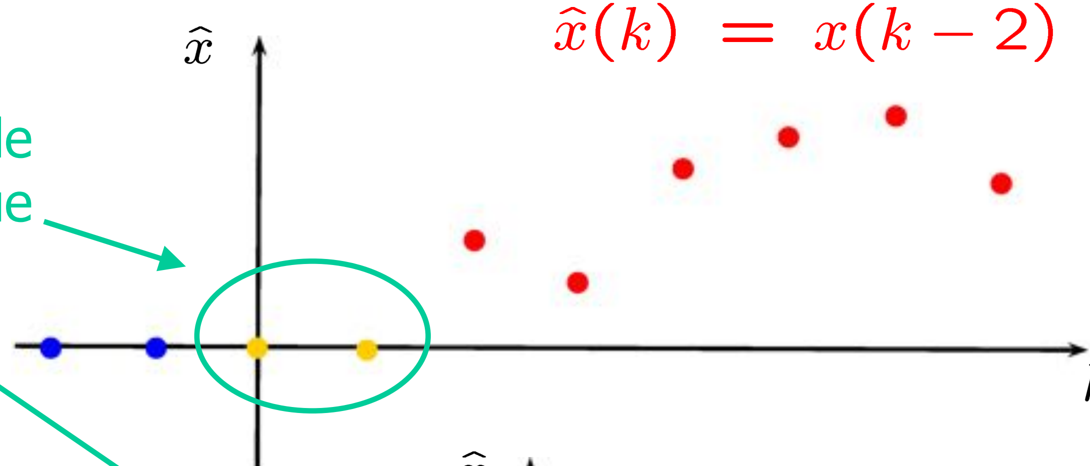
$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$

$$\{x(k)\}$$

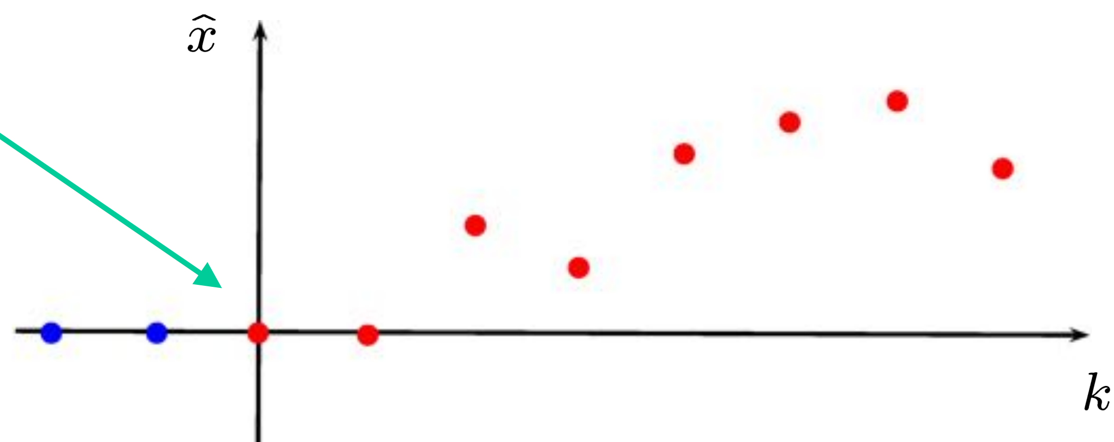


ritardo di 2 passi

$$\hat{x}(k) = x(k-2)$$



il nuovo segnale inizia con due campioni nulli!



$$\{\hat{x}(k) = x(k-2)\}$$

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{Z}\left\{a^k x(k)\right\} = X\left(a^{-1} z\right)$$

- **Differenziazione complessa**

$$\mathcal{Z}\left\{k\, x(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

confrontare con $\mathcal{L}\left\{t \cdot x(t)\right\}$

Prodotto di convoluzione

I segnali sono causali.

