Sistemi LTI a tempo continuo

Risposta in frequenza:
tracciamento di diagrammi di Nyquist

Esercizi- Risposta in frequenza

Diagrammi polari della risposta in frequenza

Data una funzione di trasferimento:

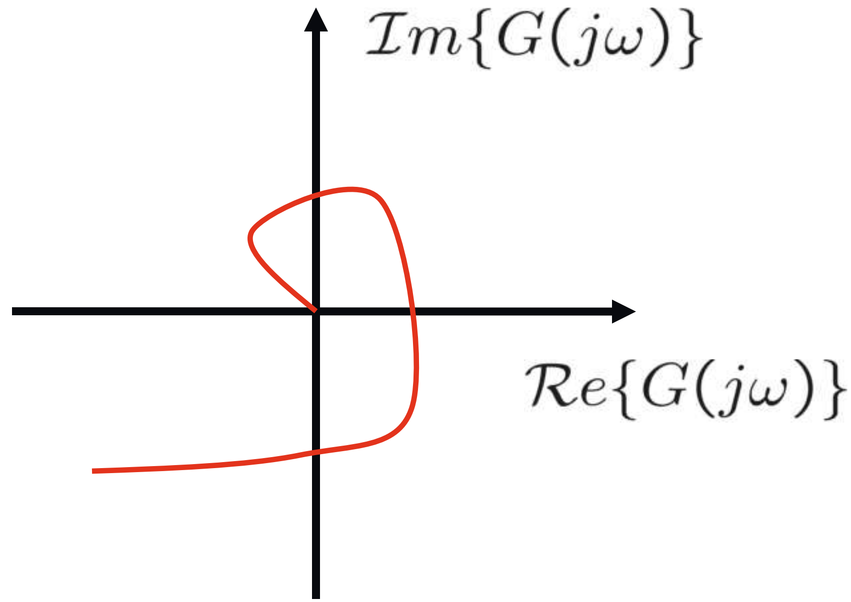
$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + as + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + bs + b_0}$$

Vogliamo ottenere la sua rappresentazione nel piano complesso

$$\mathcal{R}e\{G(j\omega)\}, \mathcal{I}m\{G(j\omega)\}$$

al variare della frequenza ω .

curva parametrizzata in ω



La tracciamo per: $\omega \geq 0$

Come si tracciano le curve? Si possono calcolare per punti, una volta ricavata l'espressione di $\mathcal{R}e\{G(j\omega)\}$, $\mathcal{I}m\{G(j\omega)\}$; o sempre per punti conoscendo il diagramma di Bode di modulo e fase; oppure facendo uso ad esempio del sw Matlab...
In questo contesto ci interessa l'andamento qualitativo del diagramma.

<u>In pratica si tratta di fare uno studio di funzione in campo complesso.</u>

Dunque si studia il comportamento della $G(j\omega)$ ...

- $\omega \longrightarrow 0$;
- $\omega \longrightarrow \infty$;
- intersezioni con l'asse reale;
- intersezioni con l'asse immaginario;
- (eventuali asintoti)

Partiamo con un esempio, da usare come "campione":

$$\boxed{G(s) = \frac{s+2}{s^3+3s^2+4s}}$$

$$G(j\omega) = \frac{2+j\omega}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j4\omega} = \frac{2+j\omega}{-3\omega^2 + j\omega(4-\omega^2)}$$

Separiamo parte reale e parte immaginaria:

1) Prima possibilita':
$$G(j\omega) = \frac{2+j\omega}{-3\omega^2 + j\omega\left(4-\omega^2\right)} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{(2+j\omega)}{9\omega^4 + \omega^2\left(4-\omega^2\right)^2}\left[-3\omega^2 - j\omega\left(4-\omega^2\right)\right]$$

Da quest'ultima espressione si isolano parte reale ed immaginaria.

2) Seconda possibilita':

$$2 + j\omega = (R + jI)\left[-3\omega^2 + j\omega\left(4 - \omega^2\right)\right]$$

$$\begin{cases} 2 = I\omega^3 - 4\omega I - 3\omega^2 R \\ j\omega = -R\omega^3 + 4\omega R - 3\omega^2 I \end{cases}$$

E' un sistema in due variabili, R e I . Dunque le ricavo in funzione di ω e poi le studio.

$$\begin{cases} R(\omega) = -\dfrac{2+\omega^2}{9\omega^2 + (4-\omega^2)^2} \\ I(\omega) = -\dfrac{8+\omega^2}{\omega\left[9\omega^2 + (4-\omega^2)^2\right]} \end{cases}$$

OSS: Sono entrambe sempre minori di zero!

$$\omega > 0$$

Ora che disponiamo di parte reale ed immaginaria in funzione di ω , vediamone l'andamento nei casi estremi:

$$R(\omega) \quad \begin{cases} \omega \to 0^+ \\ \\ \omega \to +\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} R(\omega) \to -\dfrac{1}{8} \\ \\ R(\omega) \to 0^- \end{array}$$

$$I(\omega) \quad \begin{cases} \omega \to 0^+ \\ \\ \omega \to +\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} I(\omega) \to -\infty \\ \\ I(\omega) \to 0^- \end{array}$$

Dunque sappiamo cosa accade agli estremi della curva...

La presenza di un polo nell'origine, con molteplicita 1, dà origine ad un particolare comportamento del diagramma polare: presenza di un **asintoto verticale** [analisi generale sulla presenza di asintoti più avanti].

$$\omega \to 0^+ \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} R(\omega) \to -\dfrac{1}{8} \\ I(\omega) \to -\infty \end{cases}$$

Se la FdT ha un polo nell'origine, con molteplicità 1, allora il **diagramma polare** presenta **sempre** un **asintoto verticale** [giustificazione più avanti].

Il diagramma effettivo come si posiziona rispetto all'asintoto? Lo attraversa? Oppure rimane sempre da una parte rispetto all'asintoto?

Per poter rispondere, indaghiamo se ci sono intersezioni con gli assi…

Per trovare le intersezioni con gli assi ci si avvale di un vantaggio dell'aritmetica complessa:

OSS: Dato un numero complesso:

$$\frac{a+jb}{c+jd}$$

Esso risulta...

- Reale puro sse: $$bc - ad = 0$$

- Immaginario puro sse: $$ac + bd = 0$$

Suggerimento: si parte dall'espressione e si separano parte reale ed immaginaria $\Longrightarrow$ $\dfrac{a+jb}{c+jd} \cdot \dfrac{c-jd}{c-jd}$

Dunque:

$$G(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{-3\omega^2 + j\omega(4 - \omega^2)} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

Intersezioni con l'asse reale:

$$bc - ad = 0 \Longrightarrow 2\omega\left(4 - \omega^2\right) - \left(-3\omega^2\right)\omega = 0$$

$$\omega\left[8 + \omega^2\right] = 0 \Longrightarrow 8 + \omega^2 = 0$$

$$\omega \neq 0$$

No soluzioni ω **reali** $\Longrightarrow$ **No** intersezioni con asse reale

Intersezioni con l'asse immaginario:

$$ac + bd = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\left(-3\omega^2\right) + \omega\left[\omega\left(4-\omega^2\right)\right] = 0$$

$$\omega^2\left[-6 + \left(4-\omega^2\right)\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 + 2 = 0$$

$$\omega \neq 0$$

No soluzioni ω **reali** $\Longrightarrow$ **No** intersezioni con asse immaginario

Ricerca di eventuali **intersezioni** con l'**asintoto verticale**:
il diagramma polare rimane sempre dalla stessa parte dell'asintoto, oppure lo attraversa?

