contiene il materiale
annotato del 18/03/2019

Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

Osservazioni

- La formulazione presentata finora per le equazioni alle differenze non è l'unica possibile.

- L'espressione
$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$
esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**, che fornisce il valore all'istante attuale della successione incognita $\{y(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{y(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k)\}$
- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Esiste anche la possibilità di esprimere le equazioni alle differenze tramite una **relazione ricorsiva in avanti**

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

- Questa relazione fornisce allora un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{y(k)\}$[in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{y(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k)\}$.

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

Ancora altre osservazioni

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “all’indietro”, in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$

$\{u(k)\}$ nota $\forall k \geq 0$ $\qquad$ $\{y(k)\}$ incognita $\forall k \geq 0$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(-n),\ y(-n+1),\ y(-n+2),\ \cdots\ y(-1)$$

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “in avanti”, in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

$$\{u(k)\}\ \text{nota}\,\forall k \geq 0 \qquad\qquad \{y(k)\}\ \text{incognita}\,\forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(0),\ y(1),\ y(2),\ \cdots\ y(n-1)$$

La Z-trasformata

Definizione, proprietà, trasformate elementari
Antitrasformazione
Teoremi

In generale:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1\,1}}{(z-p_1)} + \dots \frac{C_{1\,n_1}}{(z-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{C_{2\,1}}{(z-p_2)} + \dots \frac{C_{2\,n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \dots$$

$$\frac{C_{q\,1}}{(z-p_q)} + \dots \frac{C_{q\,n_q}}{(z-p_q)^{n_q}}$$

$$C_{i\,j} = \frac{1}{(n_i-j)!} \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i-j)}}{d\,z^{(n_i-j)}} \frac{X(z)}{z} (z-p_i)^{n_i} \right\}$$

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i\,j}\, z}{(z-p_i)^j}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}\, z}{(z-p_i)^j}\right] = C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\;1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\;1(k)$$

Caso in cui tutti i poli sono distinti:

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right] = C_i\, p_i^k\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i\, p_i^k\, 1(k)$$

$$C_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{X(z)}{z}(z-p_i) \right\}$$

Esempio: poli tutti distinti

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 1.2z + 0.2} \quad / \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{10}{(z-1)(z-0,2)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$$

$$C_1 = \lim_{z\to 1} \frac{10}{z-0.2} = 12.5$$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.2} \frac{10}{z-1} = -12.5$$

$$X(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2}$$

$$x(k) = 12.5 \cdot 1(k) - 12.5 \cdot 0.2^k\, 1(k)$$

Esempio: poli multipli

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 2.7\,z^2 + 2.4\,z - 0.7} \quad / \cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-0.7} + \frac{c_{2,1}}{z-1} + \frac{c_{2,2}}{(z-1)^2}$$

$$c_1 = \left[(z-0.7)\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.7} = 11,\bar{1} \qquad \lim_{z \to 0,7} \frac{X(z)}{z} \cdot (z-0,7)$$

$$c_{2,2} = \left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = 3,\bar{3}$$

$$c_{2\,1} = \left\{\frac{d}{d\,z}\left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]\right\}_{z=1} = -11,\bar{1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{11.\bar{1}}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}}{z-1} + \frac{3.\bar{3}}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{11.\bar{1}\,z}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}\,z}{z-1} + \frac{3.\bar{3}\,z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \left[11.\bar{1}\,(0.7)^k + 3.\bar{3}\,k - 11.\bar{1}\right] 1(k)$$

Espansione in fratti semplici: riassumendo

- Metodo **analitico**: fornisce direttamente la **forma chiusa** della soluzione (**vantaggio**)

$$X(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{x(k)\}$$

- Si basa su tecniche d'analisi e proprietà di funzioni di variabile complessa: è una **tecnica "pesante"** dal punto di vista computazionale (**svantaggio**).

Analisi qualitativa di una Z-Trasformata

- Assegnata una trasformata $X(z)$, che cosa si può affermare, in maniera qualitativa, in merito all'andamento del segnale $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$?

- Ad esempio: in quali condizioni $x(k)$ … è un seg… …te, oppure divergente, oppure tenderà a 0?

cfr. Parte 3 del materiale del corso

- L'evoluzione temporale del segnale $x(k)$ può … modo qualitativo, analizzando i poli della … trasformata $X(z)$.

Analisi qualitativa: poli semplici

Verranno considerate le trasformate elementari:

- $$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

- $$X(z) = \frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2} \qquad a$$

cfr. Parte 3 del
materiale del corso

Poli reali semplici:

- Il termine elementare è $$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

  al quale corrisponde la sequenza elementare

  $$x(k) = a^k \, 1(k), \qquad k \geq 0$$

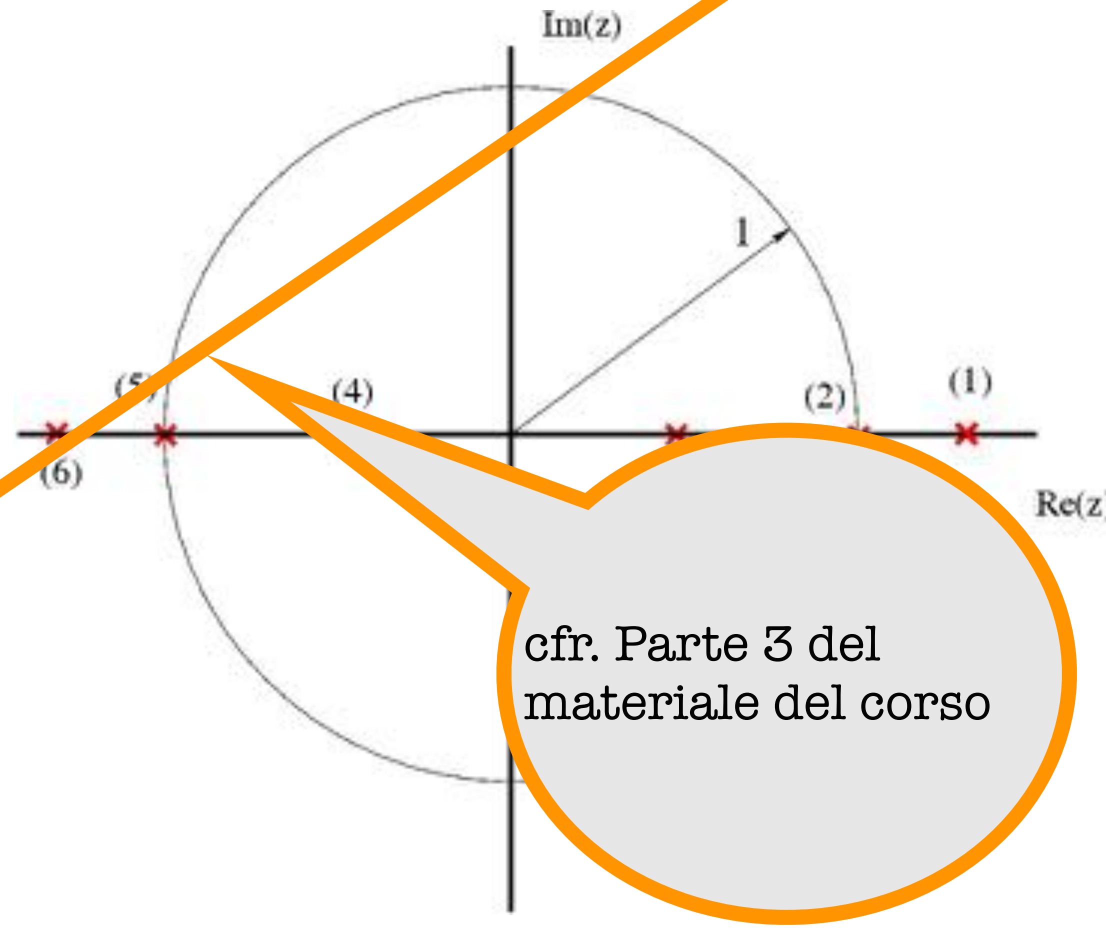
- Come varia il comportamento della sequen[illegible] al variare della posizione del polo $p = a$?

