

PROVA SCRITTA DI IDENTIFICAZIONE E CONTROLLO ADATTIVO
A.A. 2016/2017

27 gennaio 2017

nome e cognome:

numero di matricola:

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Esercizio 1

Di un processo stocastico ARMA $y(t)$ è assegnata la descrizione

$$y(t) = \frac{1}{10} y(t-1) + e(t) + c e(t-1) \quad e(\cdot) \equiv \mathcal{WN}(0,1)$$

Il simbolo c indica un *parametro incognito* che comunque garantisce che quella assegnata sia una **forma canonica**.

Domanda 1.1

Si tratta di un processo stazionario? Motivare la risposta.

Domanda 1.2

La covarianza normalizzata del processo stocastico, definita al solito come

$$\rho(\tau) = \frac{E[y(t)y(t-\tau)]}{\text{var}[y(t)]}$$

è nota per un valore di τ :

$$\rho(\tau) = \frac{1}{10} \quad \tau = 1$$

Determinare il valore del parametro c .

Domanda 1.3

Utilizzando il valore $c = 0.12$ per il parametro, si trovi il predittore ottimo a 2 passi $\hat{y}(t|t-2)$ e si determini anche l'espressione della varianza dell'errore di predizione.

Esercizio 2

Si consideri un processo stocastico $y(\cdot)$ e si supponga di raccogliere un numero arbitrariamente grande di campioni N

$$\{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$$

Si consideri inoltre la famiglia di modelli AR(1)

$$\mathcal{M}(\vartheta) : y(t) = ay(t-1) + e(t) \quad \vartheta = a, \quad e \approx WN(0, \lambda^2)$$

e si indichi con $\hat{a}(N)$ la stima ai minimi quadrati ottenuta sulla base di N osservazioni.

Domanda 2.1

Si supponga ora che il processo di $y(t)$ sia

$$y(t) = \frac{3}{10}y(t-1) + \eta(t) \quad \eta \approx WN(0, 1)$$

Si determini il valore della stima asintotica in questo caso

$$\bar{a}_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{a}(N)$$

Domanda 2.2

Si supponga ora invece che il processo di $y(t)$ sia il seguente

$$y(t) = \frac{3}{10}y(t-1) + \epsilon(t) + \frac{1}{2}\epsilon(t-1) \quad \epsilon \approx WN(0, 1)$$

Determinare in queste condizioni il valore della stima asintotica del parametro

$$\bar{a}_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{a}(N)$$

Domanda 2.3

Si considerino ora le varianze degli errori di predizione ad 1 passo nelle due situazioni

$$\text{var} [y(t) - \bar{a}_1 y(t-1)] \quad \text{var} [y(t) - \bar{a}_2 y(t-1)]$$

Si confrontino le due espressioni e si commenti il risultato.