

# Analisi dei sistemi retroazionati

**Prestazioni dei sistemi di controllo**

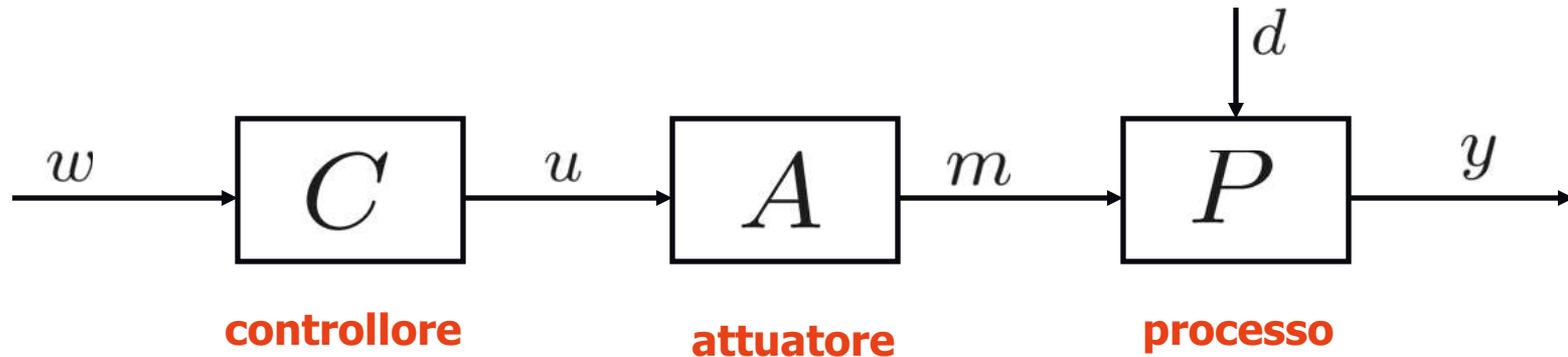
**Stabilità a ciclo chiuso: criterio di Nyquist, margini di guadagno e di fase, criterio di Bode**

# Introduzione

- In questa parte del corso affronteremo lo **studio dei sistemi LTI retroazionati**, introducendo definizioni, proprietà e strumenti che saranno poi utili (ed utilizzati) nella fase di progetto del controllore.
- L'analisi non può essere svolta considerando assieme sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto:
  - Gli **strumenti** che abbiamo a disposizione (ad es. i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza [cfr. Parte 8] ) e che vedremo nel seguito sono per la maggior parte **adoperabili con profitto solo** nel caso di **sistemi a tempo continuo**.
- Per questo motivo in ciò che segue consideriamo **solamente sistemi LTI a tempo continuo**.

# ● Sistemi di controllo

## - Anello aperto

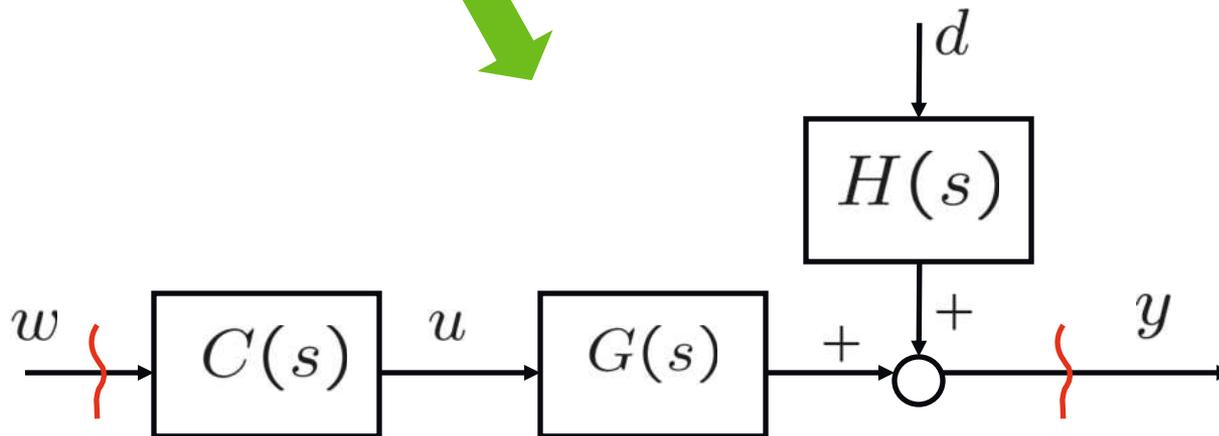
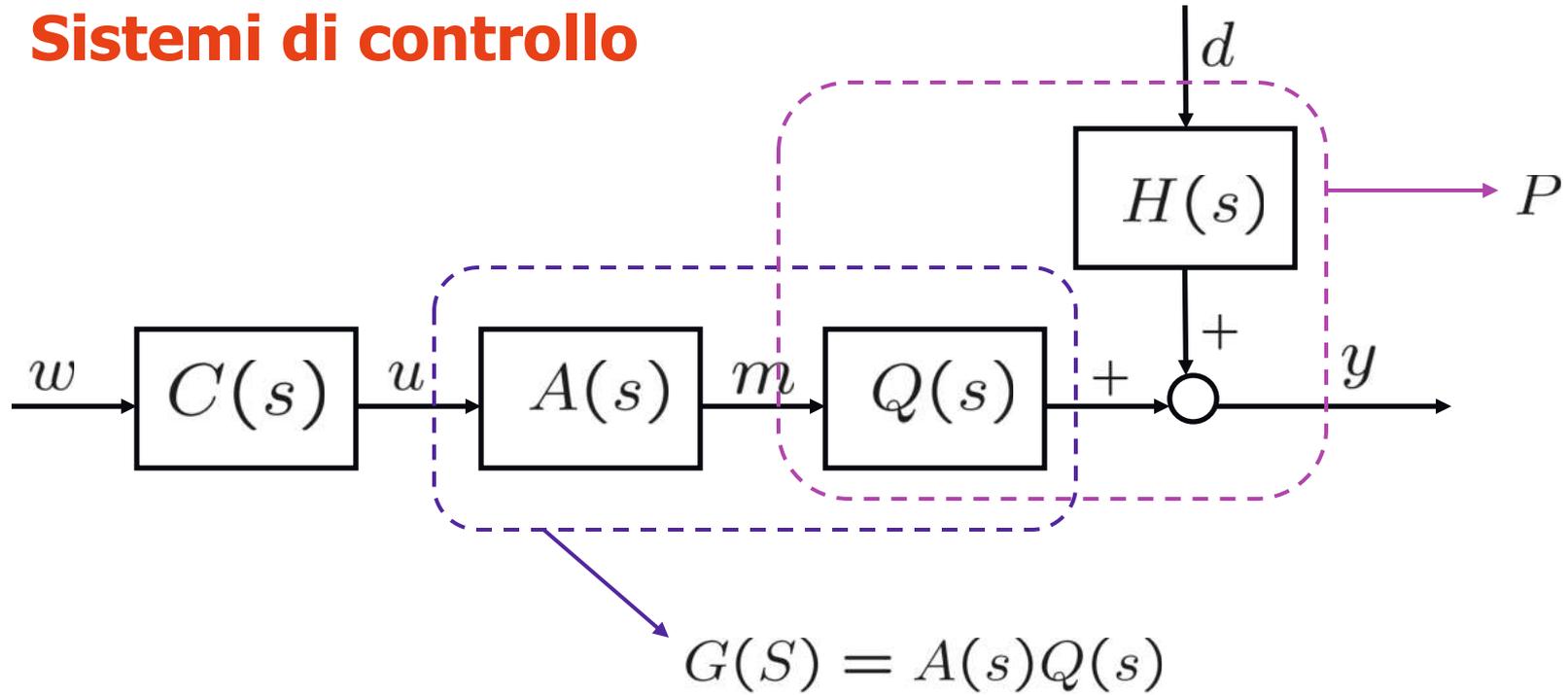


Ipotesi:

$C, A, P$

sistemi  
dinamici  
lineari

- **Sistemi di controllo**



## ● Prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$



$$C(s)G(s) = 1$$



$$C(s) = G(s)^{-1}$$



Quindi il controllore  
"perfetto" in a.a. deve  
invertire la dinamica  
del sistema

Passa-tutto  
con  $\mu = 1$

## ● Limitazioni

- cancellazioni polo-zero nel semipiano destro ( $\text{Re} \geq 0$ )
- non si può stabilizzare in a.a. un sistema instabile
- $C(s)$  potrebbe avere più zeri che poli ( $\Rightarrow$  non realizzabile)
- scarsa robustezza nei confronti di incertezze su  $G(s)$

## ● Esempi

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

$$C_0(s) = \frac{0.1(1 + 2s)(1 + 0.1s)}{1 + s} \longrightarrow \text{Non realizzabile}$$

$$C_1(s) = \frac{0.1(1 + 2s)(1 + 0.1s)}{(1 + s)(1 + 0.01s)} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\longrightarrow F_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_1(s)G(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}$$

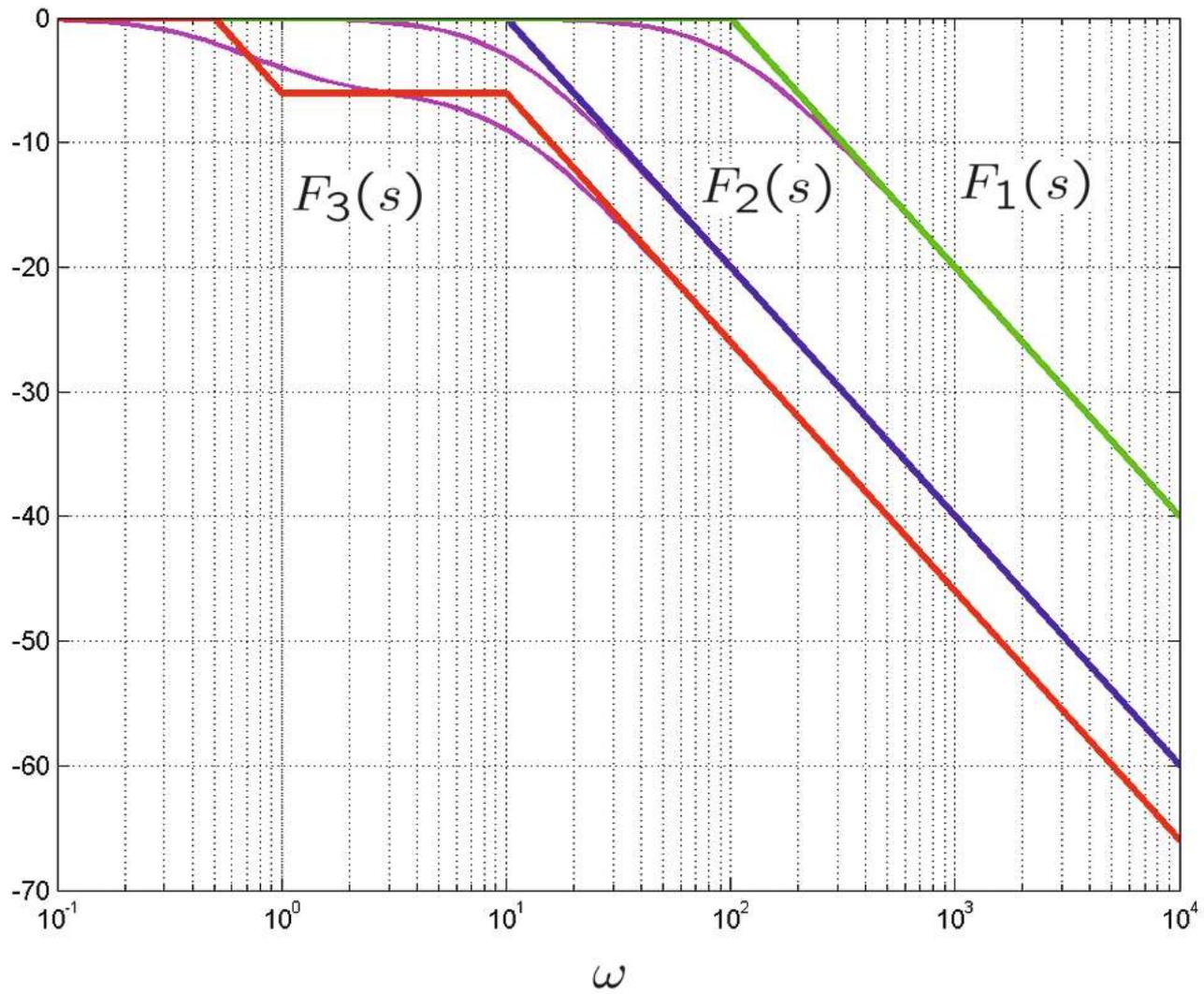
Filtro P.B. con  $B \simeq [0, 100]$

$$C_2(s) = \frac{0.1(1 + 2s)}{1 + s} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

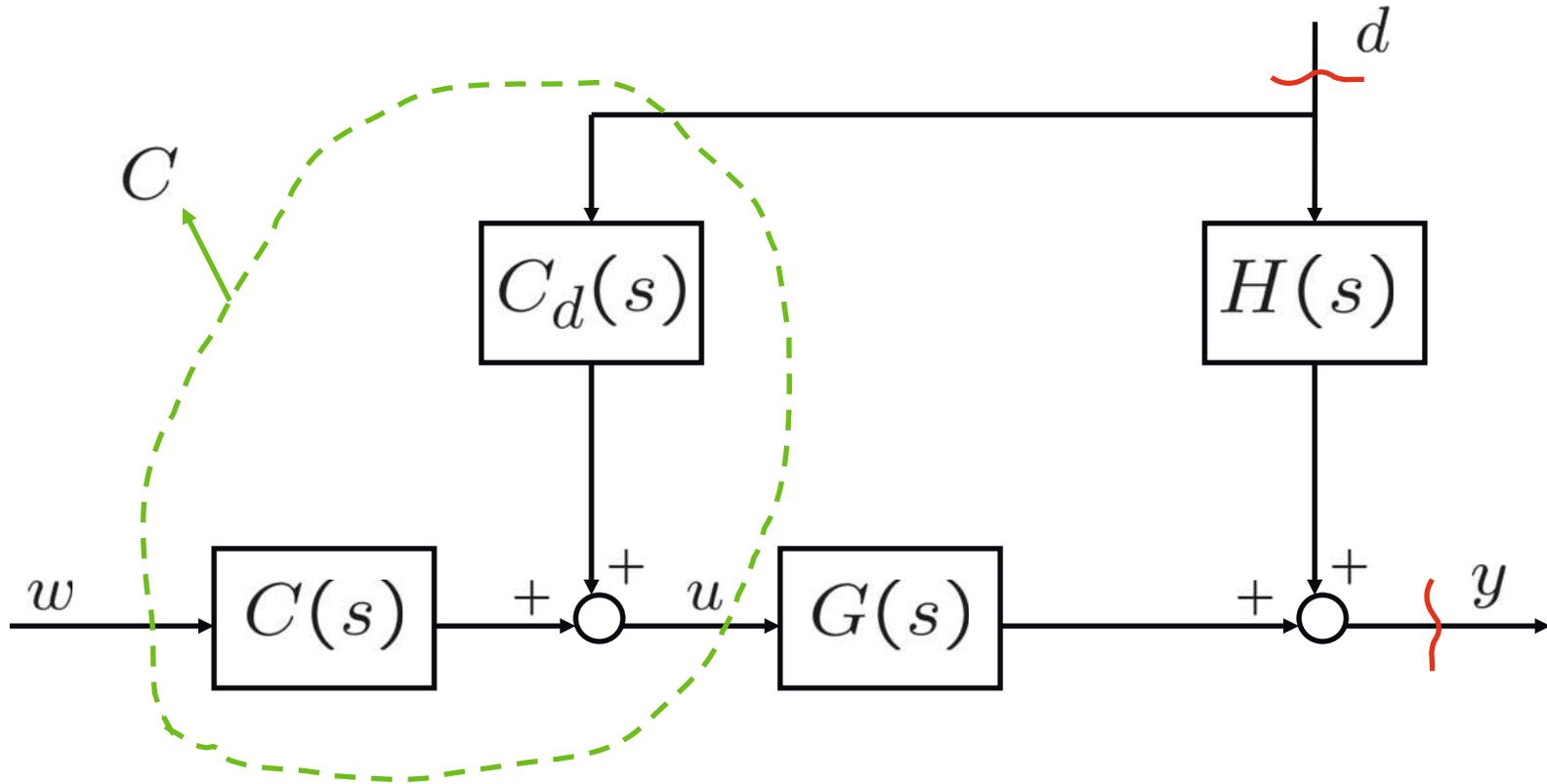
$$\longrightarrow F_2(s) = \frac{1}{1 + 0.1s} \quad \text{Filtro P.B. con } B \simeq [0, 10]$$

$$C_3(s) = 0.1 \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\longrightarrow F_3(s) = \frac{1 + s}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \quad \text{Filtro P.B. con } B \simeq [0, 0.5]$$



- **Compensazione del disturbo in a.a.**



Si presuppone quindi la misurabilità del disturbo  $d(t)$

- **Prestazione ideale**

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0 = H(s) + C_d(s) \cdot G(s)$$



