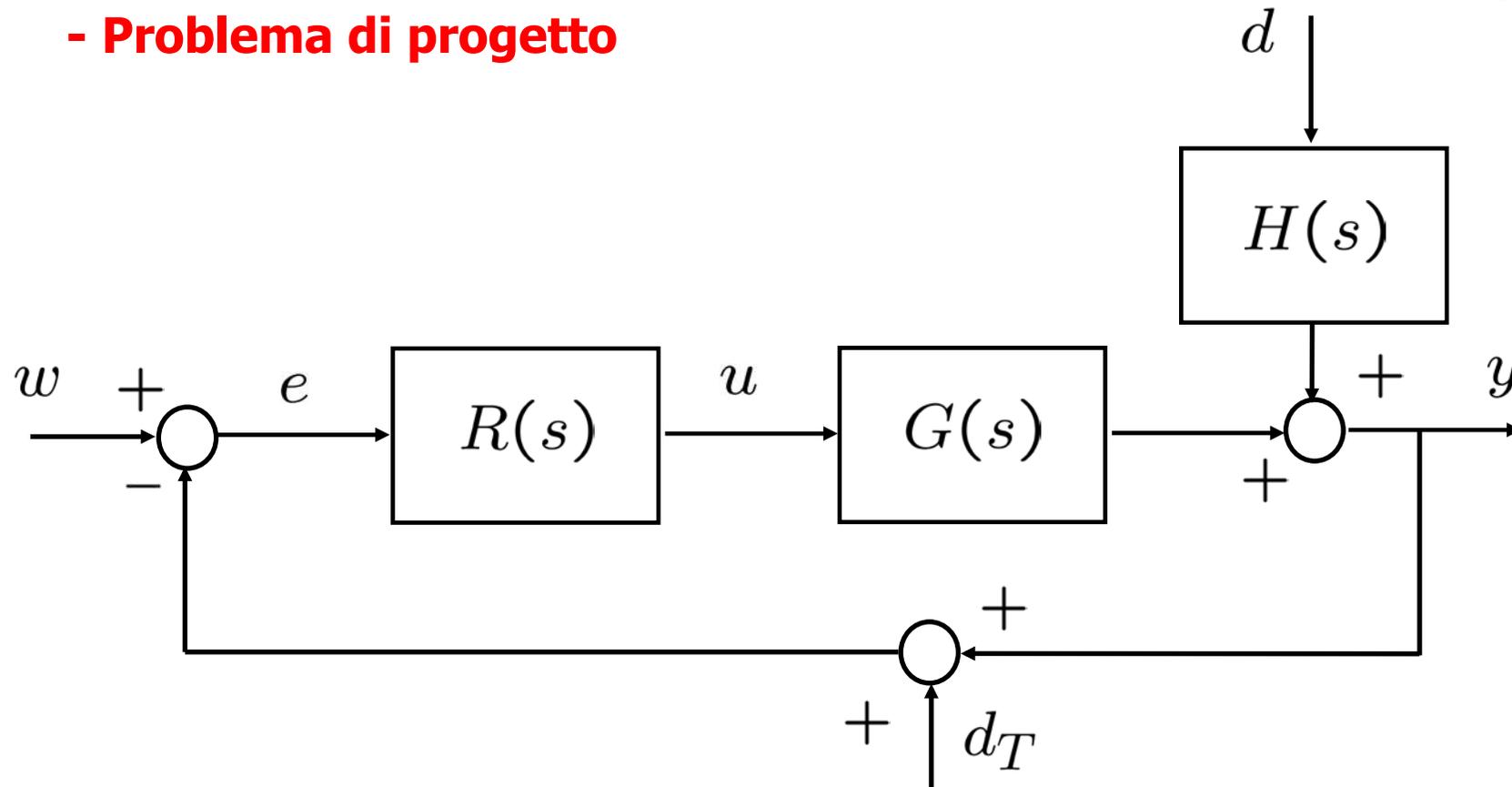


Progetto del controllore

Il caso dei sistemi LTI a tempo continuo

- Problema di progetto

Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi alcuni requisiti

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Asintotica stabilita`  $\left\{ \begin{array}{l} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{array} \right.$ (Bode)
- Precisione statica  $\left\{ \begin{array}{l} g > 0 \text{ (poli in 0)} \\ \text{e/o} \\ \mu \text{ elevato} \end{array} \right.$
- Precisione dinamica
 - velocita` di risposta  ω_c elevata
 - smorzamento  φ_m elevato

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Attenuazione disturbi in andata \longrightarrow
 - ω_c elevata
 - $|L(j\omega)|$ elevato per $\omega < \omega_c$
- Attenuazione disturbi in retroaz. \longrightarrow
 - ω_c non troppo elevata
 - $|L(j\omega)|$ piccolo per $\omega > \omega_c$
- Stabilita` robusta \longrightarrow
 - φ_m elevati
 - k_m

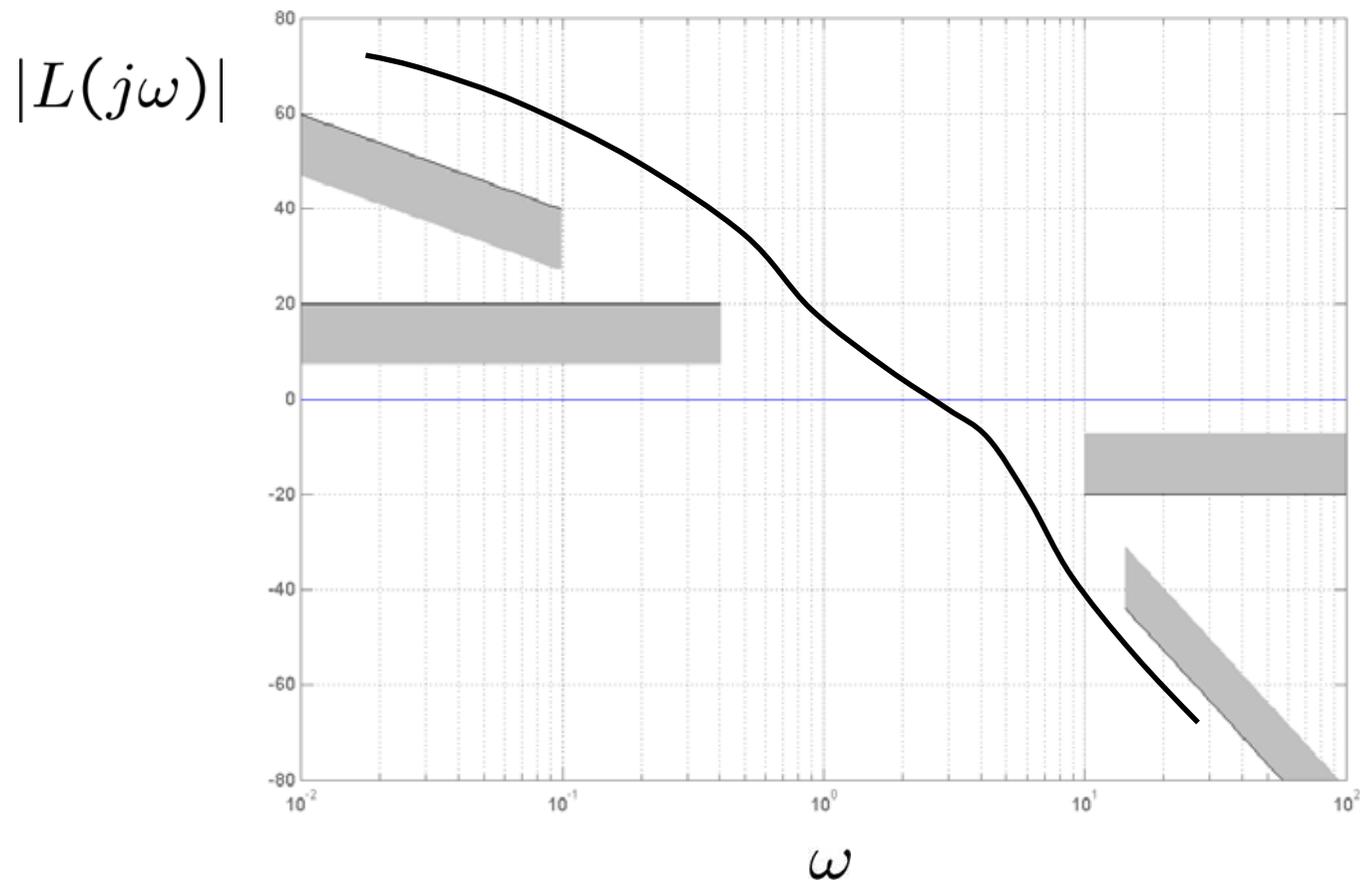
- Tipiche specifiche di progetto sui diagrammi di Bode

A partire dai requisiti si costruiscono opportune specifiche che forniranno vincoli di progetto. Per esempio:

- $|e(\infty)| \leq \bar{e}$ con w, d specificati } Specifica statica
 - Vincoli su $|L(j\omega)|$
 - $\omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max}$
 - $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$
 - $k_m \geq \bar{k}_m$
- } Specifiche dinamiche

- Rappresentazione grafica dei vincoli di progetto sui d. di Bode

I vincoli di progetto derivanti dalle specifiche che devono essere soddisfatte a progetto ultimato possono convenientemente essere riportati sui diagrammi di Bode.