cfr. Parte 3 del
materiale del corso

Poli reali semplici:

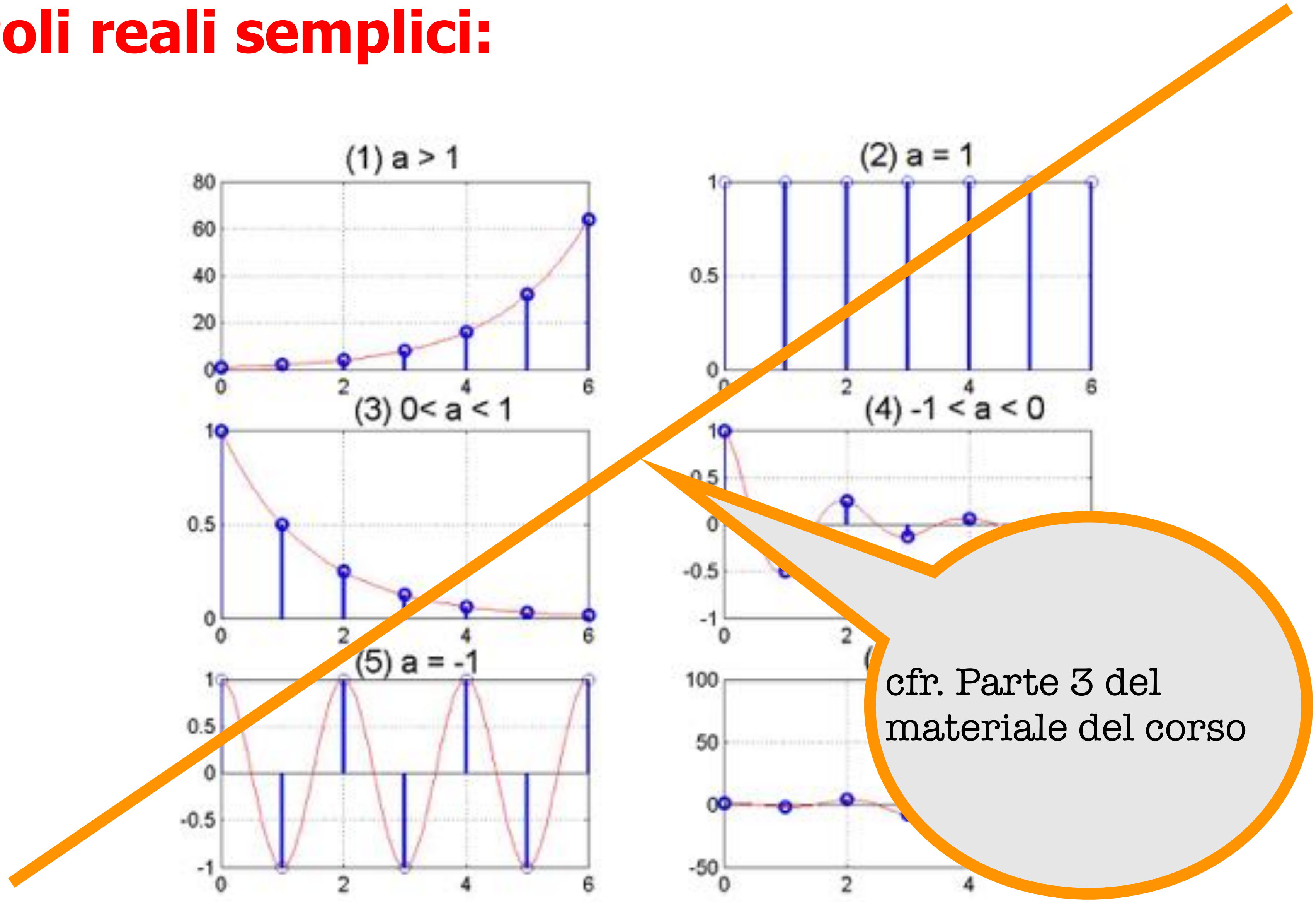
Consideriamo sei possibili posizioni per il polo p.

A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(k)$



cfr. Parte 3 del materiale del corso

Poli reali semplici:



Poli reali semplici:

In definitiva:

Vale anche per poli multipli!

- $|a| < 1$ ⇒ $x(k) \rightarrow 0$, per $k \rightarrow \infty$
- $|a| = 1$ ⇒ $|x(k)| = 1, \forall, k$
- $|a| > 1$ ⇒ $x(k) \rightarrow \infty$, per $k \rightarrow \infty$

Nel caso di poli multipli, la successione diverge!

cfr. Parte 3 del materiale del corso

Poli complessi coniugati (semplici):

- Il termine elementare è

$$X(z) = \frac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \qquad a,\, \omega \in \mathbb{R}$$

