

Sistemi LTI a tempo continuo

**Tracciamento di grafici della risposta in
frequenza:
diagrammi di Bode**

Esercizi- Risposta in frequenza

Data una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

Ci sono due rappresentazioni grafiche nel dominio delle frequenze:

**-Diagrammi di Bode:
Modulo e Fase**

**-Diagramma polare
o di Nyquist**

- Diagrammi di Bode ASINTOTICI: qualche richiamo...

Modulo

- ascisse: $\log \omega$ ($\log x := \log_{10} x$)

- ordinate: $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ ($x_{\text{dB}} := 20 \log x$)

Regole per il tracciamento del diag. asint. del modulo

- Pendenza iniziale $20 \log \mu - g$ $20 \log \omega$
- Il tratto iniziale passa per $|\mu|_{\text{dB}}$ in $\omega = 1$
- Cambi di pendenza in corrispondenza di poli e zeri:
 - zero $+1 \implies +20 \text{ dB} \times \text{decade}$
 - polo -1
- Pendenza finale = nr. zeri – nr. poli $\left\{ \begin{array}{l} \leq 0 \\ = 0 \end{array} \right.$

Cfr.
Parte 8, 28
e segg.

Fase

- ascisse: $\log \omega$
- ordinate: $\arg G(j\omega)$ in gradi

Regole per il tracciamento del diagr. asint. della fase

- Valore iniziale $\arg(\mu) - g 90^\circ$
- Cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri:

	$\mathcal{Re} < 0$	$\mathcal{Re} > 0$
poli	-90°	$+90^\circ$
zeri	$+90^\circ$	-90°

Cfr.
Parte 8, 28
e segg.

Esercizi

1. Tracciare il diagramma di Bode asintotico di modulo e fase per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100 (1 + 0.2s)}{s^2 (1 + 0.01s)}$$

poli $-100, 0, 0$

zeri -5

μ 100

g 2

Andamento:

Modulo

$$\omega \geq 0 \quad 20 \log 100 - 20 \cdot 2 \cdot \log \omega$$

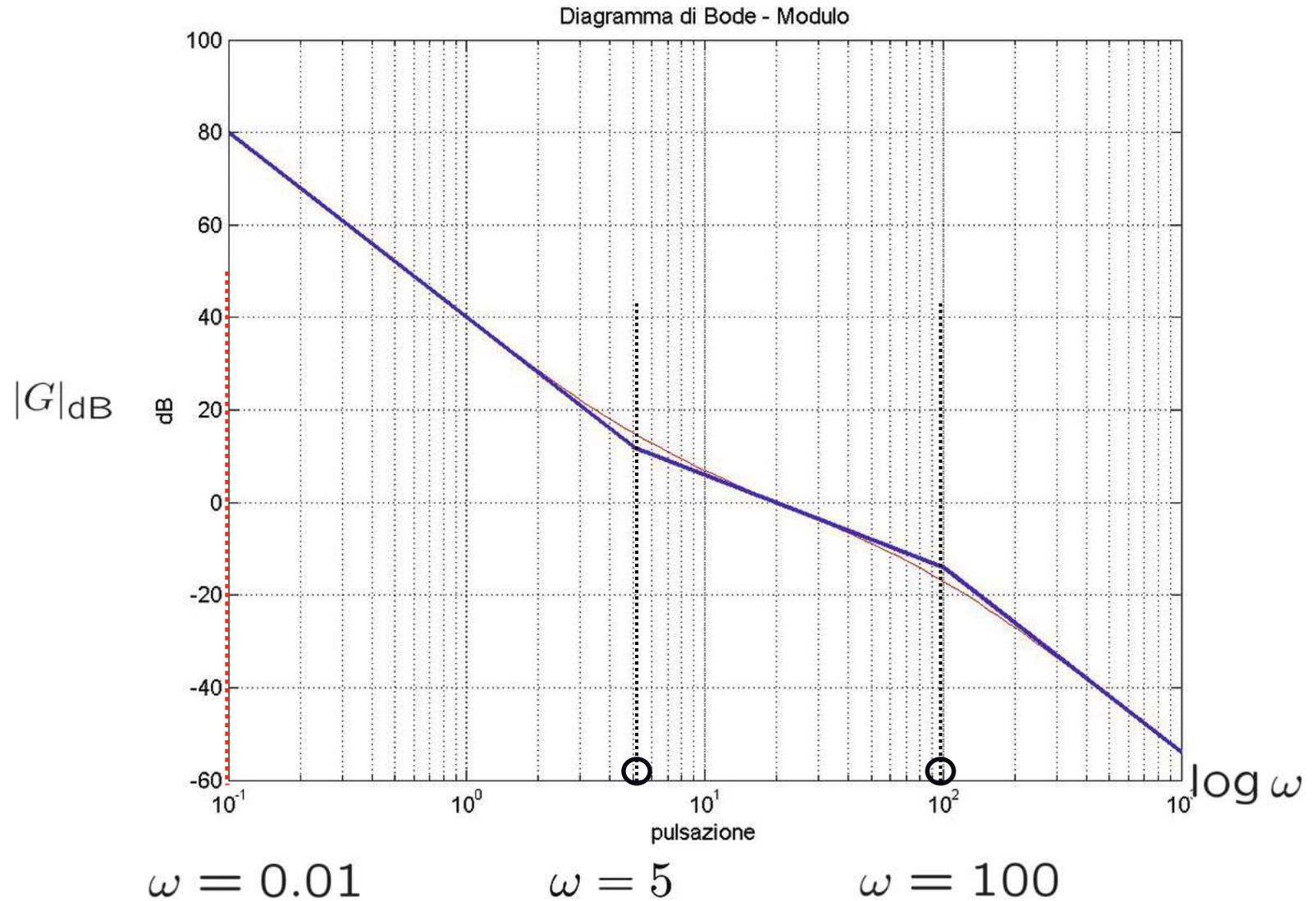
al passaggio per $\omega = 5$ (zero)

