

PROVA SCRITTA DI IDENTIFICAZIONE E CONTROLLO ADATTIVO
A.A. 2016/2017

13 gennaio 2017

nome e cognome:

numero di matricola:

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Esercizio 1

Di un processo stocastico $y(t)$ è assegnata la descrizione

$$\begin{cases} w(t+1) &= \frac{4}{5}w(t) + e(t) \\ y(t) &= w(t) + 2w(t-1) \end{cases} \quad e(\cdot) \equiv \mathcal{WN}(0,1)$$

Domanda 1.1

Si determini l'espressione della equazione alle differenze tra il rumore $e(t)$ ed il segnale $y(t)$ e si indichi se si tratta di un modello AR, MA oppure ARMA. Si tratta di un processo stazionario? Motivare la risposta.

Domanda 1.2

Si trovi il predittore ottimo ad un passo $\hat{y}(t|t-1)$ e si determini anche l'espressione della varianza dell'errore di predizione.

Esercizio 2

Si consideri il processo stocastico descritto da

$$y(t) = e(t) + 0.5 e(t-1) + 0.5 e(t-2)$$

dove $e \equiv \mathcal{WN}(1,1)$.

Domanda 2.1

Si determinino il valore atteso e la varianza della v.a. $y(t)$.

Domanda 2.2

Si determini la funzione di covarianza $\gamma_y(\tau)$ ($\tau = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$) del processo

Domanda 2.3

Si determini l'espressione analitica della densità spettrale di potenza $\Gamma_y(\omega)$ del processo

- facendo uso della funzione di covarianza $\gamma_y(\tau)$ determinata nella risposta alla domanda precedente;
- utilizzando uno qualsiasi tra gli altri metodi a disposizione.

Esercizio 3

Di un processo stocastico stazionario $y(t)$ a valor atteso nullo sono noti i primi due valori della funzione di covarianza

$$\begin{cases} \gamma_y(0) &= \frac{5}{4} \\ \gamma_y(1) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si vuole descrivere il processo con un modello AR(1)

$$\mathcal{M}: \quad y(t) = a y(t-1) + \eta(t), \quad \eta(\cdot) \equiv \mathcal{WN}(0, \lambda^2)$$

Domanda 3.1

Si stimi il valore del parametro a del modello, a partire dalla conoscenza dei valori di $\gamma_y(0)$ e $\gamma_y(1)$.

Domanda 3.2

Si supponga ora di conoscere 3 valori della funzione di covarianza di un processo

stazionario $y(t)$ a valor atteso nullo [NB non quello preso in considerazione nella risposta alla domanda precedente!]

$$\begin{cases} \gamma_y(0) &= 1 \\ \gamma_y(1) &= \frac{1}{2} \\ \gamma_y(4) &= \frac{1}{13} \end{cases}$$

Si vuole identificare anche stavolta un modello AR(1)

$$\mathcal{M}: \quad y(t) = a y(t-1) + e(t), \quad e(\cdot) \equiv \mathcal{WN}(0, \lambda^2)$$

Come si potrebbe impostare il problema della stima del valore del parametro a del modello AR(1) stavolta?

Si noti che si vuole stimare un modello AR(1) anche se i valori della funzione di covarianza non corrispondono esattamente a quelli di un processo AR(1) ...