al quale corrisponde la sequenza elementare

$$x(k) = a^k \sin(\omega\, k)$$

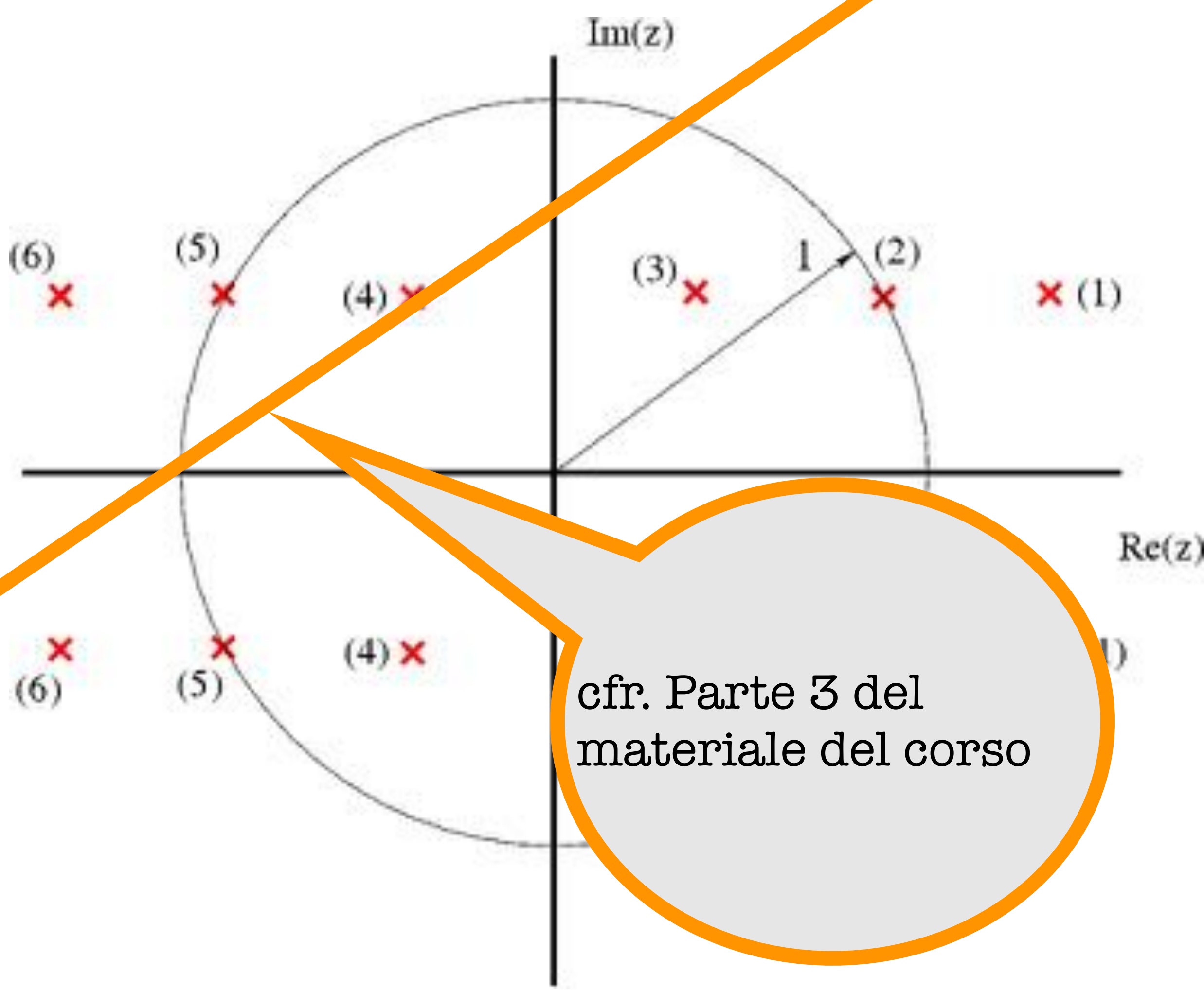
- Come varia il comportamento della [illegible] e $x(k)$ al variare della posizione dei poli [illegible] el piano complesso?

cfr. Parte 3 del materiale del corso

Poli complessi coniugati (semplici):

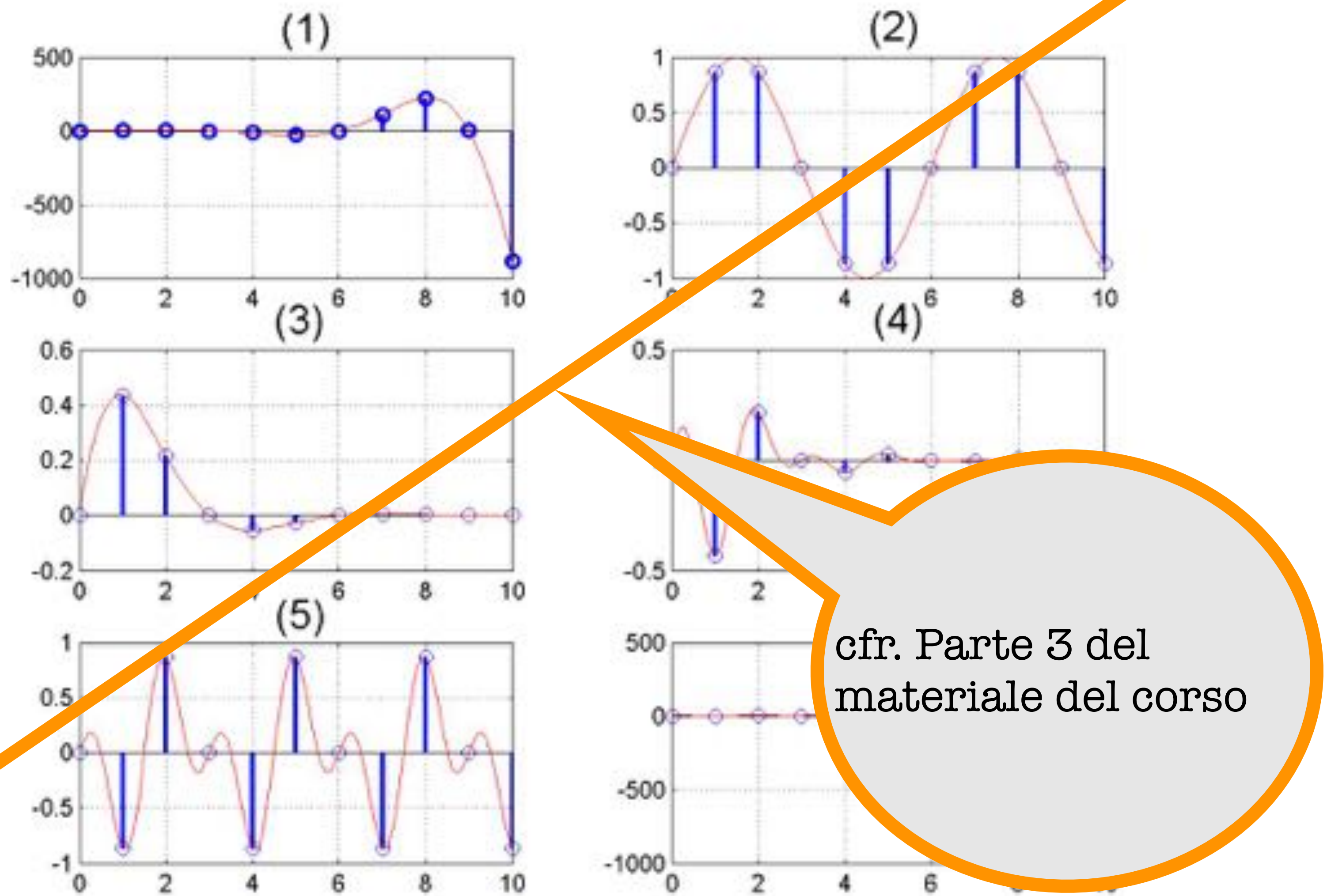
Consideriamo sei possibili posizioni per la coppia di poli.

A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(\kappa)$



cfr. Parte 3 del materiale del corso

Poli complessi coniugati (semplici):



Poli complessi coniugati (semplici):

In definitiva:

Vale anche per poli multipli!