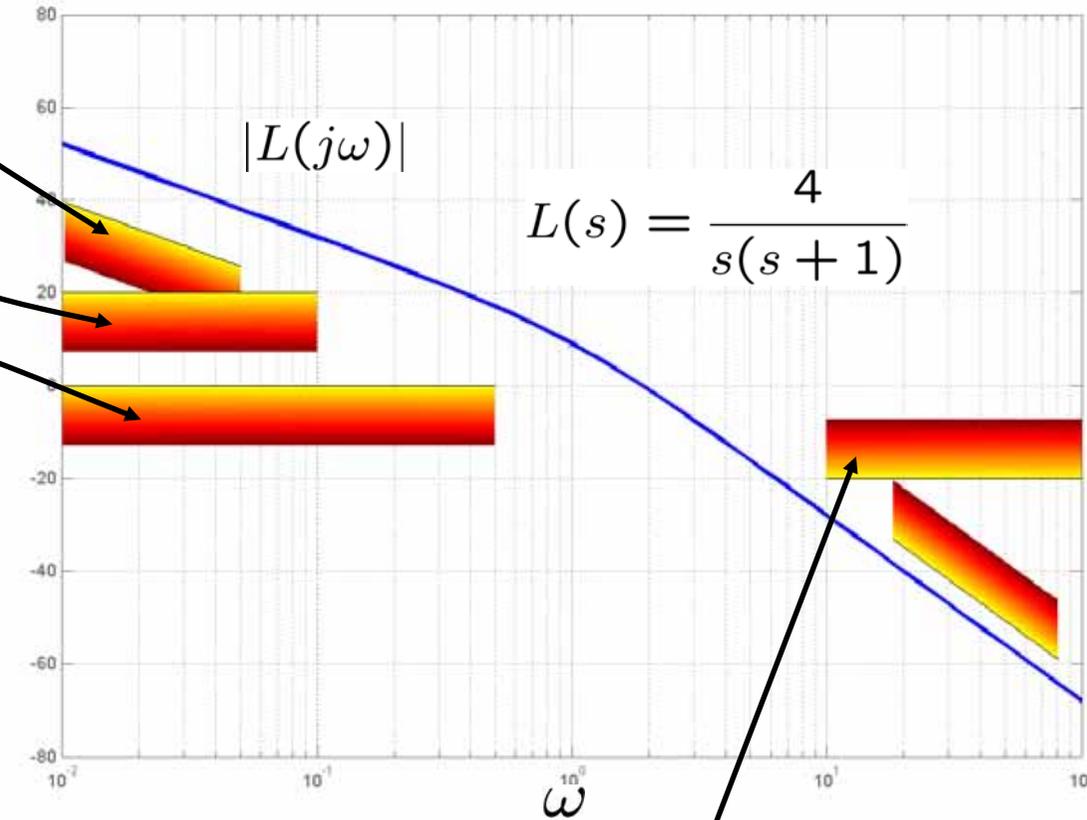
Esempio

$$|e(\infty)| = 0, w(t) = A \cdot 1(t), \forall A$$

$$|S(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \omega \in (0, 0.1)$$

$$S\% \leq 3 \rightarrow \xi \geq 0.75$$

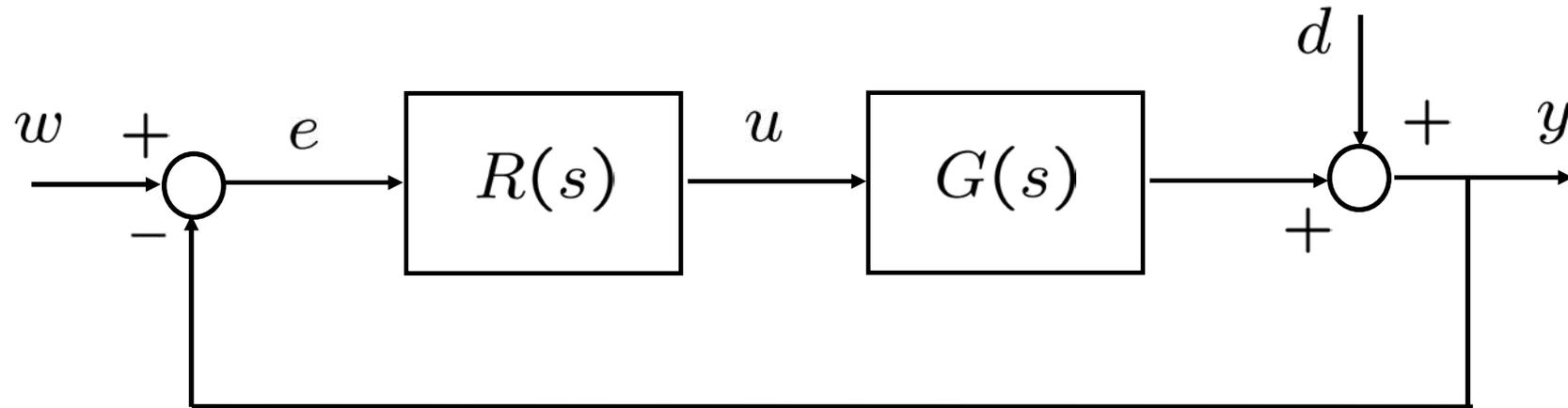
$$T_{a1} \leq 10 \rightarrow \omega_c \geq 0.5$$



$$|F(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \omega \in (10, 100)$$

- Progetto "per tentativi"

- Partendo da un controllore $R(s)$ di struttura semplice (per esempio un semplice guadagno $R(s) = \mu_R$) si complica via via la sua funzione di trasferimento finché tutte le specifiche sono **eventualmente** soddisfatte.
- Si può condurre sia utilizzando il luogo delle radici lavorando quindi sul piano s che sui diagrammi di Bode lavorando quindi in frequenza.

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Specifiche di progetto

- $|e(\infty)| \leq 0.1$ con $\left\{ \begin{array}{l} w(t) = A \cdot 1(t), |A| \leq 1 \\ d(t) = B \cdot 1(t), |B| \leq 5 \end{array} \right.$
- $\omega_c \geq 0.2$
- $\varphi_m \geq 60^\circ$

- Controllore

$$R(s) = \underbrace{\frac{\mu_R}{s^r}}_{R_1(s)} \underbrace{\frac{\prod (1 + sT_i)}{\prod (1 + s\tau_i)}}_{R_2(s)}$$

- Progetto statico

$$L(s) = R(s)G(s) = R(s) \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

Il progetto statico non è influenzato da $R_2(s)$ in quanto $R_2(0) = 1$

↳ Guadagno = $10\mu_R > 0$
 Tipo = r

Ma: $e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$

dove: $e_w(t) = e(t) |_{d(t)=0}$
 $e_d(t) = e(t) |_{w(t)=0}$ } sovrapposizione
 effetti

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

$$\downarrow |e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Ma:

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{|A|}{1 + 10\mu_R} \leq \frac{1}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \frac{|B|}{1 + 10\mu_R} \leq \frac{5}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

- Con $r = 1$

$$\downarrow e(\infty) = 0, \quad \forall \mu_R \quad \longrightarrow \quad R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

- Con $r = 0$

$$\downarrow |e(\infty)| \leq \frac{1}{1 + 10\mu_R} + \frac{5}{1 + 10\mu_R} = \frac{6}{1 + 10\mu_R}$$

imponendo $|e(\infty)| \leq 0.1$

$$\downarrow \frac{6}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1 \quad \longrightarrow \quad \mu_R \geq 5.9$$

Potremmo quindi scegliere $R_1(s) = 8$

- Progetto dinamico (A)

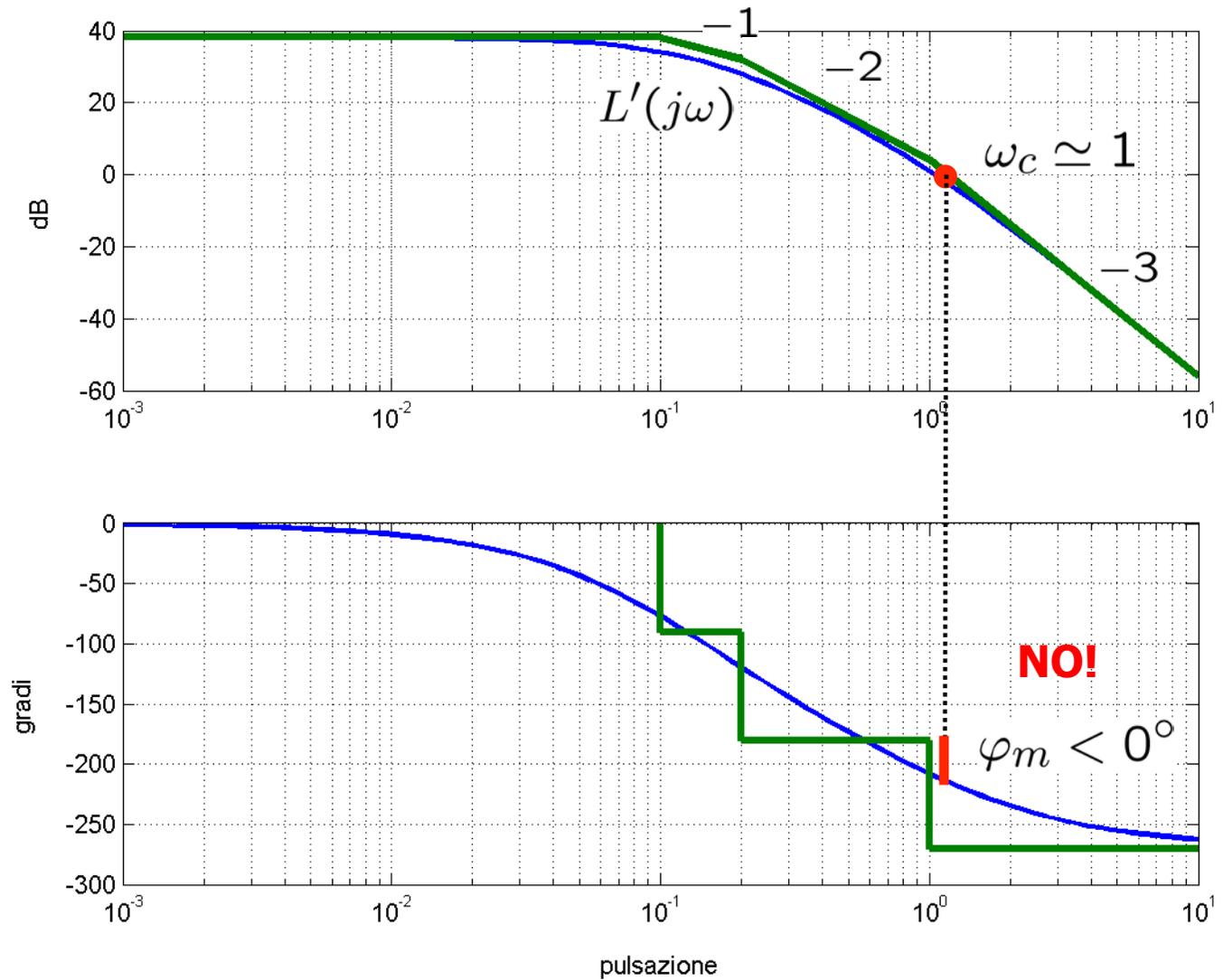
$$R_1(s) = 8$$

$$L(s) = 8 G(s) R_2(s) = L'(s) R_2(s)$$

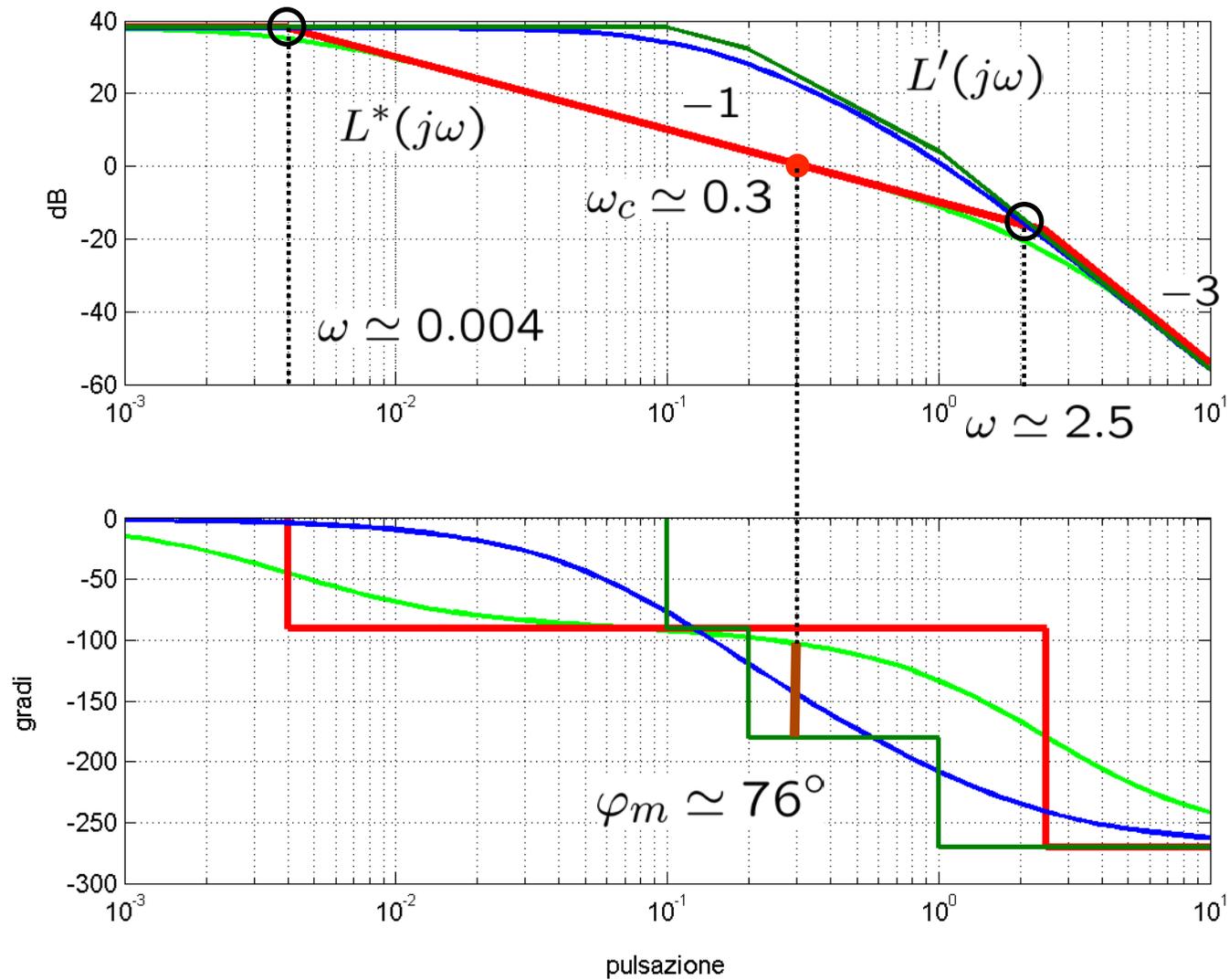
$$\text{con } L'(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Tentativo 1

$$R_2(s) = 1$$



- Tentativo 2



- Procedura seguita nel secondo tentativo del progetto (A):