la pendenza cambia di $+20$ dB per decade

al passaggio per $\omega = 100$ (polo)

la pendenza cambia di -20 dB per decade

Esercizio 1. Diagramma di Bode del modulo



Fase

$$\omega \geq 0 \quad \arg \mu - g \cdot 90^\circ \quad \Longrightarrow \quad -180^\circ$$

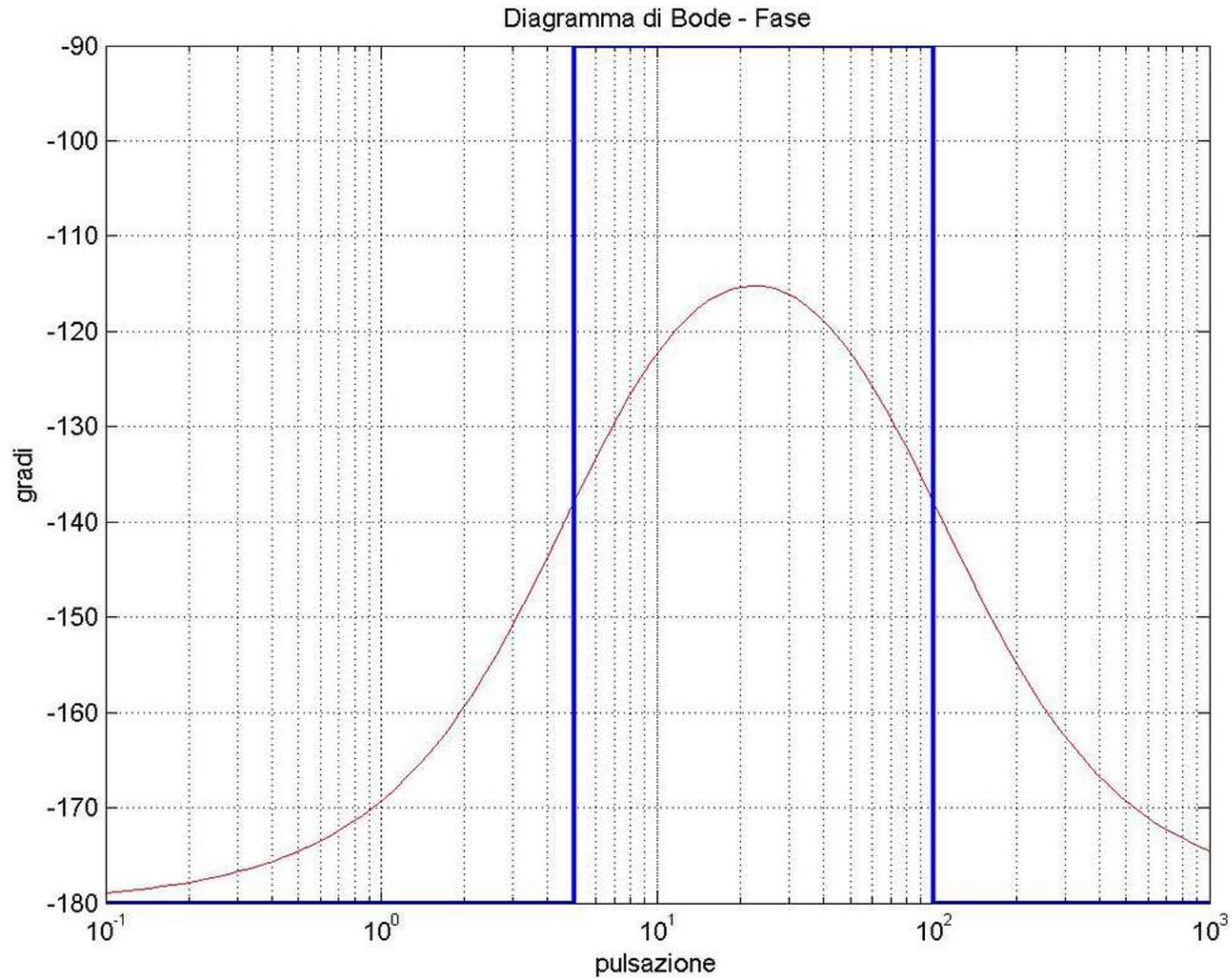
al passaggio per $\omega = 5$ (zero nel semipiano sinistro)

la fase cambia di $+90^\circ$

al passaggio per $\omega = 100$ (polo nel semipiano sinistro)

la fase cambia di -90°

Esercizio 1. Diagramma di Bode della fase



2. Tracciare il diagramma di Bode asintotico di modulo e fase per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{20(s + 2)}{(s + 1)(s + 4)(s + 5)}$$

poli $-1, -4, -5$

zeri -2

μ 2

g 0

Andamento:

Modulo

$$\omega \geq 0$$

$$20 \log 2 - 20 \cdot 0 \cdot \log \omega$$

al passaggio per

la pendenza cambia di

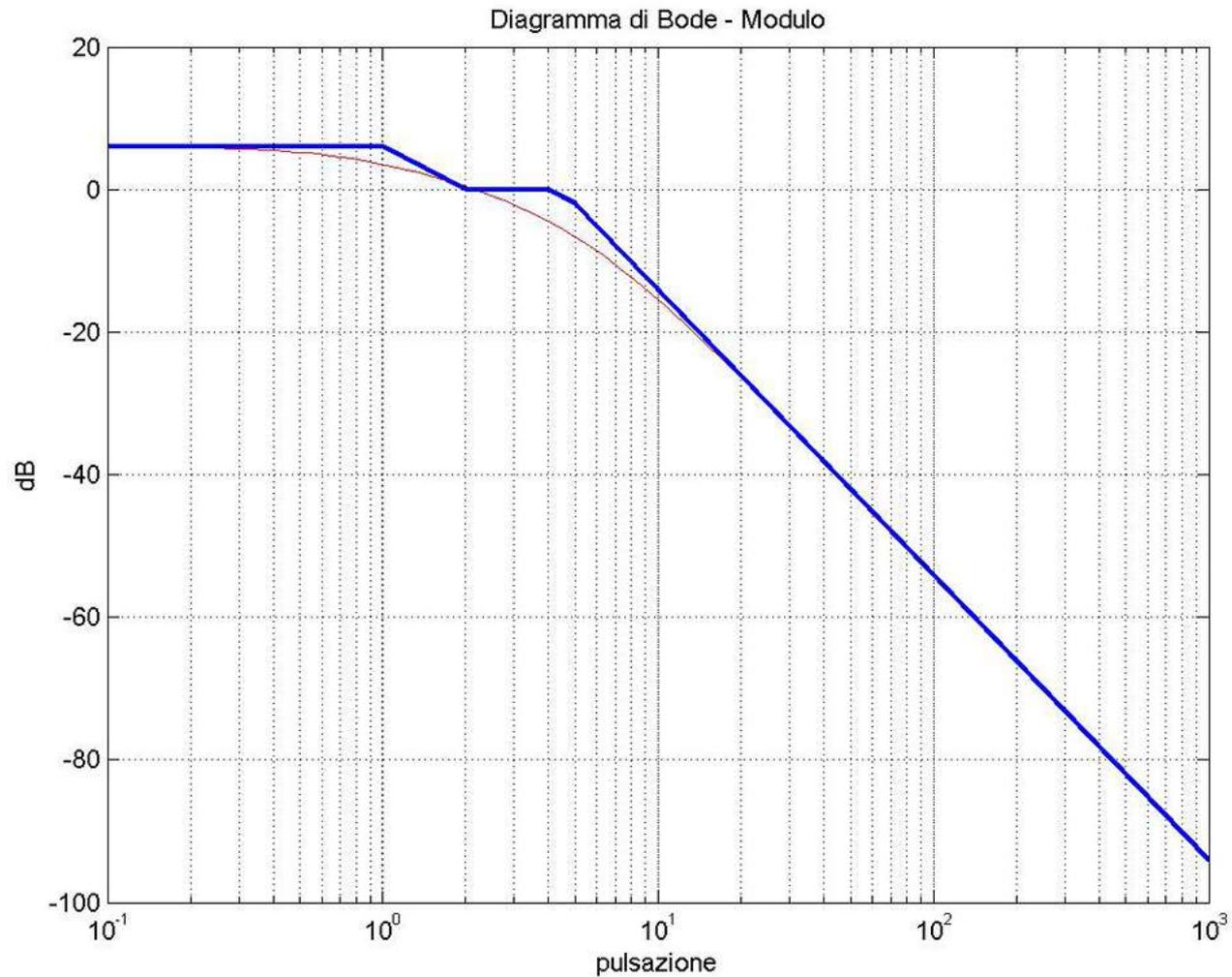
$\omega = 1$ polo -20 dB per decade

$\omega = 2$ zero $+20$ dB per decade

$\omega = 4$ polo -20 dB per decade

$\omega = 5$ polo -20 dB per decade

Esercizio 2. Diagramma di Bode del modulo



Fase

$$\omega \geq 0$$

$$\arg \mu = 0 \cdot 90^\circ \implies 0^\circ$$

al passaggio per

la fase cambia di

dunque la fase e':