1) Prima possibilità: cerchiamo soluzioni dell'equazione

$$R(\omega) = -\frac{2+\omega^2}{9\omega^2 + (4-\omega^2)^2} = -\frac{1}{8} \qquad \omega > 0$$

$$8(2+\omega^2) = 9\omega^2 + \left(4-\omega^2\right)^2$$

$$\omega^2 - 7 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{7}$$

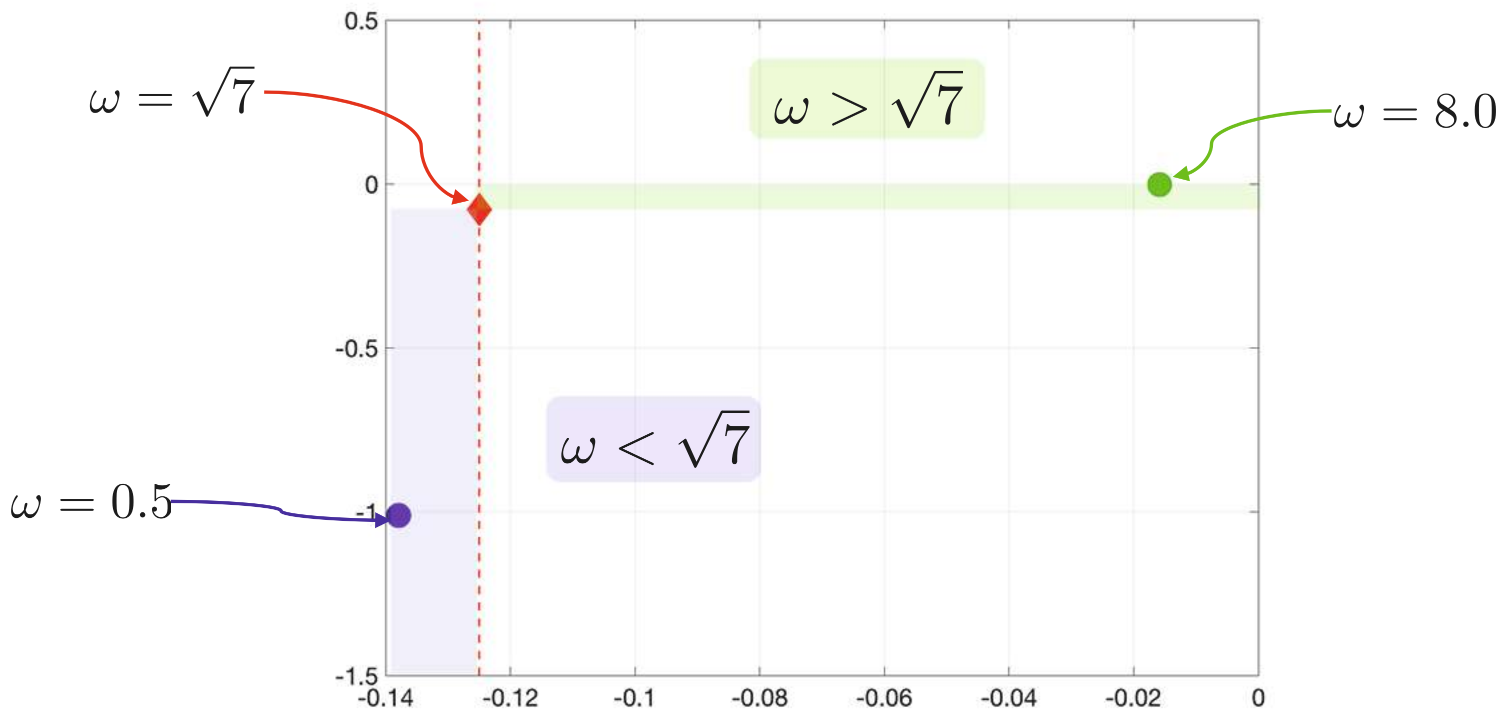
In definitiva

$$\omega = \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R\left(\sqrt{7}\right) = -\frac{1}{8} = -0.1250 \\ I\left(\sqrt{7}\right) = -\frac{5\sqrt{7}}{168} \approx -0.0787 \end{cases}$$

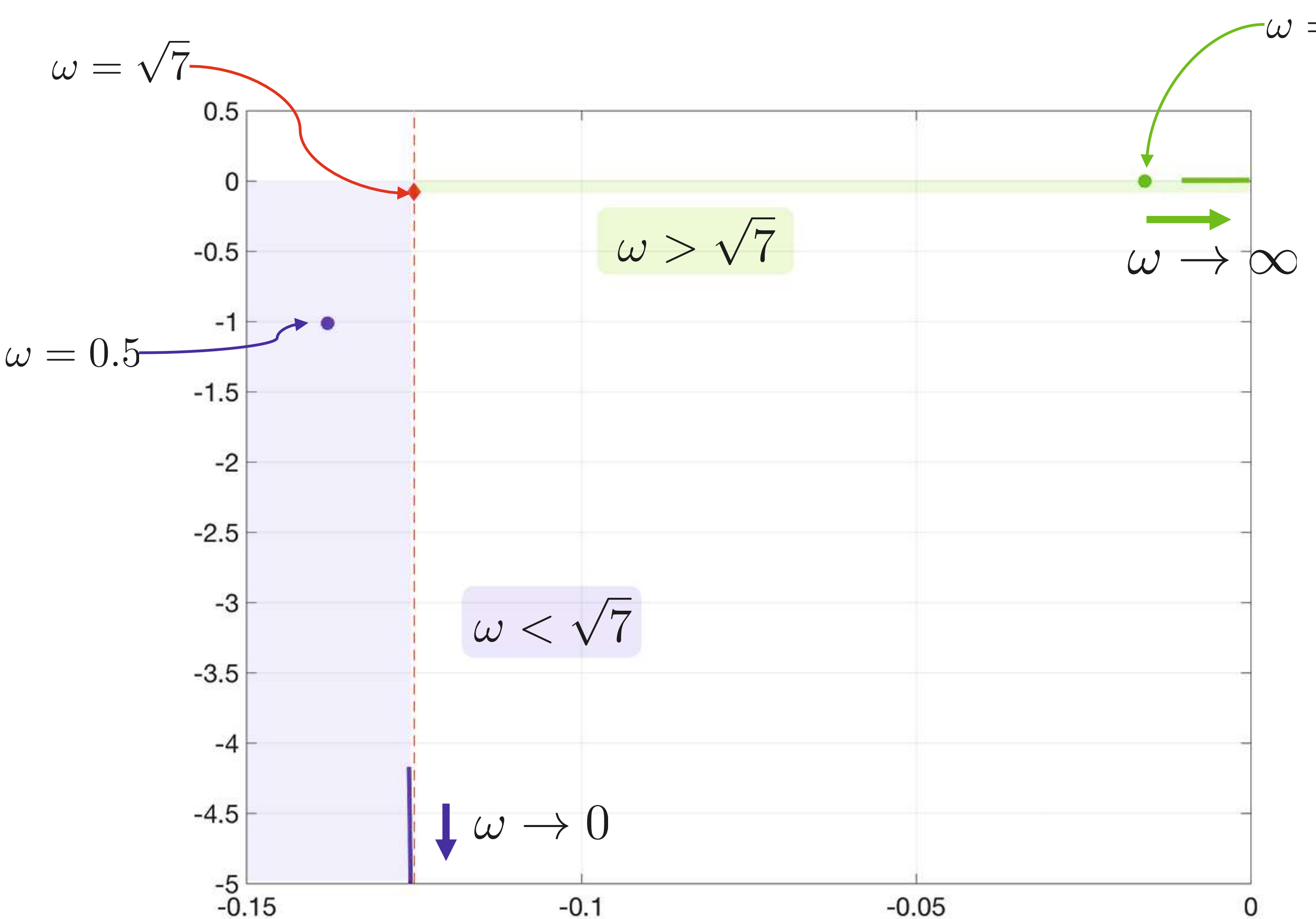
Per posizionare correttamente la curva rispetto all'asintoto, ora basta la conoscenza di alcuni valori della curva, per pulsazioni inferiori e superiori a quella per la quale c'è l'intersezione:

$$\omega < \sqrt{7} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 0.5 \quad : \quad R \approx -0.1379 \quad I \approx -1.0115$$