- Si fissa una pulsazione di taglio soddisfacente: $\omega_c = 0.3 \geq 0.2$
 - Si prende una retta con pendenza -1 , passante per ω_c
e si individuano le pulsazioni corrispondenti alle intersezioni con
il diagramma asintotico di L'
 - Si determina quindi la funzione di trasferimento d'anello $L^*(s)$
corrispondente al nuovo diagramma asintotico
 - Essendo evidentemente $L^*(s) = R_2(s)L'(s)$ si ha $R_2(s) = \frac{L^*(s)}{L'(s)}$
 - Nel nostro caso quindi: $L^*(s) = \frac{80}{(1 + s/0.004)(1 + s/2.5)^2}$
- 
 $R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$ e $R(s) = 8R_2(s)$

- Quindi la soluzione (A) presenta le seguenti caratteristiche:

garantisce la precisione statica

$$R(s) = 8 \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$$

aumento di $\arg L(j\omega)$

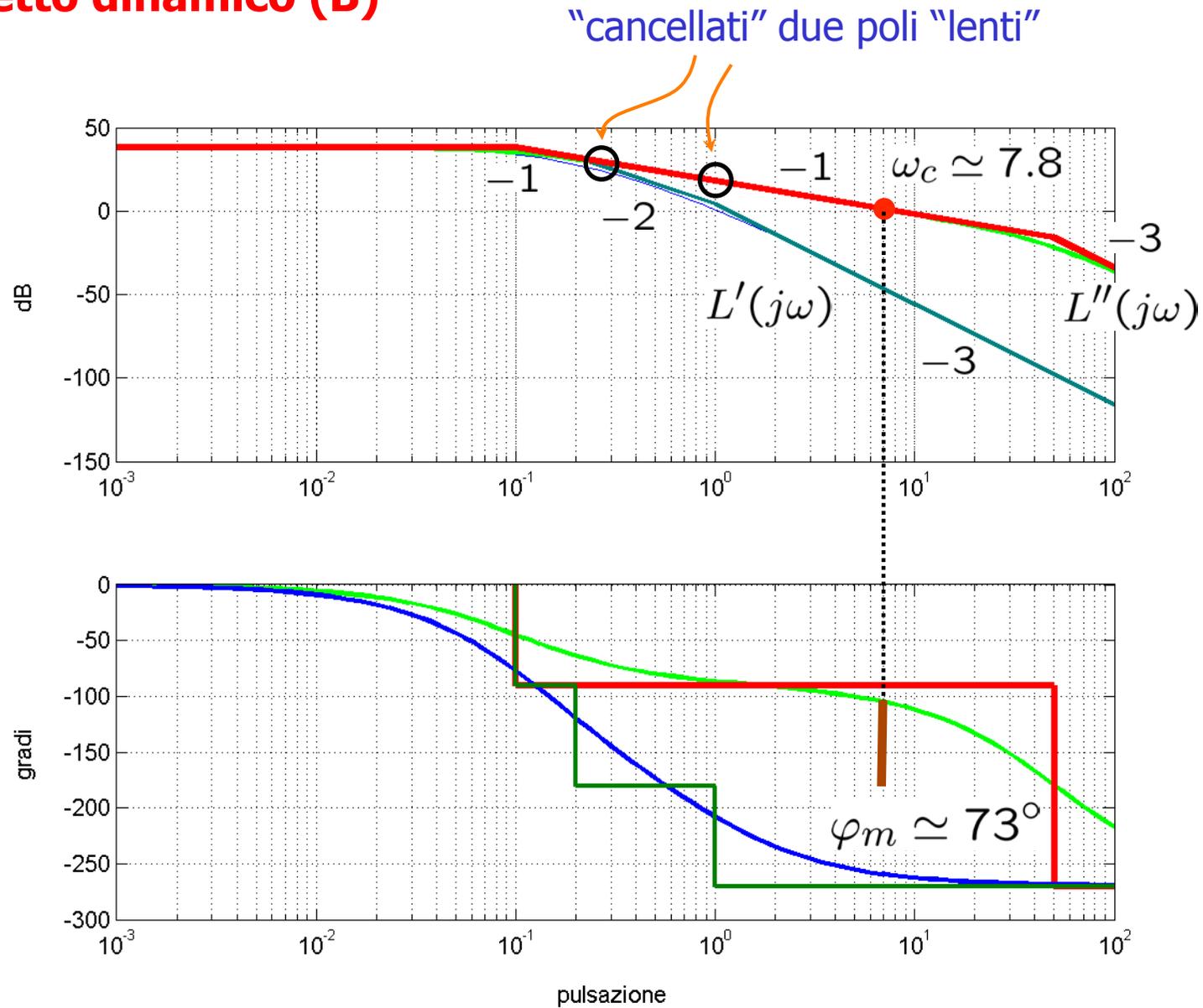
fa scendere $|L(j\omega)|$
a bassa frequenza
(per "tagliare a -1")

- necessari per la realizzabilita`
- favoriscono l'attenuazione dei
disturbi in retroazione

- **Motivazioni dei "raccordi" tra $L'(s)$ e $L^*(s)$**

- A bassa frequenza per non alterare il progetto statico
- Ad alta frequenza per la realizzabilità fisica

- Progetto dinamico (B)



- Procedura seguita nel progetto (B):

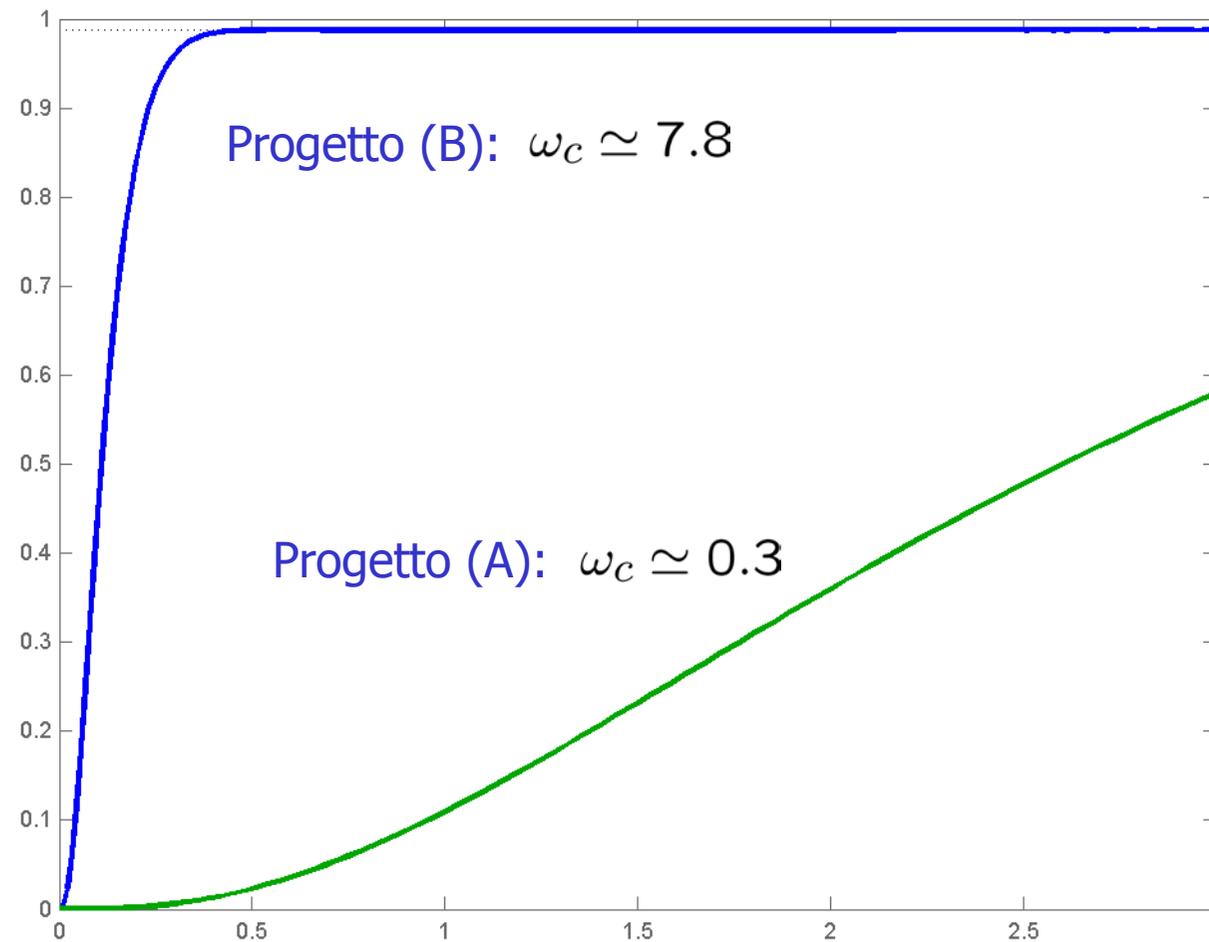
- Si ha cura di mantenere invariato il progetto statico
- Si mantiene il polo in -0.1 (cioè quello più "lento") per avere la "discesa" con pendenza -1
- Si cancellano i poli opportuni in modo da attraversare l'asse a 0 dB con pendenza -1
- Si aggiunge un pari numero di poli sufficientemente a destra della pulsazione di taglio ottenuto
- Nel nostro caso quindi:
$$L''(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 0.02s)^2}$$



$$R_2(s) = \frac{(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 0.02s)^2} \quad \text{e} \quad R(s) = 8R_2(s)$$

- Confronto risposte al gradino del sist. in anello chiuso

Nel Progetto (B) la banda passante e' molto maggiore da cui una velocita' di risposta maggiore



- Inconvenienti associati ad ω_c elevata

- Alti valori dei segnali di controllo generati dal controllore
- Scarsa attenuazione dei disturbi in retroazione
- Scarsa robustezza rispetto a:
 - ritardi di tempo (ricordiamo che lo sfasamento in ritardo cresce con ω)
 - incertezze sul modello ad alta frequenza

