

$$s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 7s^2 + 4s + 3 = 0$$

6		1	5	7	(3)	
5		2	12	4		
4		(-1)	5	(3)		
3		22	10			
2		60/11	(3)			
1		-21/10				
0		(3)				

$\xrightarrow{(2 \cdot 5 - 1 \cdot 12) / 2}$

n disjuncti $\rightarrow (n+1)$ coeff

n	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x
$n-1$	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x
$n-2$	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x
$\vdots$	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x
1	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x
0	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x

n per $\rightarrow (n+1)$ coeff.

n	X	X	X	o	o	o	X	X	X	X
$n-1$	X	X	X	o	o	o	X	X	X	
$n-2$	X	X	X	o	o	o	X	X		
$n-3$	X	X	X	o	o	o	X	X		
$\vdots$										
2	X	X								
1	X	X								
0	X	X								

$$4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

$+4$	}	4	5	1	
$+3$		3	2		$\rightarrow * = (15 - 8)/3$
$+2$		7	3		$(3 \cdot 1 - 0)/3$
$+1$		5			
$+0$		3			$\rightarrow (15 - 0)/5$

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

+	4		2	3	10
+	3		1	5	
-	2		-7	10	
+	1		+45		
+	0		10		

ho diviso per +1
TUTTI gli elementi
della 1^a riga

$(-35 - 10) / (-7)$

ho diviso per (+45)

2 soluzioni di ω_{fn} $\Rightarrow$ 2 radici $\text{Re} > 0$

Proprietà utile

i termini di una riga della tabella (TUTTI) possono essere moltiplicati per uno stesso coefficiente positivo SENZA che ciò modifichi il numero di variabili di segno nella 1^a colonna

$$\frac{(-35 - 10)}{-7} = \frac{-45}{-7} = +\frac{45}{7} \quad \text{e moltiplico per } +7$$

Così il n° di variabili di segno non cambia

(+)	6	1	5	7	3
(+)	5	2	12	4	
(-)	4	-2	10	6	
(+)	3	+44	+20		
(+)	2	+480	+264		
(-)	1	-2016			
(+)	0	532224			

non ho
 MAI diviso!
 Tempo SOLO
 Conto del
 segno del
 quoziente

Casi critici

- (a) un elemento nullo in 1^a colonna
 - (b) tutta una riga nulla
-

caso (a)

1^o modo $\rightarrow$

moltiplicare il
polinomio per un fattore
non $\Rightarrow$ di solito il
problema compare

2º modo: trave "ε"

$$5^3 + 35 - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & & \\ 0 & & \end{array}$$

$\oplus$	3	1	3	$ \varepsilon \ll 1$
$\oplus$	2	$+\varepsilon$	-2	$\leftarrow$ "piccolo" e positivo
$\oplus$	1	$+3\varepsilon+2$		$\Leftarrow (+3\varepsilon+2) / +\varepsilon$
$\ominus$	0	-2		non diviso ma proprio il segno

$2p \geq 0 \Rightarrow$ 1 radice $\operatorname{Re} > 0$
 2 radici $\operatorname{Re} < 0$

(+)

3

1

3

(-)

2

$-\varepsilon$

-2

(-)

1

$3\varepsilon - 2$

(-)

0

-2

I_2

$2p$

$$|\varepsilon| < 1$$

$$\frac{(-\varepsilon) \cdot 3 + 2 \cdot 1}{(-\varepsilon)}$$

$$(3\varepsilon - 2) / \varepsilon$$

caso ⑥

nfe tutta nulla nella
tabella di R. H.

si verifica **SEMPRE**
in una nfe di indice
dispari

m	x	x	x	o	$-$	$-$	x
$m-1$	x	x	x	o	o	x	
$\vdots$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2m$	a	b	c	d	$-$	$-$	$-$
$2m-1$	o	o	o	$-$	$-$	$-$	o
$\vdots$							

5. Teorema (2)

polinomio
autonómico

$$a s^{2m} + b s^{2m-2} + c s^{2m-4} + \dots = 0$$

- (•) è un fattore del polinomio di partenza
- (•) contiene TUTTE le radici del polinomio di partenza simmetriche rispetto all'origine (nel piano di s)