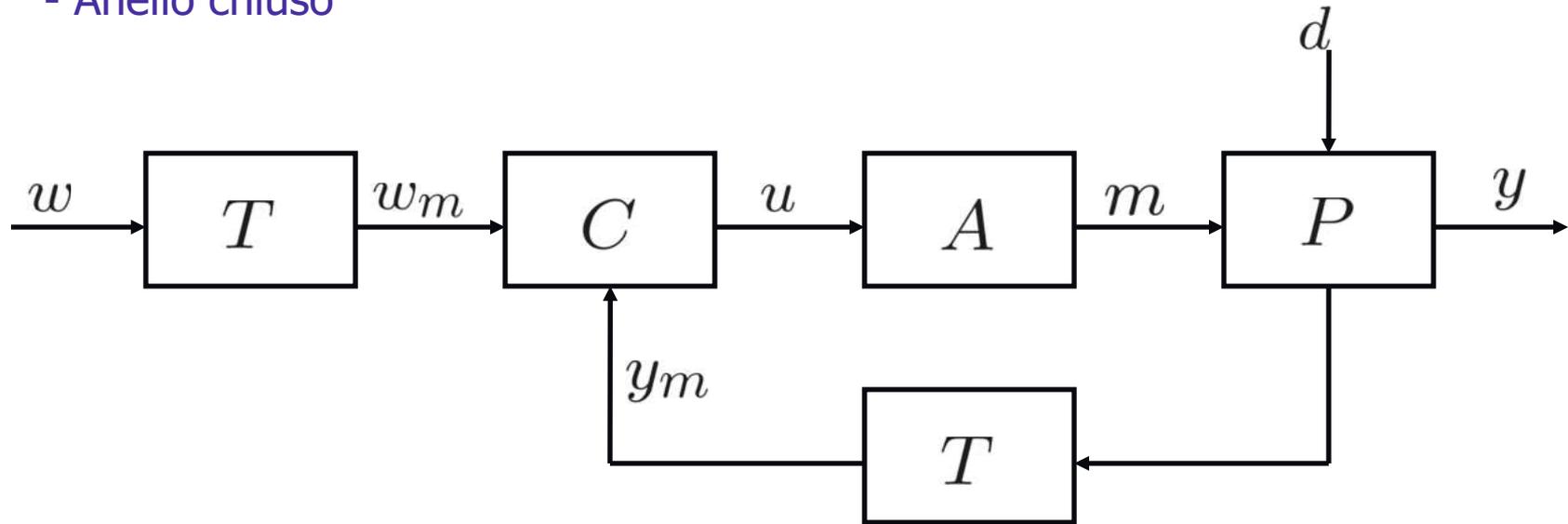
Si impone la perfetta compensazione del disturbo

$$\longrightarrow C_d(s) = -G(s)^{-1}H(s)$$

Limitazioni: analoghe alle precedenti

# ● Sistemi di controllo

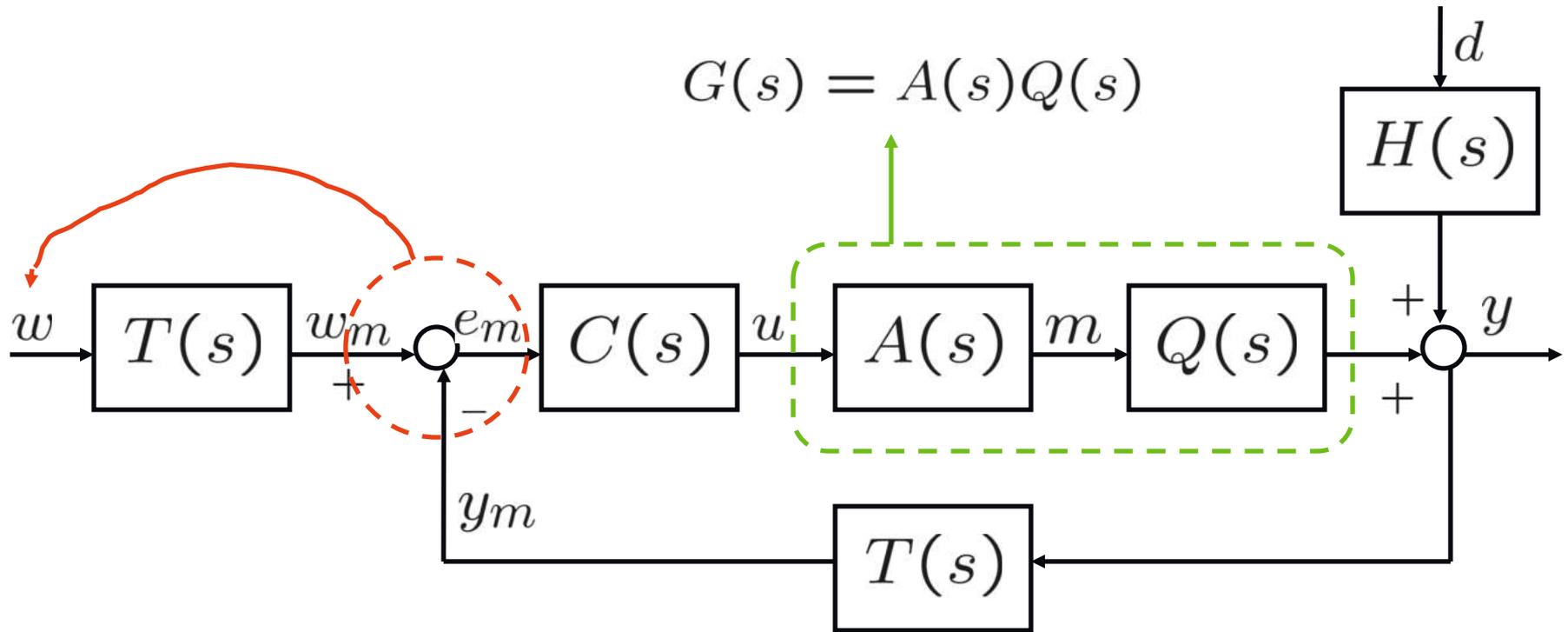
- Anello chiuso



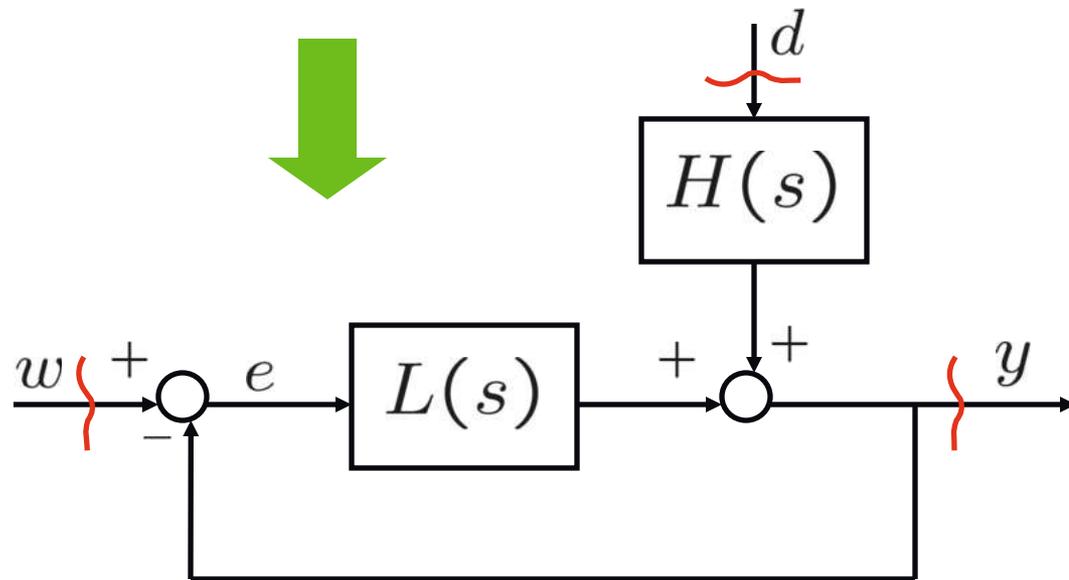
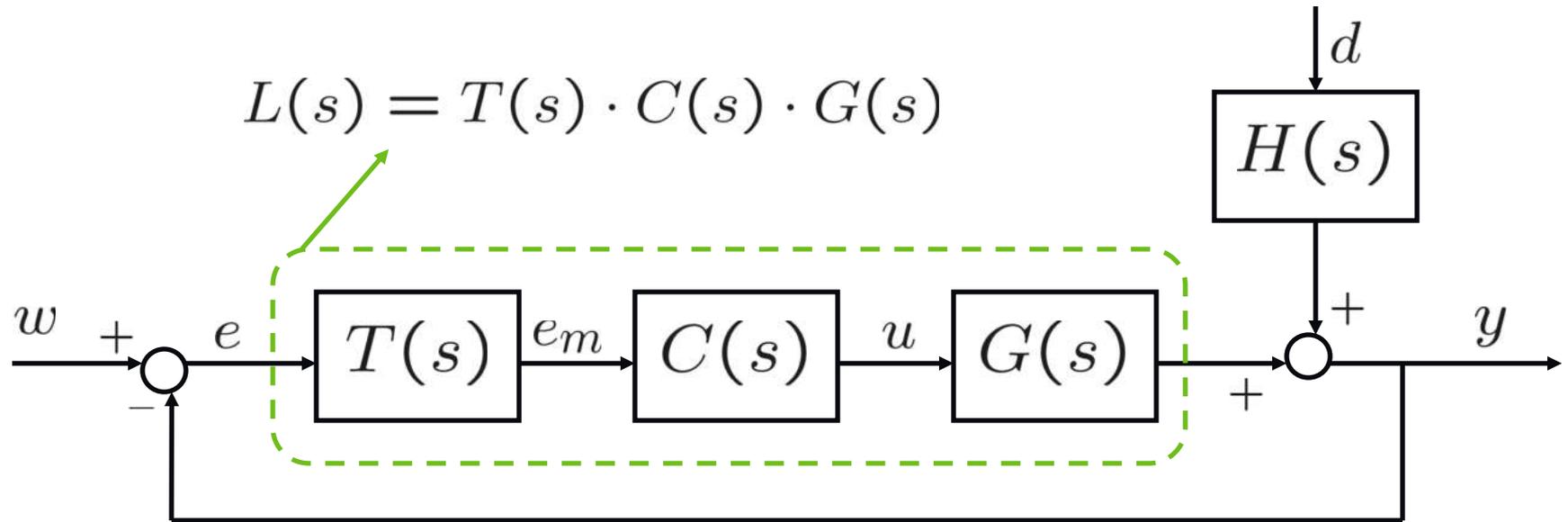
Trasduttore

Ipotesi: -  $T, A, C, P$  sistemi lineari

- azione di controllo basata su  $w_m - y_m = e_m$



$$\begin{aligned}
 E_m(s) &= W_m(s) - Y_m(s) = \\
 &= T(s)[W(s) - Y(s)] = T(s) \cdot E(s)
 \end{aligned}$$



- **Prestazioni ideali**

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$

In realtà:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \neq \underline{1}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \neq \underline{0}$$

## ● Soluzione realistica

-  $F(s)$  : Filtro passa-basso con banda passante suff. ampia e guadagno  $\mu_F = 1$

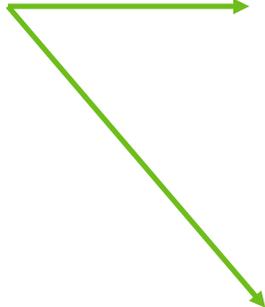
-  $M(s)$  :  $|M(j\omega)| \simeq 0$   
nella banda di  $\omega$  in cui lo spettro di  $d(t)$  è significativo

## ● Analisi di sistemi retroazionati

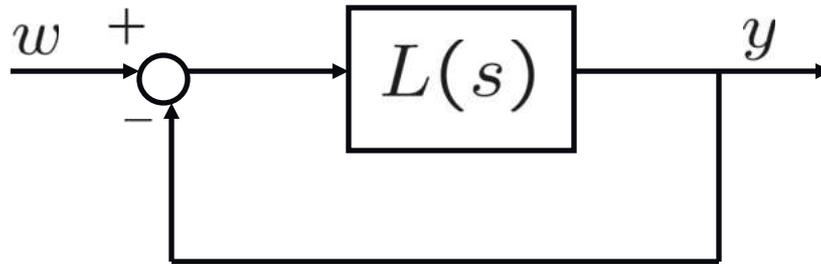
- Asintotica stabilità in anello chiuso

- Prestazioni in anello chiuso


$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$


$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$

## ● Stabilità di sistemi retroazionati



$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

Asintotica stabilità



Le radici di

$\varphi(s) + N(s)$

hanno  $\text{Re} < 0$

- **Diagramma di Nyquist**

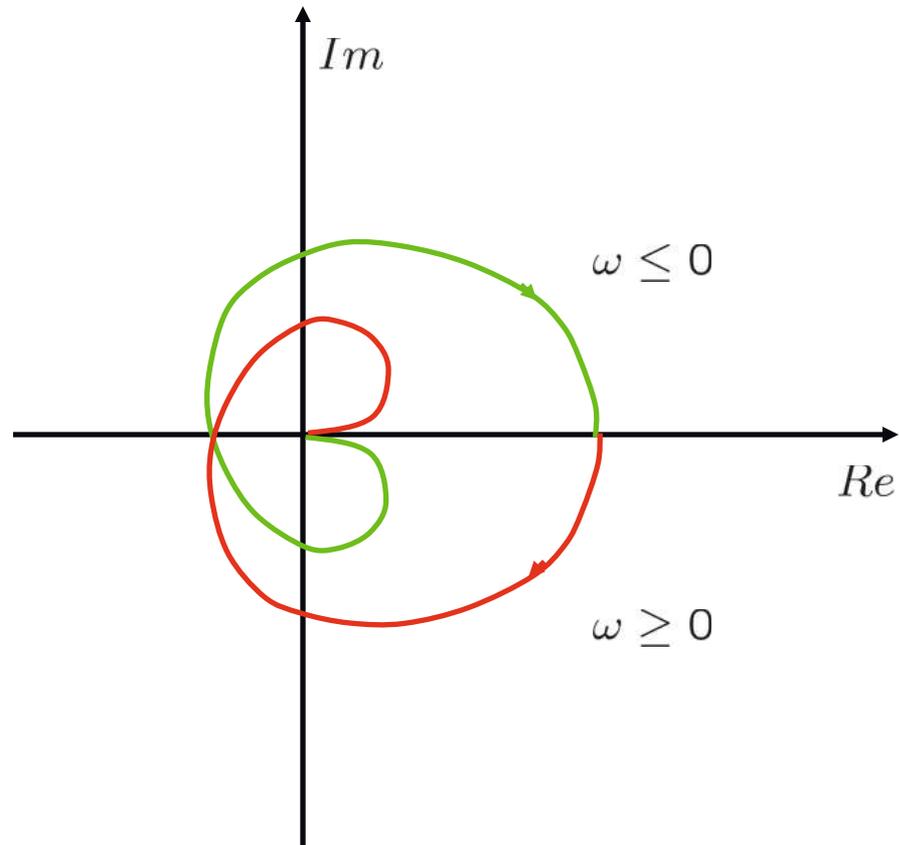
┌ = D.D.N = grafico di  $L(j\omega)$  per  $-\infty < \omega < +\infty$

= diagramma polare ( $\omega \geq 0$ )

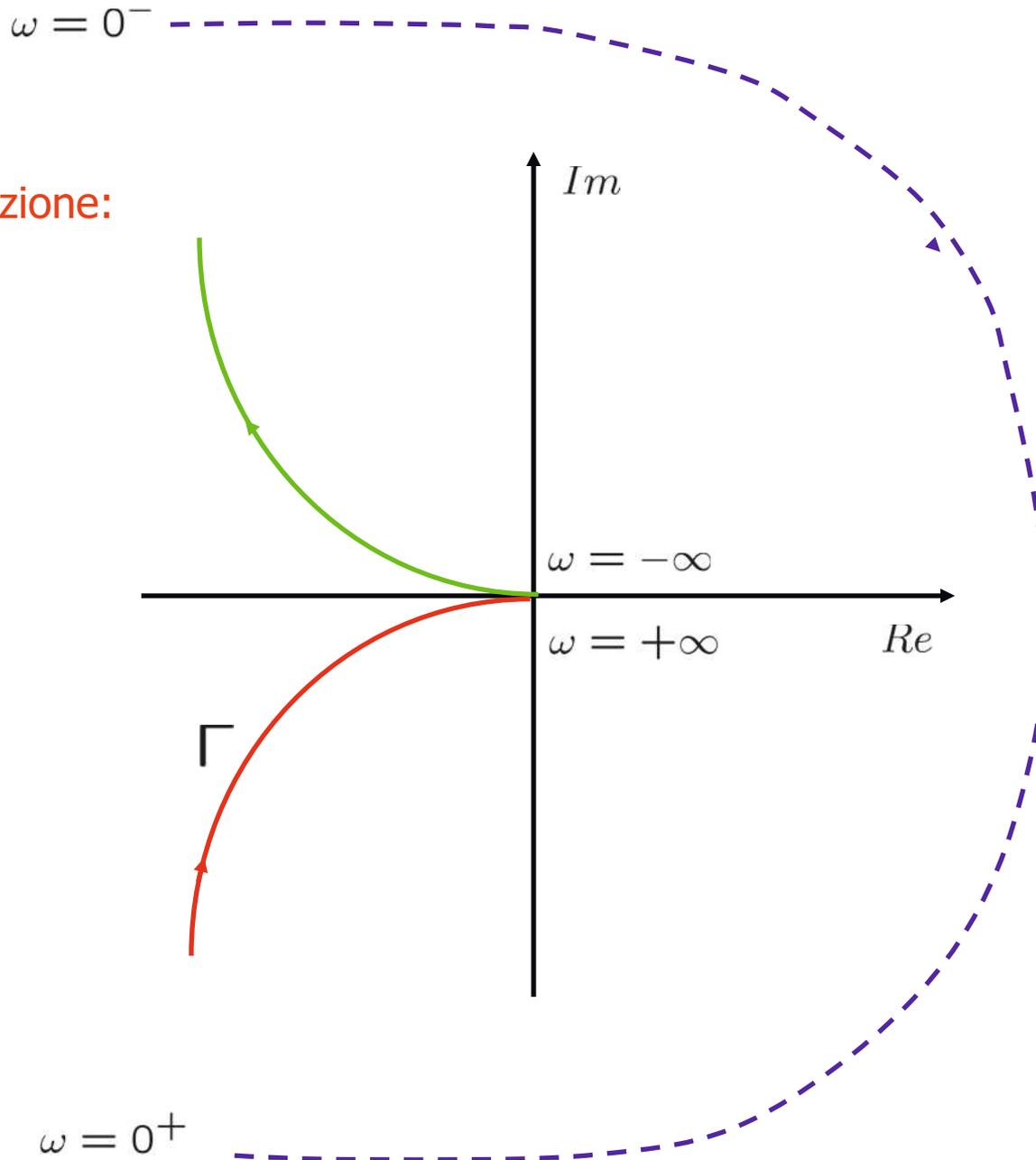
+

simmetrico rispetto all'asse reale

Osservazione:  $L(-j\omega) = L^*(j\omega)$



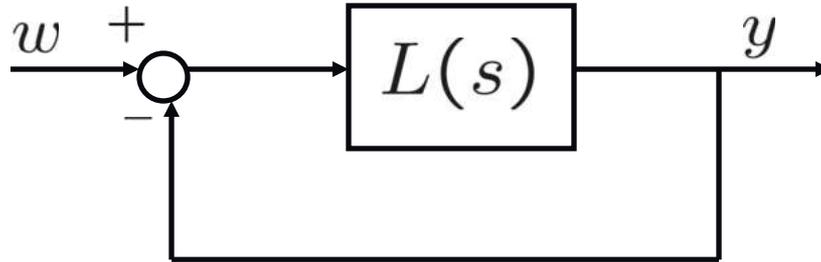
Attenzione:



**Convenzione:**

chiusura  
all'infinito in  
senso orario

## ● Criterio di Nyquist



$$1 + L(s) = 0$$

- $\Gamma$  D.D.N. di  $L(s)$
- $N$  num. di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto -1
- $P$  num. di poli di  $L(s)$  con  $\text{Re} > 0$