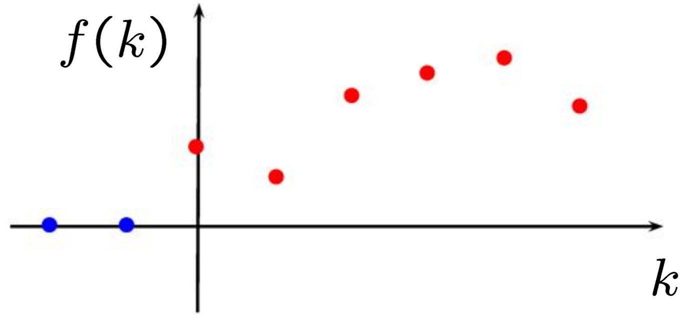
$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$

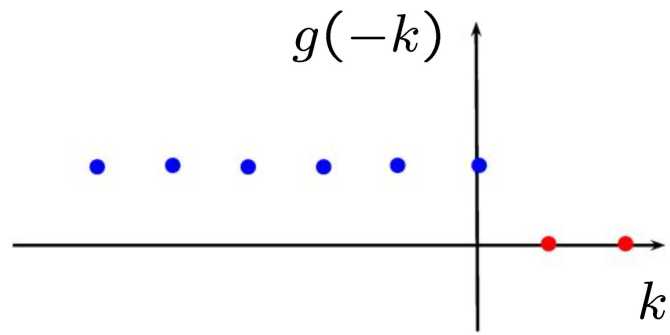
$$h(n) := \sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, g(n-k)$$

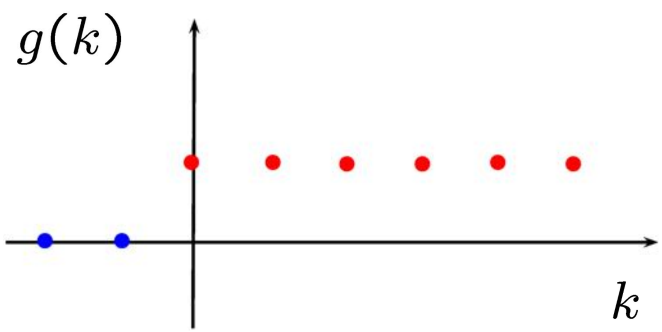
$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)\, g(k)$$

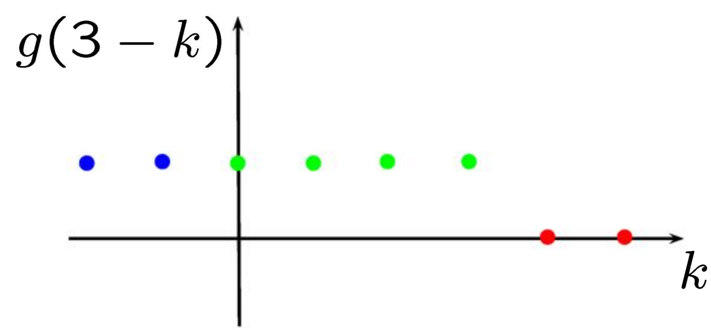
$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = F(z)\, G(z)$$

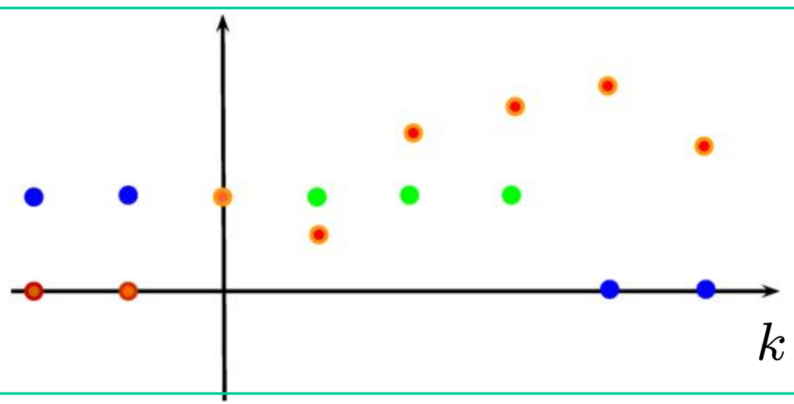
$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$











$$h(3) := \sum_{k=0}^{3} f(k)\, g(3-k)$$

Teorema del valore iniziale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata,

se esiste **finito** $\lim_{z \to \infty} X(z)$ allora

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{k \to 0} x(k) = x(0)$$

Teorema del valore finale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata $X(z)$,

se **tutti i poli** di $X(z)$ **hanno modulo minore di 1**, **escluso al più un polo semplice in z = 1**, allora esiste finito $\lim_{k \to \infty} x(k)$ e