$$\omega = 1$$

polo

$$-90^\circ$$

$$-90^\circ$$

$$\omega = 2$$

zero

$$+90^\circ$$

$$0^\circ$$

$$\omega = 4$$

polo

$$-90^\circ$$

$$-90^\circ$$

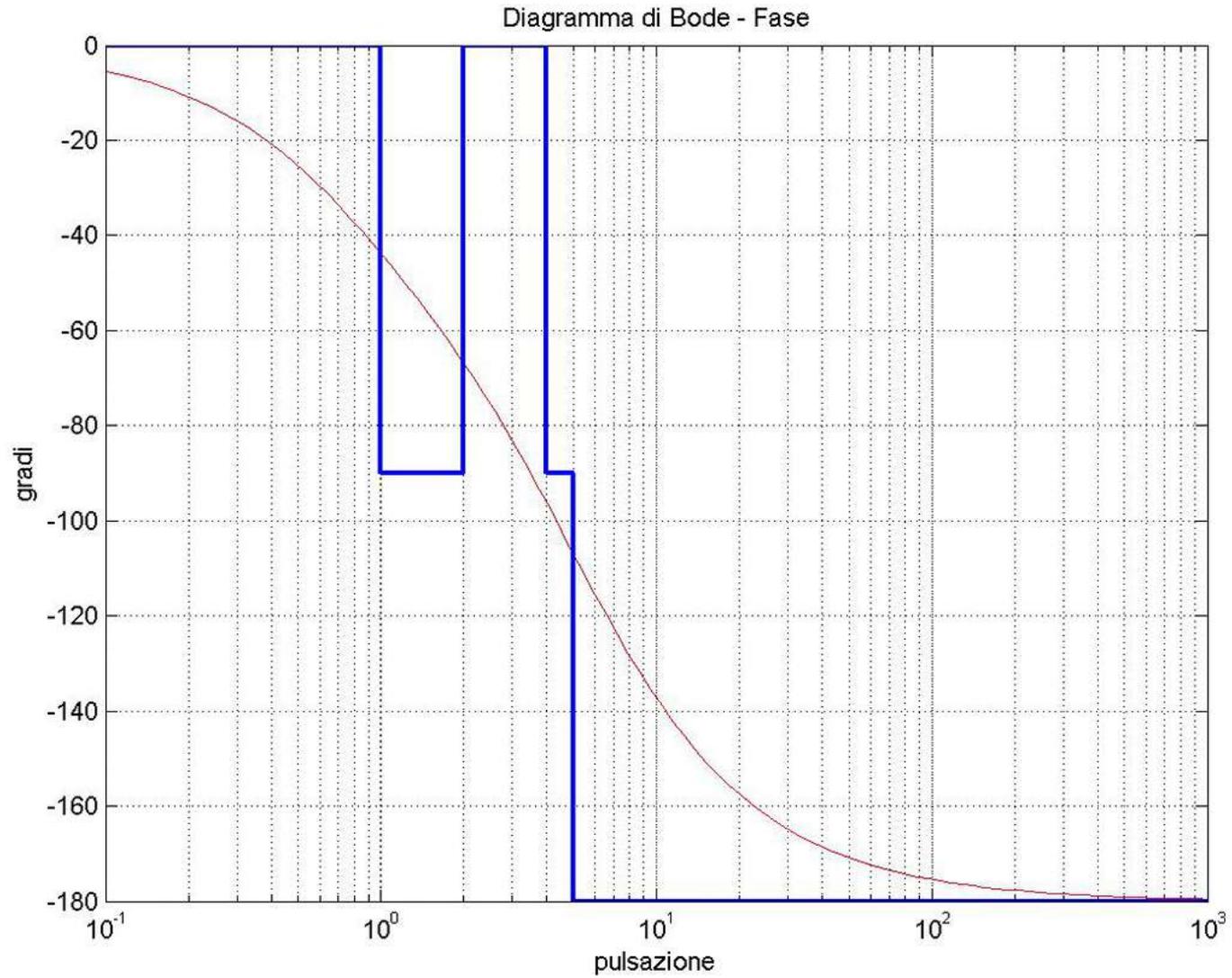
$$\omega = 5$$

polo

$$-90^\circ$$

$$-180^\circ$$

Esercizio 2. Diagramma di Bode della fase



3. Tracciare il diagramma di Bode asintotico di modulo e fase per la seguente funzione di trasferimento, che presenta poli complessi:

$$G(s) = \frac{20(s + 1)}{(s + 2)(s^2 + 4s + 100)}$$

poli $-2, -2 + j9.798, -2 - j9.798$

zeri -1

$$\mu \quad \frac{20}{2 \cdot 100} = \frac{1}{10}$$

g 0

$\omega_n?$

$$\omega_n = \sqrt{\text{Re}(p)^2 + \text{Im}(p)^2}$$

...

$$\omega_n = 10$$

Andamento:

Modulo

$$\omega \geq 0 \quad 20 \log \frac{1}{10} - \cancel{20 \cdot 0 \cdot \log \omega}$$