Asintotica stabilità



$N$  ben definito

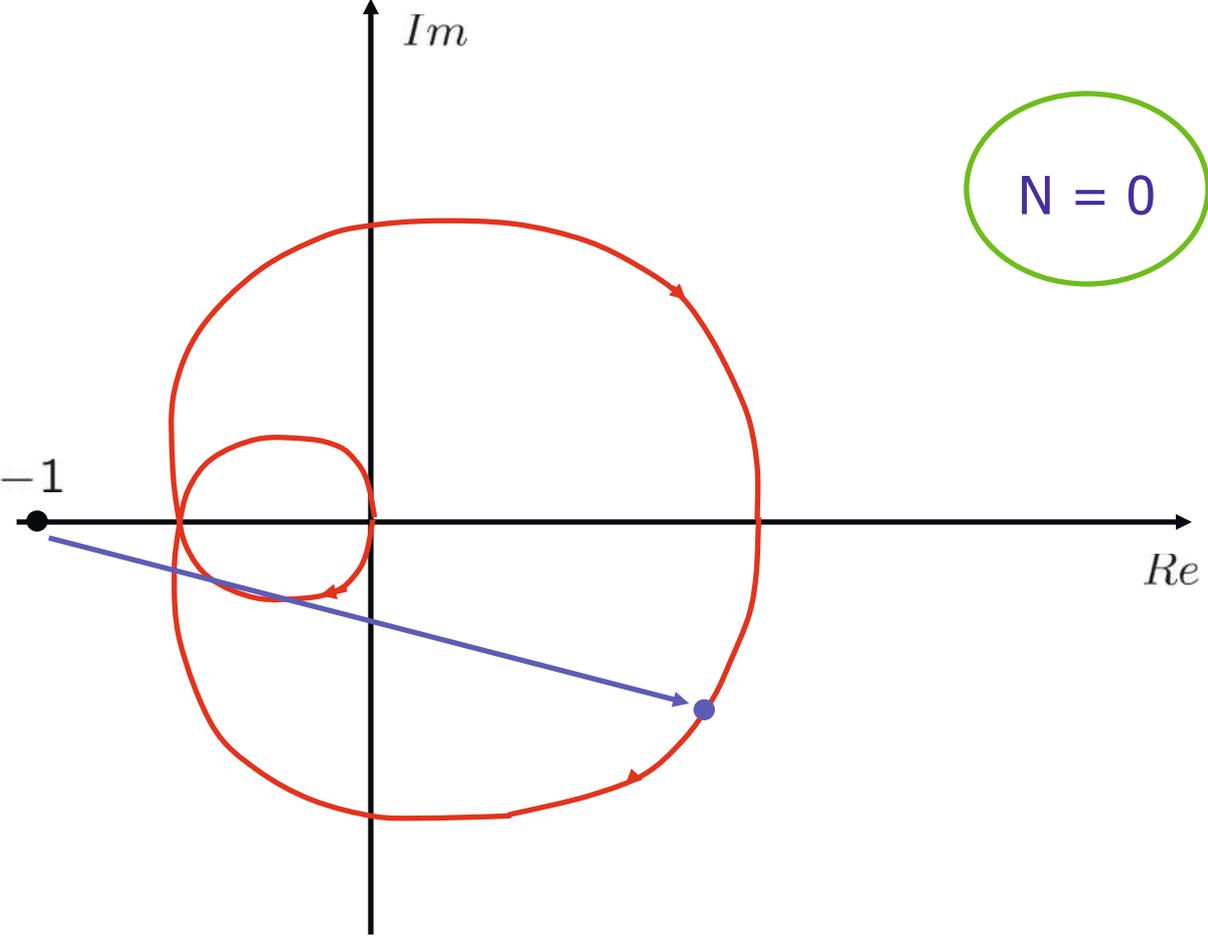
$N = P$

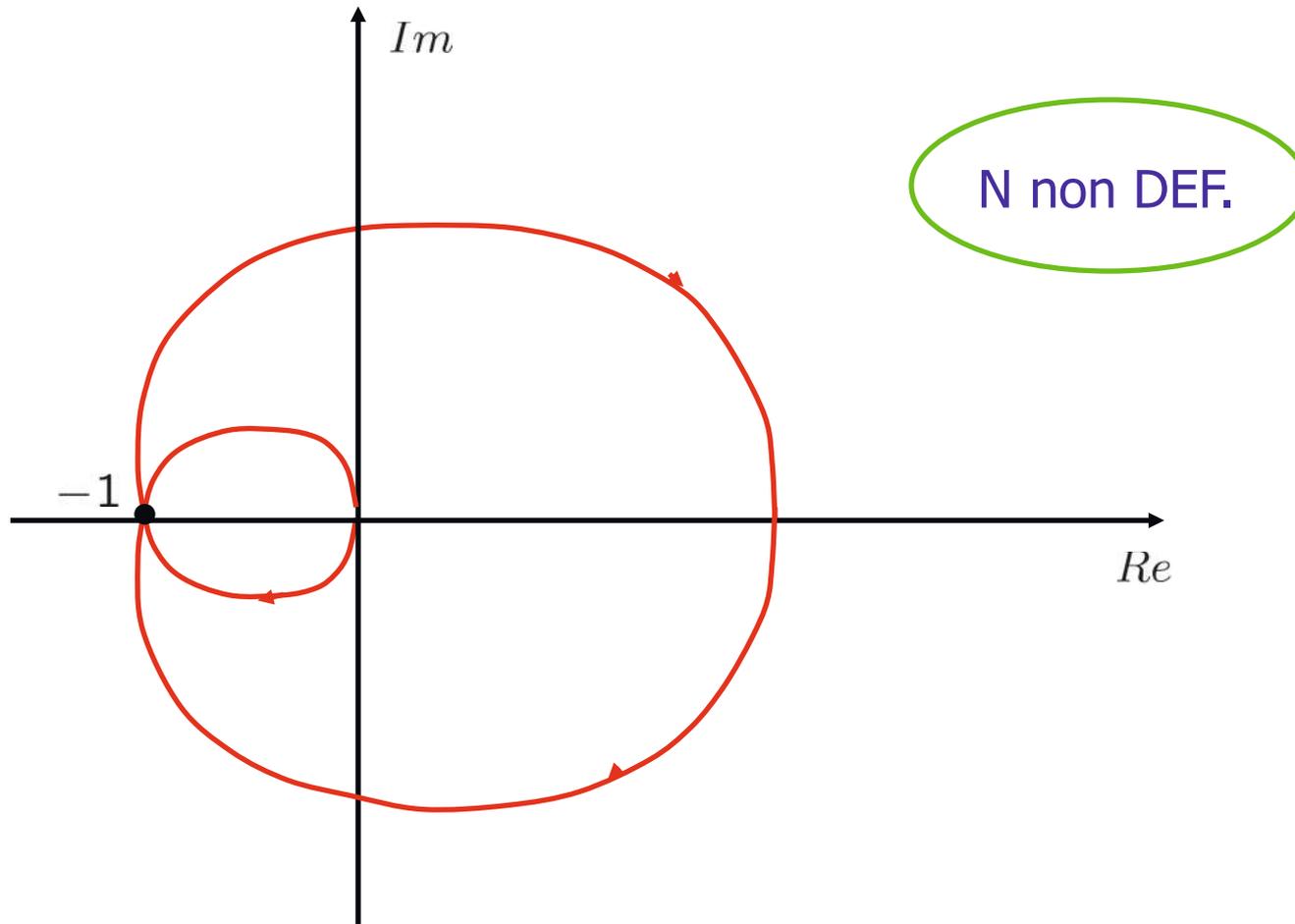
## ● Osservazioni

- conteggio di  $N$  ?

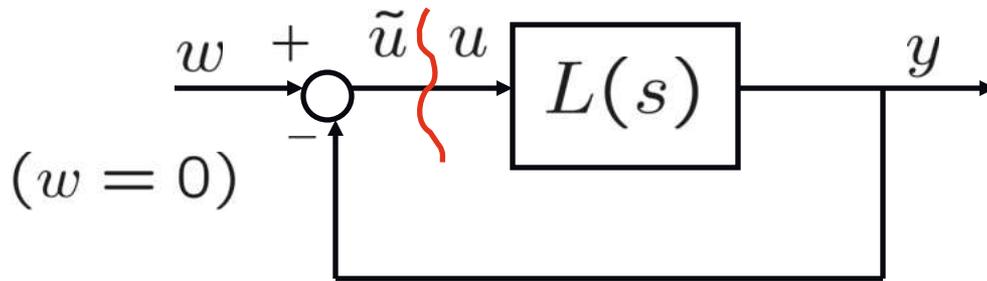
-  $N$  non definito  non as. stabilità

-  $N < 0$   non as. stabilità





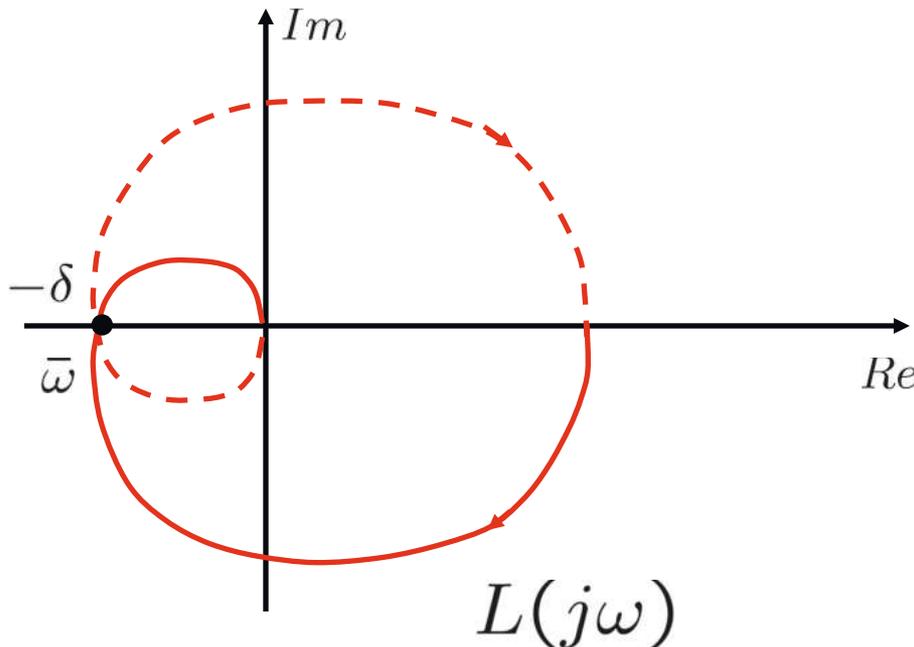
● Giustificazione intuitiva



$L(s)$  As. stabilità



$P = 0$



$$L(j\bar{\omega}) = -\delta$$



$$|L(j\bar{\omega})| = \delta$$

$$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$$

$$u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\longrightarrow y(t) \simeq |L(j\bar{\omega})| \sin[\bar{\omega}t + \arg(L(j\bar{\omega}))]$$

$$= \delta \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

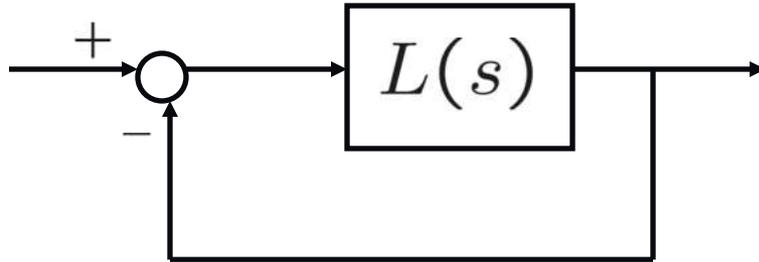
$$= -\delta \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\longrightarrow \tilde{u}(t) = \delta \sin(\bar{\omega}t)$$

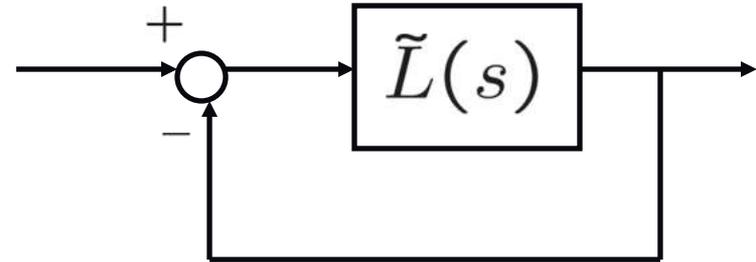
Quindi:

- $\delta > 1$   $\longrightarrow$  instabilità  $N \neq 0$  (= P)
- $\delta < 1$   $\longrightarrow$  as. Stabilità  $N = 0$  (= P)
- $\delta = 1$   $\longrightarrow$  non as. Stabilità  $N$  non definito

- **Stabilità di sistemi retroazionati incerti**



Modello nominale



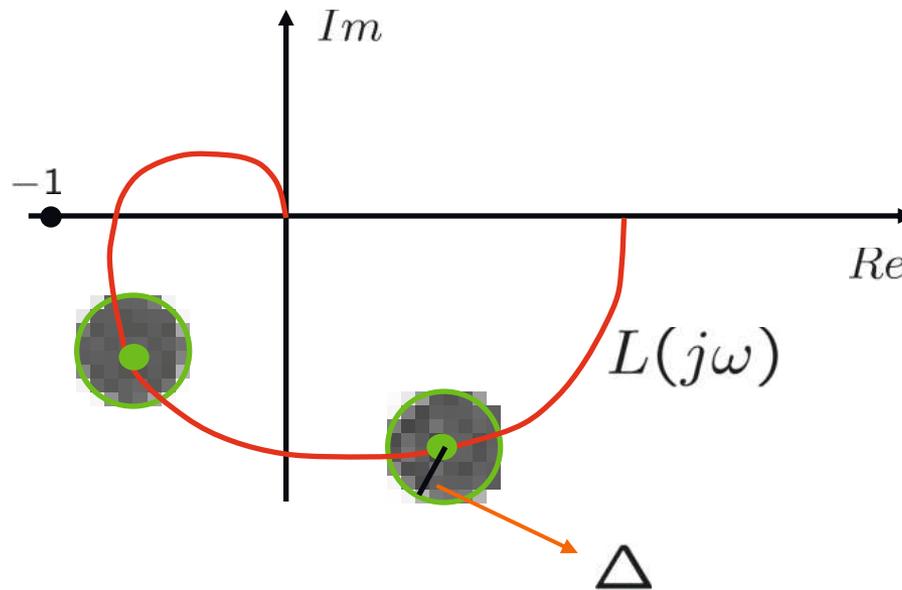
Modello "vero"

- In generale:  $\tilde{L}(s) \neq L(s)$
- Stabilità robusta:

**garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza**

## ● Tipici modelli dell'incertezza

$$- \tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s) \quad , \quad |\delta L(j\omega)| \leq \Delta$$



$$- \tilde{L}(s) = K \cdot L(s) \quad , \quad 0 < K < \bar{K}$$

- **Indicatori di stabilità robusta**

Sono parametri che misurano:

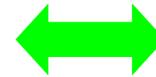
- l'ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la “distanza” del modello nominale dall'instabilità

# ● Ipotesi

- asintotica stabilità in condizioni nominali

-  $P=0$

Asintotica stabilità



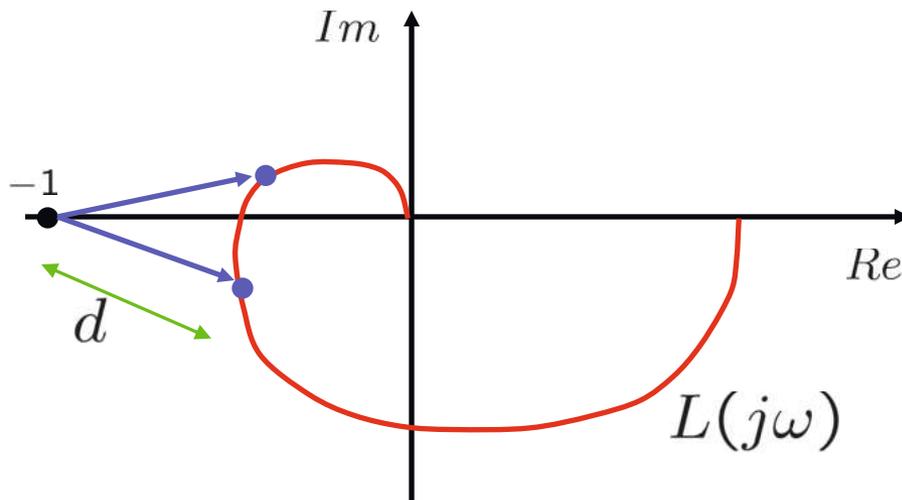
$N = 0$

## ● Un indicatore di robustezza

Distanza di  $\Gamma$  dal punto  $-1$

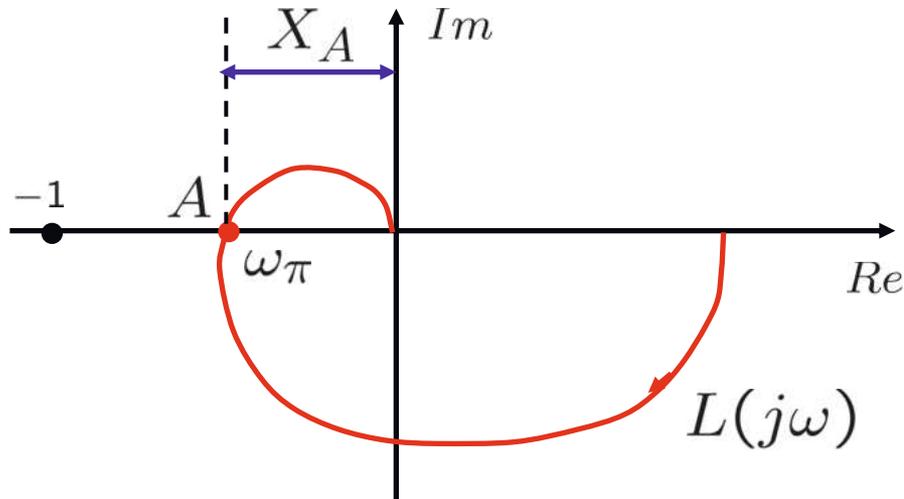
Margine di stabilità vettoriale

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$



Difetto: non è ricavabile **direttamente** dai diagrammi di Bode di  $L(j\omega)$