- Progetto statico e dinamico (C)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad (\text{quindi cambiamo anche il progetto statico})$$

$$L(s) = \frac{G(s)}{s} \mu_R R_2(s) = L_1(s) \mu_R R_2(s)$$

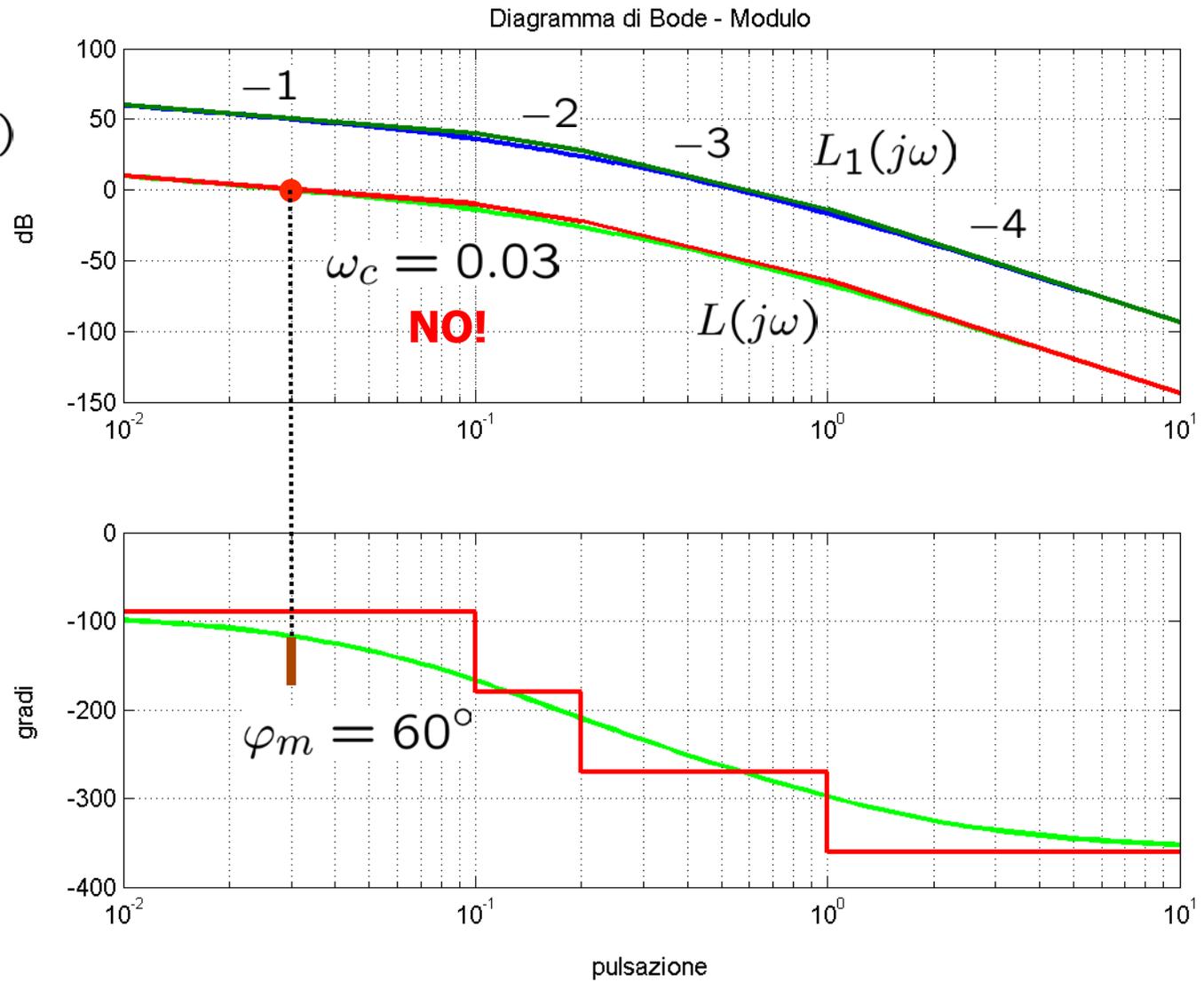
$$\text{con } L_1(s) = \frac{10}{s(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Tentativo 1

$$R_2(s) = 1$$

$$L(s) = \mu_R L_1(s)$$

$$\mu_R = 10^{-5/2}$$



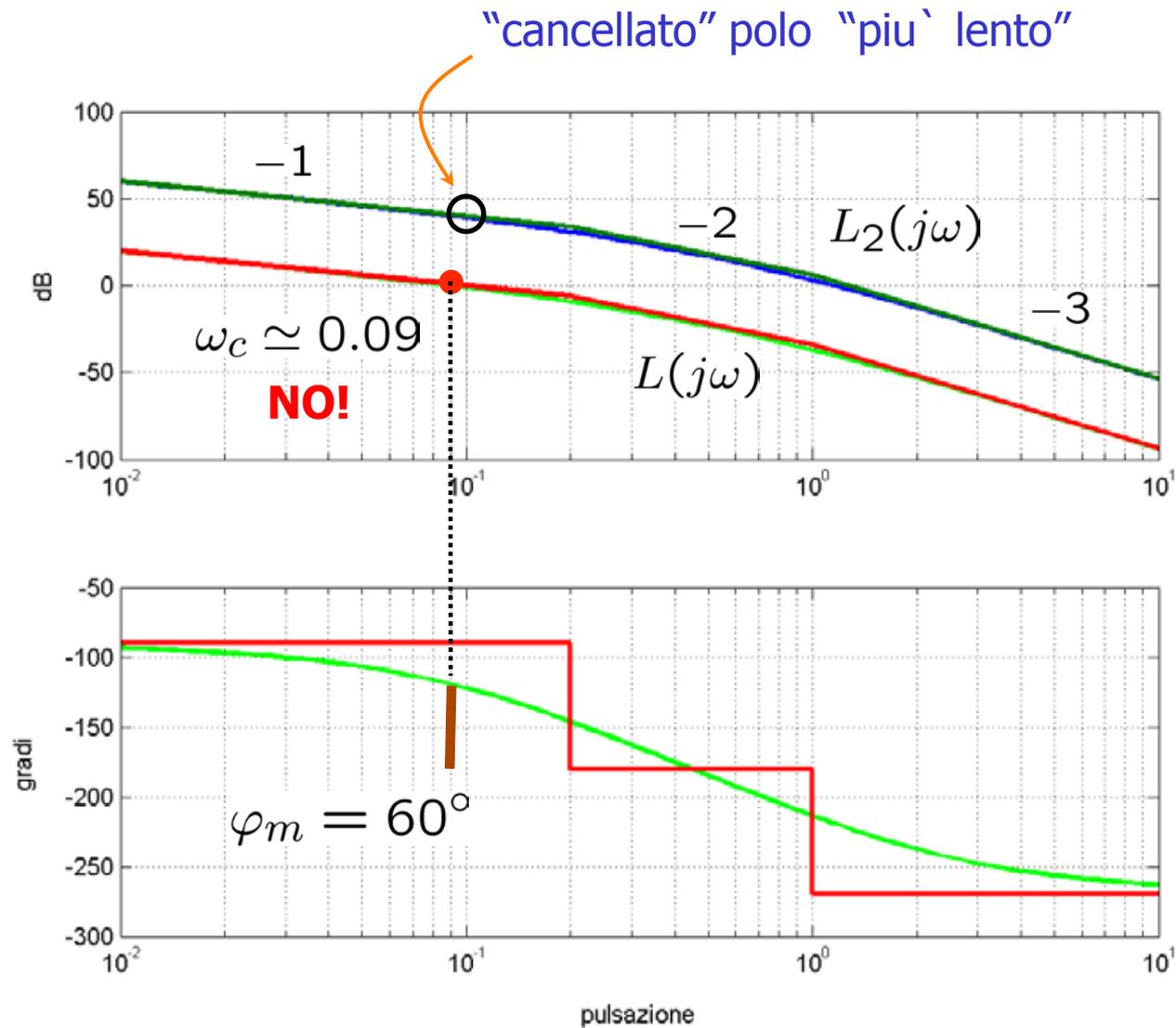
- Tentativo 2

$$R_2(s) = (1 + 10s)$$

$$L(s) = \mu_R L_2(s)$$

$$L_2(s) = \frac{10}{s(1 + 5s)(1 + s)}$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$



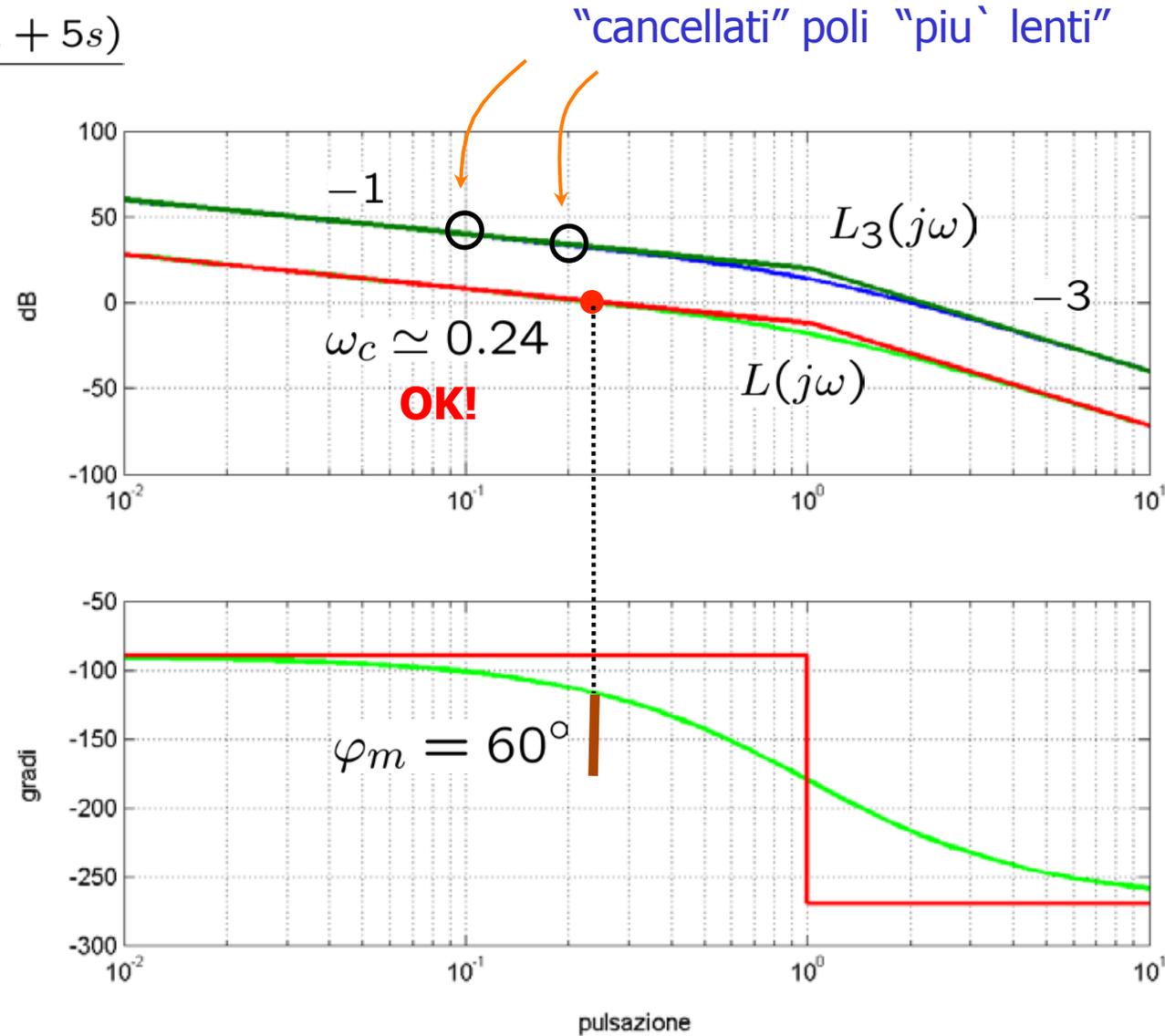
- Tentativo 3

$$R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)}{1 + s}$$

$$L(s) = \mu_R L_3(s)$$

$$L_3(s) = \frac{10}{s(1 + s)^2}$$

$$\mu_R \simeq 0.0254$$



- Riassumendo:

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

$$(A): \quad R(s) = \frac{8(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$$

$$\omega_c \simeq 0.3$$

$$\varphi_m \simeq 76^\circ$$

$$(B): \quad R(s) = \frac{8(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 0.02s)^2}$$

$$\omega_c \simeq 7.8$$

$$\varphi_m \simeq 73^\circ$$

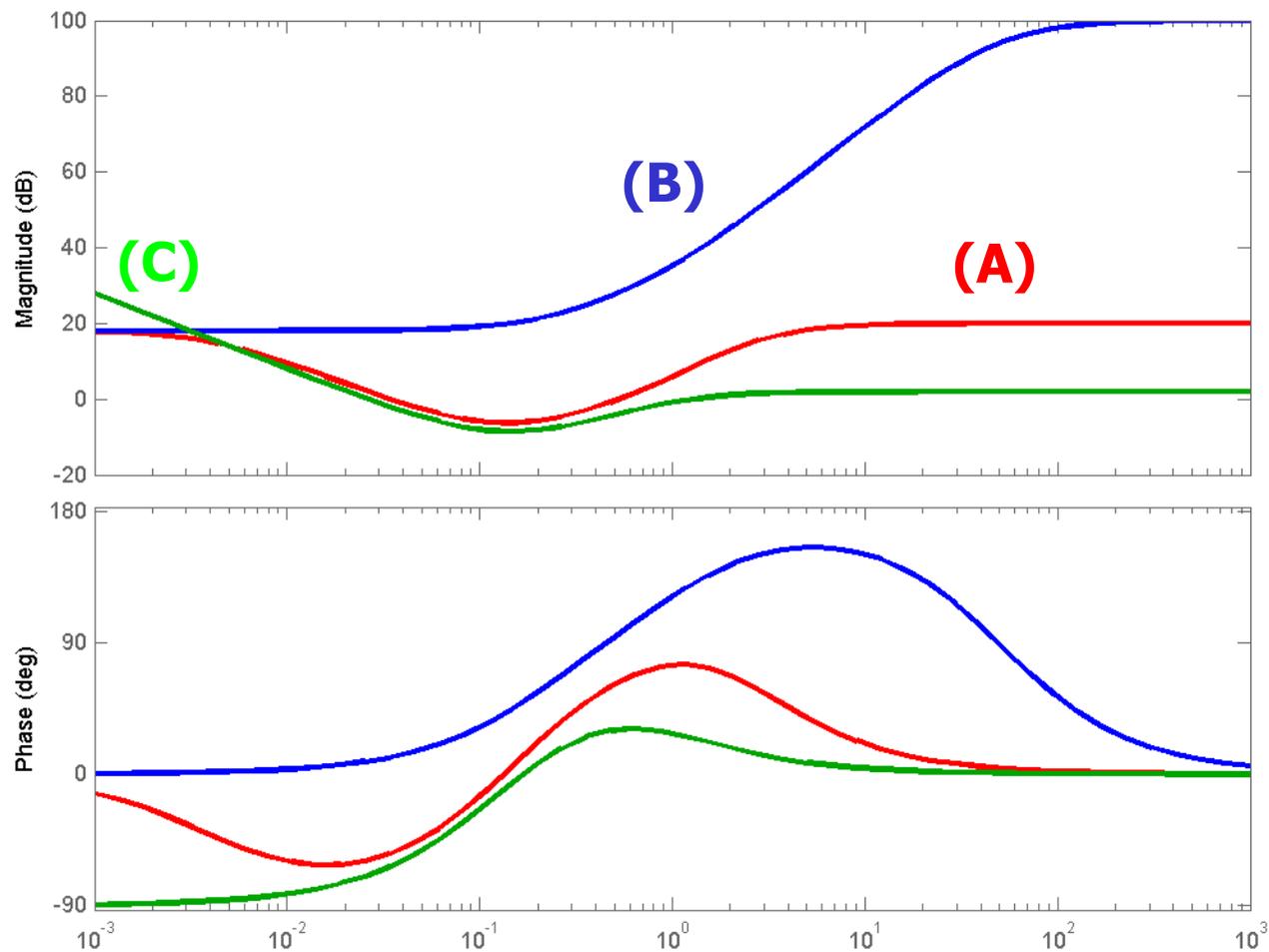
$$(C): \quad R(s) = \frac{0.0254(1 + 10s)(1 + 5s)}{s(1 + s)}$$

$$\omega_c \simeq 0.24$$

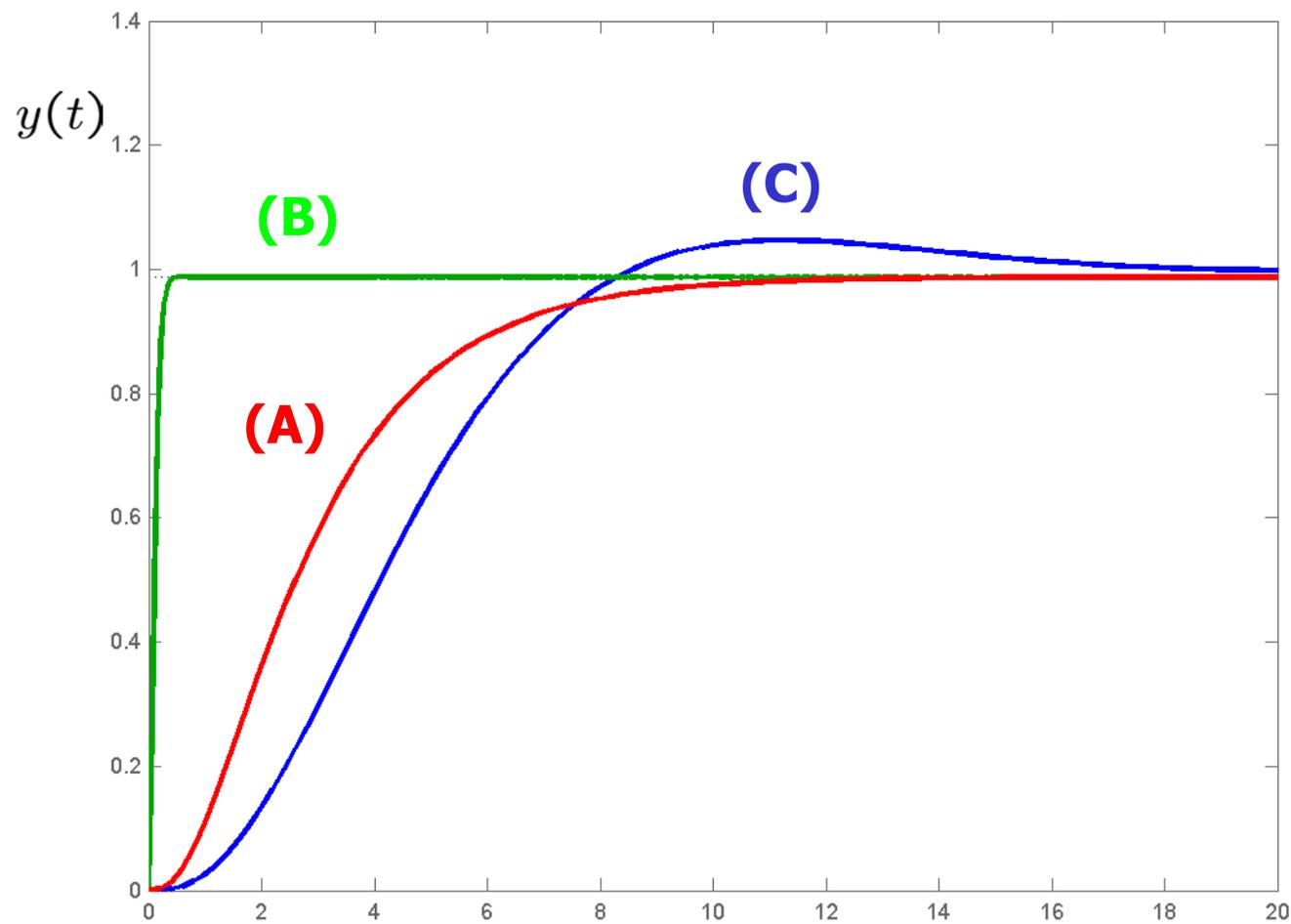
$$\varphi_m \simeq 63^\circ$$

$$e(\infty) = 0$$

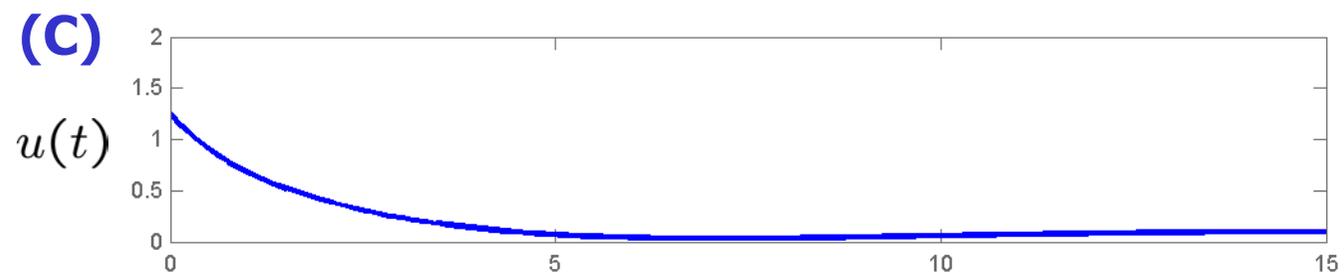
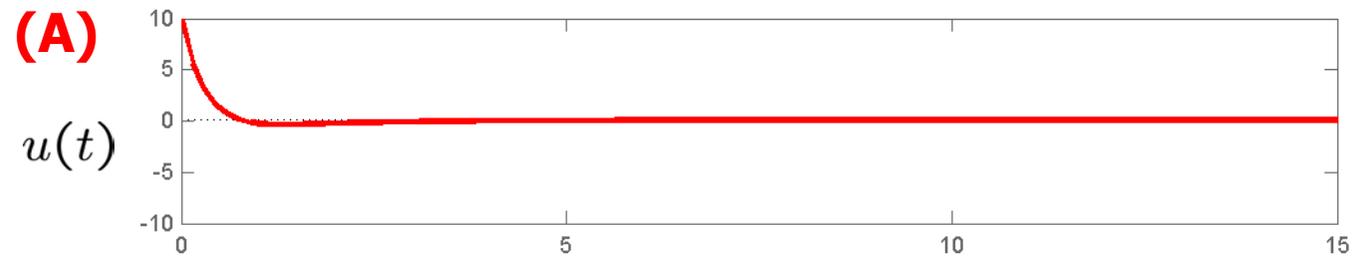
- Diagrammi di Bode dei diversi controllori:



- Risposte al gradino in anello chiuso:

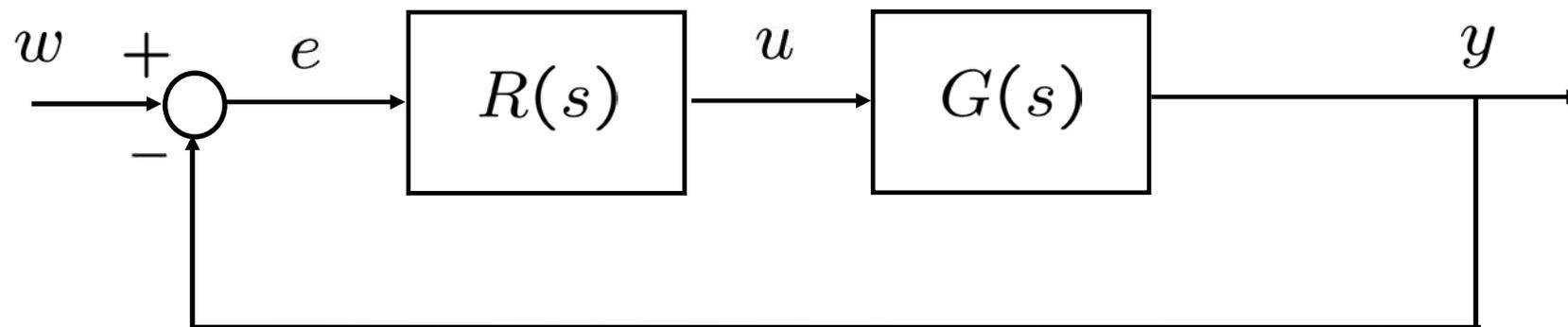


- Segnali di controllo:



- Progetto per sistemi a fase non minima/instabili

- Se il sistema da controllare non è a fase minima o è instabile, non si può utilizzare il criterio di Bode ed inoltre non si possono effettuare cancellazioni di zeri o poli a parte reale positiva quindi il progetto per tentativi va condotto con cautela.
- Inoltre la presenza di tali zeri/poli pone delle limitazioni su ciò che può essere ottenuto in termini di prestazioni

- Esempio 2 (a fase non minima)

$$G(s) = \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 10s)(1 + 0.1s)}$$

- Specifica di progetto: $\varphi_m \geq 40^\circ$

- Il termine $\frac{(1 - 2s)}{s}$

- Non e` cancellabile.
- Da` contributo negativo alla fase: $-90^\circ - \text{arctg}(2\omega)$

in $\omega = 0.5$ tale contributo vale -135°



ω_c

Non potra` superare di molto $\omega = 0.5$



Lo zero a fase non minima da` una limitazione forte alla velocita` di risposta ottenibile a valle del progetto del controllore