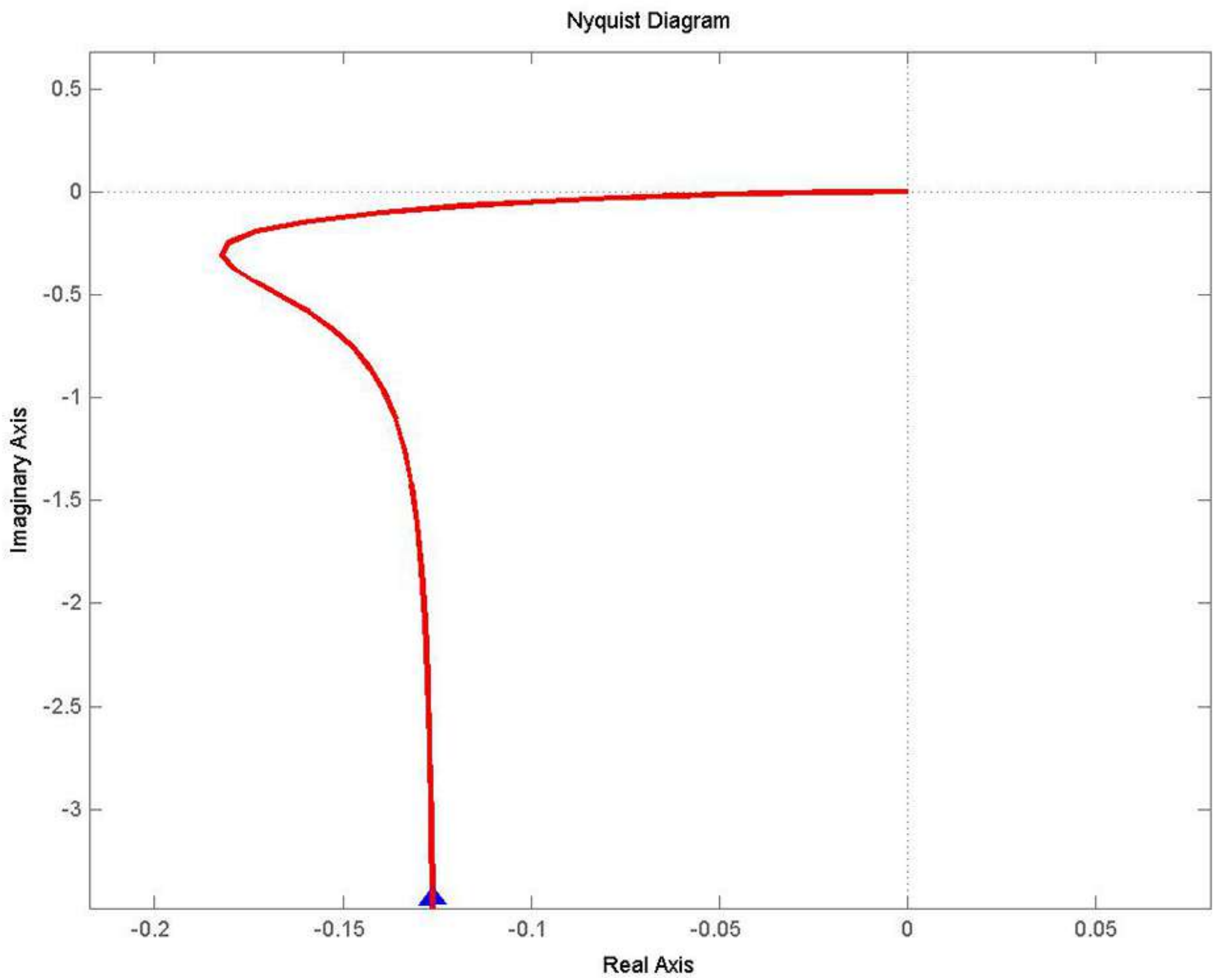
$$\omega > \sqrt{7} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 8.0 \quad : \quad R \approx -0.0158 \quad I \approx -0.0022$$



Riepilogando:



Facendo uso del sw Matlab:



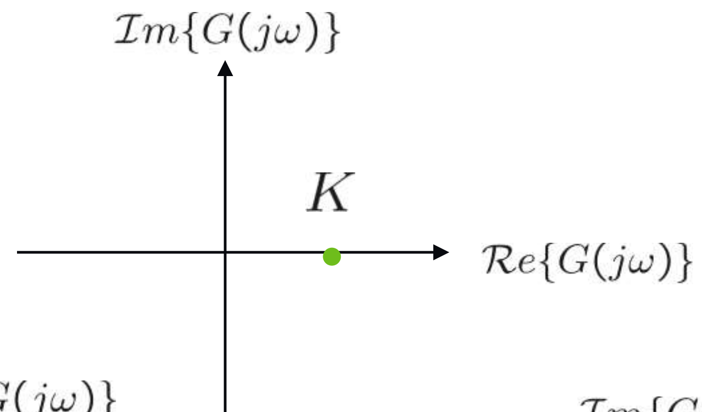
Andamento di termini semplici del tipo:

$$G(s) = K\, s^{\mu} \qquad \begin{cases} K > 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

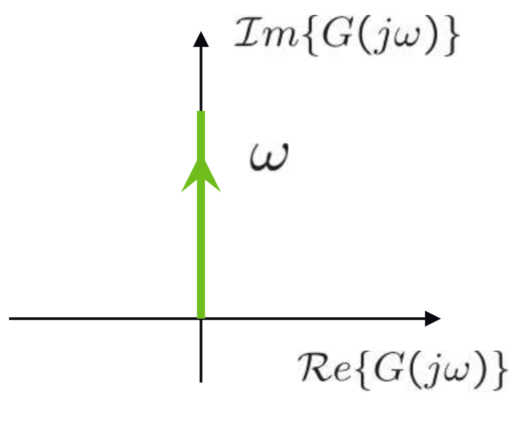
Per casa, vedere cosa accade per $K \leq 0$