- dividendo il plinomio originale per il plinomio ausiliario
- Studia il plinomio quotiente con R. H. oppure determinando le radici
- le radici "problematiche" del plinomio originale sono le radici del plinomio ausiliario $\rightarrow$ DEVO fattorizzare il pol. aus. NON è sempre facile fattorizzare il plin. ausiliario (grado elevato)

$$s^6 + 3s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 12s + 8 = 0$$

$\hookrightarrow p(s)$

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ 5 & 3 & 12 & 12 & \\ \rightarrow 4 & 2 & 8 & 8 & \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\leftarrow 2s^4 + 8s^2 + 8 = 0$$

$$s^4 + 4s^2 + 4 = 0$$

$$(s^2 + 2)^2 = 0$$

$$s_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$$

4 roots are pure real
NULLA

$$p(s) = (s^2 + 2)^2 \underbrace{(s^2 + 3s + 2)}_{(s+1)(s+2)}$$

$p(s)$ $\begin{cases} \rightarrow 4 \text{ radici } \operatorname{Re} = 0 \text{ (doppie)} \\ \rightarrow 2 \text{ radici } \operatorname{Re} < 0 \end{cases}$

non è asintoticamente stabile!

① Se presi la matrice A delle eq. di stato
e fosse diagonale

allora potrei dire che il sistema è
semplice: stabile

② Se la matrice A NON fosse diagonale
allora potrei dire che il sistema è
instabile!

$$p(s) = s^2$$

cg state

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

C_1

scuff.
no ole

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

INSTABLE

Strategia (b)

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 m & x & x & x & \dots & x & x & x & x & x \\
 m-1 & x & x & x & \dots & x & x & x & x & \\
 \vdots & & & & & & & & & \\
 2m & a & b & c & \dots & & & & & \\
 2m-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & &
 \end{array}$$

$$a 5^{2m} + b 5^{2m-2} + \dots = 0$$

devo
il plim. aus.

e sostituisco alla
rigo nullo i coeff
del polinomio deciso

proseguo con
la bella R.H.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 +6 & 1 & 6 & 12 & 8 \\
 +5 & 3 & 12 & 12 & \\
 +4 & 2 & 8 & 8 & \\
 +3 & 8 & 16 & & \\
 +2 & 4 & 4 & & \\
 +1 & 0 & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &2s^4 + 8s^2 + 8 \\
 &8s^3 + 16s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &4s^2 + 4 \\
 &8s
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rr}
 +2 & 2 & 4 \\
 +1 & 8 & \\
 +0 & 4 &
 \end{array}$$

Ci sono SOLO penne di pino



e parte le radici del pino
autolico, LE ALTRE hanno $Re < 0$

Per studiare completamente il problema
DEVO trovare il pino autolico

$$s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2 = 0$$

$$+4 \mid \begin{array}{ccc} 1 & -3 & 2 \end{array}$$

$$+3 \mid \begin{array}{ccc} 1 & -1 & \end{array}$$

$$\textcircled{-}2 \mid \begin{array}{ccc} -2 & +2 & \end{array}$$

$$1 \mid 0$$

$$0$$

$$\rightarrow -2s^2 + 2 = 0$$

$$[(s+1)(s-1)]$$

$$\textcircled{-4s}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{-}2 \\ \textcircled{-}1 \\ \textcircled{+}0 \end{array} \mid \begin{array}{c} -2 \\ -4 \\ 2 \end{array}$$

2z
2p

$$s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

+	6		1	-2	-7	-4	
+	5		1	-3	-9		
+	4		1	-3	-4		
+	3		4	-6			$\leftarrow s^4 - 3s^2 - 4$
-	2		-6	-16			$4s^3 - 6s$
-	1		-100				
-	0		-16				

non divide
MA proprio il segno

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j$$

$$s_{3,4} = \pm 2$$

$$P(s) = (s^4 - 3s^2 - 4) q(s)$$

↓
2 roots: $\text{Re} < 0$