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} \left[\left(1 - z^{-1}\right) X(z) \right]$$

Esempio: applicazione dei teoremi

- Si consideri la Z-trasformata $$Y(z) = \frac{2\,z+1}{(z-1)\,(3\,z+1)}$$

- Sfruttando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, determinare:

$$y(0) = ? \qquad y(1) = ? \qquad \lim_{k \to \infty} y(k) = ?$$

- Per il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)} = 0$$

- Applicando la regola dell'anticipo ed ancora il teorema del valore iniziale si ottiene poi:

cfr. appunti

$$y(1) = \lim_{z\to\infty} z\,[Y(z) - y(0)] = \lim_{z\to\infty} \frac{z\,(2z+1)}{(z-1)(3z+1)} = \frac{2}{3}$$

- Applicando infine il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)} = \frac{3}{4}$$

$$(1 - z^{-1}) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)$$

$$\tilde{y}(k) = y(k+1)$$

$\Downarrow$ per $k=0$

$$\tilde{y}(0) = y(1)$$

usando la Z trasformata allora

$$\tilde{Y}(z) = z\left[Y(z) - y(0)\right] = z\,Y(z)$$

ma $y(0) = 0$

Esempio: soluzione di una equazione alle differenze

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k+1) = 3y(k) + y(k-1) + u(k) \qquad y(k) \equiv 0 \forall k < 0$$

Applicando la Z-trasformata ad ambo i membri, per le proprietà viste si ottiene

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^2 y(0)}{z^2 - 3z - 1}}_{\text{dipende dalle condizioni iniziali (soluzione libera)}} + \underbrace{\frac{z}{z^2 - 3z - 1} U(z)}_{\text{dipende dalla sequenza d'ingresso (soluzione forzata)}}$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z) \xRightarrow{\text{per linearità}} \mathcal{Z}\{3y(k)\} = 3Y(z)$$

per la proprietà di traslazione/ritardo $\Rightarrow \mathcal{Z}\{y(k-1)\} = z^{-1}Y(z)$

per la proprietà di traslazione/anticipo

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{y(k+1)\} = z\left[Y(z) - y(0)\right]$$

In definitiva $\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = \mathcal{Z}\{3y(k)\} + \mathcal{Z}\{y(k-1)\} + \mathcal{Z}\{u(k)\}$

cioè

$$\Rightarrow zY(z) - zy(0) = 3Y(z) + z^{-1}Y(z) + U(z)$$

Raccolgo $Y(z)$ ed ottengo

$$(z - 3 - z^{-1})Y(z) = zy(0) + U(z)$$

$$\frac{z^2 - 3z - 1}{z}Y(z) = zy(0) + U(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z - 1} \cdot zy(0) + \frac{z}{z^2 - 3z - 1}U(z)$$

Trasformate notevoli

- **Impulso unitario**

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

- **Scalino unitario**

NB

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

Dimostrazione

Serie geometrica

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

- **Rampa**

NB

$$x(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, z^{-k} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Segnale polinomiale

$$x(k) = \begin{cases} k^n & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \left(-z\,\frac{d}{d\,z}\right)^n \left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa *n* volte

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n\, z^{-k} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{z-1}\right]$$

Dimostrazione (cenni – continua)

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{k\left(k\left(k\left(\cdots\left(k\cdot 1\right)\right)\right)\right)}_{n \text{ volte}} z^{-k}$$

$$= \underbrace{\left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\cdots\left(-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]\right)\right)\right)}_{n \text{ volte l'operatore } -z\frac{d}{dz}}$$

Esempio

$$\mathcal{Z}\left\{k^2\cdot 1(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right) = \frac{z\left(z+1\right)}{\left(z-1\right)^3}$$

NB

- **Potenza con esponente intero**

NB

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-a)}$$

Dimostrazione

$$\frac{z}{a} \triangleq \eta$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^k 1(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \frac{\eta}{(\eta - 1)} = \frac{z}{(z-a)}$$