## ● Margine di guadagno



$$K_m = \frac{1}{X_A}$$

Margine di guadagno

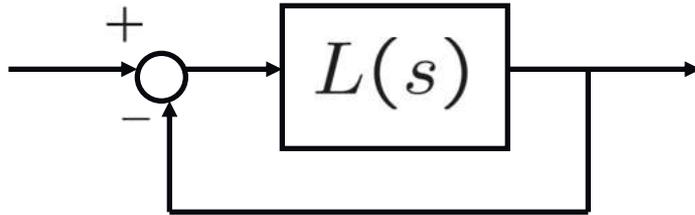
$$\arg L(j\omega) = -180^\circ$$

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

$$K_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

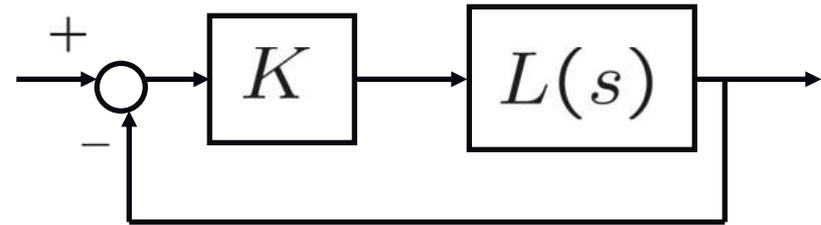
## ● Interpretazione

Nominale



$$K_m > 1$$

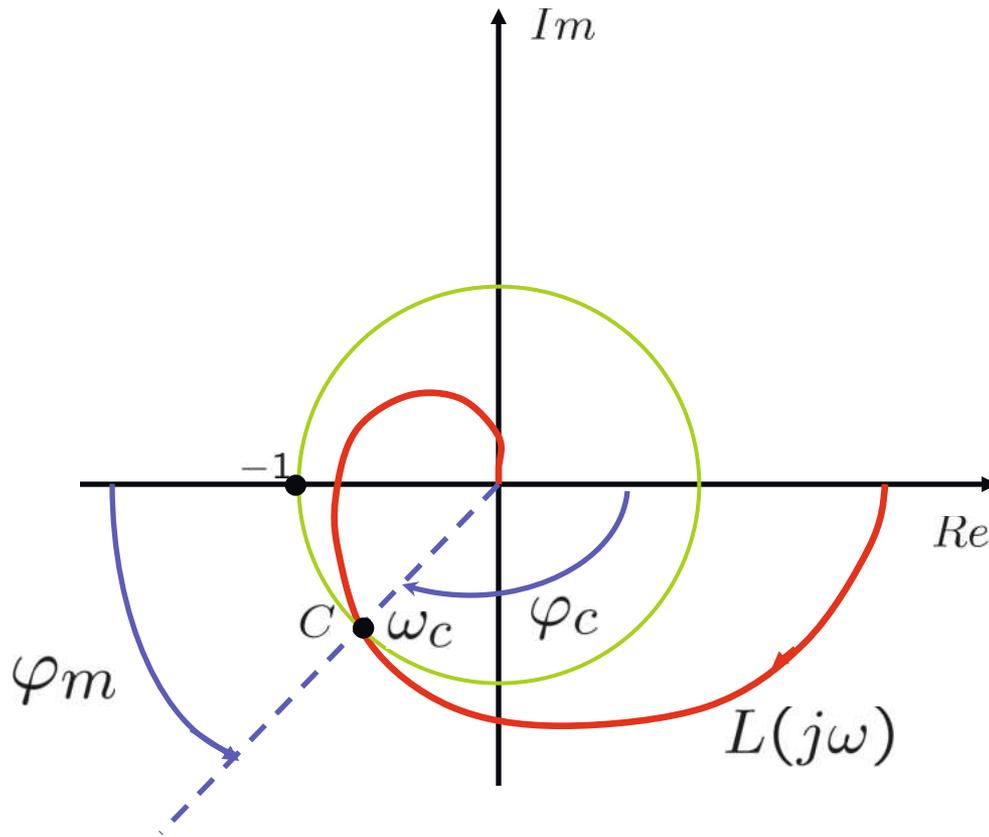
“vero”



$$\text{As.stabilità: } 0 < K < K_m$$

$K_m$  è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul guadagno d'anello

## ● Margine di fase



$$|L(j\omega_c)| = 1 = 0dB$$

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

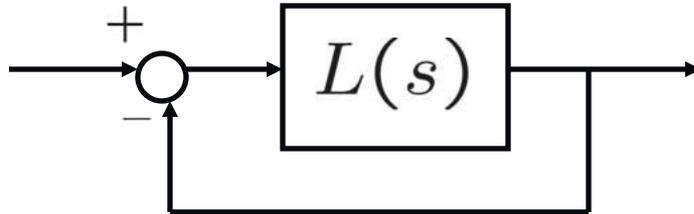
Margine di fase

$\omega_c$  : pulsazione critica

$\varphi_c$  : fase critica

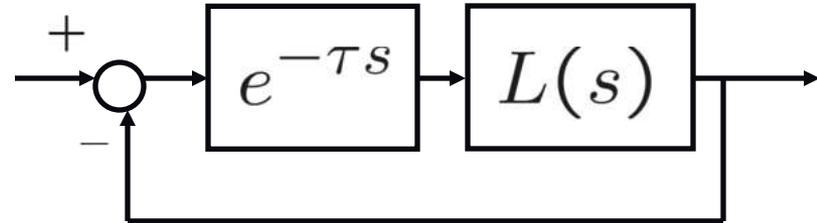
# ● Interpretazione

Nominale



$$\varphi_m > 0^\circ$$

“vero”



As. stabilità

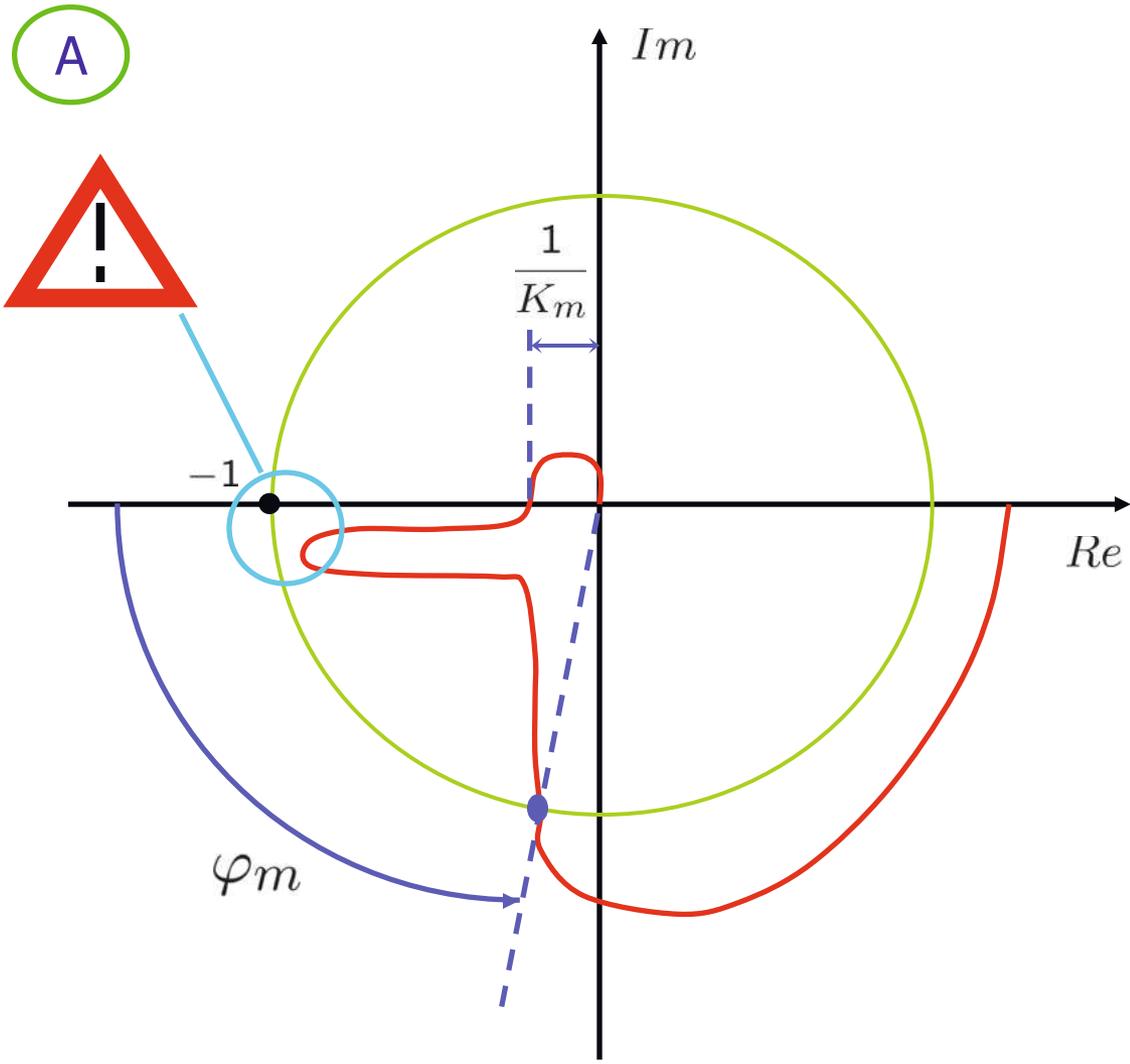
$$\omega_c \tau = \varphi_m \cdot \frac{\pi}{180}$$



$$0 < \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$\varphi_m$  è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul ritardo d'anello

● **Situazioni anomale**

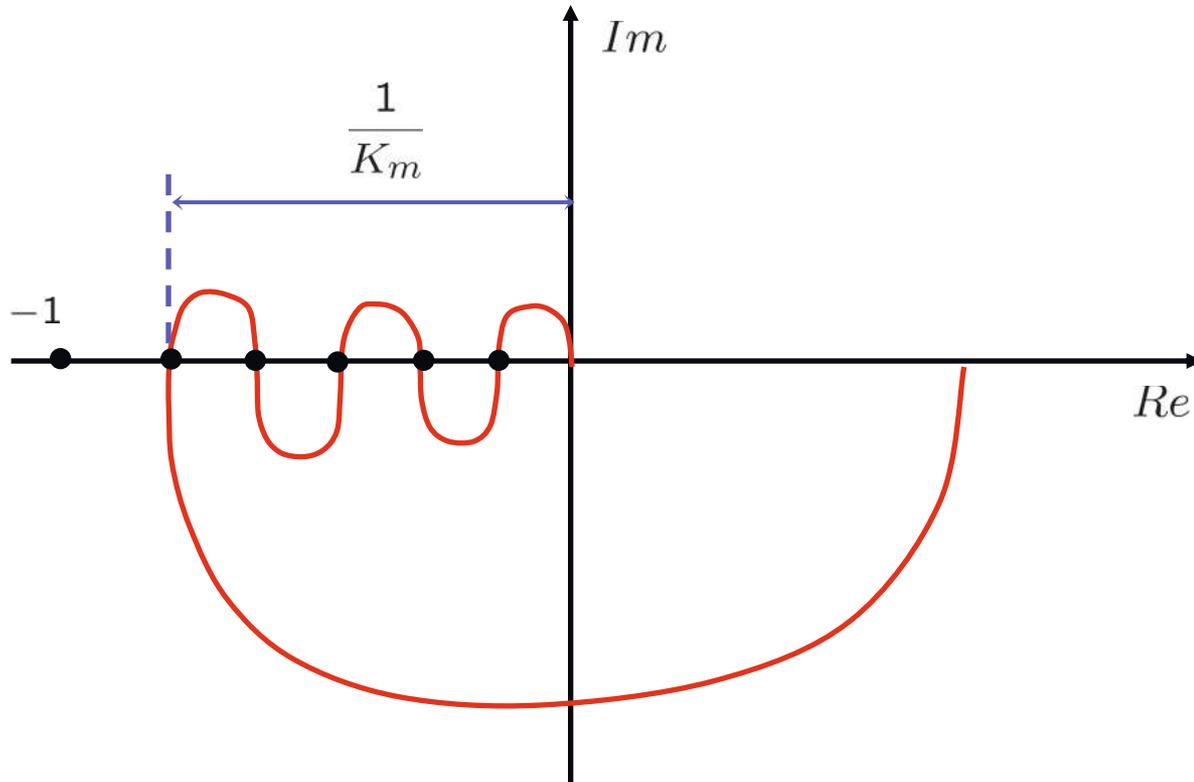


$$K_m \gg 1$$

$$\varphi_m \gg 0^\circ$$

Però il sistema è poco robusto

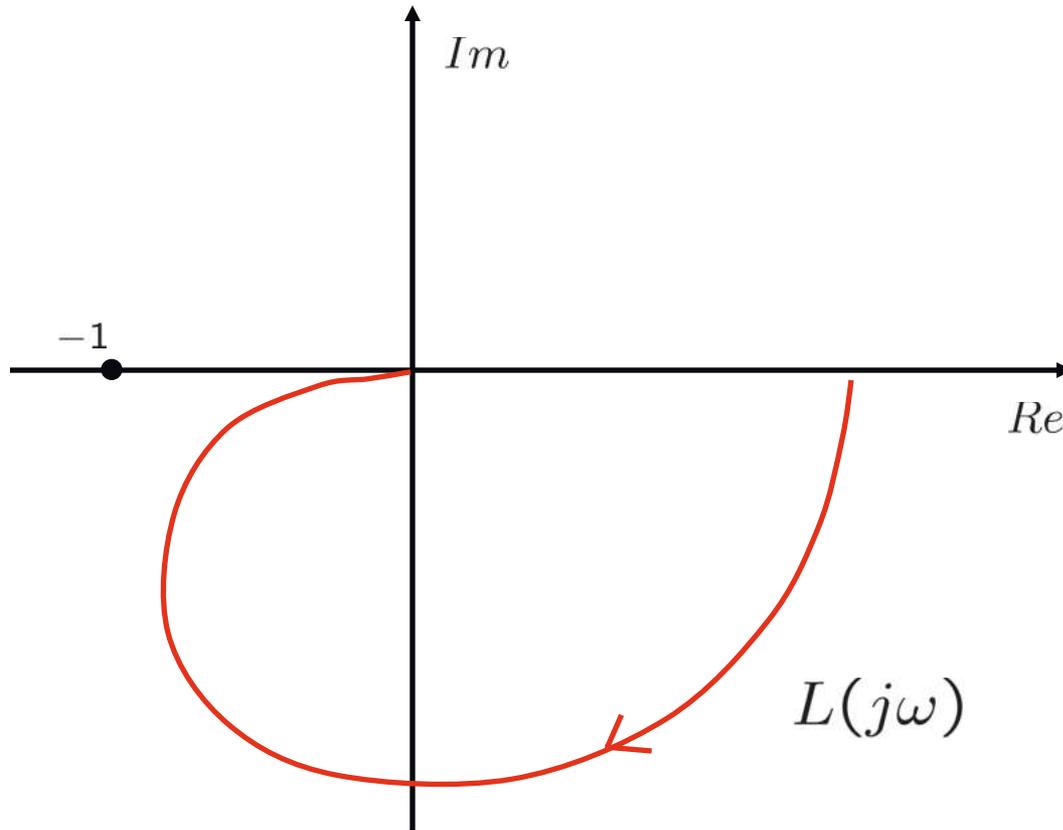
B



Affinchè  $K_m$  sia affidabile è necessario costruirlo nel caso peggiore

● **Casi particolari**

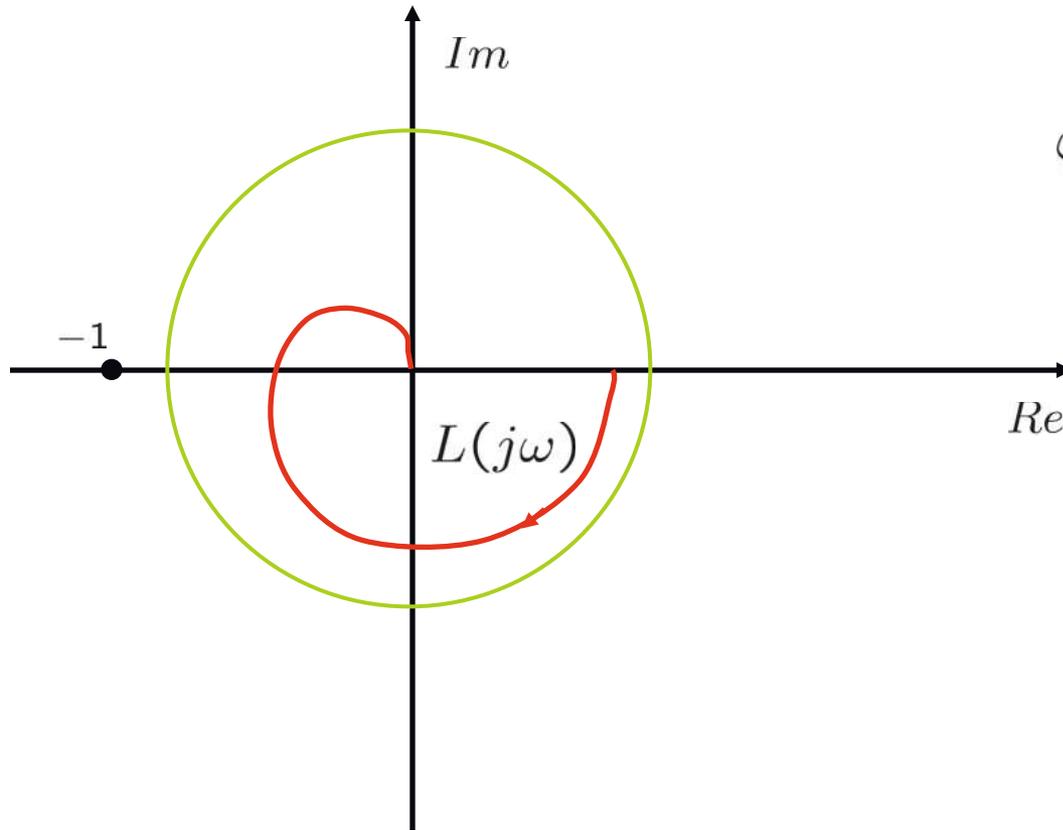
A



$$K_m = \infty$$

$$|\arg L(j\omega)| < 180^\circ \quad , \quad \forall \omega \quad \longrightarrow \quad \varphi_m > 0^\circ$$

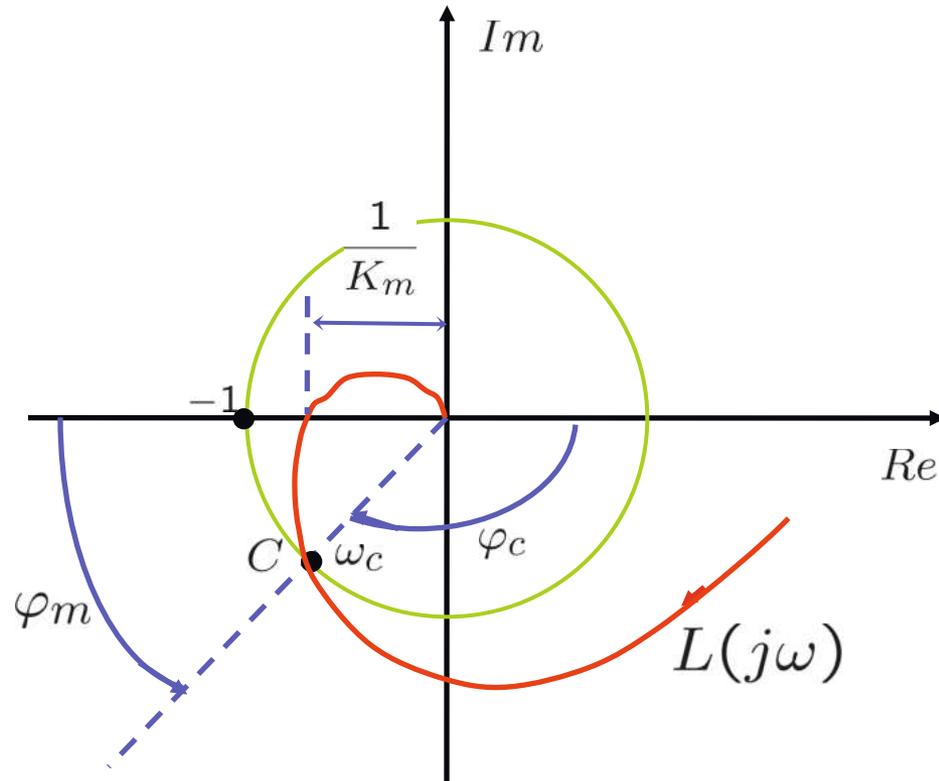
B



$$\varphi_m = \infty$$

$$|L(j\omega)| < 1 \quad , \quad \forall \omega \quad \longrightarrow \quad K_m > 1$$