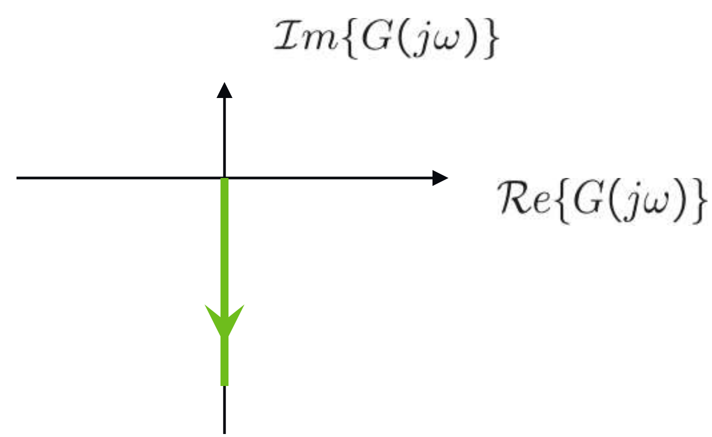
$\mu > 0$ | $\mu < 0$

$|\mu| = 0$



$|\mu| = 1$

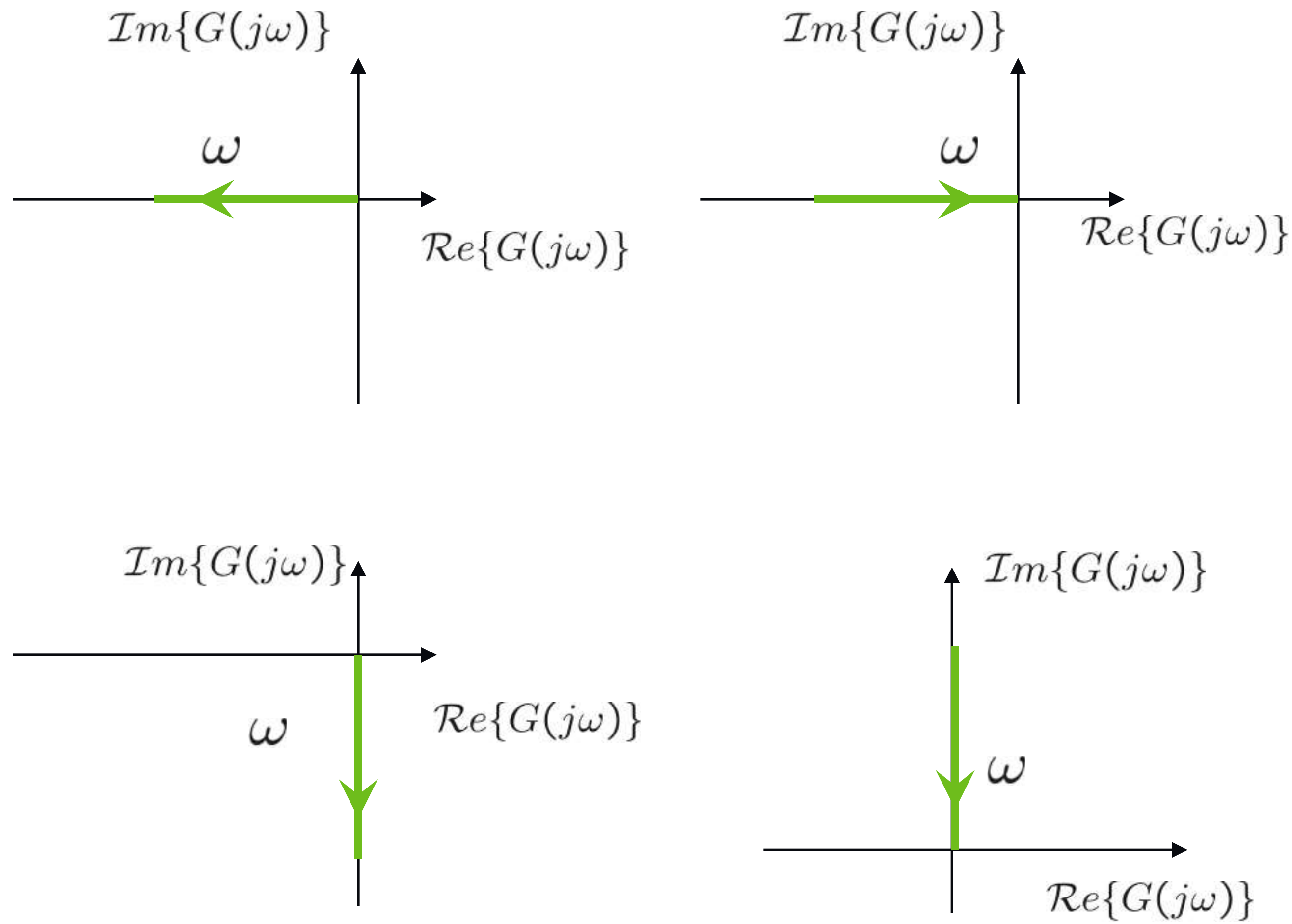




$\mu > 0$ $\mu < 0$

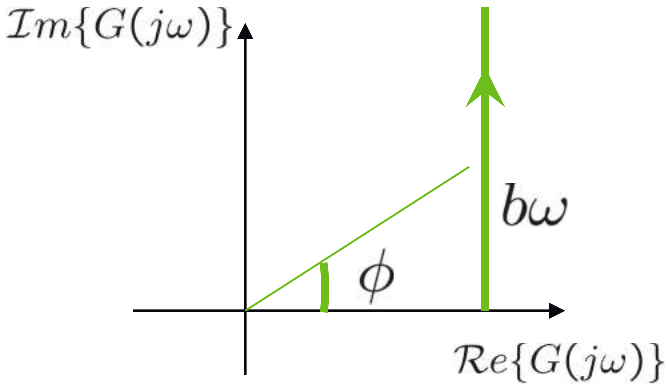
$|\mu| = 2$

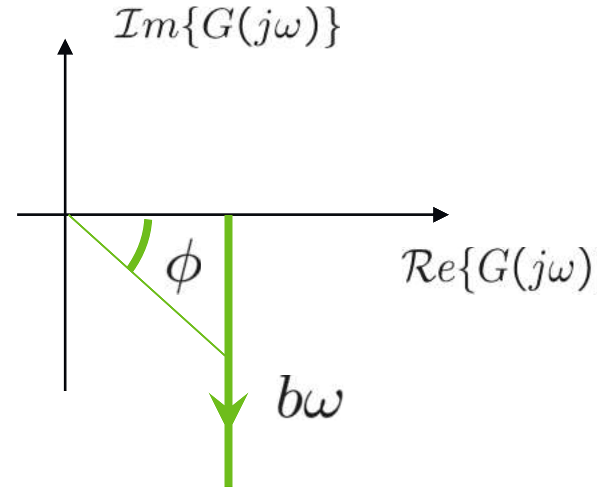
$|\mu| = 3$



Andamento di un termine tipo: $G(s) = a + bs$

$a > 0$





$$b > 0 \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{\omega b}{a}\right)$$

$$\phi > 0$$

$$b < 0 \Longrightarrow \phi = \arctan\left(\frac{\omega b}{a}\right)$$

$$\phi < 0$$

Andamento di un termine tipo:

$$G(s) = \frac{1}{a + bs}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{a + jb\omega} = \frac{a - jb\omega}{a^2 + (b\omega)^2}$$

$$\begin{cases} R(\omega) = \dfrac{a}{a^2 + (b\omega)^2} \\[2ex] I(\omega) = \dfrac{-b\omega}{a^2 + (b\omega)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{R}{I} = -\dfrac{a}{b\omega} \\[2ex] \omega = -\dfrac{I}{R}\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$$R = \frac{a\,R^2}{a^2R^2 + a^2I} \quad \Longrightarrow \quad R^2 + I^2 - \frac{R}{a} = 0$$

E' l'equazione di una semicirconferenza di diametro $\frac{1}{a}$ **centrata in** $\frac{1}{2a}$ **:**

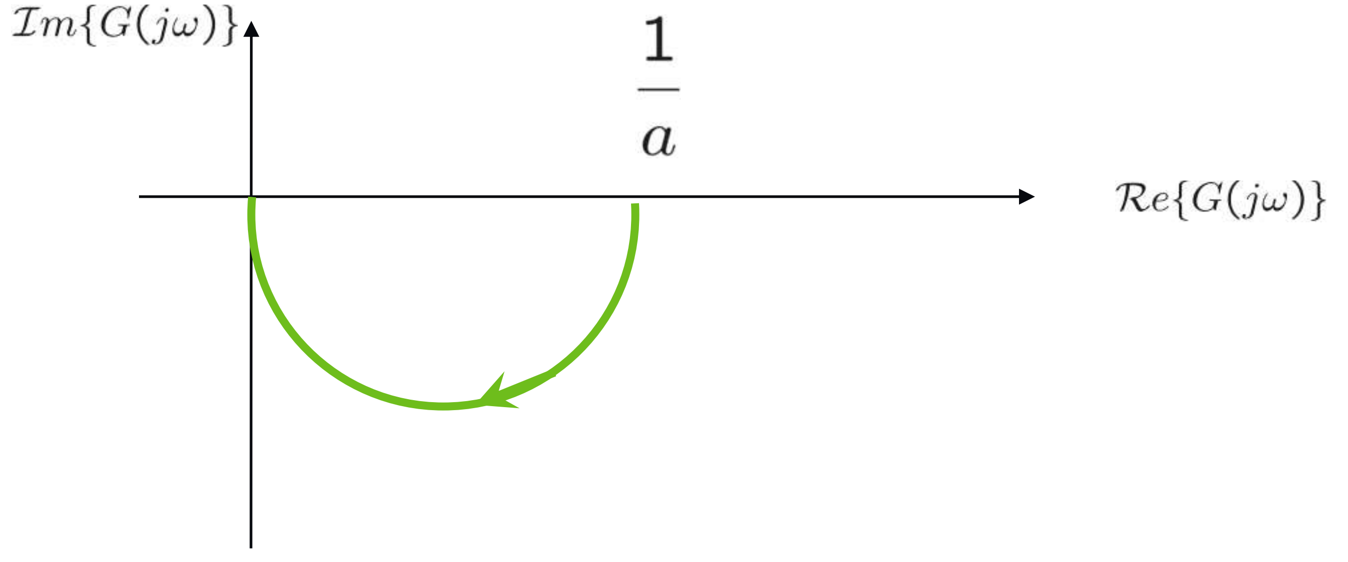


Diagramma polare di Nyquist di $G(s) = \frac{1}{a+bs}$

Andamento per $\omega \longrightarrow 0$, $\omega \longrightarrow \infty$ di una funzione generica:

$$G(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + as + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + ... + bs + b_0}$$

Si considerano comportamenti locali del diagramma; dunque formalmente bisognerebbe fare un'approssimazione in serie di Laurent (siamo in campo complesso) della funzione intorno a 0 ed ∞ . Con questo tipo di analisi, che verra' tralasciata in questo corso, si ottiene l'andamento qualitativo della $G(j\omega)$ con sufficiente precisione.

Vedremo ora i due casi...

$$\boxed{\omega \longrightarrow 0}$$

1. Non ci sono poli nell'origine:

$$G(j\omega) \longrightarrow \frac{a_0}{b_0}$$

2. Ci sono poli nell'origine:

A. Polo singolo

$$G(j\omega) \longrightarrow K \pm j\infty$$

La curva ammette un asintoto verticale parallelo all'asse immaginario, dunque...

$$\lim_{\omega \longrightarrow 0} R(\omega) = K \in \mathbb{R}$$

Ma bisogna poi indagare se la curva prosegue a destra o sinistra dell'asintoto... in modo simile a quello illustrato in precedenza.