- **Esponenziale**

$$x(k) = \begin{cases} e^{ak} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-e^a)}$$

NB

Segnali sinusoidali

$$x(k) = \sin(\omega k)\, 1(k)$$

NB

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z \sin\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

$$\sin(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} \qquad \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

NB

$$x(k) = \cos(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

Segnali "composti"

$$x(k) = a^k \sin(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{az \sin\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

NB

$$x(k) = a^k \cos(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - az\cos\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

NB

Polinomio fattoriale di ordine *n*

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} 1(k)$$

con

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(n)}}{n!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} & \text{per} \quad n > 0,\, k \geq n \\ 0 & \text{per} \quad n > 0,\, k < n \end{cases}$$

NB

$$\mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$x(k) = \binom{k}{n} \cdot 1(k) \qquad \mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

con

$$\binom{k}{n} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } n > 0 \\ k \geq n \end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } n = 0] \end{cases}$$

Cenni di dimostrazione

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1(k) = k \cdot 1(k) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1(k) = \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left\{k^2 \cdot 1(k)\right\} - \mathcal{Z}\{k \cdot 1(k)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1(k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$

$$= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \frac{1}{6}\mathcal{Z}\left\{k^3 \cdot 1(k)\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{k^2 \cdot 1(k)\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{Z}\left\{k \cdot 1(k)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{z\left(z^2+4z+1\right)}{(z-1)^4} - \frac{1}{2}\,\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^4}$$

- **Polinomio fattoriale di ordine *n* pesato da potenza con esponente intero**

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} 1(k)$$

NB

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k}\right]$$

Traslazione in frequenza

Polinomio fattoriale

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \frac{z\, a^{-1}}{\left(z\, a^{-1} - 1\right)^{n+1}} = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

La Z-antitrasformata

La Z-antitrasformata della funzione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

è definita come la sequenza

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z)\, dz$$

in cui Γ è una curva chiusa contenuta nella regione di convergenza.

Non faremo uso di questa formula generale!
Vogliamo sfruttare la particolarità delle $\Longrightarrow$
Z-trasformate utilizzate nello studio dei sistemi dinamici lineari

Si consideri una classe particolare di funzioni $X(z)$, ovvero le funzioni

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}$$

dove assumiamo $m \leq n$ ovvero

$$X(z) = K \frac{(z-z_1)^{m_1} (z-z_2)^{m_2} \ldots (z-z_r)^{m_r}}{(z-p_1)^{n_1} (z-p_2)^{n_2} \ldots (z-p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$$

$z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ zeri ,

$p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}$ poli

Tecniche di Z anti-trasformazione

- Tecniche numeriche:
  - "long-division"
  - ~~metodo "computazionale"~~
- Tecniche analitiche
  - espansione in fratti semplici

Tecnica della "Long-division" o divisione ripetuta

- Si tratta di una tecnica semplice che permette di determinare **termine a termine** gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

- È opportuno esprimere $X(z)$ in funzione di potenze negative $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

Si esegue la divisione ripetuta del polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore:

$$\begin{array}{l|l}
10z^{-1} + 5z^{-2} & 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \\
\hline
-10z^{-1} + 12z^{-2} - 2z^{-3} & 10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 17z^{-2} - 2z^{-3} &
\end{array}$$

- Il risultato è una combinazione lineare di potenze negative

$$10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots$$

- Ricordando che, per definizione, si ha

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

per semplice confronto si ottiene la sequenza

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 10 \\ x(2) &= 17 \\ &\ldots \end{aligned}$$

“Long division”: riassumendo

- Metodo numerico e ricorsivo: fornisce i **valori** numerici della successione **termine a termine**, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa su operazioni di divisione di polinomi: è una tecnica **semplice** dal punto di vista **computazionale** (**vantaggio**).

Metodo "computazionale"

Si tratta di un' altra tecnica semplice che permette di determinare termine a termine gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

Idea: metto in evidenza il termine "1", che è la Z-trasformata di …

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot 1 = \frac{N(z)}{D(z)} U(z)$$

argomento NON trattato per l'a.a. 2018/19

$$D(z)\, X(z) = N(z)\, U(z)$$

Utilizzando le proprietà viste per la Z-trasformata si perviene all'equazione alle differenze:

$$a_n\, x(k+n) + a_{n-1}\, x(k+n-1) + \ldots + a_0\, x(k) \;=$$

$$b_m\, u(k+m) + b_{m-1}\, u(k+m-1) + \ldots + b_0\, u(k)$$

argomento NON trattato per l'a.a. 2018/19

Non rimane che determinare le condizioni ini

termine a termine l'equazione alle differenze.