- Tentativo 1 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.085$

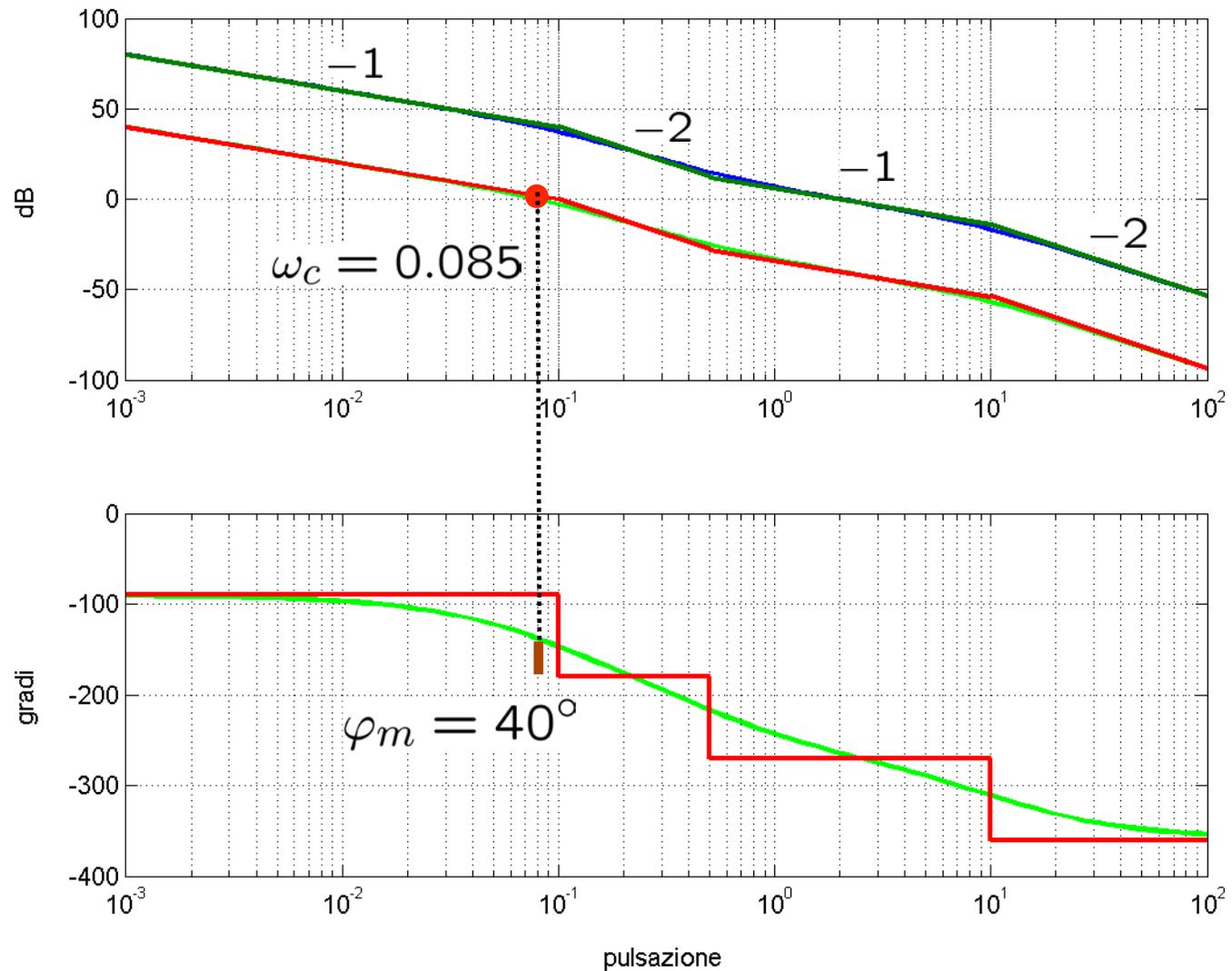
$\omega_{cmax} = 0.085$

$$R(s) = \mu_R$$

$$L(s) = \mu_R G(s)$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$

$\omega_c = 0.085$ dB

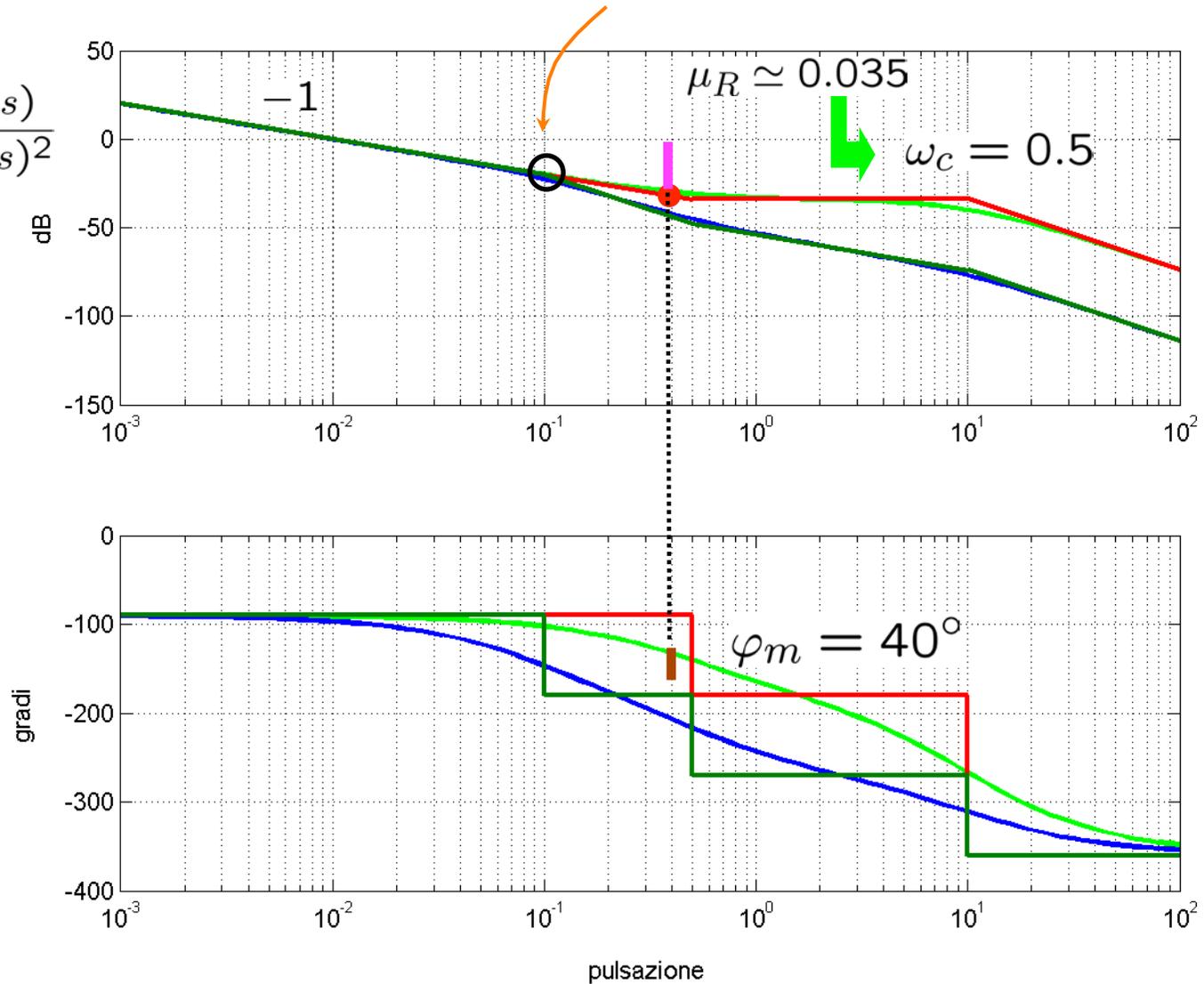


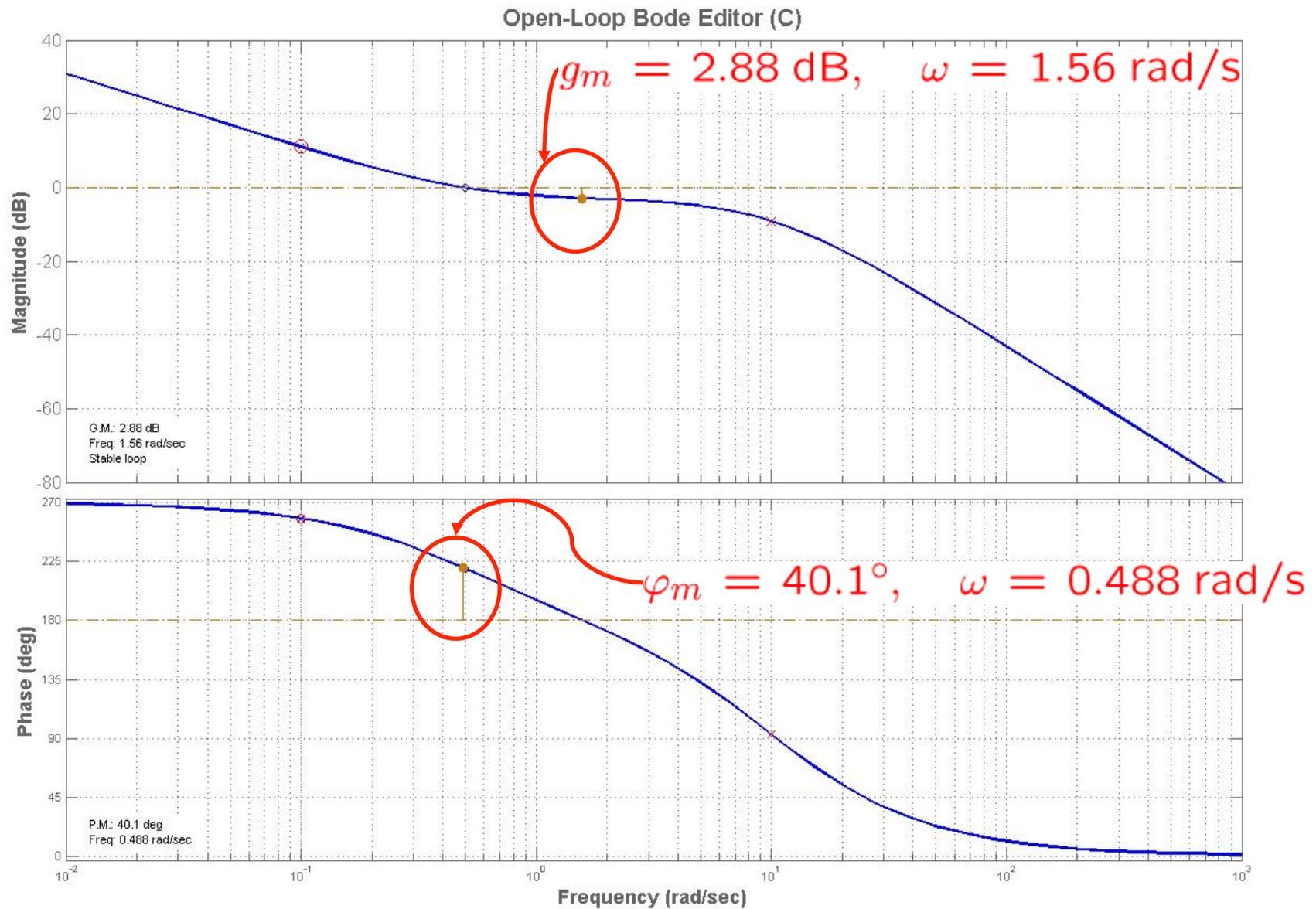
- Tentativo 2 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.5$

$$R(s) = \mu_R \frac{1 + 10s}{1 + 0.1s}$$

$$L(s) = \mu_R \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 0.1s)^2}$$

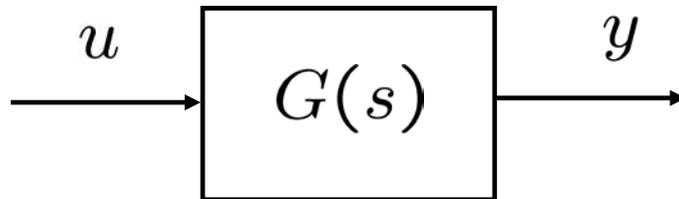
“cancellato” polo “piu` lento”







Risposta del sistema di ciclo chiuso ad un gradino unitario del set-point

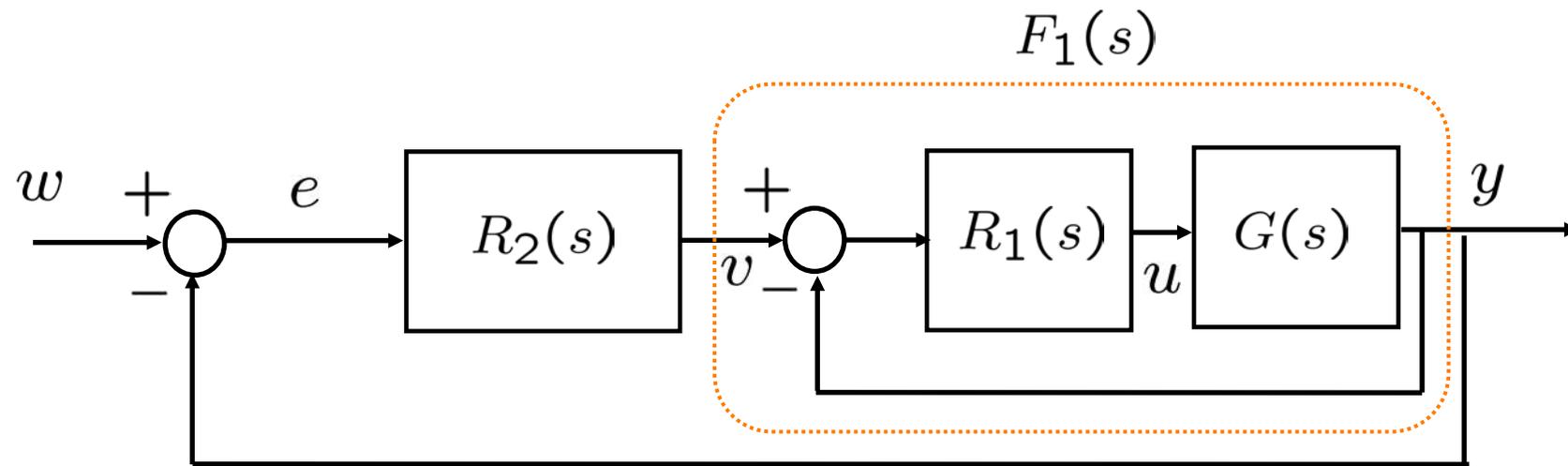
- Esempio 3 (instabile in anello aperto)

$$G(s) = \frac{1}{s - 1}$$

- Specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0$ con $w(t) = A \cdot 1(t)$
- $\omega_c \geq 0.5$
- $\varphi_m \geq 45^\circ$

La via piu` semplice e` utilizzare il cosiddetto **schema a doppio anello**:



$R_1(s)$ ha il compito di stabilizzare il sistema da controllare

$R_2(s)$ ha il compito di far si` che le specifiche di progetto siano soddisfatte

Il progetto di $R_1(s)$ puo` essere condotto semplicemente cosi` :

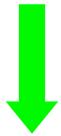
$$R_1(s) = \mu_1 \quad \longrightarrow \quad L_1(s) = \frac{\mu_1}{s - 1}$$

$$\downarrow \quad F_1(s) = \frac{L_1(s)}{1 + L_1(s)} = \frac{\mu_1}{s - 1 + \mu_1}$$

Scegliendo per esempio $\mu_1 = 11$ si otterrebbe $F_1(s) = \frac{1.1}{1 + 0.1s}$

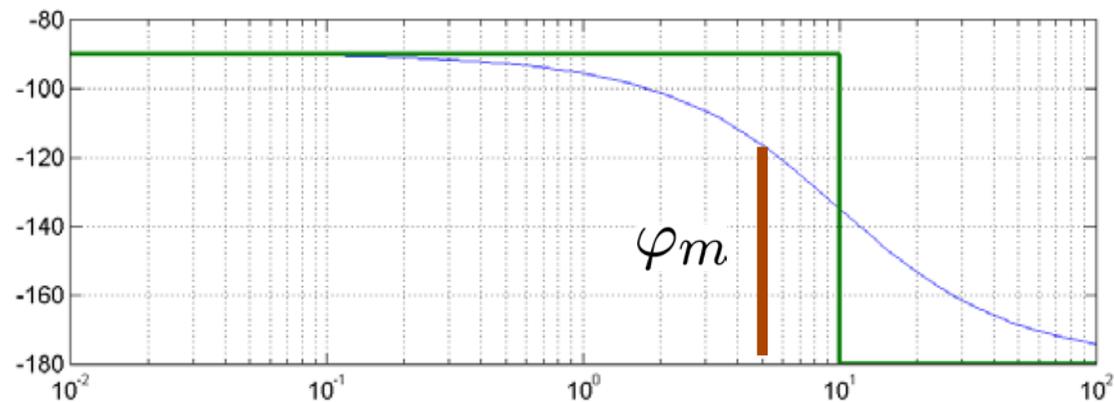
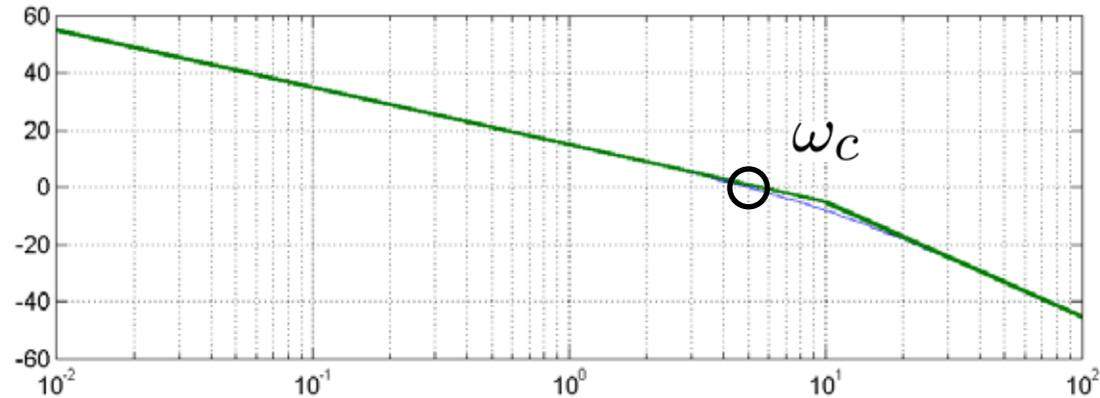
Il progetto di $R_2(s)$ e' ora molto semplice. Per esempio

$$R_2(s) = \frac{5}{s}$$



$$L_1(s) = \frac{5.5}{s(1 + 0.1s)}$$

- $|e(\infty)| = 0$
- $\omega_c \simeq 5.5$
- $\varphi_m \simeq 61^\circ$



Progetto di regolatori standard

~~Reti correttrici~~

Regolatori PID (Cenni)

Strutture dei regolatori standard

- Reti correttrici
 - Rete anticipatrice
 - Rete ritardatrice
 - Rete a sella
- Regolatori PID (**breve cenno; esempi in Esercitazioni**)

Regolatori PID

- Regolatori con azione di controllo

- proporzionale
- integrale
- derivativa



$$\begin{aligned} u(t) &= K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right] \\ &= K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t) \end{aligned}$$

Parametri dei PID

- coefficienti dell'azione P, I, D K_p, K_i, K_d

- (costante di) tempo dell'azione I, D T_i, T_d

- 1.^o legame tra i parametri $T_i = \frac{K_p}{K_i}, T_d = \frac{K_d}{K_p}$

Schema a blocchi di un PID ideale

- Forma standard

$$R(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{s T_i} + s T_d \right]$$

- Forma "interagente"

$$R(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{s T'_i} \right) (1 + s T'_d)$$