- $|p_{1,2}| < 1 \Rightarrow x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$
- $|p_{1,2}| = 1 \Rightarrow |x(k)| \text{ limitato } \forall k$
- $|p_{1,2}| > 1 \Rightarrow x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Nel caso di poli multipli, la successione diverge!

cfr. Parte 3 del materiale del corso

Poli multipli: poli reali

- Il termine elementare è

$$X(z) = C \frac{z}{(z-a)^n} \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad n > 1$$

- al quale corrisponde la sequenza elementare

$$x(k) = C \binom{k}{n-1} a$$

cfr. Parte 3 del
materiale del corso

- Come varia il comportamento della sequenza
al variare della posizione del polo $p = a$

- Ricordando l'espressione del polinomio fattoriale è possibile scrivere

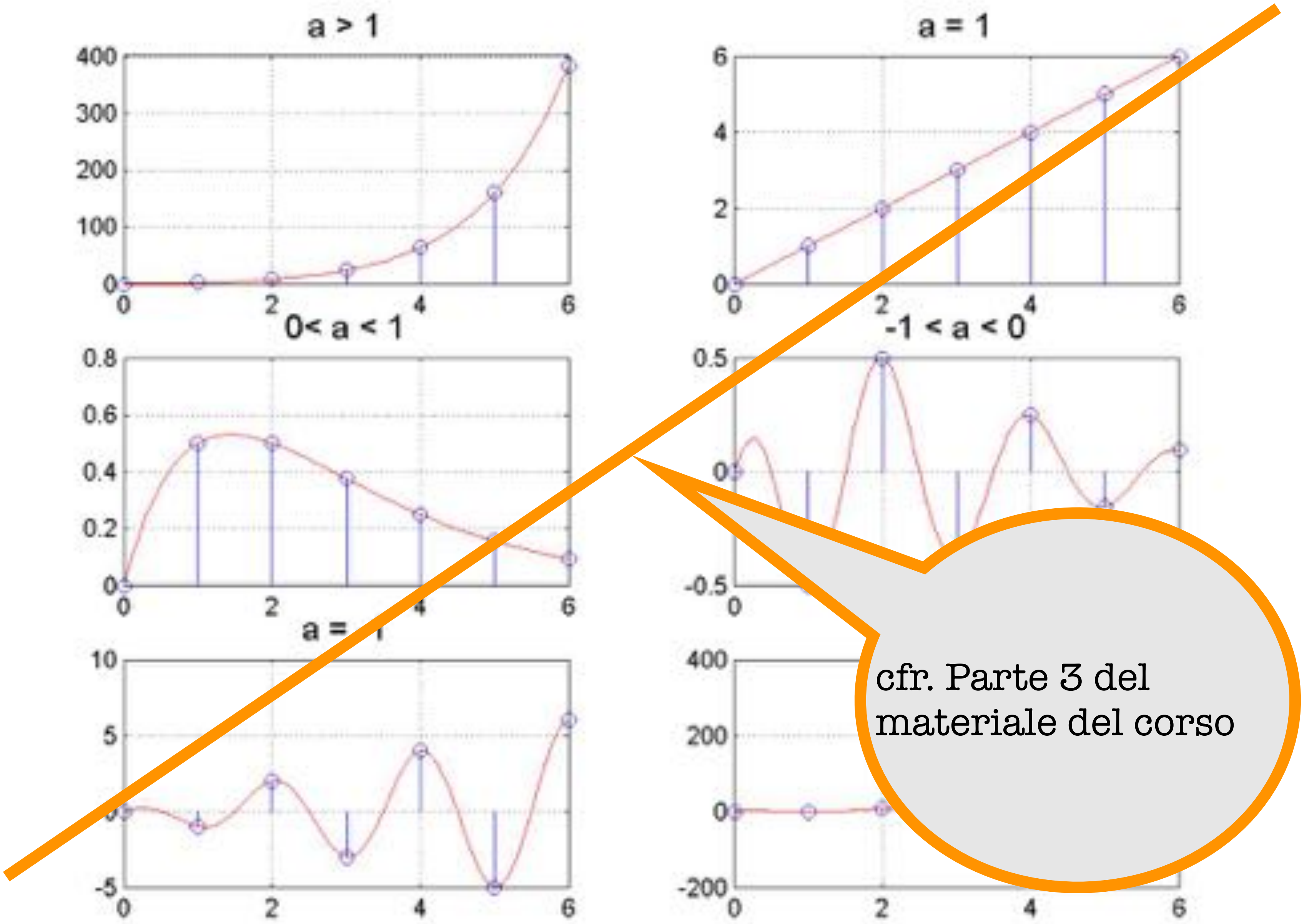
$$x(k) \;=\; C\,\frac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\ldots\,(k-n+2)}{(n-1)!}\,a^{k-n+1}\,1(k)$$

- ovvero

$$x(k) \;=\; \frac{C}{(n-1)!}\,\overbrace{\left[k^{n-1} + \alpha_1\,k^{n-2} + \cdots + \right.}^{p(k)} \;\ldots\; (k)$$

cfr. Parte 3 del materiale del corso

Polinomio di grado (n-1) in k


a > 1
a = 1
0< a < 1
-1 < a < 0
a = -1
cfr. Parte 3 del
materiale del corso

Poli reali multipli:

In definitiva:

$$x(k) = \frac{C}{(n-1)!}\,[p(k)]\; a^{k-n+1}\, 1(k)$$

- $|a| < 1$ ⇨ $x(k) \to 0$, per $k \to \infty$
- $|a| = 1$ ⇨ $x(k) \to \infty$, per
- $|a| > 1$ ⇨ $x(k) \to \infty$, per $k \to$

cfr. Parte 3 del
materiale del corso

Poli multipli: poli complessi coniugati

- Il termine elementare è

$$X(z) = C\frac{z}{(z-a)^n} + C^*\frac{z}{(z-a^*)^n} \qquad a,\, C \in \mathbb{C}, \qquad n > 1$$

con $a = \rho\, e^{j\,\theta}$

cfr. Parte 3 del materiale del corso

- Come varia il comportamento della sequenza al variare della posizione del polo $p = a$?

$$x(k) = C \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} a^{k-n+1}\, 1(k) +$$

$$+ C^* \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} a^{*\,k-n+1}\, 1(k)$$

$$= \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \left[\Re(C) \left(e^{j(k-n+1)\,\theta} + e^{-j(k-n+1)\,\theta} \right) + \right.$$

$$\left. + j\, \Im(C) \left(e^{j(k-n+1)\,\theta} - e^{-j(k-n+1)\,\theta} \right) \right] 1(k)$$

cfr. Parte 3 del materiale del corso

$$x(k) = 2 \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \{\Re(C) \cos[(k-n+1)\theta] +$$

$$- \Im(C) \sin[(k-n+1)\theta]\} \, 1(k)$$

Ponendo

$$H = \frac{2\,|C|}{(n-1)!} \qquad \Phi = \arctan\left(\frac{\Im(C)}{\Re(C)}\right)$$

si ottiene infine

$$x(k) = H \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \cos[(k-n \ldots$$

cfr. Parte 3 del materiale del corso

Poli complessi multipli:

In definitiva: $$x(k) = H \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} \cos\left[(k-n+1)\,\theta + \Phi\right] 1(k)$$

- $|a| < 1$ ⇒ $x(k) \to 0$, per $k \to \infty$
- $|a| = 1$ ⇒ $x(k) \to \infty$, pe
- $|a| > 1$ ⇒ $x(k) \to \infty$, per k

cfr. Parte 3 del
materiale del corso

Analisi qualitativa: conclusioni

- Per **poli** con **modulo inferiore ad 1**: la successione elementare corrispondente **converge** sempre a **0**.
- Per **poli** di **modulo unitario**: se poli **semplici**, la successione elementare si mantiene **limitata**, altrimenti **diverge**.
- Per **poli** di **modulo maggiore di 1**: la su[…] corrispondente **diverge sempre**.

cfr. Parte 3 del
materiale del corso

Interpretazione operatoriale di $\mathcal{Z}\{\cdot\}$

- Sia data la sequenza $v(t)$ con trasformata $V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t-1)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di un passo) ha trasformata $z^{-1}V(z)$
- Infatti:

$$v(t) = 0,\ t < 0$$

$$w(0) = 0, w(1) = v(0) = 0, w(2) = v(1), \ldots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= 0 + v(0)z^{-1} + v(1)z^{-2} + \cdots + v(t-1)z^{-t} + \cdots \\ &= z^{-1}[v(0) + v(1)z^{-1} + \cdots + v(t-1)z^{-t+1} + \cdots] \\ &= z^{-1}V(z) \end{aligned}$$