al passaggio per

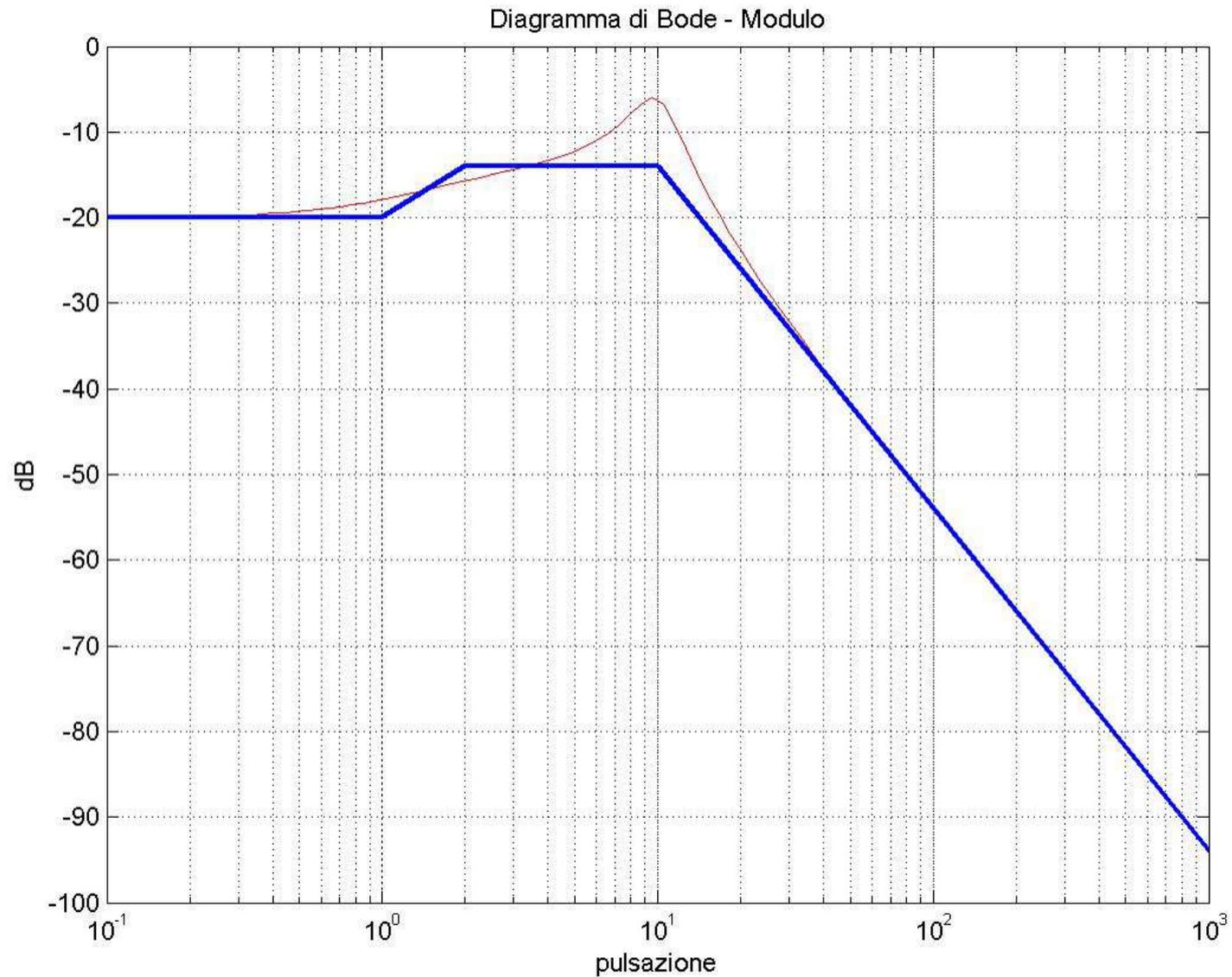
la pendenza cambia di

$\omega = 1$ polo +20 dB per decade

$\omega = 2$ zero -20 dB per decade

$\omega = 10$ pulsazione naturale -40 dB per decade

Esercizio 3. Diagramma di Bode del modulo



Fase

$$\omega \geq 0$$

$$\arg \mu = 0 \cdot 90^\circ \implies 0^\circ$$

al passaggio per

la fase cambia di

dunque la fase è:

$$\omega = 1$$

polo

$$-90^\circ$$

$$-90^\circ$$

$$\omega = 2$$

zero

$$+90^\circ$$

$$0^\circ$$

$$\omega = 10$$

pulsazione naturale

$$-180^\circ$$

$$-180^\circ$$

Esercizio 3. Diagramma di Bode della fase