B. Poli multipli $G(j\omega) \longrightarrow \pm\infty$

La curva non ammette asintoti

$$\boxed{\omega \longrightarrow \infty}$$

1. Caso in cui $G(s)$ è strettamente propria:

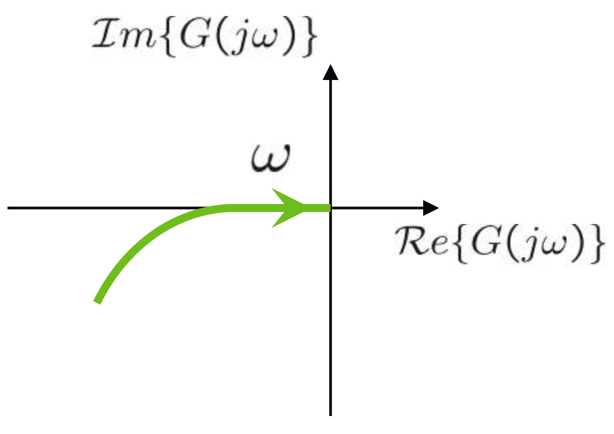
$$m < n$$

$$G(j\omega) \longrightarrow 0$$

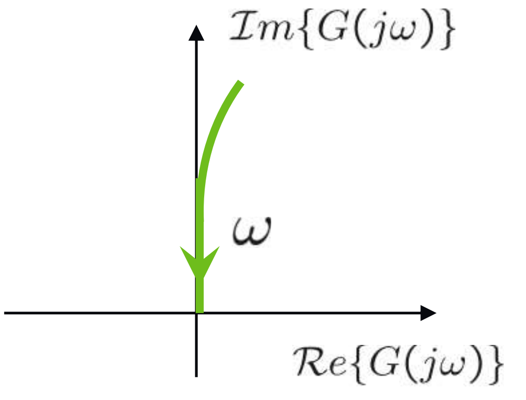
La pendenza con cui il diagramma arriva nell'origine dipende da

$$(m-n)$$

Pari



Dispari



2. Caso in cui $G(s)$ non è strettamente propria:

$$m = n$$

Il diagramma confluisce in un punto dell'asse reale. Lo si trova facilmente valutando il limite

$$\lim_{\omega \to \infty} G\left(j\omega\right)$$

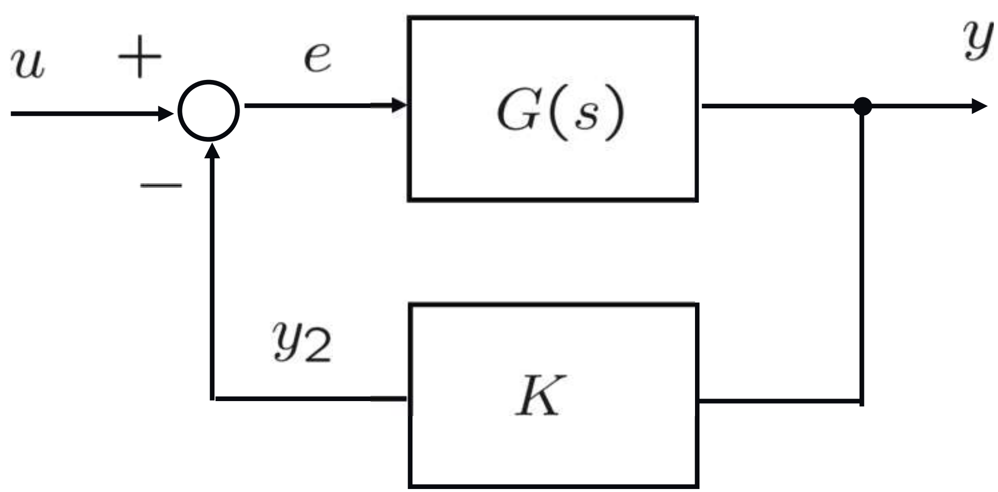
Perchè il risultato della valutazione del limite è un numero reale?

Il caso in cui $G(s)$ è impropria non viene affrontato!

Diagramma di Nyquist:

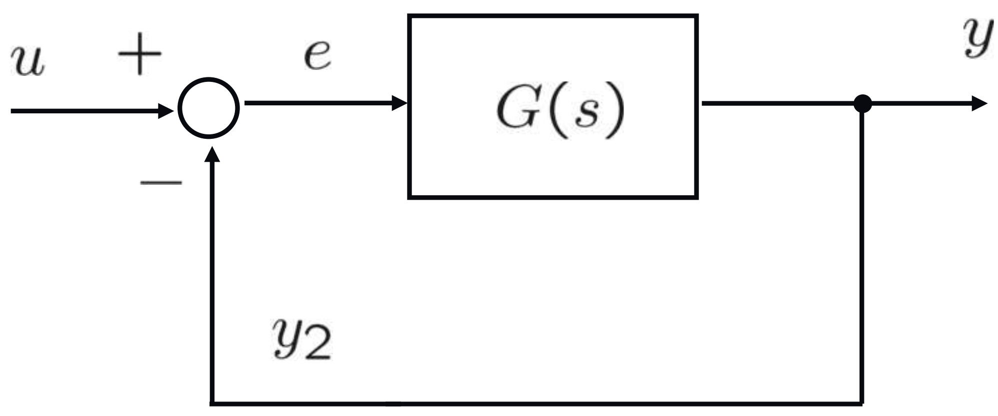
Lo useremo per valutare la stabilita' e la robustezza di sistemi di controllo retroazionati, conoscendo la fdt nel dominio complesso del sistema a ciclo aperto.

PROBLEMA 1 Quanto posso variare K al fine di mantenere le proprieta' di stabilita' della $G(s)$? Problema di STABILITA'...



$$G(s) = \frac{N(s)}{KD(s) + N(s)} = \frac{N(s)}{D'(s)}$$

PROBLEMA 2 Se ho incertezza su $G(s)$, ci sono degli indicatori che misurano la “distanza” dall’instabilita’? E l’ampiezza delle perturbazioni che mi garantisce di mantenere la stabilita’? Problema di ROBUSTEZZA...



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)} = \frac{N(s)}{D'(s)}$$

PROBLEMA 1: si applica il Criterio di Nyquist

Definiamo:

- Γ Diagramma di Nyquist della $G(s)$
- P Numero di poli di $G(s)$ a parte reale POSITIVA
- N Numero di giri ANTIORARI di Γ intorno al punto $-1 + j\,0$

Asintotica stabilita' del sistema a ciclo chiuso $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

Dunque data una funzione $G(s)$, se viene richiesto di analizzare la sua stabilita' a ciclo chiuso...
bisogna tracciarne il diagramma di Nyquist completo e vedere se compie un numero di giri in senso antiorario intorno al punto

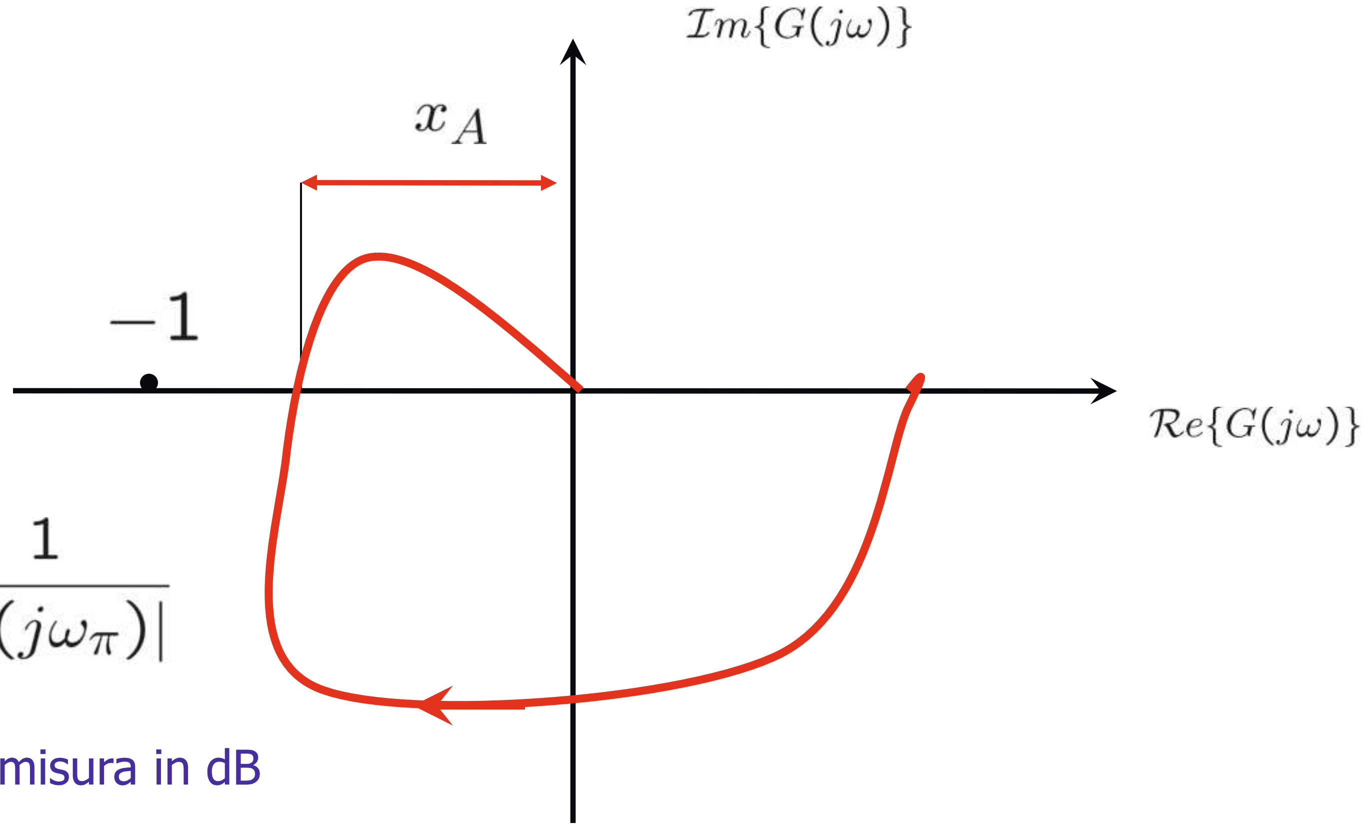
$$-1 + j\,0$$

pari al numero di poli a parte reale POSITIVA della $G(s)$

Se la $G(s)$ e' gia' di per se una funzione di trasferimento stabile...
bisogna verificare che il suo diagramma di Nyquist NON CIRCONDI il punto $-1 + j\,0$