- Analogamente $w(t) = v(t-2)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di due passi) ha trasformata $z^{-2}V(z)$

- La sequenza $w(t) = v(t+1)$ (sequenza $v(t)$ anticipata di un passo) ha trasformata $z[V(z) - v(0)]$

- Infattti:

$$w(0) = v(1), w(1) = v(2), \ldots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= v(1) + v(2)z^{-1} + \cdots + v(t+1)z^{-t} + \cdots \\ &= z[v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] \\ &= z[v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] - zv(0) \\ &= z[V(z) - v(0)] \end{aligned}$$

Quindi:

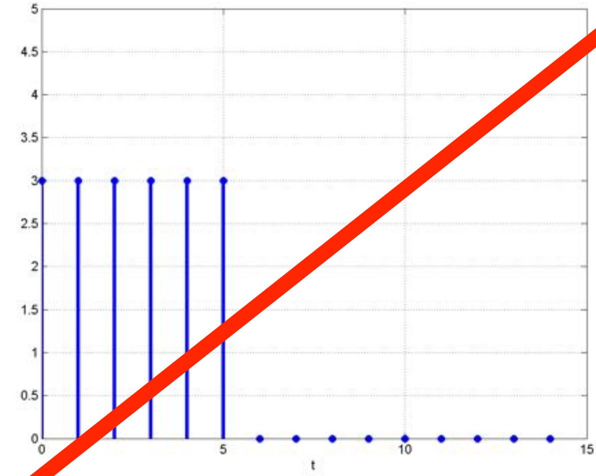
- Gli operatori z e z^{-1} possono essere visti come operatori di **anticipo** e **ritardo** rispettivamente

- In generale z^{k} e z^{-k} possono essere visti come operatori di anticipo e ritardo rispettivamente di k passi

Esempio

Si consideri il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$



$$v(t) = 3 \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t-6)$$

Ma $\mathcal{Z}\{1(k)\} = \dfrac{z}{z-1}$

$$V(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{3z^{-6}z}{z-1} = \frac{3(z^6-1)}{z^5(z-1)}$$

Ulteriori considerazioni su $X\left(z^{-1}\right)$ vs $X(z)$

- Torniamo alle possibili notazioni per una Z-Trasformata: a potenze di z oppure a potenze di z^{-1} .

$$X\left(z^{-1}\right) = \frac{1-2z^{-1}}{4+6z^{-1}+8z^{-2}} \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^2-2z}{4z^2+6z+8}$$

- ~~Applichiamo il " metodo computazionale " per ottenere un ' equazione alle differenze che ci permetta di ricavare ricorsivamente, campione dopo campione, il segnale~~ $\{x(k)\}$.

$$4x(k)+6x(k-1)+8x(k-2)=\dots$$
$$u(k)-2u(k-1)$$

$$4X(z)+6z^{-1}X(z)+8z^{-2}X(z)=$$
$$U(z)-2z^{-1}U(z)$$

$$X(z)\left[4+6z^{-1}+8z^{-2}\right]=$$

$$=U(z)\left[1-2z^{-1}\right]$$

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{4+6z^{-1}+8z^{-2}}\cdot U(z)$$

- Otterremo due equazioni alle differenti scritte in maniera diversa a seconda della Z-trasformata da cui partiamo …

- Partendo dall' **espressione in potenze di z^{-1}** si ottiene

$$\left(4+6z^{-1}+8z^{-2}\right) X(z) = \left(1-2z^{-1}\right) U(z)$$

$$4\,x(k)+6\,x(k-1)+8\,x(k-2) = u(k)-2\,u(k-1)$$

$$u(k) = \delta(k)$$

- Il **valore all' istante corrente** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione** di **valori passati del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di valori all' istante presente e nel passato dell' ingresso (che è un impulso unitario nell' origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z^{-1} può venire ricondotta ad un'equazione alle differenze (~~metodo di antitrasformazione "computazionale"~~) che esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**

- ~~$X\left(z^{-1}\right)$ è antitrasformabile calcolando il valore all'istante attuale della successione incognita $\{x(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{x(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$~~

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

$$4x(k+2)+6x(k+1)+8x(k)=u(k+1)-2u(k)$$

$$u(k)=\delta(k)$$

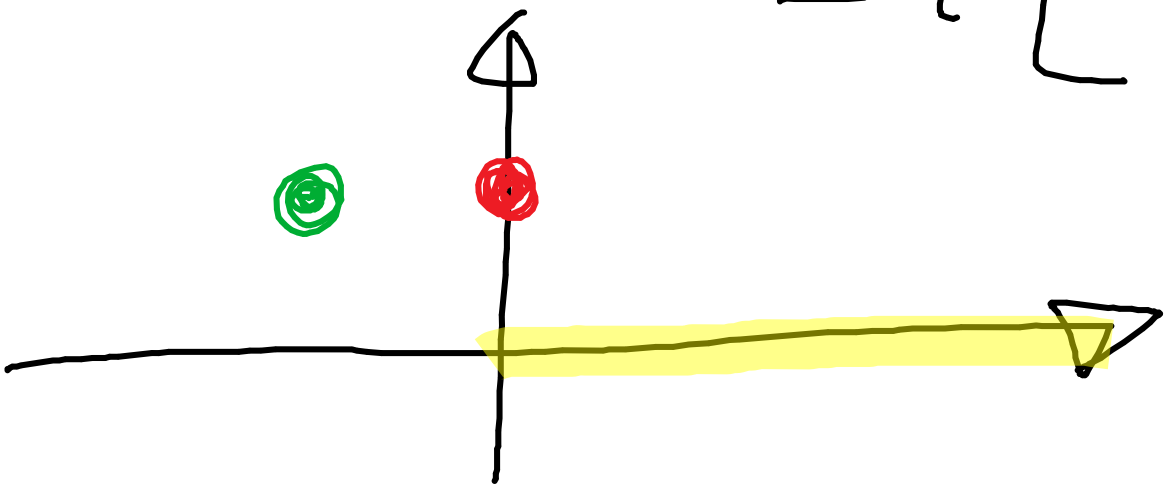
$$x(0)=x(1)=0$$

$$4z^2X(z)+6zX+8X=-2$$

$$u(k) = F(k)$$

$$\mathcal{Z}\{u(k+1)\} = z\left[U(z) - u(0)\right]$$

$$= z\left[1 - 1\right] = 0$$



$$X(t) = \frac{-2}{9t^2 + 6t + 8}$$

- ~~Partendo dall' **espressione in potenze di** z si ottiene~~

$$\cancel{\left(4\,z^2+6\,z+8\right)\,X(z)\;=\;\left(z^2-2\,z\right)\,U(z)}$$

$$4\,x(k+2)+6\,x(k+1)+8\,x(k)\;=\;u(k+1)-2\,u(k)$$

$$u(k)\;=\;\delta(k)$$

- Il **valore nel futuro** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione** di **valori futuri ed all' istante corrente del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di valori all' istante presente e nel futuro dell' ingresso (che è un impulso unitario nell' origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z può venire ricondotta ad un’equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione “computazionale”) che esprime una **relazione ricorsiva in avanti**

- ~~$X(z)$ è antitrasformabile calcolando un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{x(k)\}$ [in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l’ordine dell’equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all’istante attuale sia della sequenza $\{x(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$~~

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l’evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

$X\left(z^{-1}\right)$ vs $X(z)$: concludendo

- Si noti che le due Z-trasformate, così come le due equazioni alle differenze a cui si arriva col metodo computazionale, descrivono il medesimo segnale.