- **Margine di guadagno e di fase**



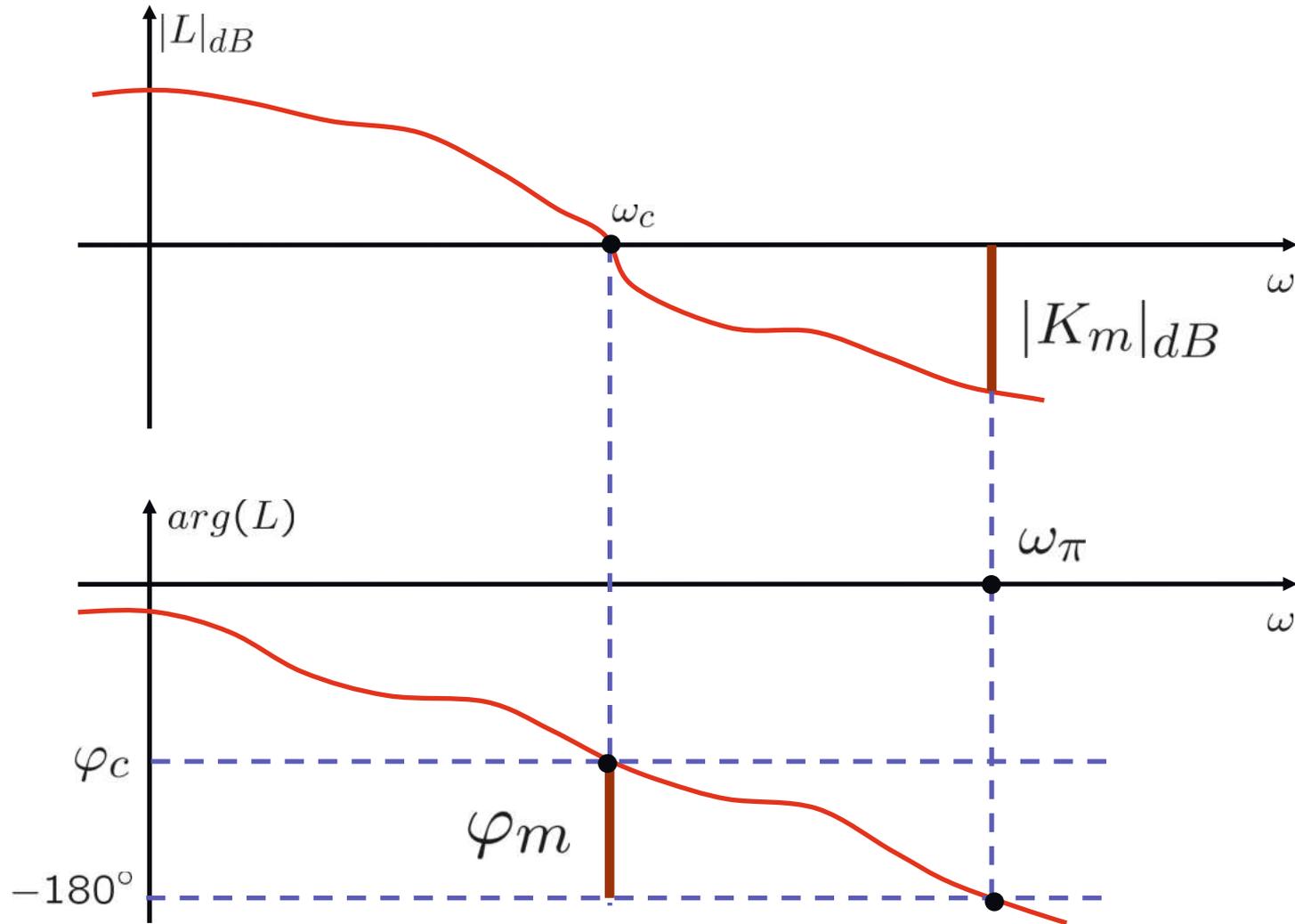
- **Margine di guadagno**

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad ; \quad \arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

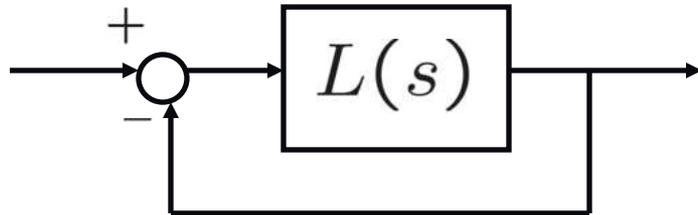
- **Margine di fase**

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \quad ; \quad \varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$
$$|L(j\omega_c)| = 1$$

- **Calcolo di  $K_m$  e  $\varphi_m$  dai diagrammi di Bode**



## ● Criterio di Bode



Condizioni di applicabilità:

1)  $P = 0$

2)  $|L(j\omega)|_{dB}$  attraversa una volta l'asse a 0 dB (dall'alto verso il basso)

$\mu$  guadagno d'anello

$\varphi_m$  margine di fase

Asintotica stabilità



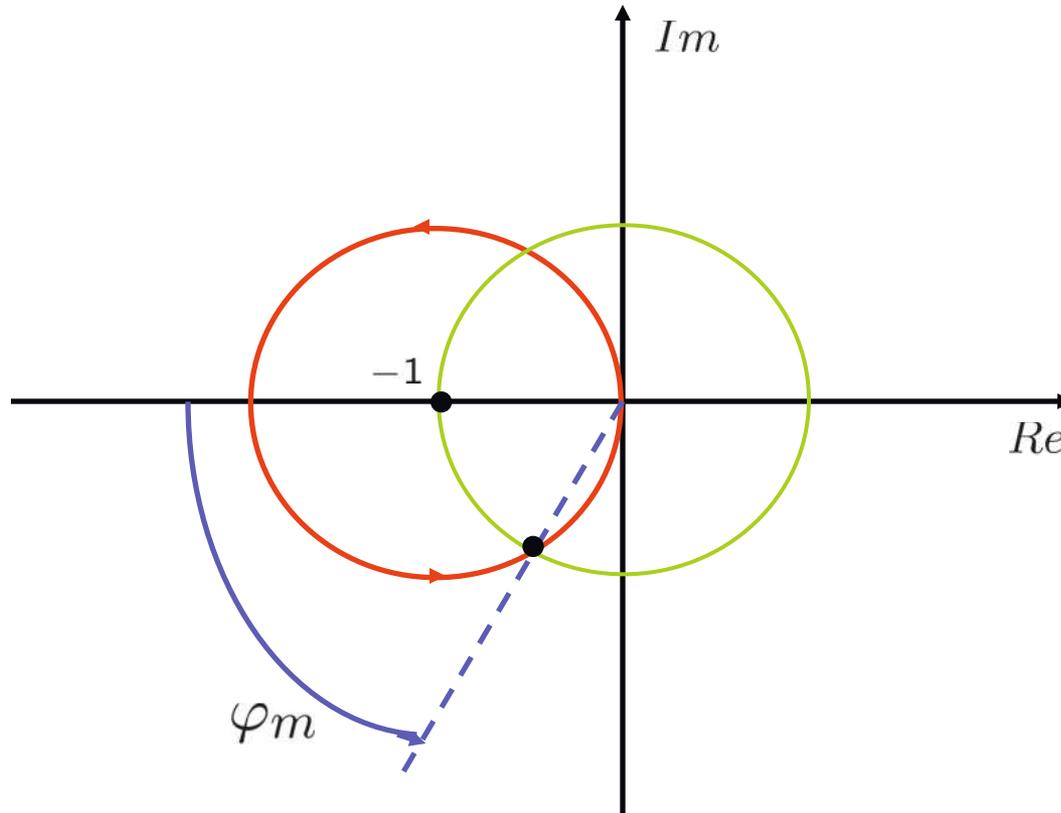
$$\mu > 0$$

$$\varphi_m > 0$$

# Perché è necessario $\mu > 0$ ?



Per escludere casi del tipo:



Instabile in a.c.



## ● Osservazione

### Se

- $L(s)$  è a fase minima (  $\mu > 0$  , poli, zeri con  $Re < 0$  )
- $|L|_{dB}$  attraversa l'asse a 0dB una volta sola

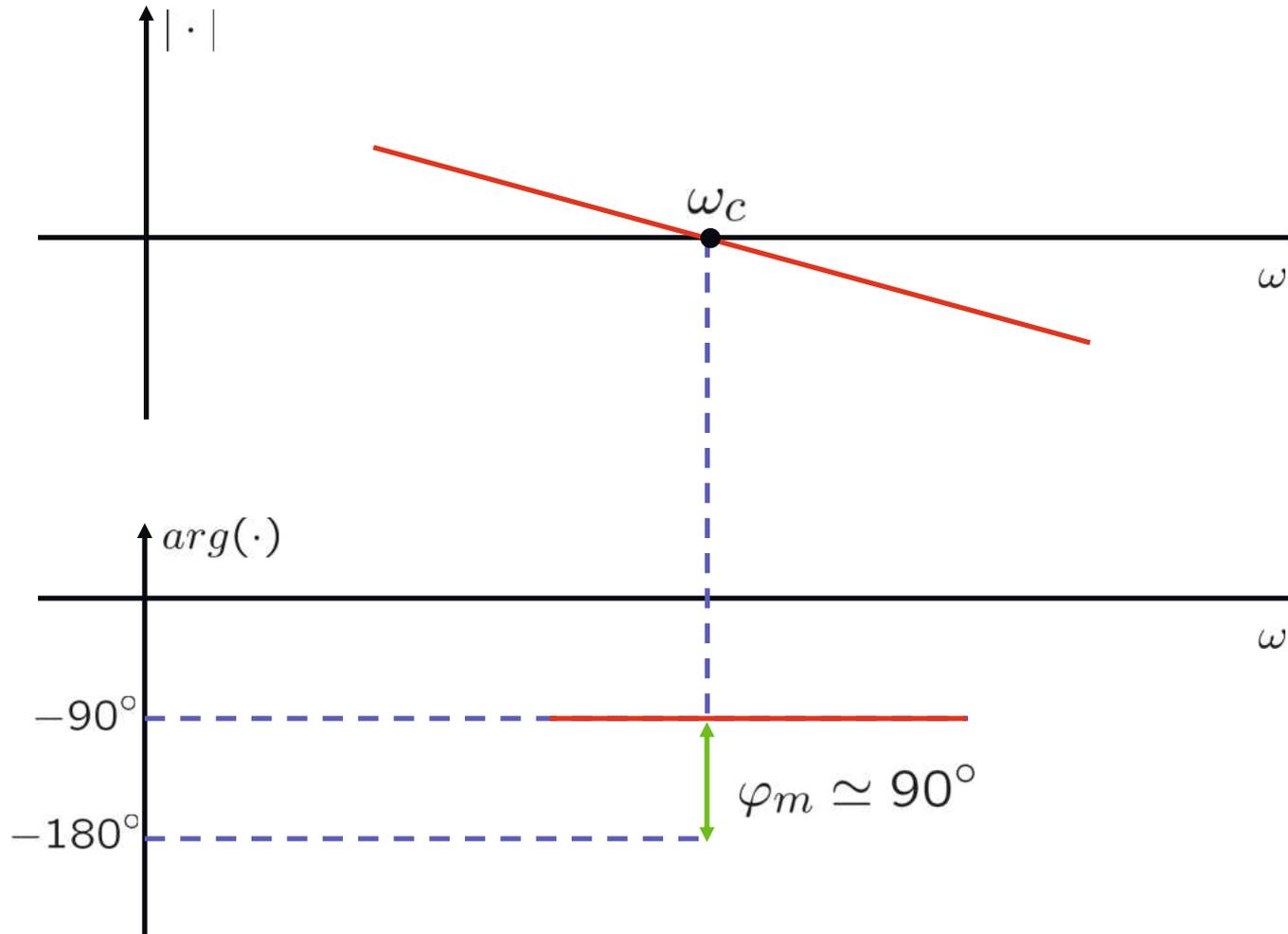
### Allora

- $P = 0$
- Bode applicabile
- $\mu > 0$
- diagrammi asintotici
 

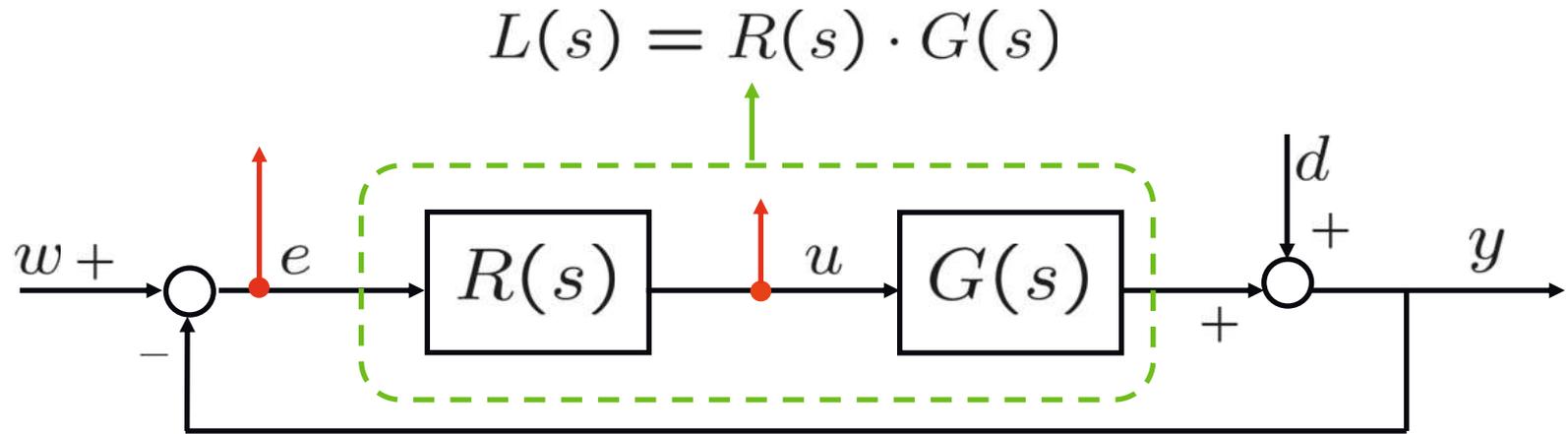
}	$ L _{dB}$	pendenza	$-K$
	$arg(L)$	valore	$-K \cdot 90^\circ$

● Criterio “empirico”

\* nelle ipotesi di validità \*



## ● Analisi di sistemi retroazionati



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

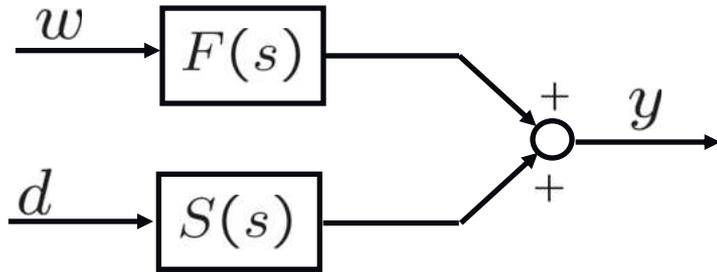
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} = -S(s)$$

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = Q(s)$$

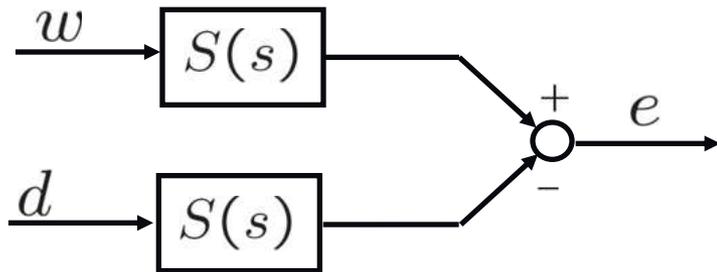
$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1 + L(s)} = -Q(s)$$



F. di sensitività  
complementare

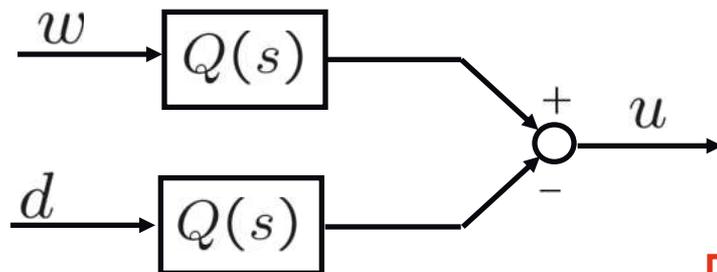
Caso  
"ideale"

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \approx 1$$



F. di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \approx 0$$



F. di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \approx 0$$

$$F(s) + S(s) = 1$$

- **Caso ideale**



$$F(s) \simeq 1$$

F. di sensitività  
complementare



$$S(s) \simeq 0$$

F. di sensitività

$$Q(s) \simeq 0$$

F. di sensitività  
del controllo

## ● Analisi di $F(s)$ - analisi statica

Valore di regime risp. allo scalino

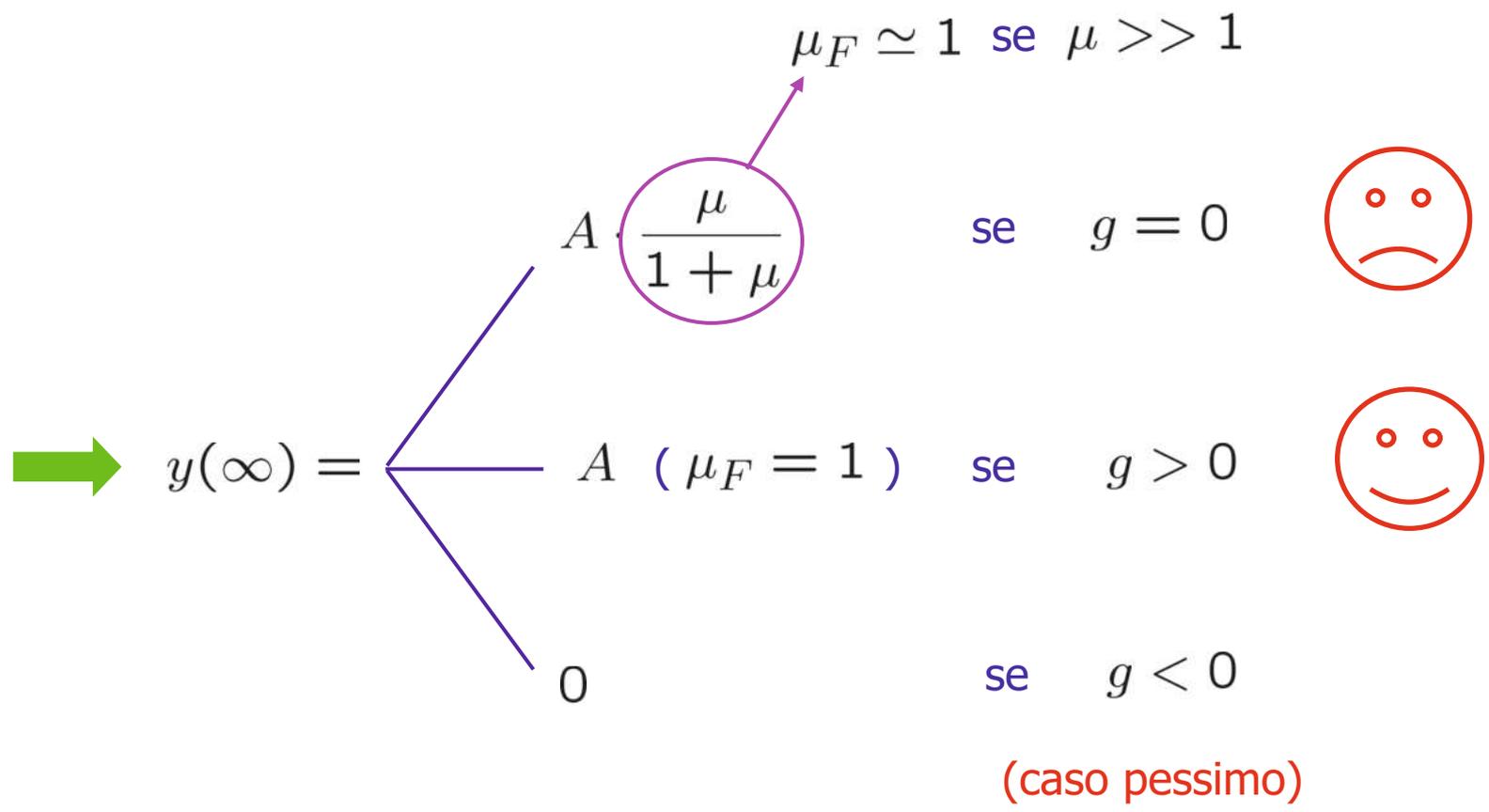
$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1$$

$$w(t) = A \cdot 1(t)$$

$$\rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot F(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{\mu}{s^g}}{1 + \frac{\mu}{s^g}}$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu}$$



- **Analisi di  $F(s)$  - poli & zeri**

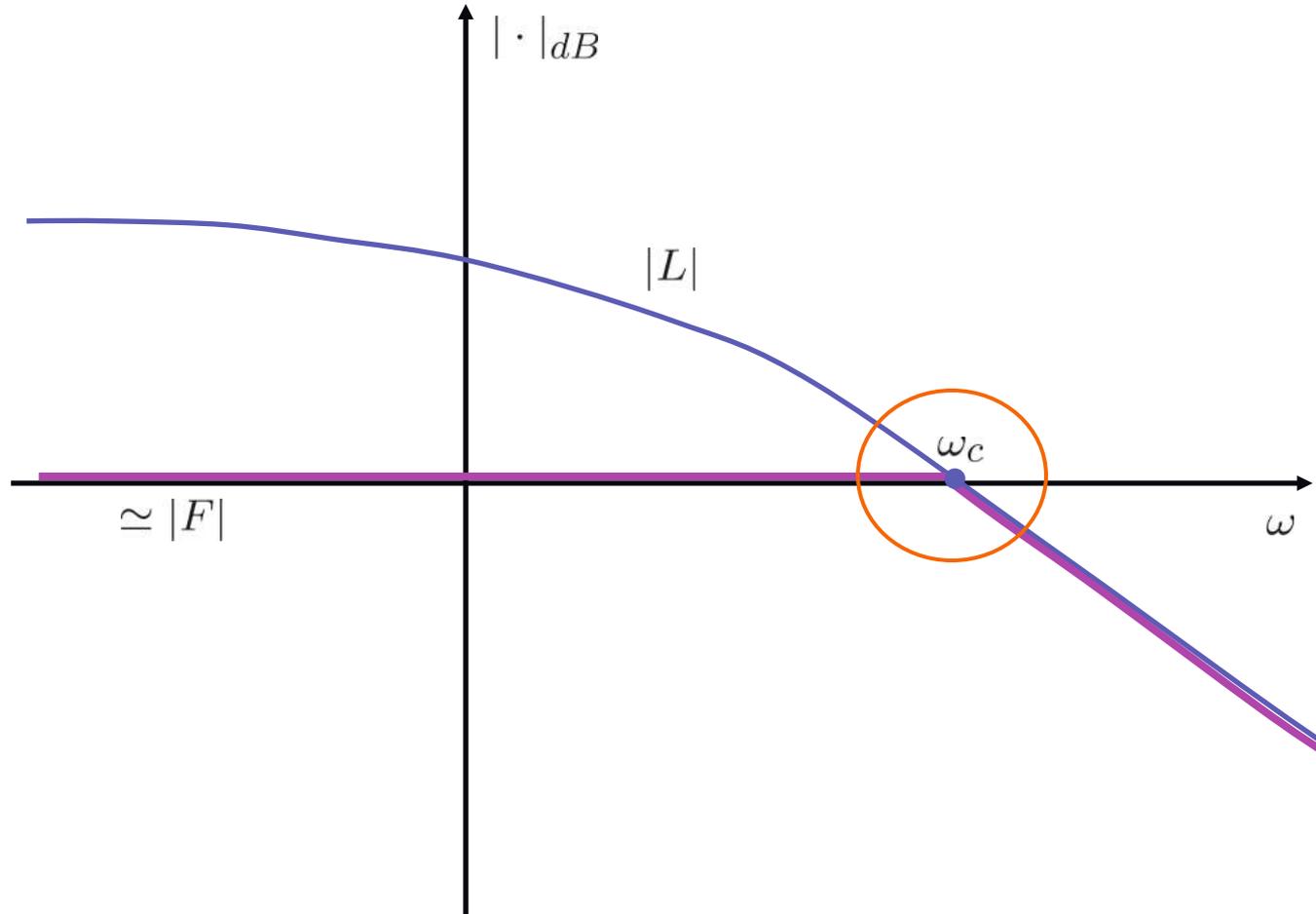
$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \quad \longrightarrow \quad F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

- zeri di  $F(s) \equiv$  zeri di  $L(s)$
- poli di  $F(s) \equiv$  radici di  $\varphi(s) + N(s)$

- **Analisi di  $F(s)$  - risposta in frequenza**

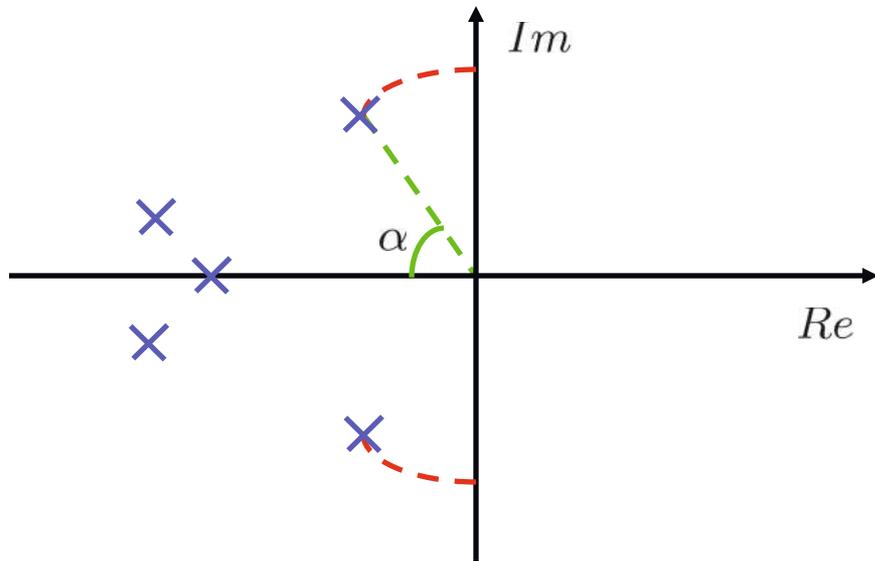
$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

- **Situazione tipica**





● Smorzamento e margine di fase



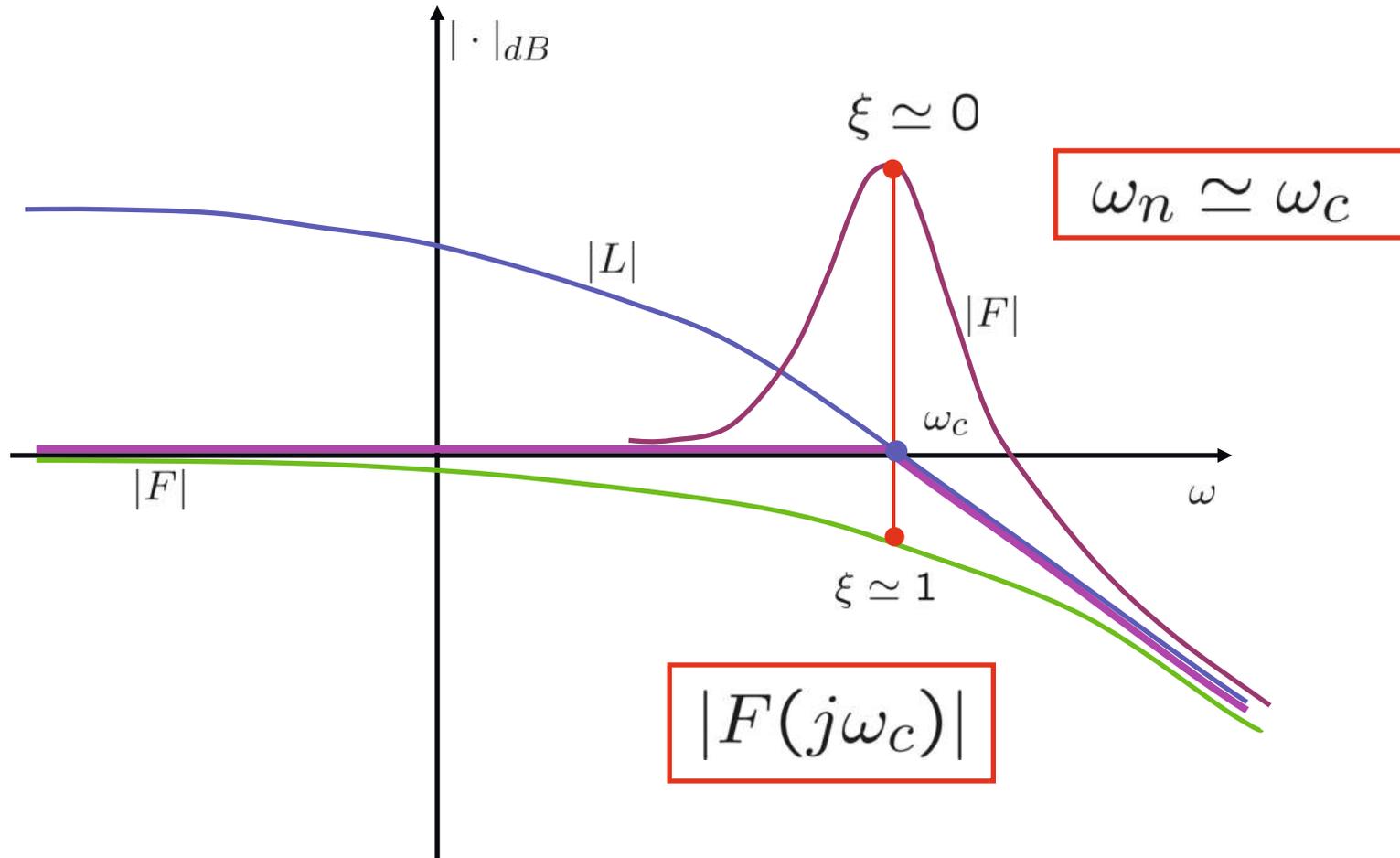
Poli di  $F(s)$

Basso smorzamento  $\longrightarrow$  Scarsa robustezza  $\longrightarrow \varphi_m \simeq 0^\circ$

$\xi \simeq 0$

?

● Legame tra  $\xi$  e  $\varphi_m$



- **Calcolo di**  $|F(j\omega_c)|$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \longrightarrow \quad L(j\omega_c) = 1 \cdot e^{j\varphi_c}$$

con  $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$

$$\longrightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\underbrace{|1 + \cos \varphi_c|}_{\text{Re}} + j \underbrace{\sin \varphi_c}_{\text{Im}}}$$



$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + \sin^2 \varphi_c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_c + 2 \cos \varphi_c + \sin^2 \varphi_c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

- Consideriamo un generico sist. del secondo ordine:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \xi > 0$$

  $|F(j\omega_n)| = \left| \frac{\cancel{\omega_n^2}}{-\cancel{\omega_n^2} + 2j\xi\cancel{\omega_n^2}s + \cancel{\omega_n^2}} \right|$

$$= \left| \frac{1}{j2\xi} \right| = \frac{1}{2\xi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_n \simeq \omega_c \\ \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sin \frac{x}{2} \end{array} \right\} \longrightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\frac{\varphi_m}{2})}$$



$$\underbrace{\xi}_{\text{red bracket}} \simeq \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \simeq \frac{\varphi_m}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \simeq \underbrace{\frac{\varphi_m}{100}}_{\text{red bracket}}$$

## Regola empirica

- $\varphi_m < 75^\circ$   Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- $\varphi_m > 75^\circ$   Polo dominante reale con

$$\tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$$

## ● Riassumendo:

In un sistema di controllo in a.c.

- la **precisione statica** dipende da:

$$g, \mu \quad \mu_F = \begin{cases} 1 & g > 0 \\ \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \end{cases}$$

- la **precisione dinamica** dipende da

$$\omega_c, \varphi_m \quad B_F \simeq [0, \omega_c]$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

## ● Analisi di $S(s)$ - analisi statica

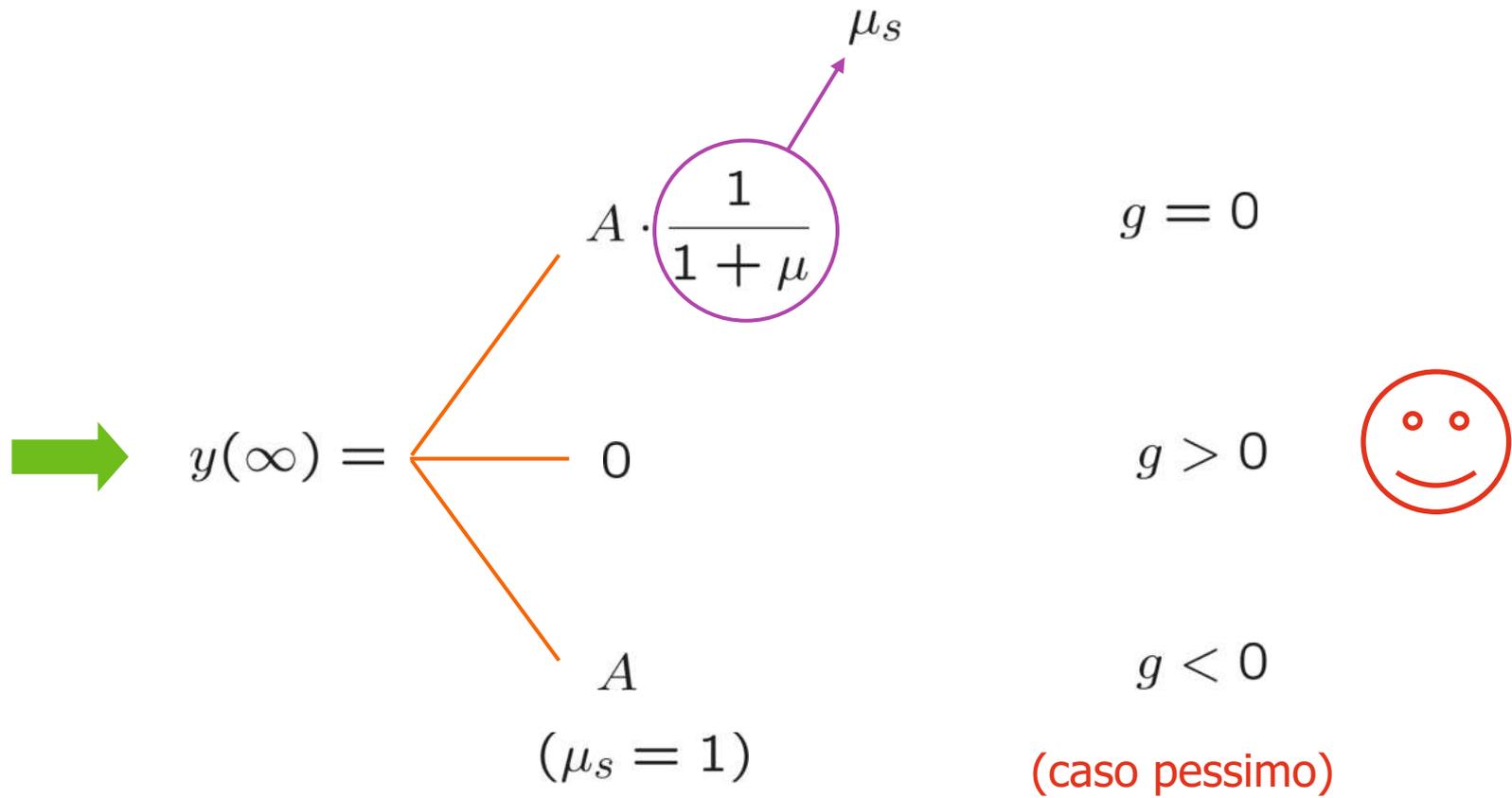
- valore di regime, risposta allo scalino:

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$\rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot S(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} A \cdot S(s)$$

$$= A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{s^g}} =$$

$$= A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu}$$



- valore di regime, risposta alla rampa:

$$d(t) = A \cdot t, \quad t \geq 0 \quad \longrightarrow \quad D(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$\hookrightarrow y(\infty) = \dots = A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu}$$

$$= \begin{cases} \infty & g = 0 \\ \frac{A}{\mu} & g = 1 \\ 0 & g > 1 \end{cases}$$

## Tabella riassuntiva:

Valori di regime  $y(\infty)$  in risposta a  $d(t)$

$e(\infty)$  in risposta a  $w(t)$

	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$
	$A \cdot 1(t)$	$A \cdot t \cdot 1(t)$	$A \cdot t^2/2 \cdot 1(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	$\infty$	$\infty$
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	$\infty$
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

- **Analisi di  $S(s)$  - poli & zeri**

$$S(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s) + N(s)} \quad \left( L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \right)$$

- zeri di  $S(s) \equiv$  poli di  $L(s)$

- poli di  $S(s) \equiv$  radici di  $\varphi(s) + N(s)$

$\equiv$

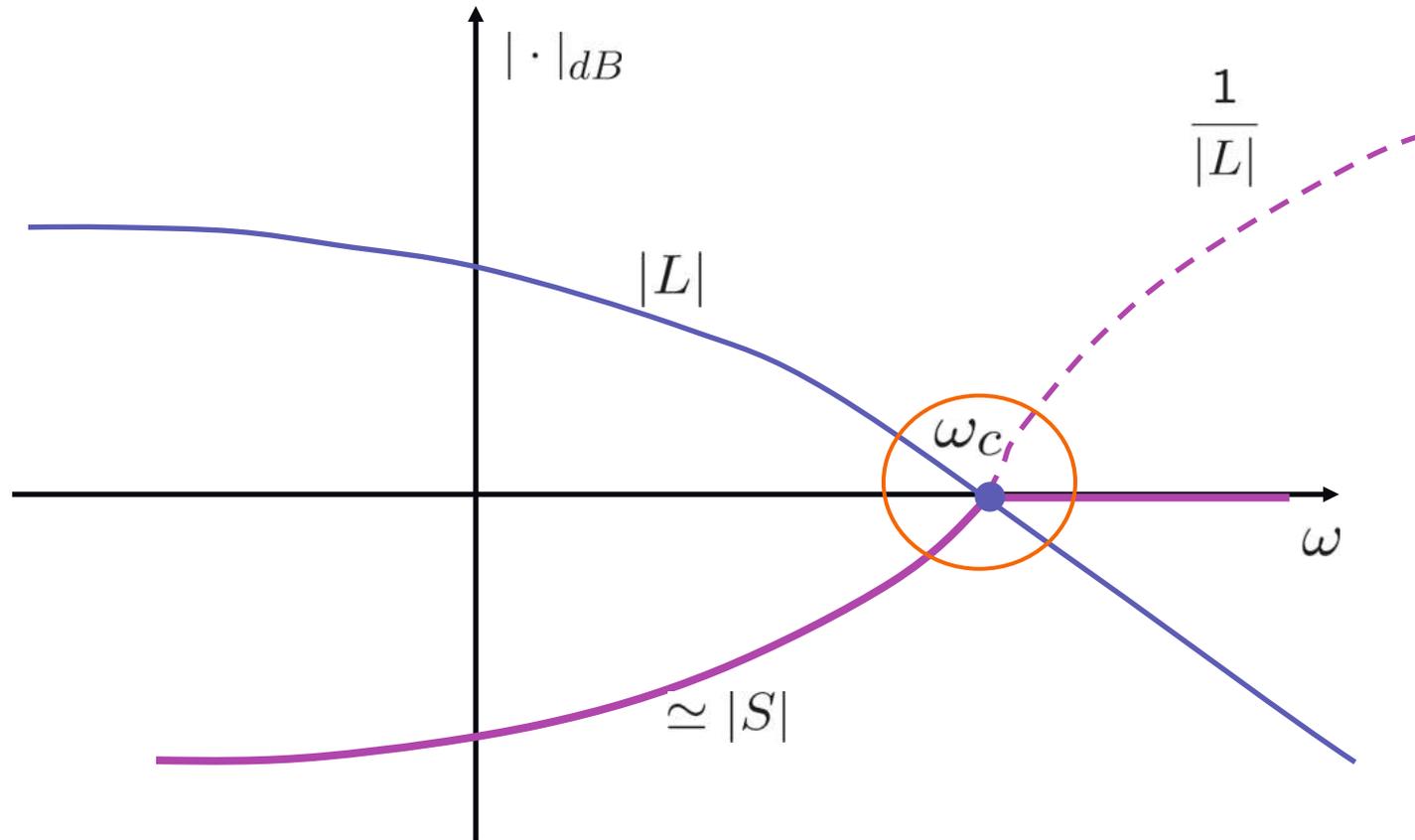
poli di  $F(s)$

# ● Analisi di $S(s)$ - risposta in frequenza

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \\ \frac{1}{|L(j\omega)|} & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \end{cases}$$

$0dB$   
 $-|L(j\omega)|_{dB}$

- **Situazione tipica**



➔ Filtro passa-alto con  $B \simeq [\omega_c, \infty)$

- **Attenuazione del disturbo**  $d(t)$

- solo in  $[0, \omega_c]$



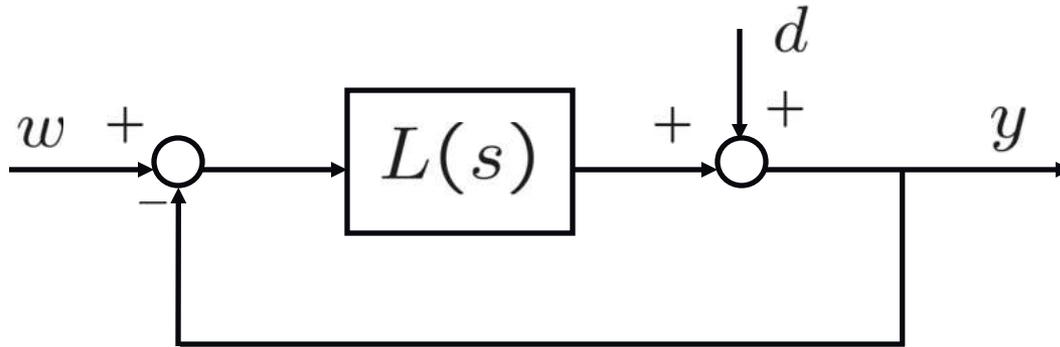
Banda del sistema  
di controllo

- tanto migliore

- quanto maggiore è  $\omega_c$

- quanto più  $|L(j\omega)| \gg 1$  in  $[0, \omega_c]$

- **Effetto di un ritardo**



$$L(s) = L'(s) \cdot e^{-\tau s}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} |L(j\omega)| = |L'(j\omega)| \\ \arg L(j\omega) = \arg L'(j\omega) - \omega\tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \end{array} \right.$$



- può modificare la **stabilità in anello chiuso**
- **analisi statica** invariata

$$\lim_{s \rightarrow 0} e^{-\tau s} = 1$$

- **analisi dinamica**

$\omega_c$  non cambia (diagramma del modulo invariato)

$\varphi_c$  diminuisce

$\varphi_m$  diminuisce   $\xi$  diminuisce

(ritardi  oscillazioni)

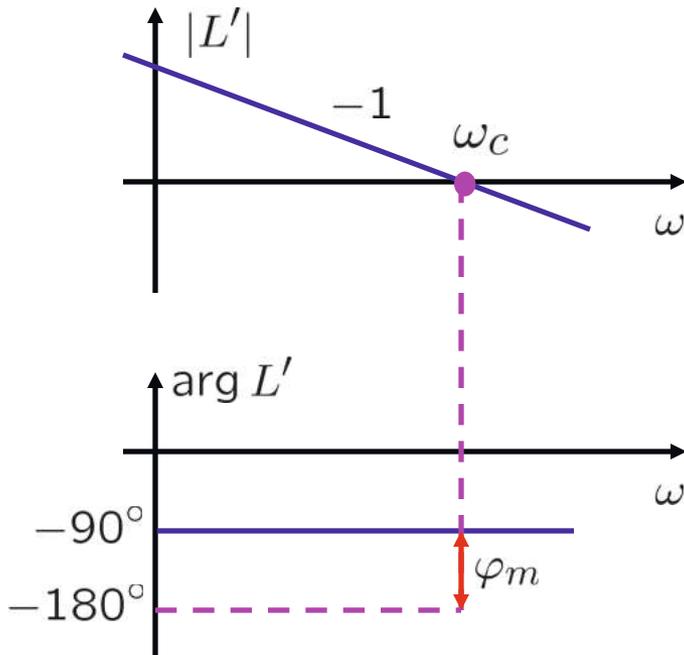
## ● Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\tau s}$$

$$w(t) = 1(t)$$

- $\tau = 0$  (no ritardo)

$$y(\infty) = 1$$



$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_m = 90^\circ$$

$$(\varphi_c = -90^\circ)$$

Polo dominante  
reale con

$$T \simeq \frac{1}{\omega_c} = 1$$

- $\tau > 0$

(taglio invariato)

$$y(\infty) = 1$$

$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= -90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$



$$\varphi_m = 90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Asintotica stabilità



$$\tau < \frac{\pi}{2} \simeq 1.57 \text{ sec}$$

$$\tau = 1$$

$$\rightarrow \varphi_m = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$$



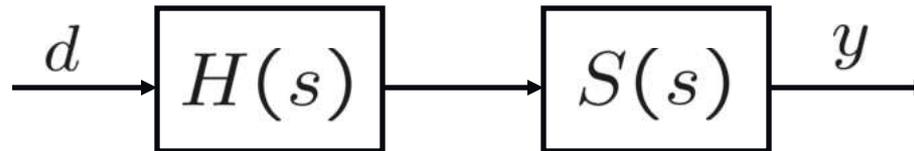
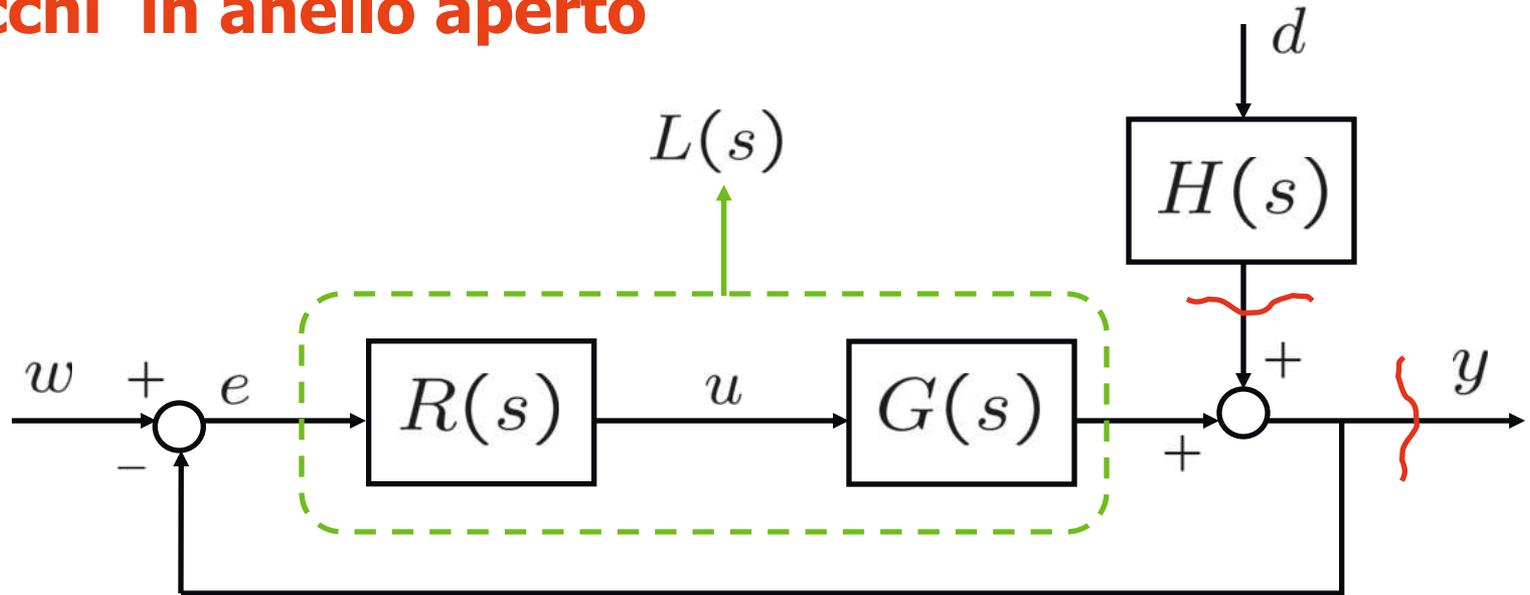
Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c = 1$$

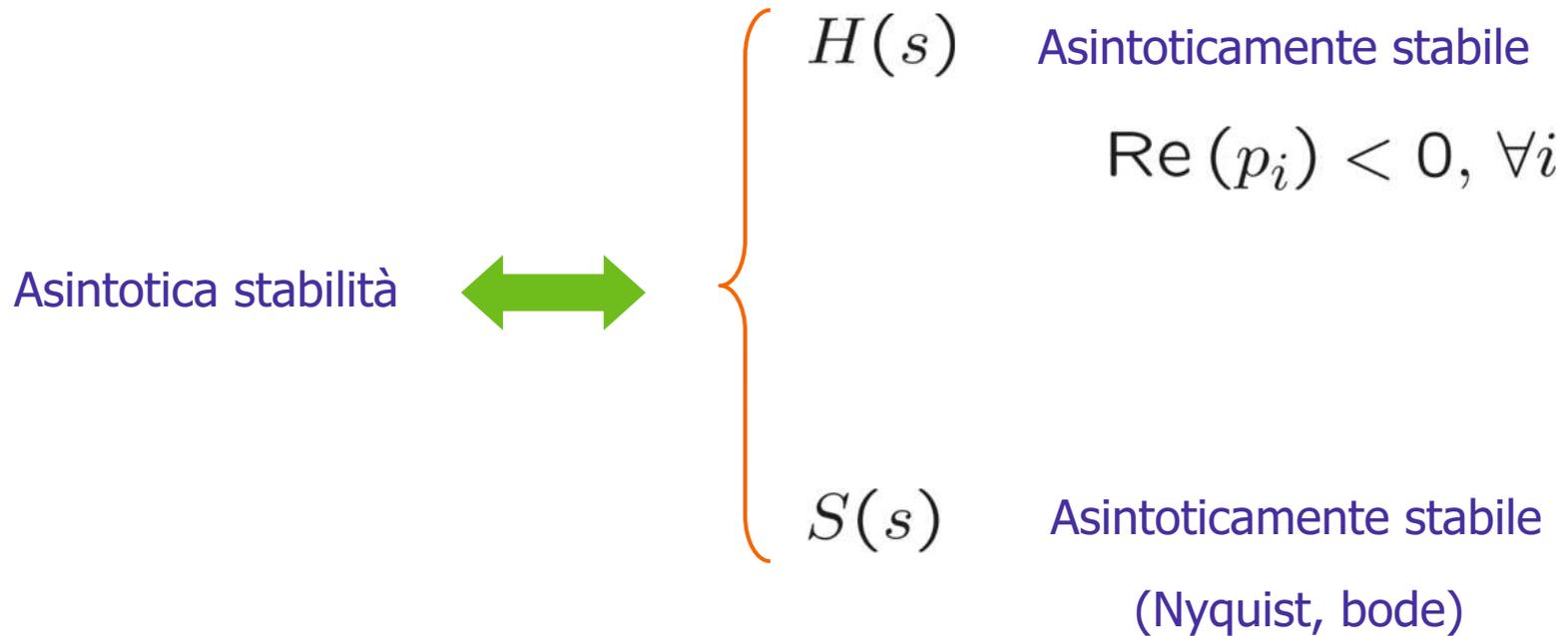
$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0.33$$

$$t_a \simeq \frac{5}{\xi \omega_n} \simeq 15 \text{ sec !!!}$$

- **Blocchi in anello aperto**



# ● Stabilità



- **Effetto di  $d$  su  $y$**

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

- **Analisi statica:** (supp.  $g_H = 0, g_L = 0$  )

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot M(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} M(s)$$

$$= A \cdot \frac{\mu_H}{1 + \mu_L} = A \cdot \mu_H \cdot \mu_S$$

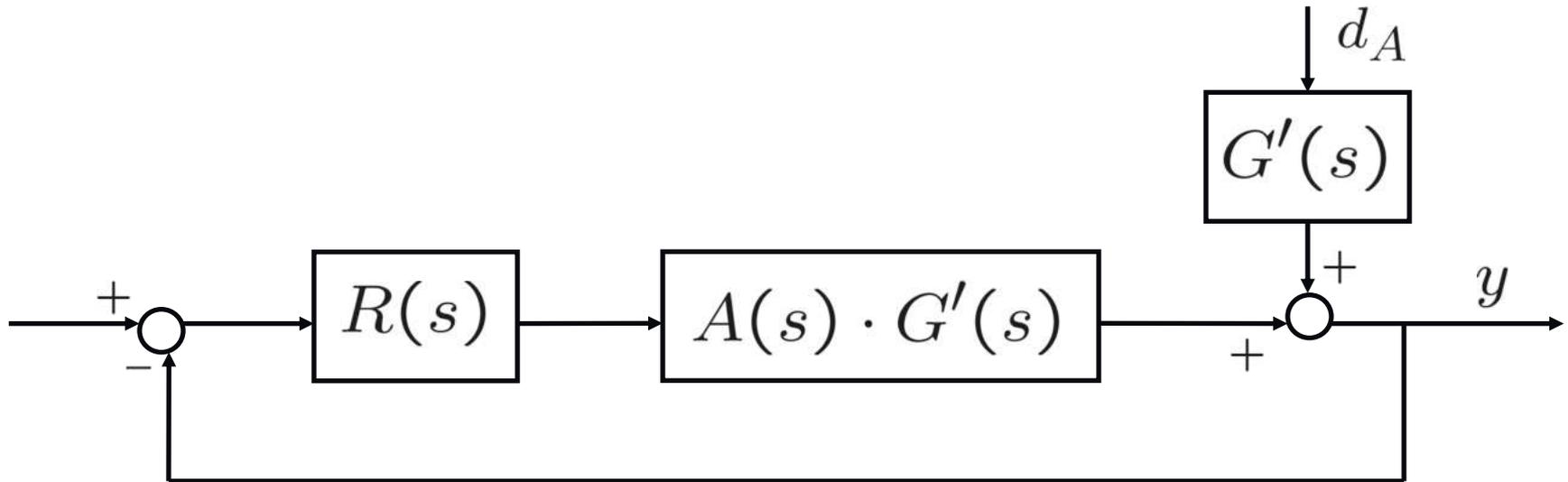
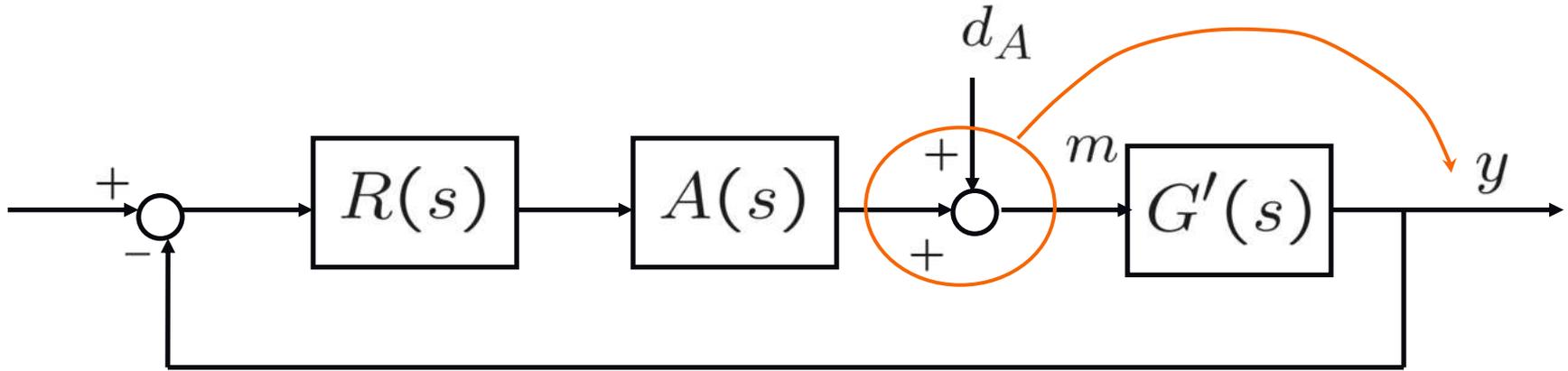
- Analisi dinamica:

$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |S(j\omega)|$$



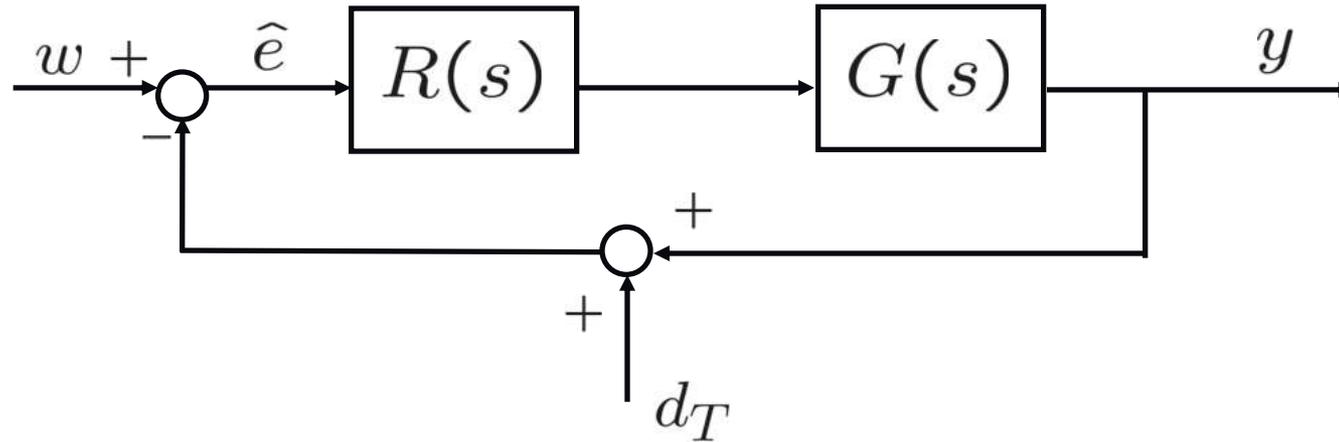
$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} \oplus |S(j\omega)|_{dB}$$

- Disturbi sull' attuatore

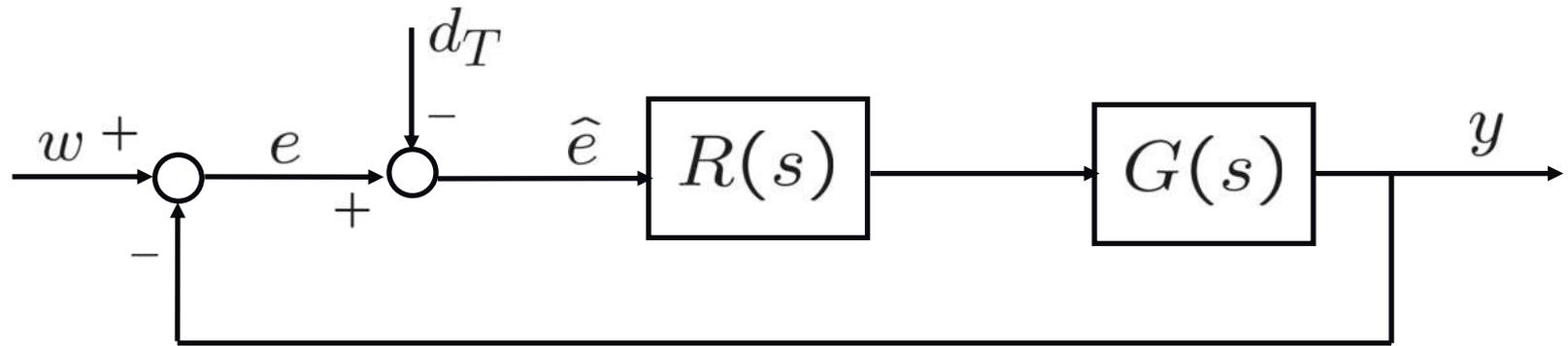


→ vedi caso precedente

- Disturbi sul trasduttore (in retroazione)



$$\hat{e} = w - (y + d_T) = \underbrace{w - y}_e - d_T$$



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s) \quad \text{Passa-basso con } B_F \simeq [0, \omega_c]$$



Disturbi a bassa frequenza  
vanno a influire su  $e(t)$

## ● Valore a regime risposta allo scalino

$$d_T(t) = A \cdot 1(t) \quad (\text{Hp: sistema as. stabile})$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \frac{1}{s}$$

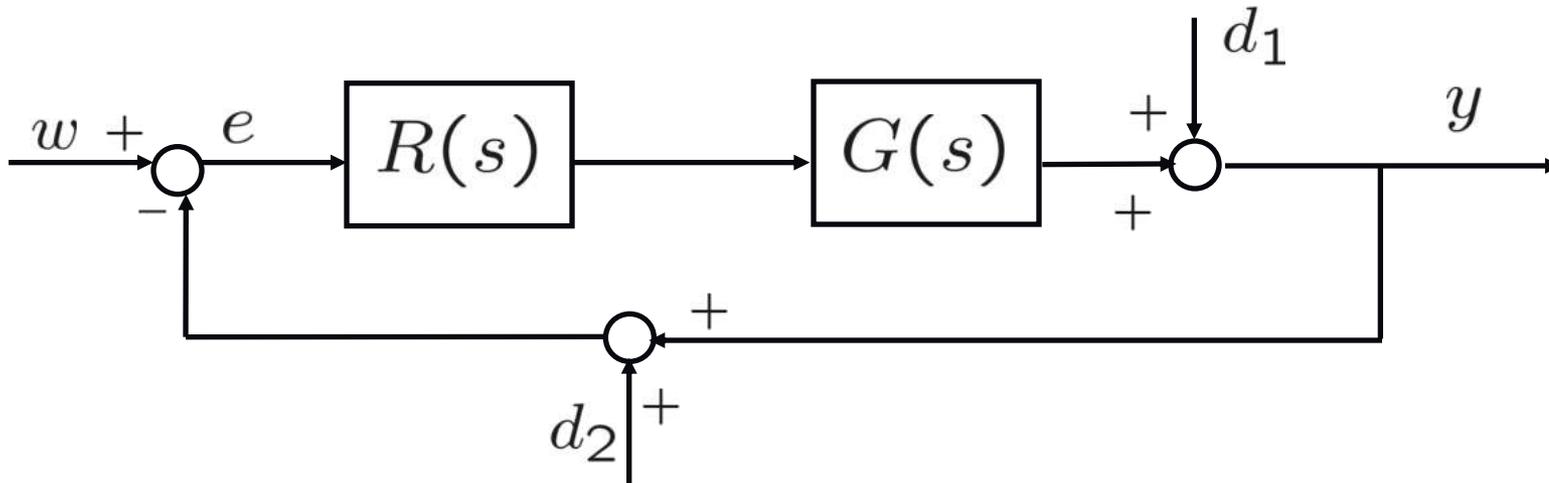
$$= \dots = \begin{cases} A \cdot \frac{1}{1 + \mu} & g = 0 \\ A & g > 0 \end{cases}$$



Compensazione del disturbo in catena diretta è in contrasto con la compensazione del disturbo in retroazione



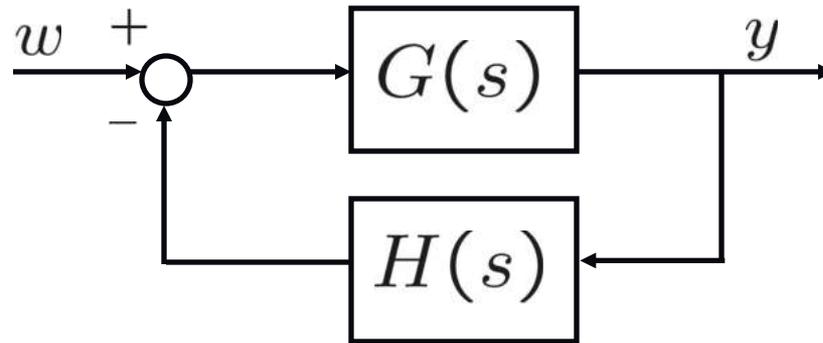
## ● Riassunto: attenuazione dei disturbi



Il sistema in anello chiuso è in grado di attenuare:

- $d_1$  a bassa frequenza  $\omega \ll \omega_c$
- $d_2$  ad alta frequenza  $\omega \gg \omega_c$

- Estensione



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)|}$$

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|H(j\omega)|} , \quad |G(j\omega)| \gg \frac{1}{|H(j\omega)|} \\ |G(j\omega)| , \quad |G(j\omega)| \ll \frac{1}{|H(j\omega)|} \end{array} \right.$$

## ● Esempio

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \quad H(s) = \frac{1}{(1+0.1s)}$$

→  $F(s) = \dots = \frac{10(1+0.1s)}{11 + 2.1s + 1.2s^2 + 0.1s^3}$

$$\mu_F = \frac{10}{11}$$

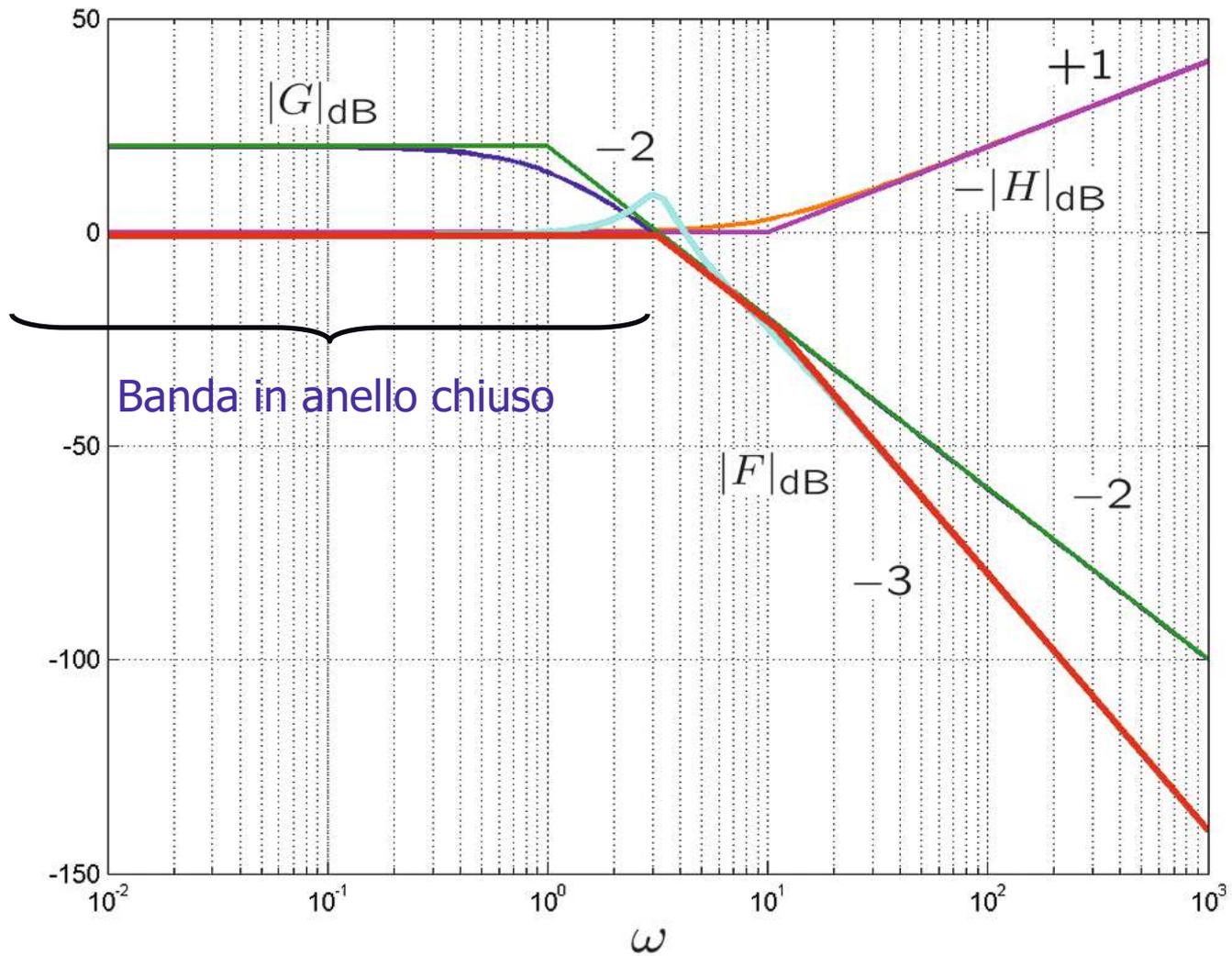
Poli:

$$-11$$

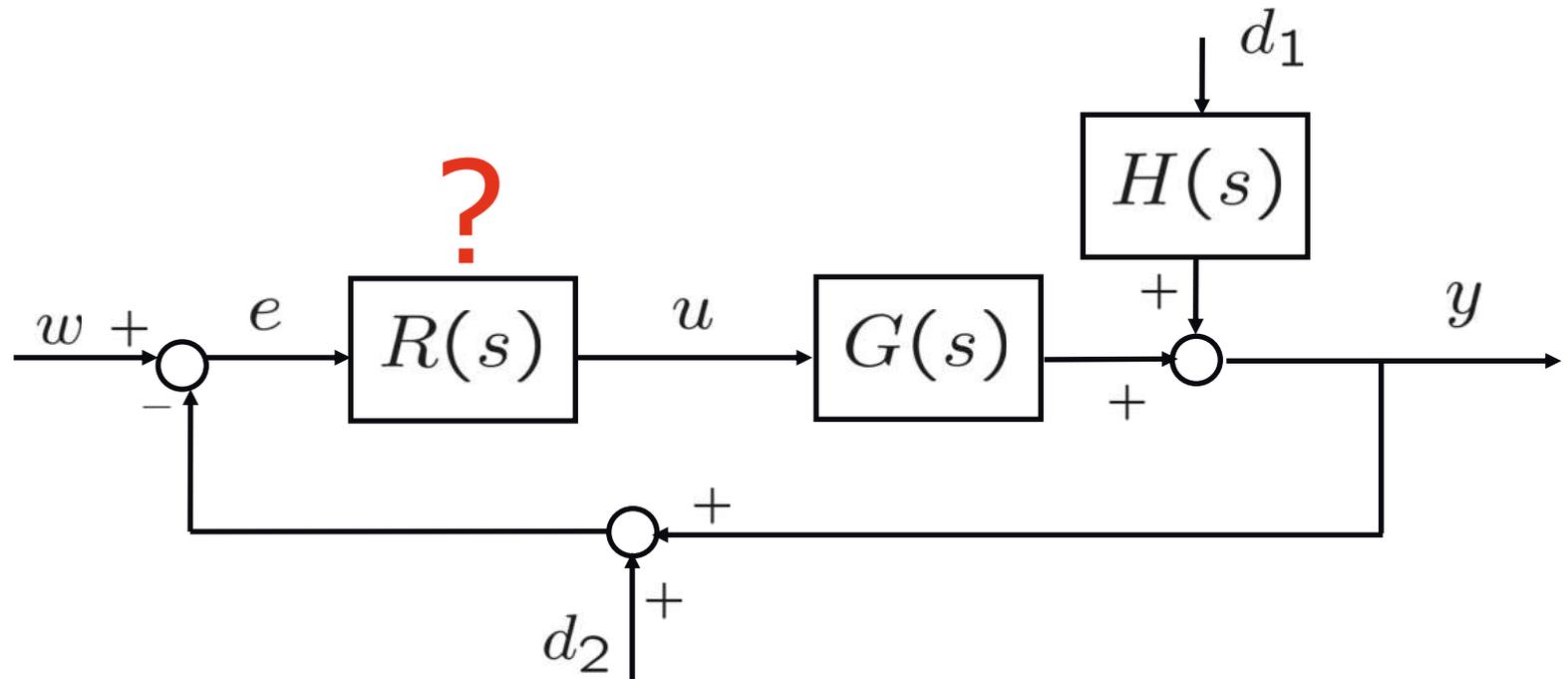
$$-0.5 \pm j3.12$$

$$\omega_n \simeq 3.16$$

$$\xi \simeq 0.16$$



- **Problema di progetto del controllore**



Determinare  $R(s)$  in modo che il sistema soddisfi  
alcuni requisiti (specifiche)

## ● Principali requisiti

- Asintotica Stabilità   $\mu > 0$   
 $\varphi_m > 0$  (Bode)
- Precisione statica   $g > 0$  e/o  $\mu$  elevato
- Precisione dinamica
  - velocità di risposta   $\omega_c$  elevata
  - smorzamento   $\varphi_m$  elevato

- Attenuazione del disturbo  
in andata



$\omega_c$  elevata

$|L(j\omega)|$  elevato per  $\omega \ll \omega_c$

- Attenuazione del disturbo  
in retroazione



$\omega_c$  non troppo elevata

$|L(j\omega)|$  piccolo per  $\omega \gg \omega_c$

- Stabilità robusta   $\varphi_m$   
 $K_m$  elevati
- Moderazione controllo   $|R(j\omega)|$  piccolo per  $\omega \gg \omega_c$