I campioni così determinati sono i valori della successione che è la Z-antitrasformata cercata.

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}$$

$$\left(z^2 - 1.2z + 0.2\right) X(z) = (10z+5)\, U(z)$$

$$x(k+2) - 1.2x(k+1) + 0.2x(k) = 10u(k+1) + 5u(k)$$

- $U(z) = 1 \Rightarrow u(k) = \begin{cases} 1 & k \\ 0 & k \end{cases}$
- $x(k) = 0, \forall k < 0$

argomento NON trattato per l'a.a. 2018/19

$k = -2 \Rightarrow x(0) = 0$

$k = -1 \Rightarrow x(1) = 10$

$\vdots$

Metodo “computazionale”: riassumendo

- Metodo **numerico** e **ricorsivo**: fornisce i valori della successione termine a termine, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa sulla supposizione che la Z-trasforma
rappresenti un’equazione alle differenze con con
ad impulso discreto, centrato nell’origine: è una
punto di vista computazionale (**vantaggio**).

argomento NON trattato per l’a.a. 2018/19

Espansione in fratti semplici

- Si tratta di una **tecnica analitica** per determinare la sequenza

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

- Si esprime $X(z)$ come somma di un numero finito di termini elementari di cui si sa determinare la Z-antitrasformata

- Il primo passo consiste nell'aggiungere un termine z al denominatore (ciò si può sempre fare):

$$X(z) \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \ldots \frac{C_n}{z-p_n}$$

Z-trasformata con 2 poli reali distinti, di molteplicità 1

$$X(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)(z-p_2)} \leftarrow N(z) \text{ polinomio di grado } \leq 2$$

Esprimo $X(z)$ come combinazione lineare di 2 Z-trasformate elementari $\longrightarrow$

$$X(z) = C_1 \cdot \frac{z}{z-p_1} + C_2 \cdot \frac{z}{z-p_2}$$

?

Come determinare i valori di C_1 e C_2 ?

$$X(z) = \frac{C_1 \cancel{z}}{z - p_1} + \frac{C_2 \cancel{z}}{z - p_2} \quad \Big/ \frac{1}{z}$$

Manipolo l'espressione di $X(z)$ dividendo entrambi i membri per z → Lo posso SEMPRE fare!

$$\boxed{\frac{X(z)}{z}} = \underbrace{\frac{C_1}{z - p_1} + \frac{C_2}{z - p_2}}$$

$$\Downarrow$$

questa espressione ha la stessa struttura dello sviluppo in fratti semplici utilizzato per determinare la trasformata inversa (anti-trasformata) di Laplace.
Possiamo usare allora le tecniche già studiate per determinare i residui [i coefficienti C_{ij}] nello sviluppo in fratti semplici!

$$\left[\frac{X(z)}{z}\right] = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2}$$

applico la formula per il calcolo dei residui nel caso di poli semplici

$$C_1 = \lim_{z \to p_1} (z-p_1)\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}$$

$$C_2 = \lim_{z \to p_2} (z-p_2)\left\{\frac{X(z)}{z}\right\}$$

come procedo quando ho trovato i valori di C_1 e C_2?

ripristino l'espressione di $X(z)$

$$X(z) = C_1 \cdot \frac{z}{z-p_1} + C_2 \frac{z}{z-p_2}$$

NB $\frac{z}{z-a} \Leftrightarrow \left\{a^k \cdot 1(k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Esempio: poli tutti distinti

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 1.2z + 0.2} \quad / \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{10}{(z-1)(z-0{,}2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$$

$$C_1 = \lim_{z\to 1} \frac{10}{z-0.2} = 12.5$$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.2} \frac{10}{z-1} = -12.5$$

$$X(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2}$$

$$x(k) = 12.5 \cdot 1(k) - 12.5 \cdot 0.2^k\, 1(k)$$