PROBLEMA 2: si usa il d.d. Nyquist per misurare o stimare...

Margine di guadagno



$$g_m = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$$

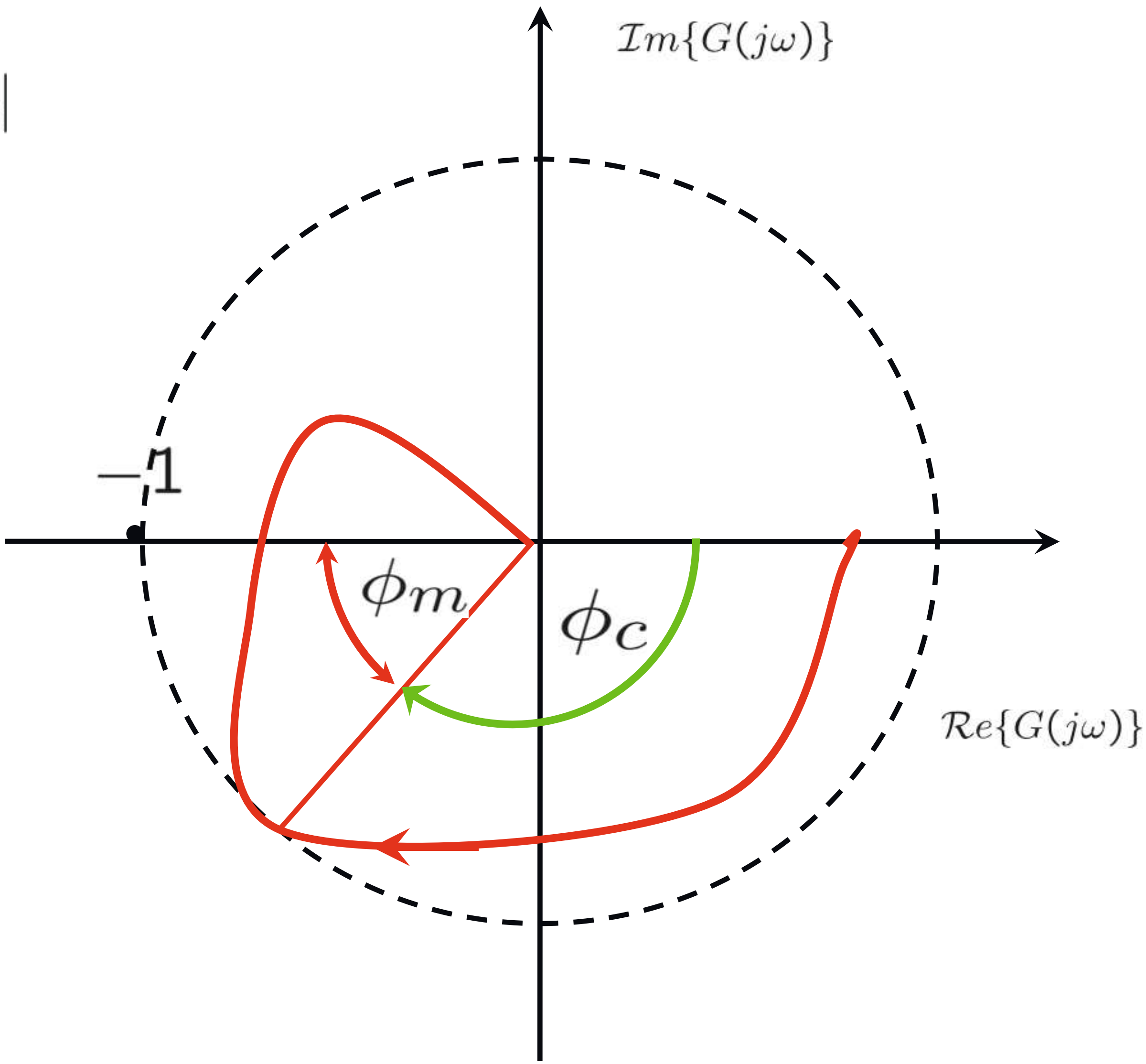
Di solito si misura in dB

Margine di fase

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c|$$

$$\phi_c = \arg\{G(j\,\omega_c)\}$$

$$\omega_c : \; |G(j\omega_c)| = 1$$



Esercizi

1.Tracciamo il diagramma di Nyquist della funzione:

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{10}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 7\omega^2 + j14\omega + 8} = \frac{10}{8 - 7\omega^2 + j\omega(14 - \omega^2)}$$

$$\Downarrow$$

$$G(j\omega) = \frac{10(8 - 7\omega^2) - 10(j\omega(14 - \omega^2)}{(8 - 7\omega^2)^2 + \omega^2(14 - \omega^2)^2}$$

Ricaviamo parte reale ed immaginaria:

$$R(\omega) = \frac{10(8-7\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2 + \omega^2(14-\omega^2)^2}$$

$$I(\omega) = \frac{-10\omega(14-\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2 + \omega^2(14-\omega^2)^2}$$

Possiamo ora studiare l'andamento delle due parti nel piano complesso.

A. Andamento per $\omega \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \to 0} R(\omega) = \frac{10(8-7\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2 + \omega^2(14-\omega^2)^2} \longrightarrow \frac{5}{4}$$

$$\lim_{\omega \to 0} I(\omega) = \frac{-10\omega(14-\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2 + \omega^2(14-\omega^2)^2} \longrightarrow 0$$

Verso quale quadrante procede la curva? Basta vedere il segno del limite per $\omega \longrightarrow 0^+$:

$$sign\{\lim_{\omega \to 0^+} R(\omega)\} > 0$$

$$sign\{\lim_{\omega \to 0^+} I(\omega)\} < 0$$

$\Rightarrow$ La curva procede nel quarto quadrante

B. Andamento per $\omega \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega\to\infty} R(\omega) = \frac{10(8-7\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2+\omega^2(14-\omega^2)^2} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} I(\omega) = \frac{-10\omega(14-\omega^2)}{(8-7\omega^2)^2+\omega^2(14-\omega^2)^2} \longrightarrow 0$$

Da quale quadrante proviene la curva? Basta vedere il segno del limite per $\omega \longrightarrow \infty$:

$$sign\{\lim_{\omega\to\infty} R(\omega)\} \quad < 0$$

$$sign\{\lim_{\omega\to\infty} I(\omega)\} \quad > 0$$

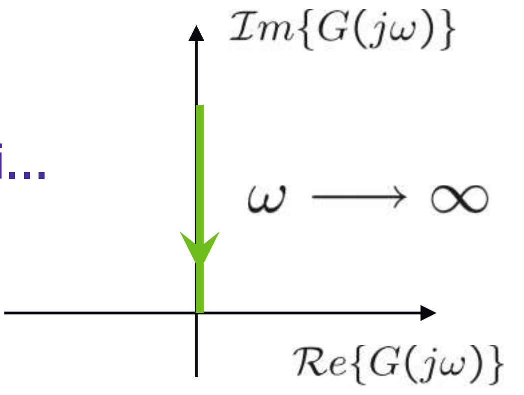
$\Rightarrow$ La curva proviene dal secondo quadrante, con tangente verticale...

... Andamento per $\omega \longrightarrow \infty$:

Infatti ragionando con gli ordini di infinito:

$$\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = \frac{10}{8 - 7\omega^2 + j\omega(14 - \omega^2)} \simeq \frac{1}{(-j\omega^3)} = \frac{j}{\omega^3}$$

Vedi andamento funzioni elementari...