- Analizzeremo ulteriori proprietà caratteristiche della notazione $X\left(z^{-1}\right)$ e di quella $X(z)$ quando studieremo i sistemi dinamici a tempo discreto (Parte 2) ed in particolare le Funzioni di Trasferimento (Parte 4).

Teorema del valore iniziale: applicazione e proprietà della Z-Trasformata

Data la Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

con $m \leq n$, vale la proprietà

$$\begin{cases} m = n & f(0) = \dfrac{b_m}{a_n} \\ m < n & \begin{cases} f(0) = f(1) = \cdots = f(n-m-1) = 0 \\ f(n-m) = \dfrac{b_m}{a_n} \end{cases} \end{cases}$$

Per dimostrare la proprietà, si utilizza il teorema del valore iniziale:

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = \lim_{k \to 0} f(k) = f(0)$$

1º caso: $m = n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$= \frac{b_m}{a_n}$$

2º caso: $m < n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = 0$$

$$m = O(N(z)) < O(D(z)) = n$$

Per determinare il secondo campione della sequenza utilizziamo il teorema del valore iniziale e la proprietà di anticipo nel tempo

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z\,[F(z) - f(0)]$$

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n - 1 \longrightarrow m + 1 = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Si continua in maniera analoga:

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \left[F(z) - f(0) - f(1)\, z^{-1}\right]$$

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n - 2 \longrightarrow m + 2 = O(z\, N(z)) < O(D(z)) = n$$

Fino a quando? Sia $m = n - h$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{h-2} f(k)\, z^{-k}\right]$$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m + (n - m - 1) = O(z\, N(z)) < O(D(z)) = n$$

Finalmente:

$$f(n-m) = \lim_{z \to \infty} z^{n-m} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-m-1} f(k)\, z^{-k} \right]$$

$$f(n-m) = \lim_{z \to \infty} z^{n-m} \frac{b_m\, z^m + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + \cdots + a_0} = \frac{b_m}{a_n}$$

$$m + (n-m) = O\,(z\,N(z)) = O\,(D(z)) = n$$

Ancora considerazioni e proprietà: sequenza ritardata e condizioni iniziali

- Abbiamo già visto che, data una sequenza

$$\{x(k)\}\ ,\qquad k \in \mathbb{Z} \qquad x(k) \equiv 0\ \forall k < 0$$

la Z-trasformata della sequenza $\{y(k)\}$ ritardata di *m* istanti di tempo rispetto alla sequenza originaria, è data da

$$y(k) = x(k-m) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

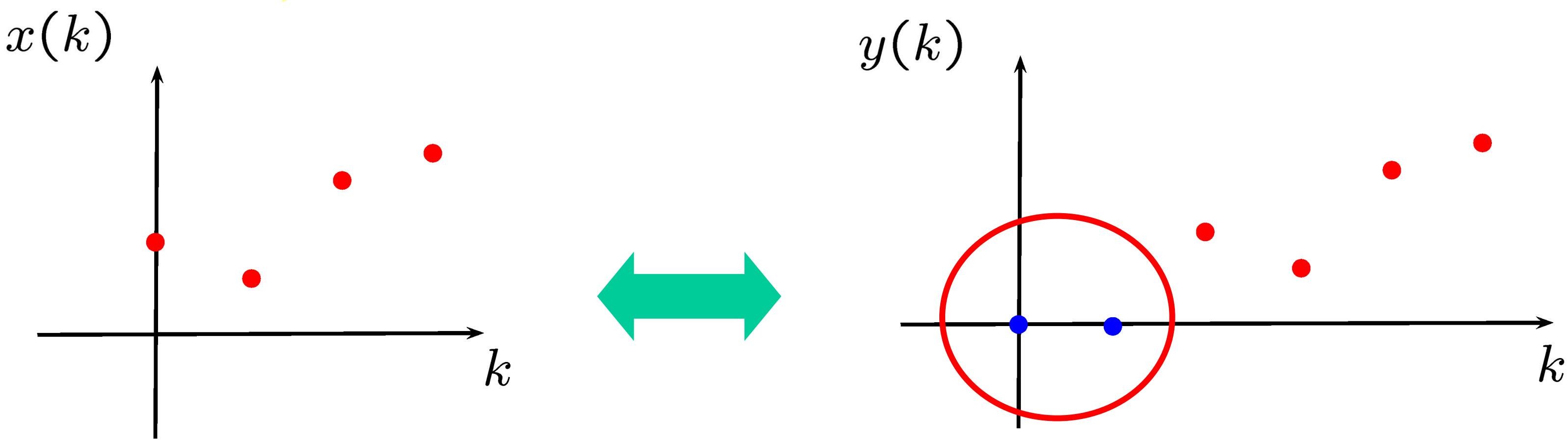
$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m} X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1} X(z)$$

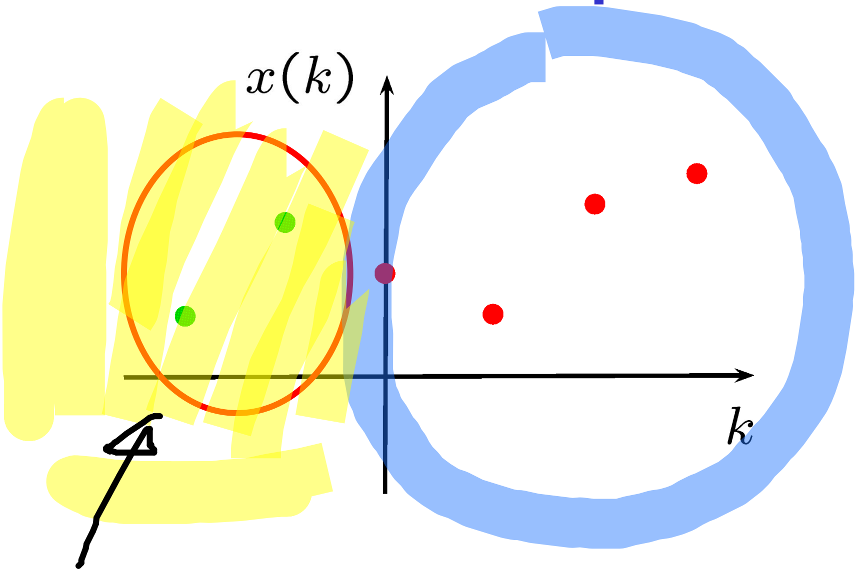
- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m} X(z)$$



$\{x(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ $x(k) \equiv 0 \;\forall k < 0$ $y(k) = x(k-2)$

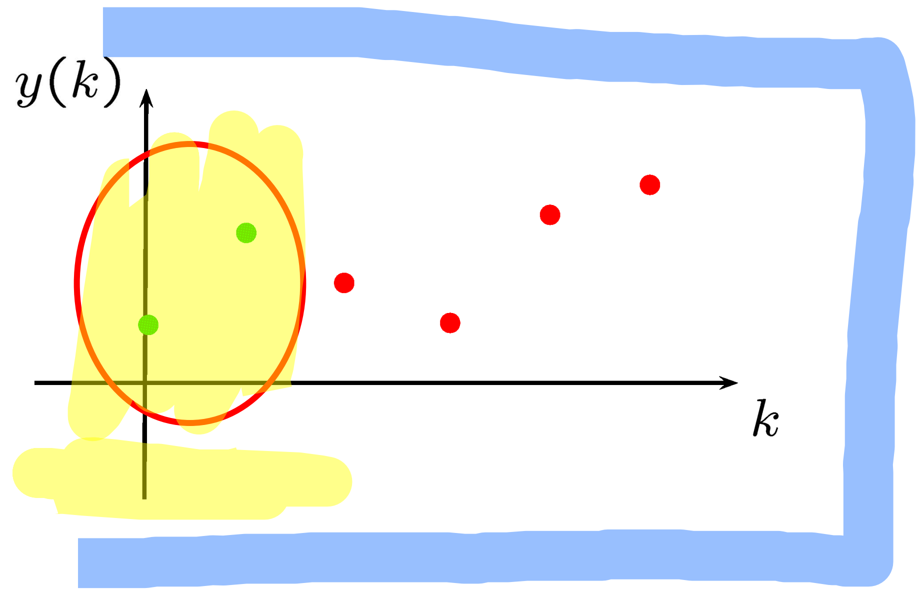
Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale



$$\{x(k)\}\ ,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x(k) \equiv 0\ \forall k < -2$$

$$y(k) = x(k-2)$$



Come si tiene conto di quei campioni “aggiuntivi”?

● Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale

Data la sequenza

$$\{x(k)\}\ ,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

che ammette **campioni non nulli (IN NUMERO FINITO)** anche per istanti di tempo negativi, si costruisce la sequenza ritardata

$$y(k)\ =\ x(k-m)\qquad k\in\mathbb{Z}$$

Tra le z-trasformate delle sequenze vale la relazione

$$Y(z)\ =\ z^{-m}X(z)+z^{-m}\left[\sum_{p=-m}^{-1}x(p)\,z^{-p}\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-k} =$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-(k-m)} \right\} =$$

$$k - m \triangleq p$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)} \right\} =$$

$$z^{-m}\left\{\sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)}\right\} =$$

$$z^{-m}\, X(z) + z^{-m}\left\{\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)}\right\} = Y(z)$$

La relazione appena trovata è utile per trasformare le equazioni alle differenze "all' indietro"

$$u(k) = f\left(e(k), \ldots, e(k-m); u(k-1), \ldots, u(k-n)\right)$$

$$\{e(k)\} \text{ nota } \forall\, k \geq 0 \qquad \text{incognita } \{u(k)\}, \quad k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \iff \quad u(-n), u(-n+1), \ldots, u(-1)$$

Un esempio

- Consideriamo l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = u(k)$$

con condizioni iniziali date da

$$x(-2) = 3 \quad x(-1) = 12$$

e con ingresso (sequenza forzante nota) pari a

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

- Vogliamo risolvere l'equazione facendo uso della Z-trasformata.

- La sequenza forzante può essere riscritta nel modo seguente:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$u(k) = 0.5 \cdot \left[(-1)^k + 1\right] \cdot 1(k)$$

- La sua Z-trasformata è allora

$$U(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}\right] = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

- In base alla regola descritta nella slide #110. e segg., applicando la Z-trasformata all'equazione alle differenze si ottiene

$$X(z) - 3\left[z^{-1}X(z) + x(-1)\right] +$$

$$+2\left[z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)\right] = U(z)$$

$$X(z) = \frac{z\left[(3z-2)\,x(-1) - 2z\,x(-2)\right]}{z^2 - 3z + 2} +$$

$$+\frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Esercizi sulla Z-Trasformata

Z-antitrasformata

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $F(z)$.

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.4\,z + 1.08}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Sviluppo in fratti semplici

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to -0.5} (z+0.5)\,\frac{F(z)}{z}$$

$$C_{1,1} = \left.\frac{-0.4\,z + 1.08}{(z-0.3)^2}\right|_{z=-0.5} = 2$$

Analogamente

$$C_{2,2} = \left.\frac{-0.4\,z + 1.08}{z+0.5}\right|_{z=+0.3} = 1.2$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.3} \frac{d}{dz}\left[\frac{F(z)}{z}(z-0.3)^2\right]$$

$$C_{2,1} = \left.\frac{d}{dz}\left[\frac{F(z)}{z}(z-0.3)^2\right]\right|_{z=0.3} = -2$$

In definitiva

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z+0.5} + \frac{-2}{z-0.3} + \frac{1.2}{(z-0.3)^2}$$

$$F(z) = 2\frac{z}{z+0.5} - 2\frac{z}{z-0.3} + 4\frac{0.3\,z}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{z}{z+0.5} \leftrightarrow (-0.5)^k \qquad \frac{z}{z-0.3} \leftrightarrow (0.3)^k \qquad \frac{0.3\,z}{(z-0.3)^2} \leftrightarrow k\,(0.3)^k$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right] \cdot 1(k)$$

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right] \cdot 1(k)$$

Osservazioni:

- la differenza di grado tra il polinomio a denominatore di $F(z)$ e quello al numeratore è pari ad 1
  - il primo campione della successione $f(k)$ è nullo!
- I primi campioni della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \left\{0, -\frac{2}{5}, \frac{26}{25}, \frac{1}{50}, \frac{149}{625} \dots\right\}$$

Proposta: ritrovare i primi 5 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Esercizio 2

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$X(z) = \frac{0.1\,(z+1)\,z}{(z-1)^2\,(z-0.6)}$$

Vale la medesima considerazione fatta per l'esercizio precedente:

poiché la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{X(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $X(z)$.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z-1} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{2,1}}{(z-0.6)^2}$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = 0.5$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} (z-1)^2 \right] = -1.0$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.6} (z-0.6) \frac{X(z)}{z} = 1.0$$

$$X(z) = -\frac{z}{z-1} + 0.5 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.6}$$

$$x(k) = \left[-1 + 0.5\,k + (0.6)^k \right] 1(k)$$

$$\{x(k)\} = \{0,\ 0.1,\ 0.36,\ 0.716,\ 1.1296,\ \ldots\}$$

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2+1}{z^2+2z+1}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ non possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede, oltre agli stessi poli di $F(z)$, un polo nell'origine.

Sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z\,(z+1)^2} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z+1} + \frac{C_{2,2}}{(z+1)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2+1}{(z+1)^2} = 1 \qquad C_{2,2} = \lim_{z \to -1} \frac{z^2+1}{z} = -2$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to -1} \left\{ \frac{d}{d\,z} \left[\frac{z^2+1}{z} \right] \right\} = 0$$

$$F(z) = 1 - 2\frac{z}{(z+1)^2}$$

$$\delta(k) \qquad (-1)^{k-1}\,k\,1(k)$$

$$f(k) = \delta(k) - 2\underbrace{(-1)^{k-1} \cdot k \cdot 1(k)}$$

La successione diverge!

Che fosse una successione divergente lo si poteva dedurre anche dalla Z-Trasformata iniziale, che presenta un polo doppio di modulo unitario!

I primi valori della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \{1, -2, 4, -6 \ldots\}$$

Proposta: ritrovare i primi 4 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Esercizio 4

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3}$$

Fattorizzando:

$$F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$$

si nota che esiste un polo a modulo maggiore dell' unità: la successione diverge!

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z-1} + \frac{C_{3,1}}{z-3}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} z \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{1}{3}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{F(z)}{z} = \cdots = -1$$

$$C_{3,1} = \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$F(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

$$f(k) = \frac{1}{3} \delta(k) + \left[\underbrace{\frac{2}{3} 3^k}_{\text{Il termine divergente}} - 1 \right] \cdot 1(k)$$

Esercizio 5

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{0.625\, z\left(z^2 + 0.8z - 0.6\right)}{(z-1)^4}$$

Osservazione

La trasformata presenta un polo di modulo unitario, con molteplicità maggiore dell'unità (molteplicità 4): il segnale corrispondente è certamente divergente.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{(z-1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{1,3}}{(z-1)^3} + \frac{C_{1,4}}{(z-1)^4}$$

$$C_{1,4} = \lim_{z \to 1} (z-1)^4 \frac{F(z)}{z} = 0.75$$

$$C_{1,3} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{d\,z} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 1.75$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\,z^2} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0.625$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\,z^3} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0$$

$$F(z) = 0.625 \frac{z}{(z-1)^2} + 1.75 \frac{z}{(z-1)^3} + 0.75 \frac{z}{(z-1)^4}$$

$$F(z) = 0.625\,\frac{z}{(z-1)^2} + 1.75\,\frac{z}{(z-1)^3} + 0.75\,\frac{z}{(z-1)^4}$$

$$\binom{k}{2} \cdot 1(k) \qquad \binom{k}{3} \cdot 1(k)$$

$$f(k) = \left\{0.625\,k + 1.75\,\boxed{\left[\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k\right]} + \right.$$

$$\left. + 0.75\,\boxed{\left[\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right]}\right\} 1(k)$$

In definitiva

$$f(k) = \left[0.5\,k^2 + 0.125\,k^3\right] 1(k)$$

Esercizio 6

Analizzare qualitativamente il segnale a cui corrisponde la Z-Trasformata

$$Y(z) = -\frac{(2z+p-1)}{(z+1+2p)(z-1)}$$

al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$

Valore iniziale $\lim_{z \to \infty} Y(z) = 0 = y(0) \quad \forall p$

- $p < -1$

due modi distinti; un modo è associato ad un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi l'uscita del sistema diviene illimitata al crescere di *k*

- $p = -1$

in questo caso si ottiene

$$Y(z) = -\frac{2}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$y(k) = -2 \cdot 1(k-1)$$

- $-1 < p < 0$

$$Y(z) = -\frac{2z+p-1}{(z+2p+1)(z-1)}$$

la sequenza si mantiene limitata e tende a zero asintoticamente, dato che i modi della risposta sono associati a poli entrambi minori dell'unità (in modulo).

- $p = 0$ $$Y(z) = -\frac{2z-1}{(z+1)(z-1)}$$

$$y(k) = (-1)\cdot\delta(k) - \frac{1}{2}\cdot 1(k) + \frac{3}{2}\cdot(-1)^k\cdot 1(k)$$

comportamento oscillante permanente: poli di modulo unitario, semplici

- $p > 0$

C' è un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi il segnale diviene illimitato al crescere di *k*.

Esercizio 7

- Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = e(k)$$

dove $x(k) = 0 \quad \forall\, k < -2, \quad x(-2) = x(-1) = 1$

$$e(k) = \begin{cases} 1 & k = 0,\ 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Determinare **per via numerica** i primi 4 campioni non noti della successione:

$x(0) \longrightarrow \quad x(0) - 3x(-1) + 2x(-2) = e(0)$

$$x(0) = 2$$

$$x(1) \quad \rightarrow \quad x(1) - 3\,x(0) + 2\,x(-1) \;=\; e(1)$$

$$x(1) \;=\; 4$$

$$x(2) \quad \rightarrow \quad x(2) - 3\,x(1) + 2\,x(0) \;=\; e(2)$$

$$x(2) \;=\; 9$$

$$x(3) \quad \rightarrow \quad x(3) - 3\,x(2) + 2\,x(1) \;=\; e(3)$$

$$x(3) \;=\; 19$$

- Scrivendo un semplice script in ambiente Matlab si possono rapidamente calcolare i primi 25 campioni della sequenza

```
al passo 0 valore di x 2.00
al passo 1 valore di x 4.00
al passo 2 valore di x 9.00
al passo 3 valore di x 19.00
al passo 4 valore di x 39.00
al passo 5 valore di x 79.00
al passo 6 valore di x 159.00
al passo 7 valore di x 319.00
al passo 8 valore di x 639.00
al passo 9 valore di x 1279.00
al passo 10 valore di x 2559.00
al passo 11 valore di x 5119.00
al passo 12 valore di x 10239.00
al passo 13 valore di x 20479.00
```

```
al passo 14 valore di x 40959.00
al passo 15 valore di x 81919.00
al passo 16 valore di x 163839.00
al passo 17 valore di x 327679.00
al passo 18 valore di x 655359.00
al passo 19 valore di x 1310719.00
al passo 20 valore di x 2621439.00
al passo 21 valore di x 5242879.00
al passo 22 valore di x 10485759.00
al passo 23 valore di x 20971519.00
al passo 24 valore di x 41943039.00
al passo 25 valore di x 83886079.00
```

- Proviamo ora a **risolvere l'equazione** alle differenze facendo uso della **Z-trasformata**:

$$\mathcal{Z}\{x(k-m)\} = z^{-m} X(z) + z^{-m} \left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-p} \right]$$

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = e(k)$$

$$X(z) = \frac{z\,[x(-1)\,(3\,z-2) - 2\,x(-2)\,z]}{z^2 - 3\,z + 2} +$$

$$+ \frac{z^2}{z^2 - 3\,z + 2} \cdot \frac{z^2+1}{z^2}$$

- In definitiva la sequenza cercata possiede Z-trasformata data da:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$$

- Lo sviluppo in fratti semplici porta a

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{(-2)\,z}{z-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-2}$$

- Antitrasformando si ottiene quindi

$$x(k) = \frac{1}{2} \cdot \delta(k) + \left[\frac{5}{2} \cdot 2^k - 1\right] \cdot 1(k)$$

Esercizi sulle Z-Trasformate

Esercizi "per casa"

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z - 1)}$$

Esercizio 2

Partendo dalla medesima Z-Trasformata $F(z)$ dell'esercizio precedente, determinare i primi 3 valori della successione $f(k)$ utilizzando sia la tecnica di "long division" che il metodo computazionale.

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{\left(z^2 - 1\right)(z - 2)}$$

Esercizio 4

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+3) - 2.2\,x(k+2) + 1.57\,x(k+1) - 0.36\,x(k) = e(k)$$

con condizioni iniziali $x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k)$

Determinare:

- uno script Matlab che calcoli i primi 45 valori della sequenza $x(k)$
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$
- partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ determinare, utilizzando l'algoritmo di long-division, i primi 5 valori della sequenza.

Esercizio 5

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 0, \quad y(-2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 6

Si consideri ancora l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 1, \quad y(-2) = -2$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 0 \quad \forall k$

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando il metodo computazionale.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 7

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+2) + 3\,x(k) - 2\,x(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $\begin{cases} x(-2) = 12, & x(-1) = 0 \\ x(0) = 1, & x(1) = -2 \end{cases}$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Determinare:

- i primi 10 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$.