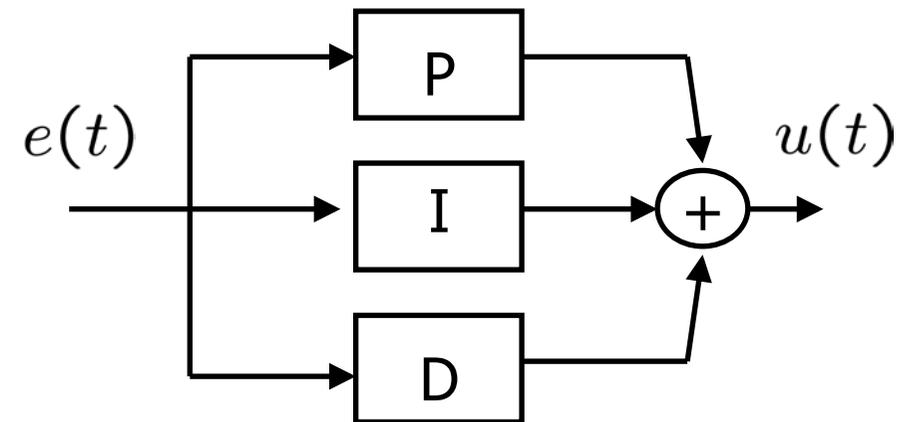
- Forma "in parallelo"

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + s K_d$$

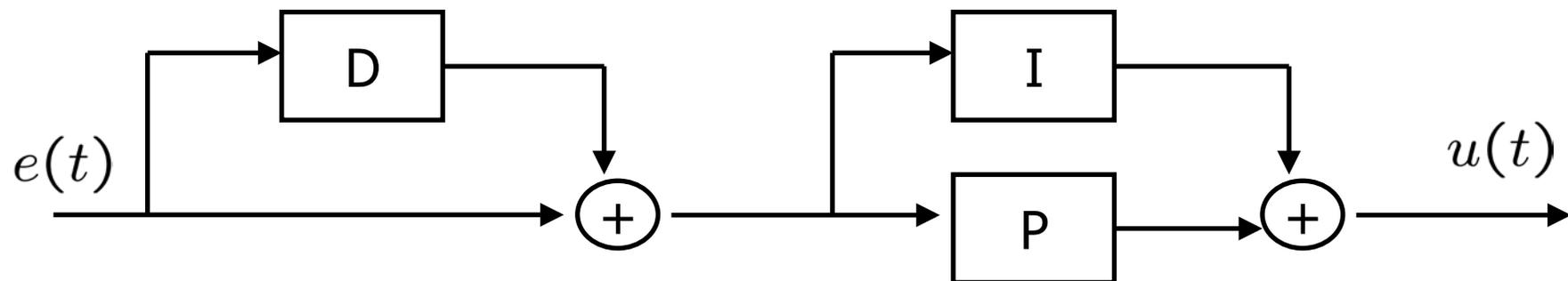
È PID ideale perchè la **fdt non è propria** (2 zeri/1 polo).

Schema a blocchi di un PID ideale (2)

- Forma non interagente



- Forma interagente



Legami tra i parametri

- Standard vs parallela $T_i = \frac{K_p}{K_i}, \quad T_d = \frac{K_d}{K_p}$
- Da interagente a non interagente

$$K_p = K_p' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'}$$

$$T_i = T_i' + T_d'$$

$$T_d = \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'}$$

- Da non interagente ad interagente

$$T_i \geq T_d$$



$$K'_p = \frac{K_p}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

$$T'_i = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

$$T'_d = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4T_d}{T_i}} \right)$$

Perchè 3 strutture?

- La forma non interagente (e quindi anche quella parallela) è più generale di quella interagente.
- La forma interagente è stata storicamente la prima a venire utilizzata (regolatori pneumatici) e secondi molti testi è la più semplice da tarare manualmente.
- In effetti T'_i e T'_d esprimono direttamente le costanti di tempo degli zeri della fdt in forma interagente.

Osservazioni: valori ammissibili dei parametri

- Qualsiasi sia la forma scelta per il PID ideale, esso ha una fdt con 2 zeri ed 1 polo.
- In particolare **il polo è fisso** nell'origine, gli **zeri sono funzione dei parametri**.
- Esistono allora dei **vincoli** per i parametri? **SI!**
 - Gli **zeri** del regolatore devono essere **a parte reale negativa**, cioè il **regolatore** PID deve avere una fdt **a fase minima!**
- Questa richiesta vincola i parametri che compaiono nella fdt del PID.

- Forma interagente  zeri reali negativi

$$R(s) = K'_p \left(\frac{1 + sT'_i}{sT'_i} \right) (1 + sT'_d) \quad \begin{array}{l} K'_p > 0 \\ T'_i, T'_d > 0 \end{array}$$

- Forma non interagente  zeri a parte reale negativa

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2T_iT_d}{sT_i} \quad \begin{array}{l} K_p > 0 \\ T_i, T_d > 0 \end{array}$$

- Forma parallela  zeri a parte reale negativa

$$R(s) = \frac{K_i + sK_p + s^2K_d}{s} \quad \begin{array}{l} K_p > 0 \\ K_i, K_d > 0 \end{array}$$

PID realizzabile

- Si limita l'amplificazione del "derivatore" ad alta frequenza introducendo un filtro LP del 1.^o ordine

$$K_p T_d s \quad \longrightarrow \quad \frac{K_p T_d s}{1 + s \frac{T_d}{N}}$$

$$5 (10) \leq N \leq 10 (100)$$

- In questo modo la fdt del PID diviene propria (PID realizzabile).

FdT del PID realizzabile

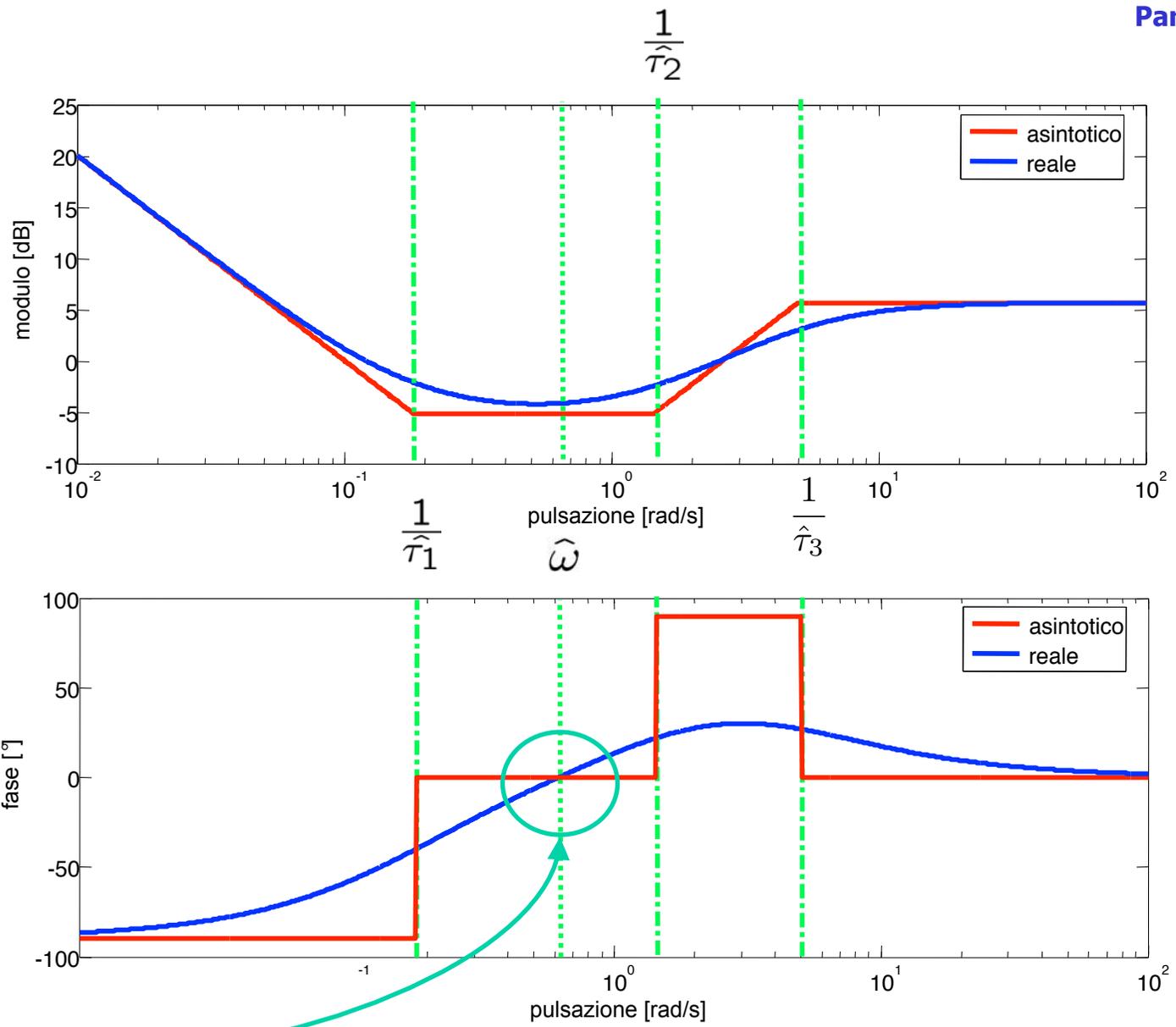
$$R(s) = K_i \frac{\left[1 + s \left(T_i + \frac{T_d}{N} \right) + s^2 T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N} \right) \right]}{s \left(1 + s \frac{T_d}{N} \right)}$$



$$R(s) = K_i \frac{(1 + s \hat{\tau}_1) (1 + s \hat{\tau}_2)}{s (1 + s \hat{\tau}_3)}$$

$$\begin{array}{l}
 N \gg 1 \\
 T_d < T_i
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \left. \begin{array}{l}
 \hat{\tau}_1 \approx \tau_1 \\
 \hat{\tau}_2 \approx \tau_2
 \end{array} \right\} \text{PID ideale}$$

$$\hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2$$



Sfasamento nullo

$$\frac{1}{\hat{\tau}_2}$$

PID e pulsazione a sfasamento nullo

- Partendo dall'espressione

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s \hat{\tau}_1) (1 + s \hat{\tau}_2)}{s (1 + s \hat{\tau}_3)}$$

ed imponendo $\angle R(j\hat{\omega}_{\text{reale}}) = 0$

si ottiene
$$\hat{\omega}_{\text{reale}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\tau}_1 \hat{\tau}_2 - (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2) \hat{\tau}_3}}$$

Lo si verifichi

- Partendo invece dall'espressione del PID non fisicamente realizzabile in forma non interagente

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{s T_i} = K_i \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{s}$$

imponendo

$$\angle R(j\bar{\omega}_{ideale}) = 0$$

si ottiene stavolta

$$\bar{\omega}_{ideale} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Lo si verifichi

- Si noti che

$$\hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \quad \longrightarrow \quad \hat{\omega}_{reale} \approx \bar{\omega}_{ideale}$$

Effetto del polo aggiuntivo LP: scelta di N

- Affrontiamo ora il problema del rumore di misura: come moderare l'effetto del rumore sulla legge di controllo di tipo derivativo? Si utilizza il polo aggiuntivo LP.
- Al crescere di N, il PID realizzabile si comporta sempre più come quello ideale.
- Al crescere di N è sempre minore l'azione filtrante LP sul rumore: si eccita sempre più l'attuatore con segnale indesiderato (si amplifica il rumore di misura; la sensibilità del controllo cresce [in modulo] alle alte frequenze).
- **Scelta "ottima"**: determinare un valore "basso" di N, che ponga comunque il polo in $-N/T_D$ **al di fuori della banda di interesse** per il controllo.