C. Intersezioni con gli assi:

Intersezioni con l'asse reale:

$$I(\omega) = 0 \iff \omega(14 - \omega^2) = 0$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \pm\sqrt{(14)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(0) = \dfrac{5}{4} \\ G(j\sqrt{(14)}) = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

...gia' lo sapevamo!

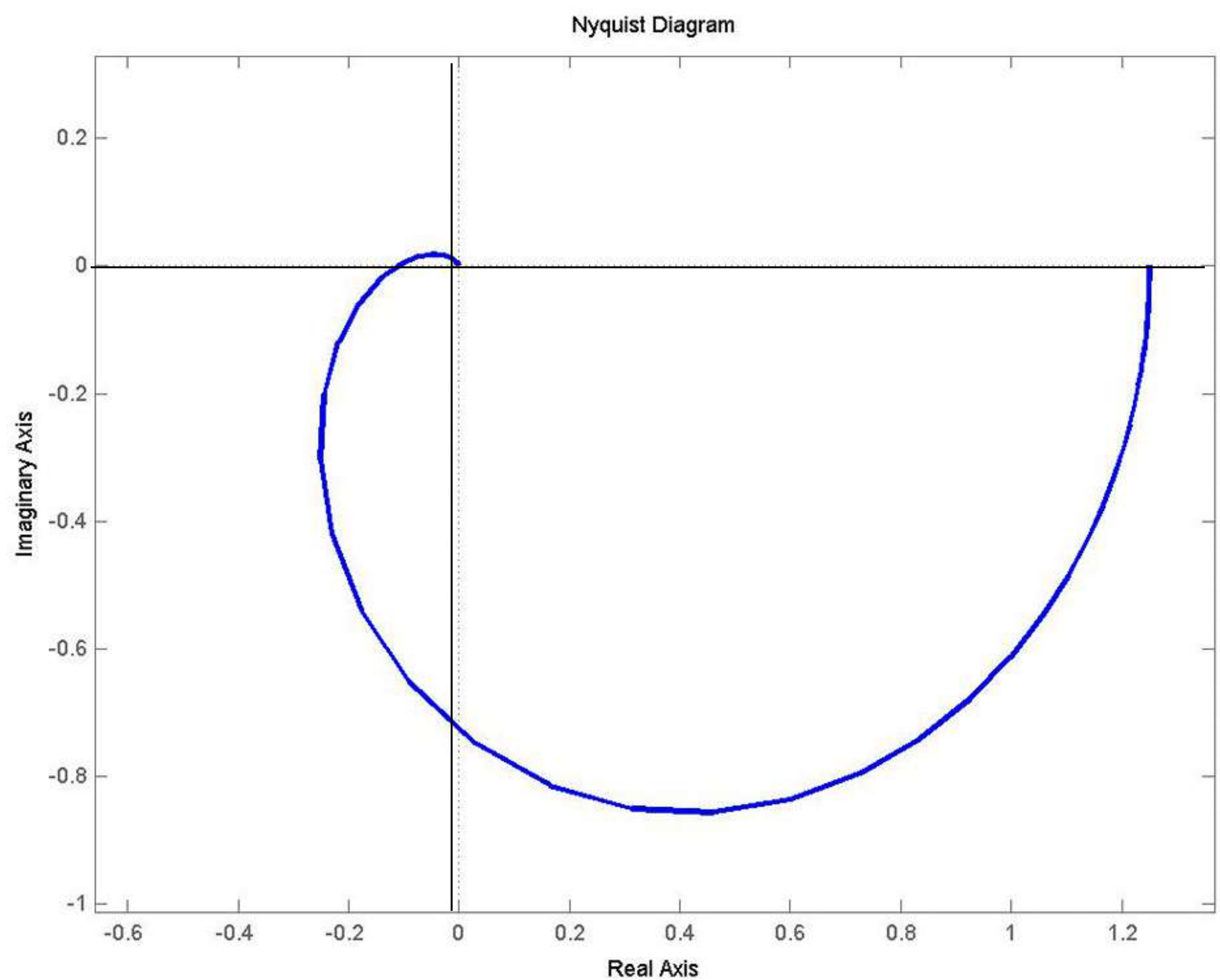
Intersezioni con l'asse immaginario:

$$R(\omega) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 8 - 7\omega^2 = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{(\frac{8}{7})}$$

$$G(j\sqrt{(\frac{8}{7})}) = -j0,73$$

Possiamo dunque tracciare il seguente diagramma:



Stabilita’ a ciclo chiuso:

La $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva.
Il suo diagramma di Nyquist non circonda il punto $-1 + j\,0$
e dunque il sistema a ciclo chiuso e’ stabile!

Margine di guadagno

$$g_m = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{\left|G(j\sqrt(14))\right|} = 9$$

$$(g_m)dB = -20log(9) = 19,085$$

Margine di fase?

Formalmente bisogna imporre $|G(j\omega)| = 1$ e trovare la pulsazione corrispondente $\bar{\omega}$; poi sostituirla in $G(j\omega)$ ed infine ricavare la fase del valore di $G(j\bar{\omega})$

In realta' conviene ricavarlo dal diagramma di Bode...che sappiamo tracciare!

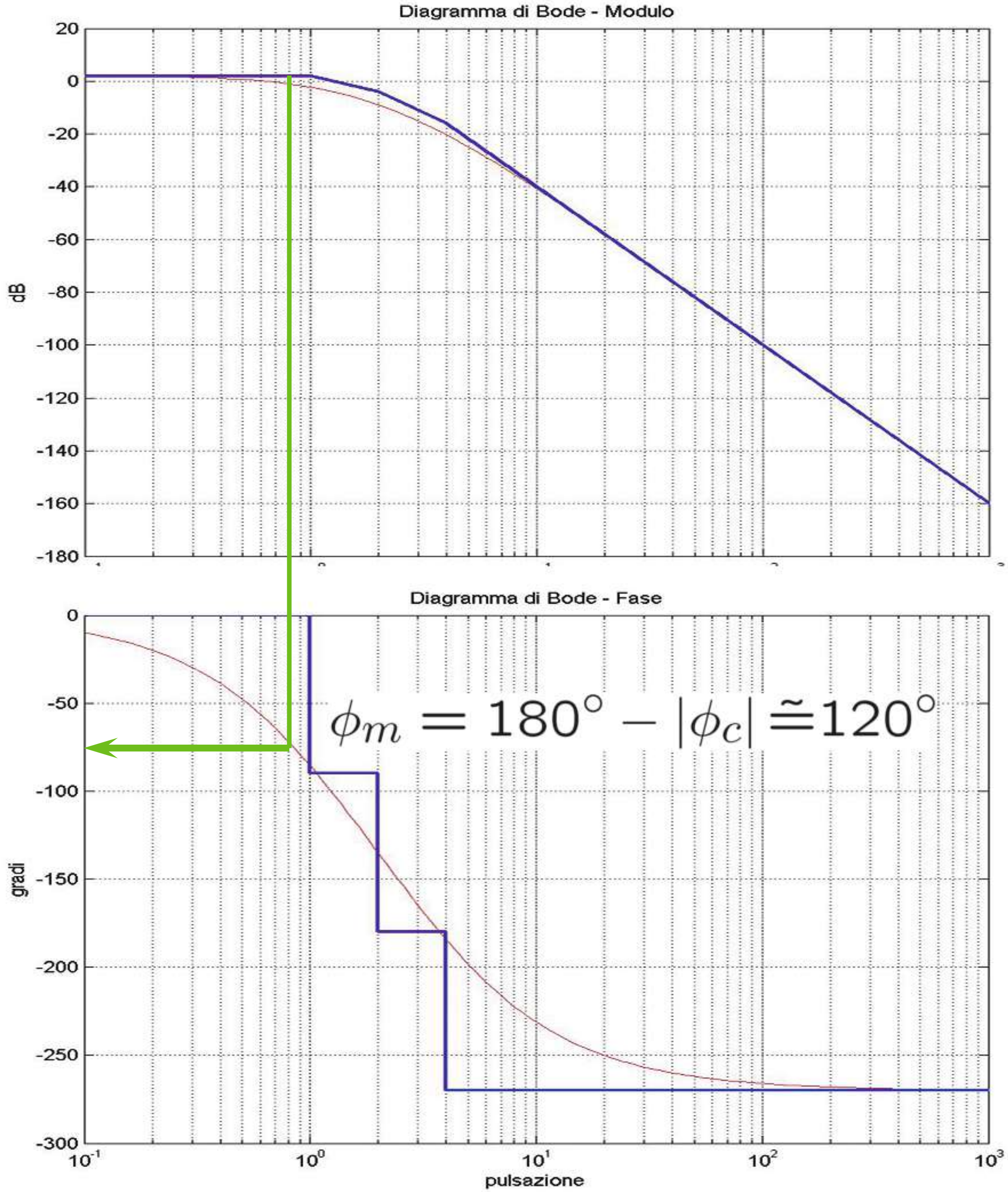


Diagramma di Bode - Modulo
dB
Diagramma di Bode - Fase
gradi
pulsazione
$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| \cong 120^\circ$

2.Tracciamo il diagramma di Nyquist della funzione:

$$G(s) = \frac{4s^2 + 4s + 4}{s^2 + s + 4}$$

Non strettamente propria!

$$G(j\omega) = \frac{-4\omega^2 + j4\omega + 4}{-\omega^2 + j\omega + 4} = \frac{4(1-\omega^2) + j4\omega}{(4-\omega^2) + j\omega}$$

Si ricavano dunque parte reale ed immaginaria:

$$R(\omega) = \frac{4(\omega^4 - 4\omega^2 + 4)}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}$$

$$I(\omega) = \frac{12\omega}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}$$

A. Andamento per $\omega \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \to 0} R(\omega) = \frac{4(\omega^4 - 4\omega^2 + 4)}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16} \longrightarrow 1$$

$$\lim_{\omega \to 0} I(\omega) = \frac{12\omega}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16} \longrightarrow 0$$

Verso quale quadrante procede la curva? Basta ancora una volta vedere il segno del limite per $\omega \longrightarrow 0^+$:

$$sign\{\lim_{\omega \to 0^+} R(\omega)\} > 0$$

$$sign\{\lim_{\omega \to 0^+} I(\omega)\} > 0$$

$\Rightarrow$ La curva procede nel primo quadrante

B. Andamento per $\omega \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \to \infty} R(\omega) = \frac{4(\omega^4 - 4\omega^2 + 4)}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16} \longrightarrow 4$$

$$\lim_{\omega \to \infty} I(\omega) = \frac{12\omega}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16} \longrightarrow 0$$

Da quale quadrante proviene la curva? Basta vedere il segno del limite per $\omega \longrightarrow \infty$:

$$sign\{\lim_{\omega \to \infty} R(\omega)\} \quad > 0$$

$$sign\{\lim_{\omega \to \infty} I(\omega)\} \quad > 0$$

$\Rightarrow$ La curva proviene dal primo quadrante

C. Intersezioni con gli assi:

Intersezioni con l'asse reale:

$$I(\omega) = 0 \iff \omega = 0$$

$$G(0) = 1$$

...gia' lo sapevamo!

Intersezioni con l'asse immaginario:

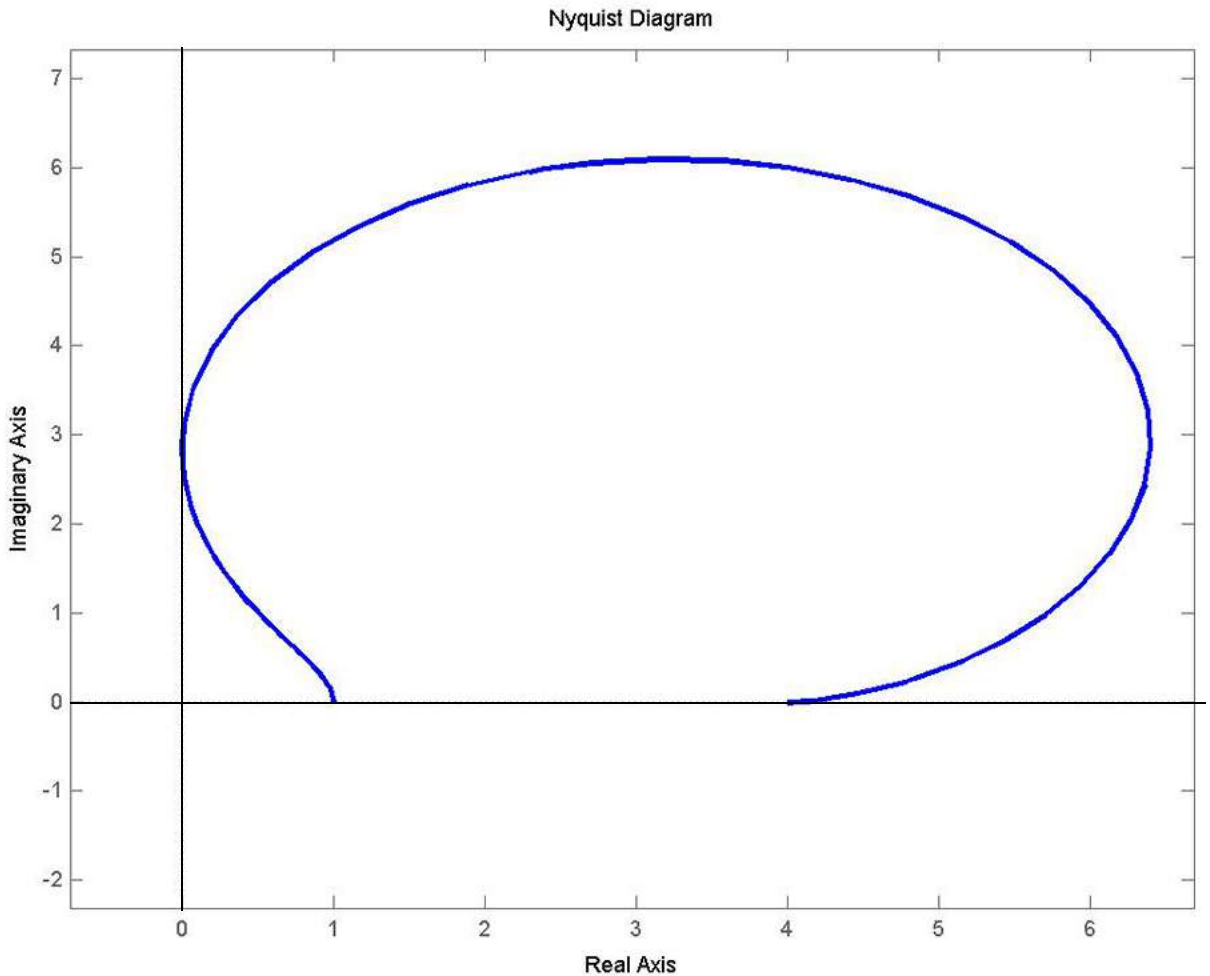
$$R(\omega) = 0 \iff \omega^4 - 4\omega^2 + 4 = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{(2)}$$

Radice DOPPIA!

$$G(j\sqrt{(2)}) = j2\sqrt{(2)}$$

Possiamo dunque tracciare il seguente diagramma:



3.Tracciamo il diagramma di Nyquist della funzione:

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Ha un polo nell'origine!

$$G(j\omega) = \frac{10}{-3\omega^2 - j\omega(\omega^2 - 2)}$$

Si ricavano dunque parte reale ed immaginaria, che dopo qualche conto risultano:

$$R(\omega) = \frac{-30}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

$$I(\omega) = \frac{10(\omega^2 - 2\omega)}{\omega^6 + 5\omega^4 + 4\omega^2}$$

A. Andamento per $\omega \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \to 0} R(\omega) = \longrightarrow -\frac{30}{4}$$

$$\lim_{\omega \to 0} I(\omega) \longrightarrow -\infty$$

C'e' un asintoto verticale!

Verso quale quadrante procede la curva?

$$sign\{ \lim_{\omega \to 0^+} R(\omega)\} \quad < 0$$

$$sign\{ \lim_{\omega \to 0^+} I(\omega)\} \quad < 0$$

$\Rightarrow$ La curva "procede" nel terzo quadrante

B. Andamento per $\omega \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \to \infty} R(\omega) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} I(\omega) \longrightarrow 0$$

Da quale quadrante proviene la curva?

$$sign\{\lim_{\omega \to \infty} R(\omega)\} \quad < 0$$

$$sign\{\lim_{\omega \to \infty} I(\omega)\} \quad > 0$$

$\Rightarrow$ La curva proviene dal secondo quadrante

C. Intersezioni con gli assi:

Intersezioni con l'asse reale:

$$\omega \neq 0$$

attenzione al denominatore...

$$I(\omega) = 0 \iff \omega = \pm\sqrt(2)$$

$$G(j\sqrt(2)) = -1,67$$

Intersezioni con l'asse immaginario:

$$R(\omega) = 0$$

MAI!

Matlab fornisce questo diagramma: