Teoria dei Sistemi e del Controllo

Prof. Thomas Parisini
DIA-Università di Trieste
Tel. 334 6936615
Email: parisini@units.it
URL: http://control.units.it

ESAMI

- Prova scritta e orale; + **"compiti a casa"**
- Iscrizione elettronica obbligatoria (ESSE3)
- Appelli d'esame: 2 gennaio-febbraio, 4 giugno-settembre

CORSI PROPEDEUTICI

- Analisi I e II
- Geometria
- Fondamenti di Automatica

ARGOMENTI DA CONOSCERE

- Equazioni differenziali
- Numeri complessi
- Algebra delle matrici
- Trasformate di Laplace e Zeta

Bibliografia (biblioteca)

- *Elementi di Automatica*, G. Calafiore
- *Teoria dei sistemi e del controllo*, G. Marro
- *Linear Systems*, P. Antsaklis, A. Michel
- *Linear Systems*, T. Kailath
- *Teoria dei Sistemi*, S. Rinaldi

”Lucidi” Corso, testi d’esame risolti, ecc.

Tutto disponibile su

http://control.units.it

Strategia di studio sconsigliata

Studiare solo sugli appunti. Gli appunti devono servire da “indice” per lo studio approfondito

Il corso: risultati e prospettive

Analizzare e progettare sistemi di controllo avanzati

↳ Tesi di laurea "teoriche" o con aziende aperte a tutti

Dottorato in Italia o all'estero

... qualche esempio di applicazioni sviluppate da studenti

Sistema

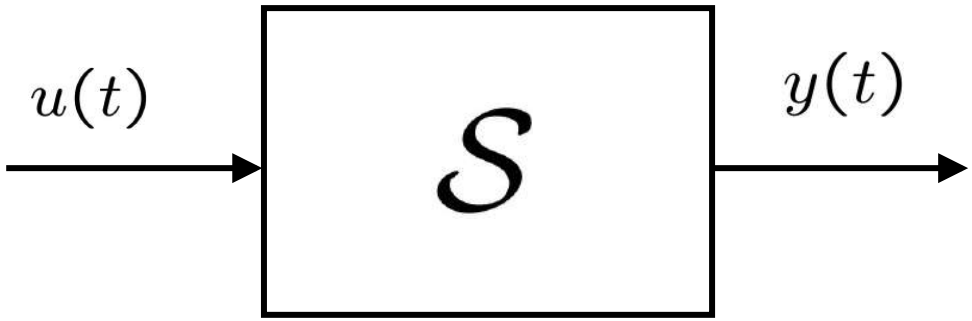
Ingressi (cause)

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \Re^m$$

Uscite (effetti)

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \Re^p$$

Individuazione dell'ente "sistema" che si vuole analizzare



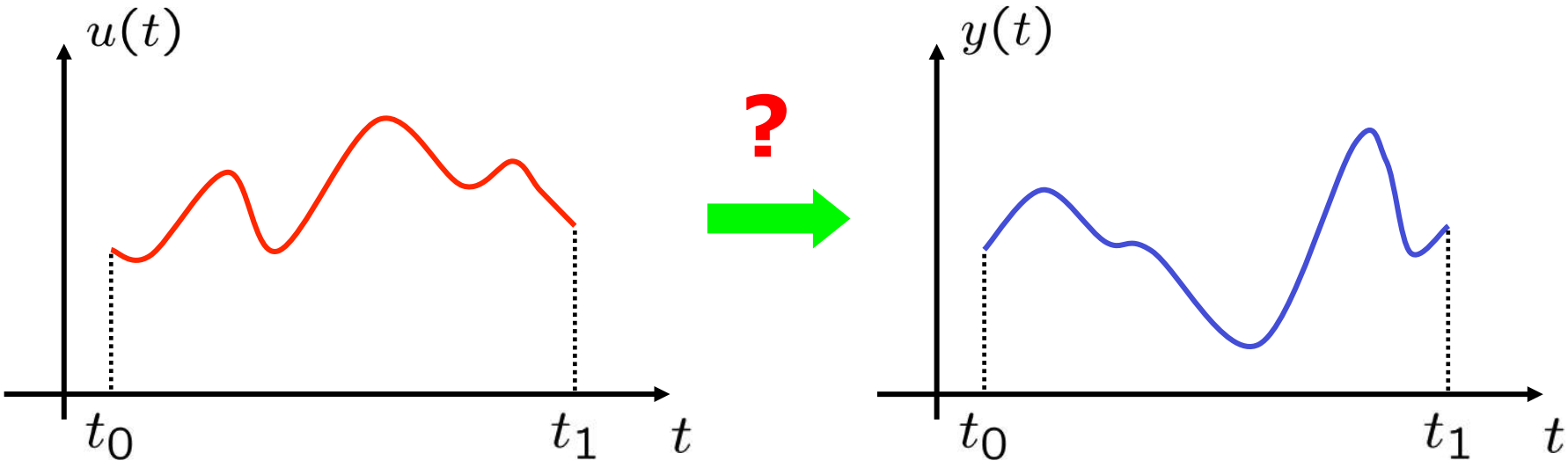
Leggi fisiche, conoscenze a priori, leggi euristiche, statistiche, ecc…

Modello matematico: equazioni algebriche, differenziali, alle differenze

Sistemi dinamici descritti tramite equazioni di stato

... ricordiamo da Fond. di Automatica ...

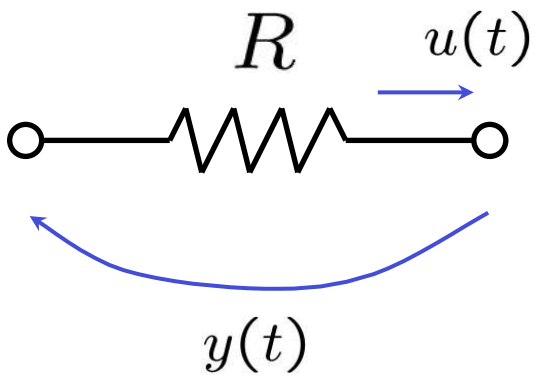
Cosa significa "Dinamico"?



$y(t)$ e` univocamente determinata?

Se la risposta e` no → **Sistema dinamico**

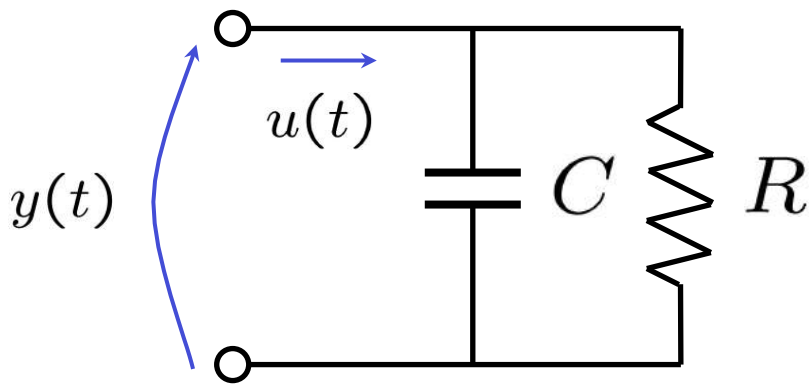
Esempio A)



$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

Esempio B)

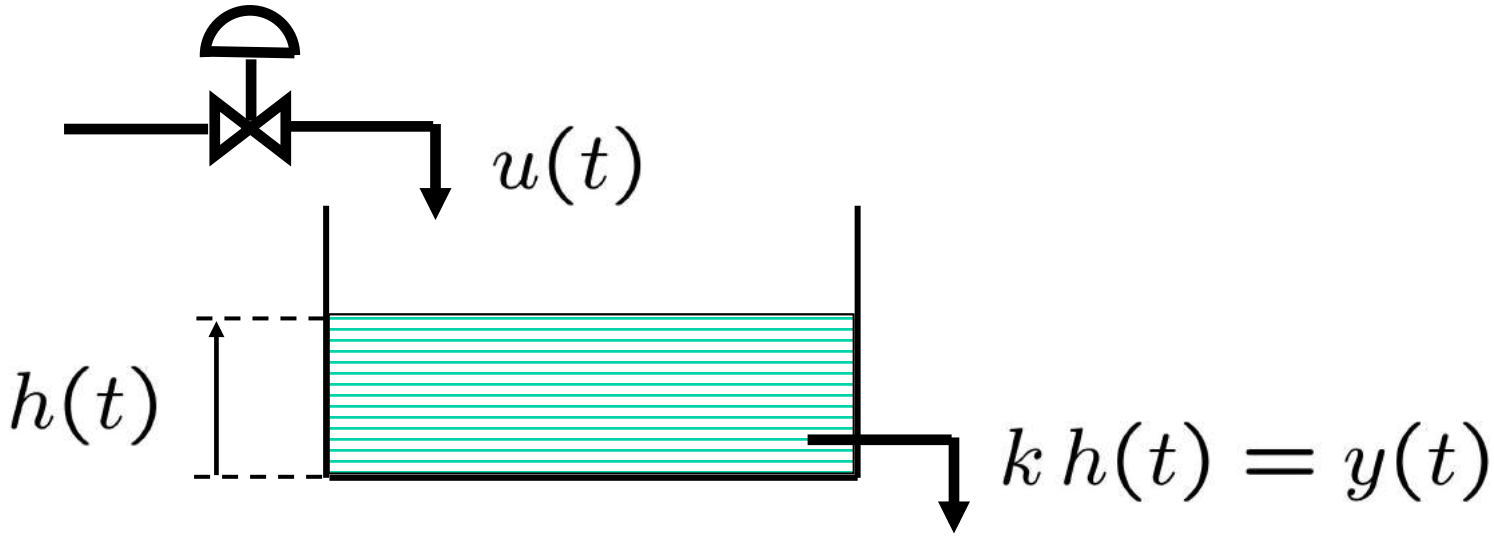


$$\left.\begin{array}{l} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) \end{array}\right\}$$

$$y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

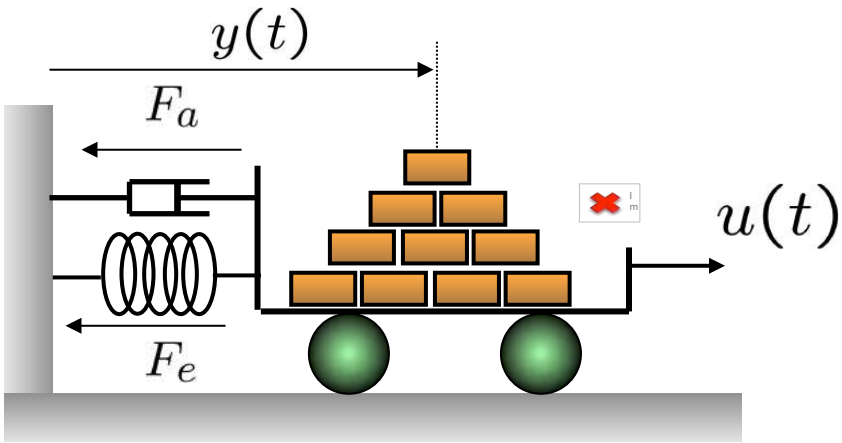
Esempio C)



$$\left.\begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ h(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

Esempio D)



$$\left.\begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

Variabili di stato

... in termini qualitativi:

Variabili da conoscere in t_0 per determinare $y(t), t \geq t_0$

a partire da $u(t), t \geq t_0$

$$x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n$$ (variabili di stato)

... in termini piu` astratti e precisi

Sistema dinamico: ente astratto definito mediante assiomi.

$$S = \{T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta\}$$

- Insiemi

T insieme ordinato dei tempi

U insieme d'ingresso

Ω insieme funzioni d'ingresso ammissibili

X insieme di stato

Y insieme d'uscita

Γ insieme funzioni d'uscita ammissibili

- Funzione di transizione dello stato

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to X$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

1) Consistenza $\quad \varphi(t_0, t_0, x_0, u(\cdot)) = x_0\,, \qquad \forall (t_0, x_0, u(\cdot)) \in T \times T \times \Omega$

2) Irreversibilita` $\quad \varphi$ definita $\forall t \geq t_0,\ t \in T$

3) Composizione

$$\varphi(t_2, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t_2, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)), u(\cdot))\,,$$

$$\forall (x_0, u(\cdot)) \in T \times \Omega\,, \qquad \forall t_0, t_1, t_2 \in T : t_0 < t_1 < t_2$$

4) Causalita` $\quad u'_{[t_0,t)}(\cdot) = u''_{[t_0,t)}(\cdot)$

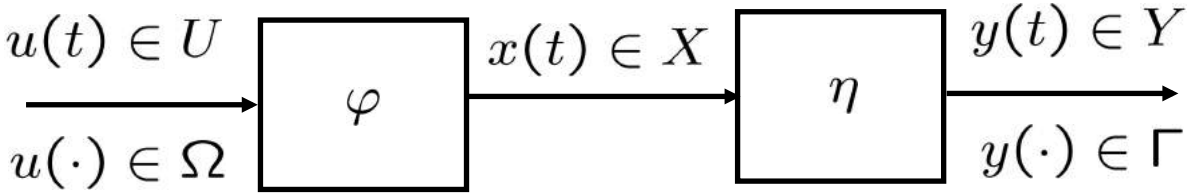
$$\Rightarrow \quad \varphi(t, t_0, x_0, u'(\cdot)) = \varphi(t, t_0, x_0, u''(\cdot))$$

$$\forall (t, t_0, x_0) \in T \times T \times X$$

- Funzione di uscita

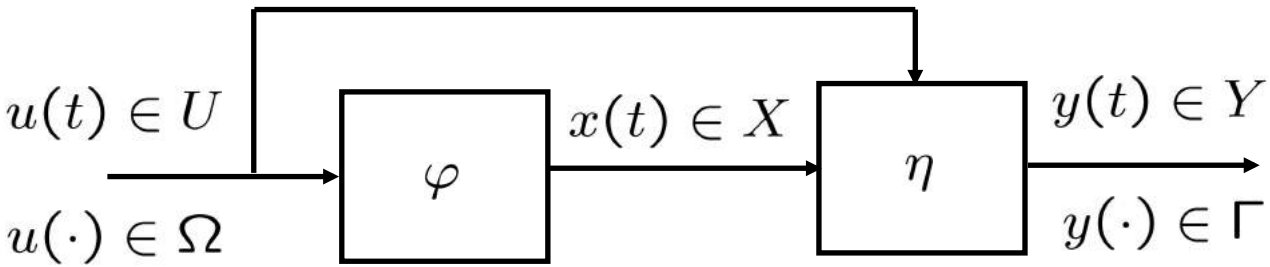
Caso 1: sistema strettamente proprio $\eta : T \times X \to Y$

$$y(t) = \eta(t, x(t)) \,, \quad \forall t \in T$$



Caso 2: sistema non strett. proprio $\eta : T \times X \times U \to Y$

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \,, \forall t \in T$$



$(x,t) \in X \times T$ evento

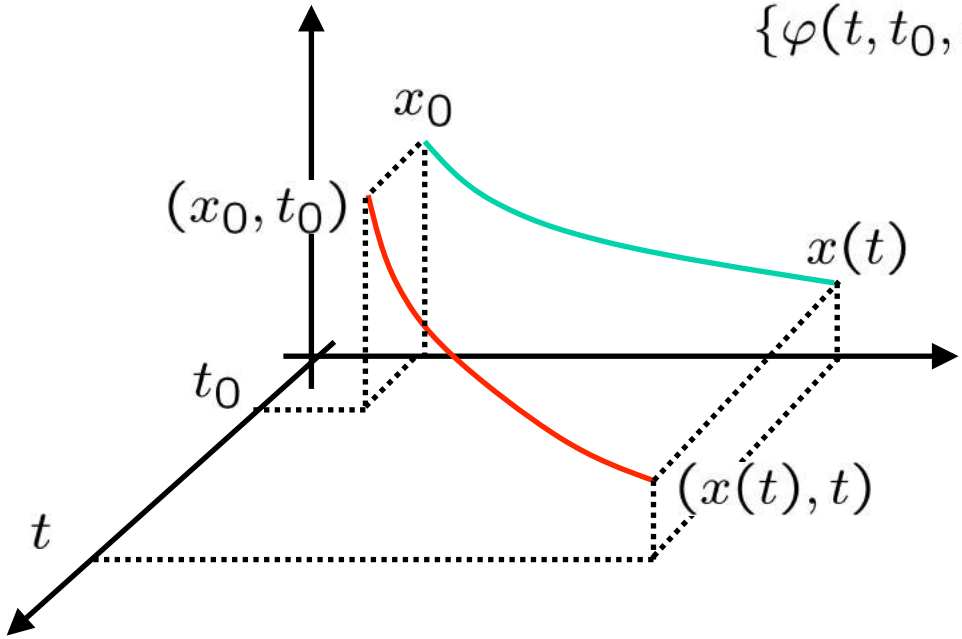
Fissati:

(x_0, t_0) evento iniziale

$u(\cdot)$ funzione d'ingresso

$\varphi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ movimento dello stato

$\{\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))\}, \forall t \geq t_0$ traiettoria dello stato



$\eta(\cdot, \varphi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot)))$ movimento dell'uscita

$\{\eta(t, \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)))\}$ $\forall t \geq t_0$ traiettoria dell'uscita

Equilibrio in tempo finito

$\bar{x} \in X$ stato di equilibrio in tempo finito se

$\forall t_1, t_2 \in T, \exists u(\cdot) \in \Omega$ tale che

$$\varphi(t, t_1, \bar{x}, u(\cdot)) = \bar{x}, \forall t \in [t_1, t_2] \cap T$$

$\bar{y} \in Y$ uscita di equilibrio in tempo finito se

$\forall t_1, t_2 \in T, \exists \bar{x} \in X, \exists u(\cdot) \in \Omega$ tali che

$$\eta(t, \varphi(t, t_1, \bar{x}, u(\cdot))) = \bar{y}, \forall t \in [t_1, t_2] \cap T$$

Si noti che in generale la funzione d'ingresso dipende da t_1, t_2

Equilibrio in tempo infinito

$\bar{x} \in X$ stato di equilibrio in tempo infinito se

$\forall t_0 \in T, \exists u(\cdot) \in \Omega$ tale che

$$\varphi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot)) = \bar{x}, \forall t \geq t_0, t \in T$$

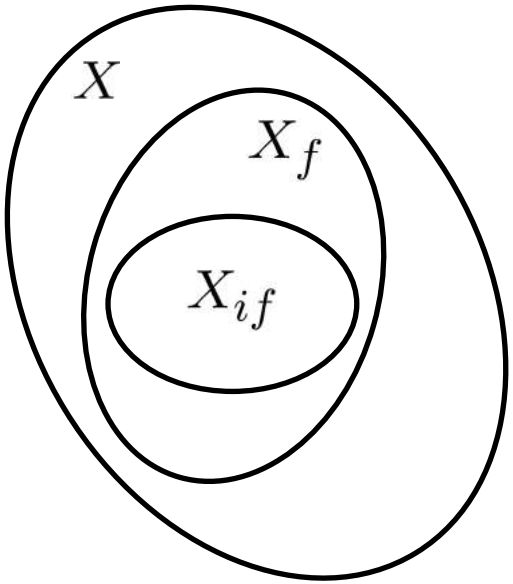
$\bar{y} \in Y$ uscita di equilibrio in tempo infinito se

$\forall t_0 \in T, \exists \bar{x} \in X, \exists u(\cdot) \in \Omega$ tali che

$$\eta(t, \varphi(t, t_0, \bar{x}, u(\cdot))) = \bar{y}, \forall t \geq t_0, t \in T$$

Si noti che in generale la funzione d'ingresso dipende da t_0

Osservazioni



- Le definizioni di equilibrio in tempo finito ed in tempo infinito non sono equivalenti

- Talvolta $X_f \equiv X_{if}$

- In generale, non e` detto che se un sistema si trovi in uno stato di equilibrio debba necessariamente trovarsi anche in un'uscita di equilibrio

Tuttavia, se $\eta(t, x(t))$ non dipende esplicitamente dal tempo (ovvero $\eta(x(t))$) allora ad ogni stato di equilibrio corrisponde un'uscita di equilibrio. Il viceversa in generale non e vero.

Raggiungibilita` ed Indistinguibilita`

- Uno stato $x \in X$ e` raggiungibile all'istante $t \in T$ da uno stato

$x_0 \in X$ se $\exists t_0 \in T,\ t_0 \leq t,\ \exists u(\cdot) \in \Omega :\ \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = x$

La raggiungibilita` e` un concetto legato ad una coppia di stati

- Due stati $x'_0, x''_0 \in X$ si dicono indistinguibili all'istante $t_0 \in T$

se $\eta(\cdot, \varphi(\cdot, t_0, x'_0, u(\cdot))) = \eta(\cdot, \varphi(\cdot, t_0, x''_0, u(\cdot)))\ ,\ \forall u(\cdot) \in \Omega$

N.B. Se $x'_0, x''_0 \in X$ sono indistinguibili all'istante $t_0 \in T$

sono indistinguibili $x', x'' \in X$ all'istante $t \in T$ dove

$$x' = \varphi(t, t_0, x'_0, u(\cdot))$$

$$x'' = \varphi(t, t_0, x''_0, u(\cdot))$$

(per la proprieta` di composizione di φ)

Un sistema si dice in forma ridotta all'istante $t_0 \in T$ se $\nexists\, x_0', x_0'' \in X,\ x_0' \neq x_0''$ indistinguibili in $t_0 \in T$. Se tale condizione e` verificata $\forall t_0 \in T$ si dice che il sistema e` in forma ridotta.

In termini qualitativi (e imprecisi matematicamente) un sistema in forma ridotta e un sistema per cui si e` scelto l'insieme di stato "piu` piccolo" tra quelli sufficienti a descrivere il sistema.

- Raggiungibilita`

  ↳ caratteristiche funzione φ ovvero caratteristiche ingresso-stato

- Indistinguibilita`

  ↳ caratteristiche funzioni φ e η ovvero caratteristiche ingresso-stato-uscita

Sistemi interconnessi

Analisi di un sistema

$$S = \{T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta\}$$

costituito da un certo numero N di sottosistemi

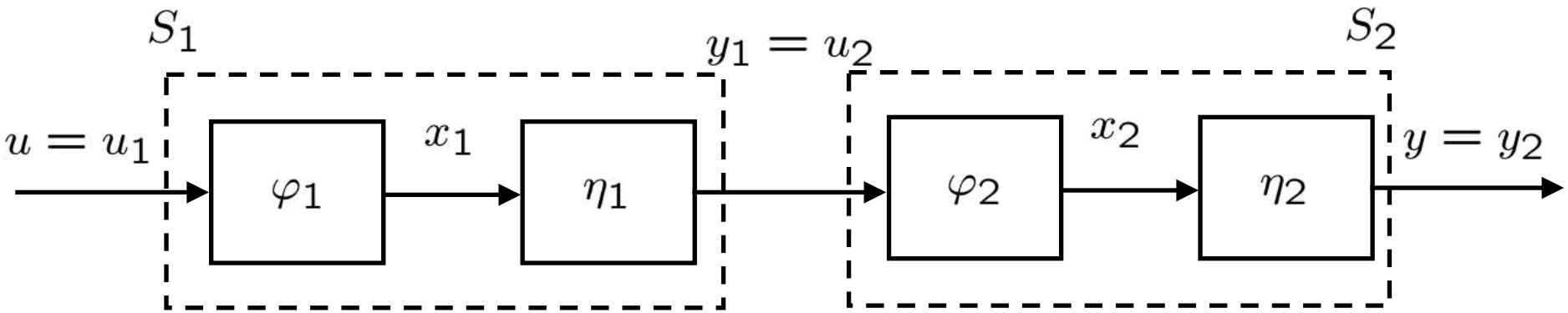
$$S_i = \{T_i, U_i, \Omega_i, X_i, Y_i, \Gamma_i, \varphi_i, \eta_i\}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, N$$

interagenti tra loro tramite variabili esterne quali ingressi ed uscite

Importante: in generale non e` detto che S soddisfi la definizione di sistema dinamico anche se i singoli S_i la soddisfano

Ipotesi: supporremo sempre che il sistema aggregato soddisfi la definizione di sistema dinamico

Interconnessione in cascata

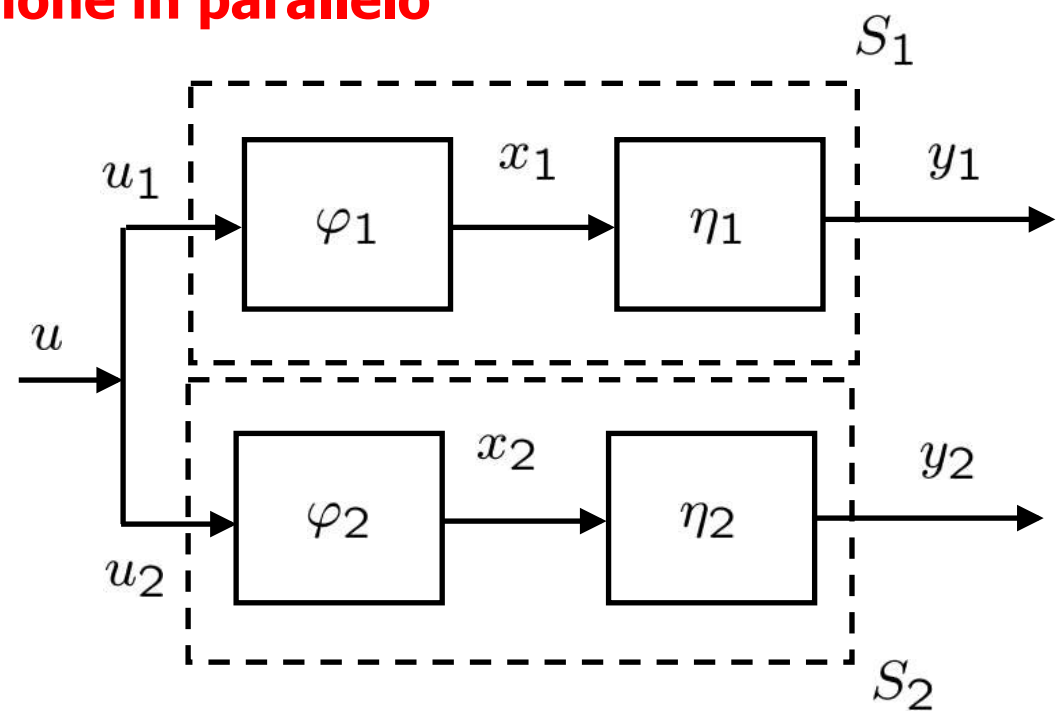


Sistema aggregato:

$$S = \{T = T_1 = T_2, U = U_1, \Omega = \Omega_1, X = X_1 \times X_2, Y = Y_2, \Gamma = \Gamma_2\}$$

$$\begin{cases} (x_1(t), x_2(t)) = (\varphi_1(t, t_0, x_1(t_0), u(\cdot)), \\ \qquad\qquad \varphi_2(t, t_0, x_2(t_0), \eta_1(t, \varphi_1(t, t_0, x_1(t_0), u(\cdot)))) \\ y(t) = y_2(t) = \eta_2(t, x_2(t)) \end{cases}$$

Interconnessione in parallelo



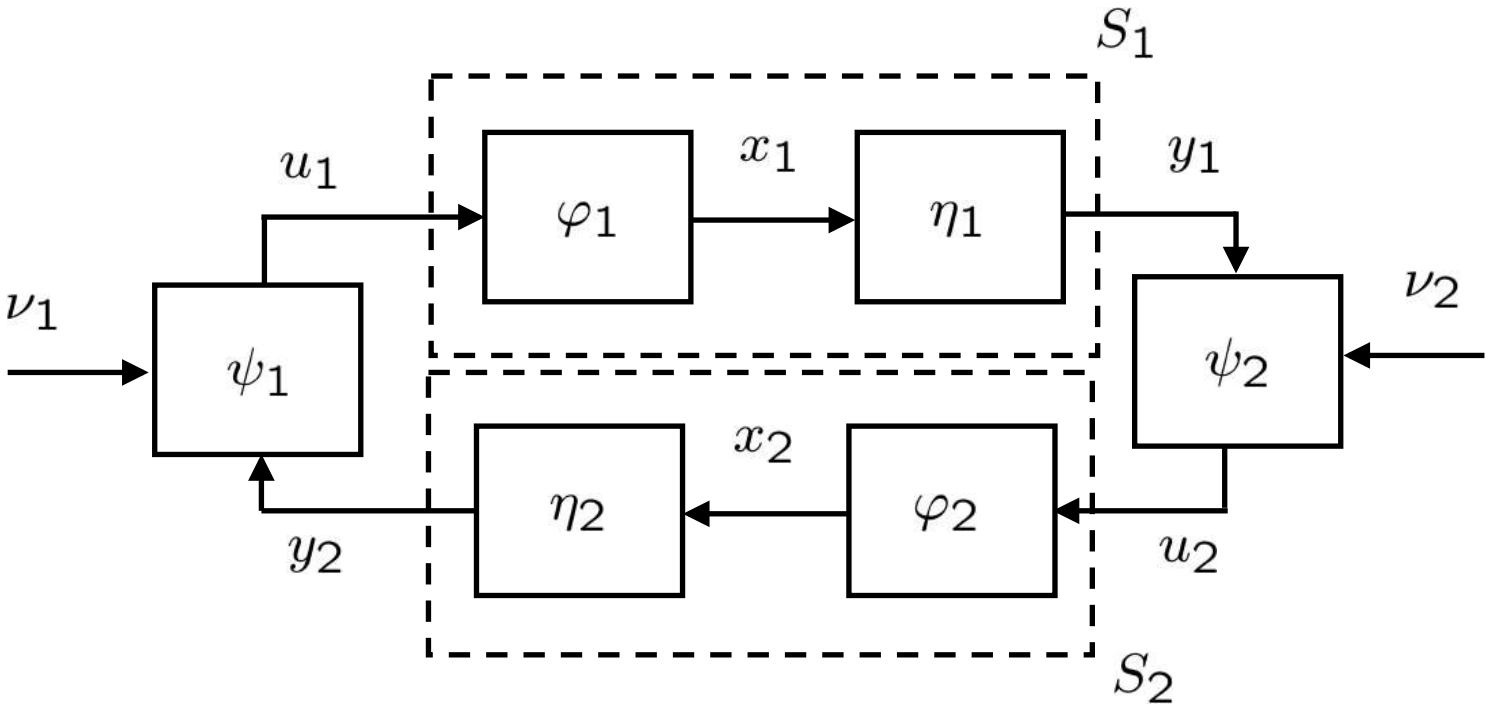
Sistema aggregato:

$$S = \{T = T_1 = T_2, U = U_1 = U_2, \Omega = \Omega_1 = \Omega_2,$$
$$X = X_1 \times X_2, Y = Y_1 \times Y_2, \Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2\}$$

$$\begin{cases} (x_1(t), x_2(t)) = (\varphi_1(t, t_0, x_1(t_0), u(\cdot)), \varphi_2(t, t_0, x_2(t_0), u(\cdot))) \\ (y_1(t), y_2(t)) = (\eta_1(t, x_1(t)), \eta_2(t, x_2(t))) \end{cases}$$

Interconnessione in retroazione

Schema generale:

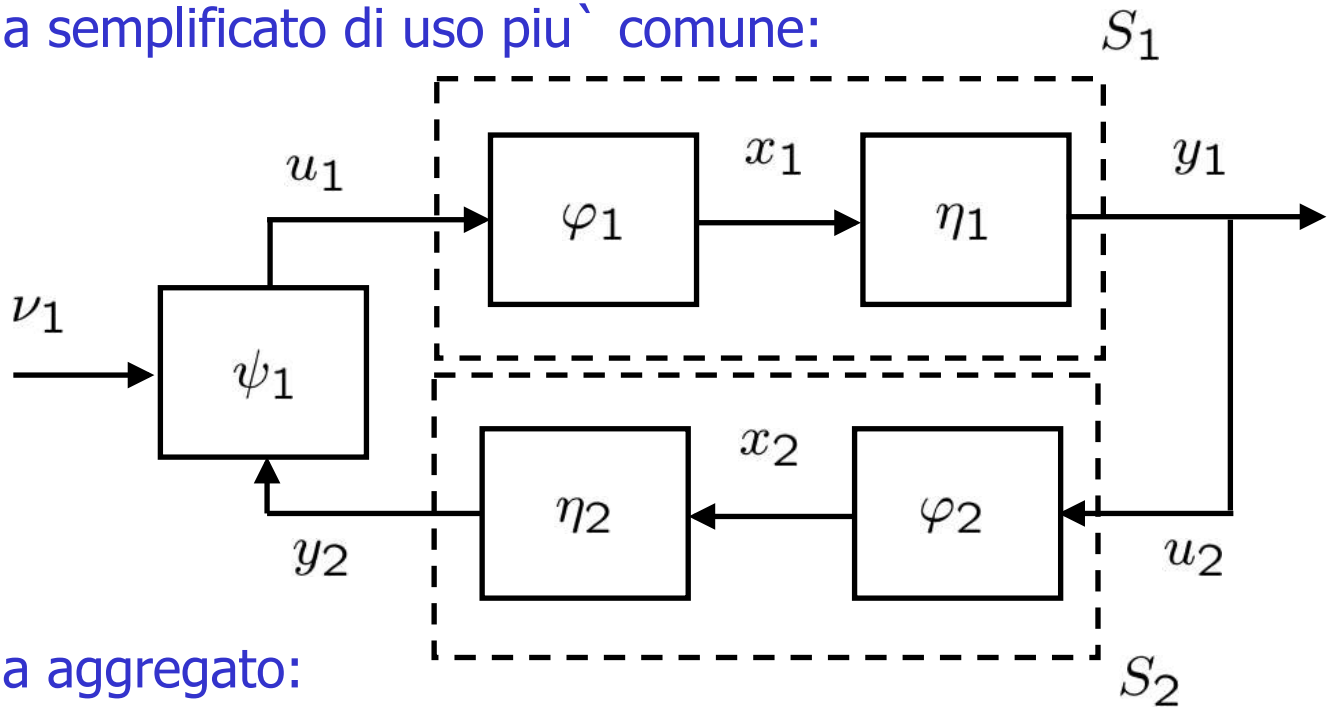


$$u_1(t) = \psi_1(y_2(t), \nu_1(t), t)$$

$$u_2(t) = \psi_2(y_1(t), \nu_2(t), t)$$

Interconnessione in retroazione

Schema semplificato di uso piu` comune:



Sistema aggregato:

$$S = \{T = T_1 = T_2, U = V_1, \Omega = \Omega_{\nu_1},$$
$$X = X_1 \times X_2, Y = Y_1, \Gamma = \Gamma_1\}$$

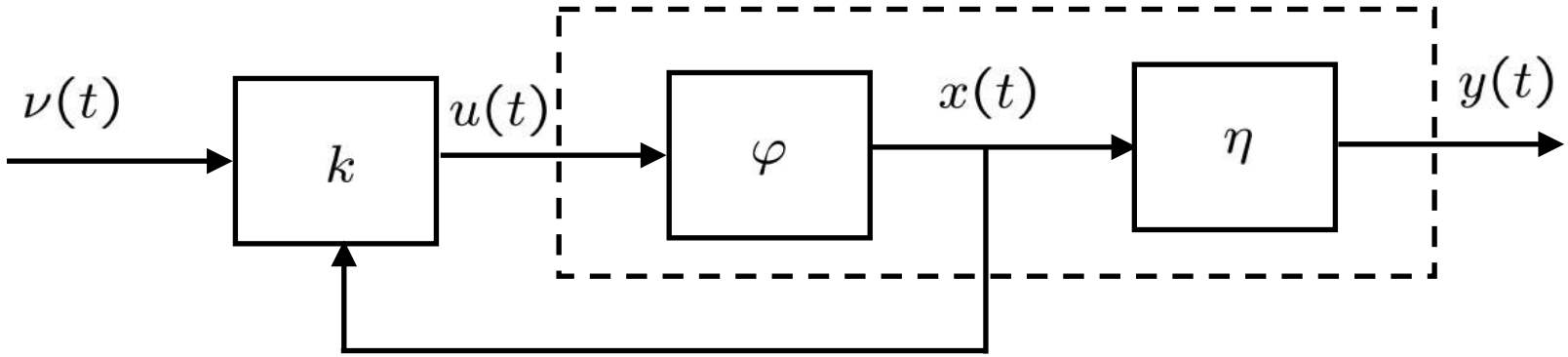
$$\begin{cases} (x_1(t), x_2(t)) = (\varphi_1(t, t_0, x_1(t_0), \psi_1(\nu_1(\cdot), y_2(\cdot)), \varphi_2(t, t_0, x_2(t_0), y_1(\cdot))) \\ y(t) = y_1(t) = \eta_1(t, x_1(t)) \end{cases}$$

Legge di controllo, stima dello stato, regolatore

Sistema retroazionato dallo stato se

$$u(t) = k(x(t), \nu(t), t)$$

La funzione $k(\cdot, \cdot, \cdot)$ e` detta legge di controllo

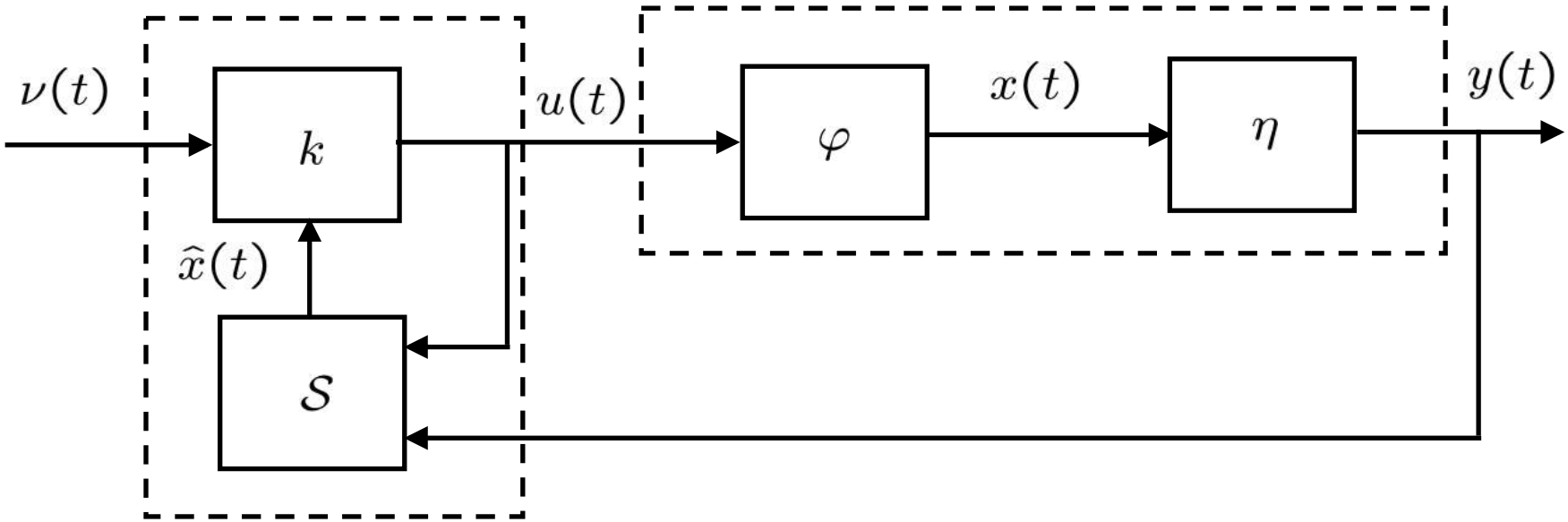


Considerazioni

- Scopo della legge di controllo e` imporre comportamenti al movimento dello stato sfruttando l'informazione sullo stato stesso
- Dallo schema si evince che nella determinazione di $k(\cdot,\cdot,\cdot)$ sono importanti le proprieta` ingresso-stato (es.: raggiungibilita`)
- Contrariamente all'uscita, lo stato descrive con compiutezza le caratteristiche dinamiche del sistema e quindi l'approccio di controllo tramite retroazione dallo stato e` molto potente.

Tuttavia: spesso lo stato, proprio per le sue caratteristiche di astrattezza, non e misurabile e cio` rende impossibile il controllo tramite retroazione dallo stato

si ricorre ad uno stimatore dello stato $\mathcal{S}$ che fornisce una stima $\hat{x}(t)$ dello stato $x(t)$ sfruttando le informazioni sulle variabili accessibili, ovvero gli ingressi $u(t)$ e le uscite $y(t)$



Sistemi invarianti, discreti, continui

- Sistema invariante se:

$$T \quad \text{gruppo additivo}$$

$$\forall u(\cdot) \in \Omega\,,\ \forall \tau \in T\,,\ u^{\tau}(t) := u(t-\tau) \in \Omega$$

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi(t+\tau, t_0+\tau, x_0, u^{\tau}(\cdot)), \forall t, \tau \in T$$

$$y(t) = \eta(x(t))$$

- Sistema discreto nel tempo se T e` isomorfo a $\mathcal{Z}$

- Sistema continuo nel tempo se T e` isomorfo a $\Re$

Sistemi a dimensione finita/infinita

- Sistema a dimensione finita (o a parametri concentrati) se:

  U, X, Y spazi vettoriali a dimensione finita

- Sistema a dimensione infinita (o a parametri distribuiti) se:

  U, X, Y spazi vettoriali a dimensione infinita

Sistemi regolari

Sistema regolare se:

U, Ω, X, Y, Γ spazi vettoriali normati

$\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ funzione continua rispetto ai suoi argomenti

$\frac{d}{dt}\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ esiste ed e` continua in tutti i punti in cui e continua $u(\cdot)$

Per i sistemi regolari vale un importante teorema:

Il movimento $\varphi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$ di un sistema regolare a dimensioni finite e` soluzione di un'equazione differenziale vettoriale del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad (*)$$

con

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Considerazioni

- In generale ad un unico sistema "astratto" $S = \{T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta\}$ corrispondono infinite equazioni differenziali vettoriali del tipo $(*)$ in quanto la scelta della base per gli spazi vettoriali rispetto cui rappresentare le grandezze x, u, y non e` unica

  ↳ Particolare importanza riveste lo studio delle proprieta` strutturali che non dipendono dalla scelta della base degli spazi vettoriali

- Le equazioni differenziali $(*)$ implicitamente definiscono la funzione di transizione $\varphi(\cdot, t_0, x_0, u(\cdot))$

- Tuttavia e` limitativo asserire che un sistema dinamico e` un ente definito dalle equazioni differenziali $(*)$

Sistemi discreti a dimensione finita

- Dato che T e` un insieme isomorfo a $\mathcal{Z}$ non si puo` parlare di regolarita` in senso stretto.
- Facciamo riferimento ad un sistema discreto ottenuto per campionamento di un sistema regolare continuo

U, X, Y spazi vettoriali normati

$\Omega = \{u(\cdot) \colon u_i(\cdot) \text{ cost. a tratti }, i = 1, \ldots, m\}$

periodo di campionamento $\mathcal{T}$:

$$u(k) = u(t)\,,\ t_0 + k\mathcal{T} \leq t < t_0 + (k+1)\mathcal{T},\ k = 0, 1, \ldots$$
$$y(k) = y(t_0 + k\mathcal{T}),\ k = 0, 1, \ldots$$

$$x(k+1) = f_d(x(k), u(k), k)$$
$$y(k) = g_d(x(k), u(k), k)$$

(per la proprieta` di composizione di φ)

$$f_d(x(k), u(k), k) = \varphi(t_0 + (k+1)\mathcal{T}, t_0 + k\mathcal{T}, x(k), u(k))$$
$$g_d(x(k), u(k), k) = \eta(x(k), u(k), t_0 + k\mathcal{T})$$

Nel corso prenderemo in considerazione solo:

Sistemi a parametri concentrati e

- sistemi a tempo continuo (regolari)

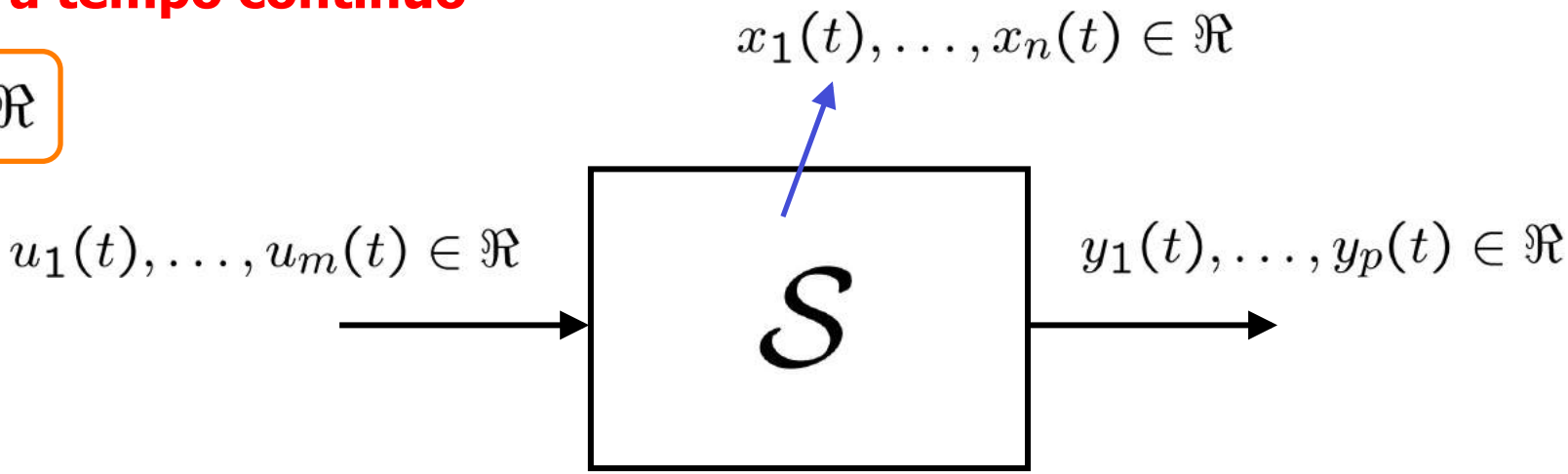
  ↳ Modello matematico: equazioni differenziali

- sistemi a tempo discreto

  ↳ Modello matematico: equazioni alle differenze

Sistemi a tempo continuo

$\forall t \in \Re$



Eq. di stato (dinamiche)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{cases}$$

Eq. d'uscita (algebriche)

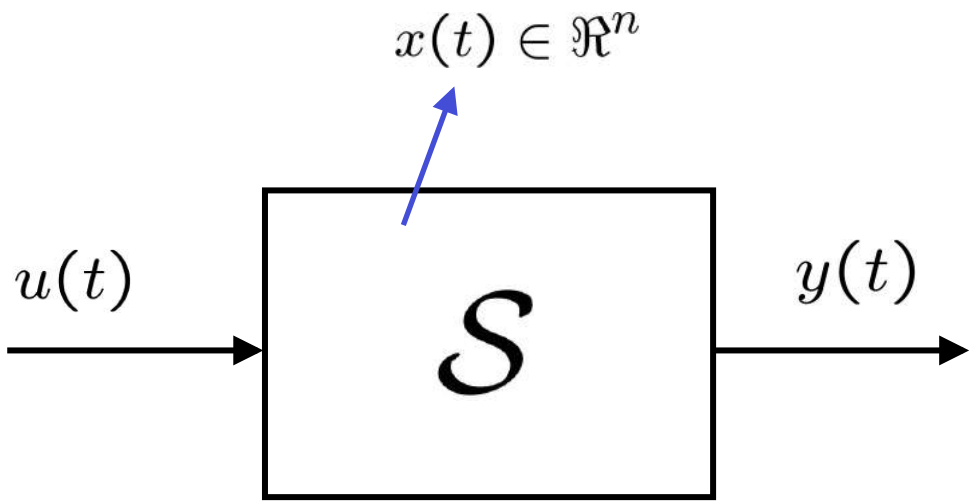
$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ y_2(t) = g_2(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{cases}$$

Notazione vettoriale:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \Re^m$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \Re^p$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \Re^n$$



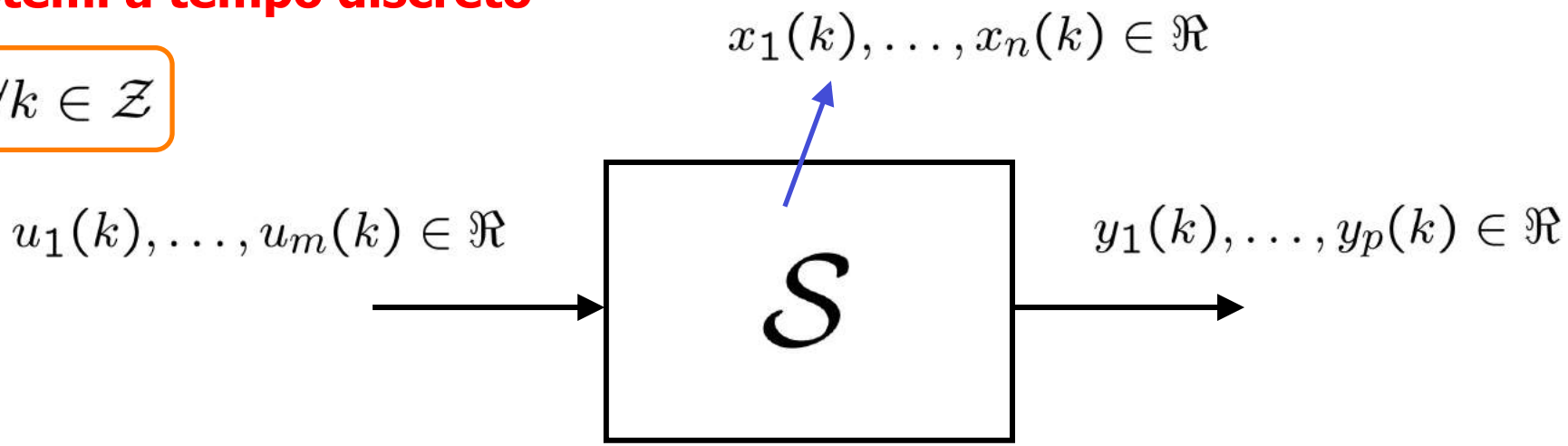
$$f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,t) \\ \vdots \\ f_n(x,u,t) \end{bmatrix}$$

$$g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(x,u,t) \\ \vdots \\ g_p(x,u,t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),u(t),t) \\ y(t) &= g(x(t),u(t),t) \end{aligned}}$$

Sistemi a tempo discreto

$\boxed{\forall k \in \mathcal{Z}}$



Eq. di stato

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k), k) \\ x_2(k+1) = f_2(x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k), k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = f_n(x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k), k) \end{cases}$$

Eq. d'uscita

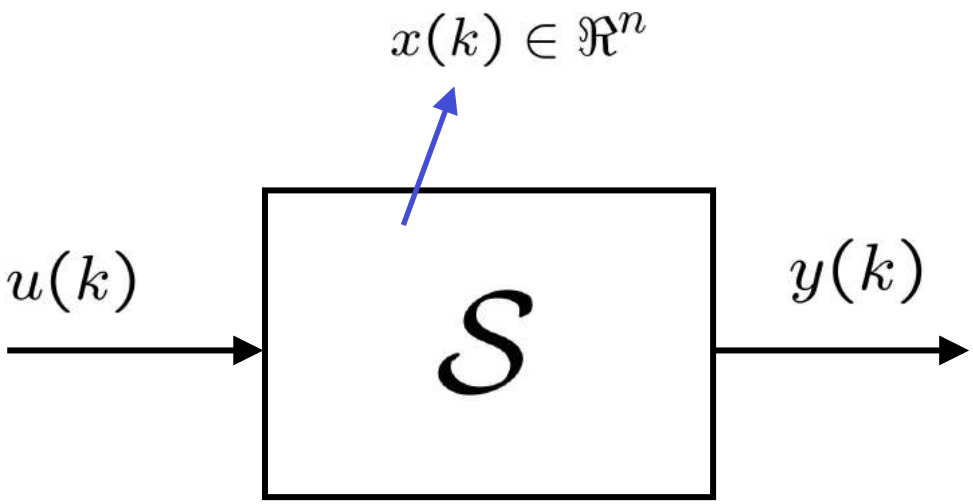
$$\begin{cases} y_1(k) = g_1(x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k), k) \\ y_2(k) = g_2(x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k), k) \\ \vdots \\ y_p(k) = g_p(x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k), k) \end{cases}$$

Notazione vettoriale:

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \in \Re^m$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} \in \Re^p$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \Re^n$$



$$f(x,u,k) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,k) \\ \vdots \\ f_n(x,u,k) \end{bmatrix}$$

$$g(x,u,k) = \begin{bmatrix} g_1(x,u,k) \\ \vdots \\ g_p(x,u,k) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k),u(k),k) \\ y(k) &= g(x(k),u(k),k) \end{aligned}}$$

- Sistemi tempo-invarianti (o stazionari o autonomi):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), \cancel{t}) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), \cancel{t}) \qquad y(t) = g(x(t), u(t))$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), \cancel{k}) \qquad x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = g(x(k), u(k), \cancel{k}) \qquad y(k) = g(x(k), u(k))$$

- Sistemi strettamente propri:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(\cancel{t}), t) \qquad y(t) = g(x(t), t)$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \qquad x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

$$y(k) = g(x(k), u(\cancel{k}), k) \qquad y(k) = g(x(k), k)$$

- Sistemi liberi e forzati:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \cancel{u(t)}, t) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), \cancel{u(t)}, t) \qquad y(t) = g(x(t), t)$$

libero

$$x(k+1) = f(x(k), \cancel{u(k)}, k) \qquad x(k+1) = f(x(k), k)$$

$$y(k) = g(x(k), \cancel{u(k)}, k) \qquad y(k) = g(x(k), k)$$

N.B.: se la funzione d'ingresso $u(t)$ o la sequenza d'ingresso $\{u(k)\}$ sono assegnate e note

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) = \tilde{f}(x(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) = \tilde{g}(x(t), t)$$

libero

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) = \tilde{f}(x(k), k)$$

$$y(k) = g(x(k), u(k), k) = \tilde{g}(x(k), k)$$

libero

Analogamente se $u(t) = \gamma(x(t), t)$ o $u(k) = \gamma(x(k), k)$

- Movimento libero:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \text{con} \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \qquad\qquad u(t) = 0, \ \forall t$$

$\Rightarrow$ $x_l(t), \ t \in [t_0, t_1]$

$$\boxed{\{(x_l(t), t), \ t \in [t_0, t_1]\} \quad \text{movimento libero}}$$

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \qquad \text{con} \qquad x(k_0) = x_0$$
$$y(k) = g(x(k), u(k), k) \qquad\qquad u(k) = 0, \ \forall k$$

$\Rightarrow$ $x_l(k), \ k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$

$$\boxed{\{(x_l(k), k), \ k \in \{k_0, \ldots, k_1\}\} \quad \text{movimento libero}}$$

- Movimento forzato:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned} \quad \text{con} \quad x(t_0) = 0$$

$\Rightarrow$ $x_f(t),\ t \in [t_0, t_1]$

$$\boxed{\{(x_f(t), t),\ t \in [t_0, t_1]\} \quad \text{movimento forzato}}$$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k), k)\\ y(k) &= g(x(k), u(k), k)\end{aligned} \quad \text{con} \quad x(k_0) = 0$$

$\Rightarrow$ $x_f(k),\ k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$

$$\boxed{\{(x_f(k), k),\ k \in \{k_0, \ldots, k_1\}\} \quad \text{movimento forzato}}$$

Sistemi a tempo continuo

Sia:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)\,, \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (\star)$$

ha soluzione $x(t)$? E` unica?

- **Esistenza locale:**

$$\mathcal{B}_{x_0}(r) := \{\xi \in \Re^n : \|\xi - x_0\| \leq r\}$$

$f(x(t), t)$ continua a tratti rispetto t

se $\exists r > 0,\ 0 < L < \infty$:

$$\|f(x,t) - f(z,t)\| \leq L\|x - z\|\,, \qquad \forall x, z \in \mathcal{B}_{x_0}(r),\ \forall t \in [t_0, t_1]$$

$\exists \delta > 0$ tale che $(\star)$ ha una unica soluzione

$$x(t)\,, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

- **Esistenza globale:**

$f(x(t),t)$ continua a tratti rispetto t

se $\exists\, 0 < L < \infty$:

$$\|f(x,t) - f(z,t)\| \leq L\|x - z\|\,, \qquad \forall x, z \in \Re^n,\ \forall t \in [t_0, t_1]$$

$\Rightarrow$ $(\star)$ ha una unica soluzione $x(t)\,,\ \ t \in [t_0, t_1]$

Funzione di transizione dello stato e causalita`

Dati:

$$x(t_0) = x_0 \qquad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (\star)$$

$$u_{[t_0,t]}(\cdot)$$

qualunque soluzione $x(t)\,,\ \ t \in [t_0, t_1]$ di $(\star)$
deve soddisfare anche (derivando si ottiene $(\star)$)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau\,, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

Causalita`

Quindi $x(t)\,,\ \ t \in [t_0, t_1]$ dipende da $t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot)$

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot))$$

funzione di transizione dello stato

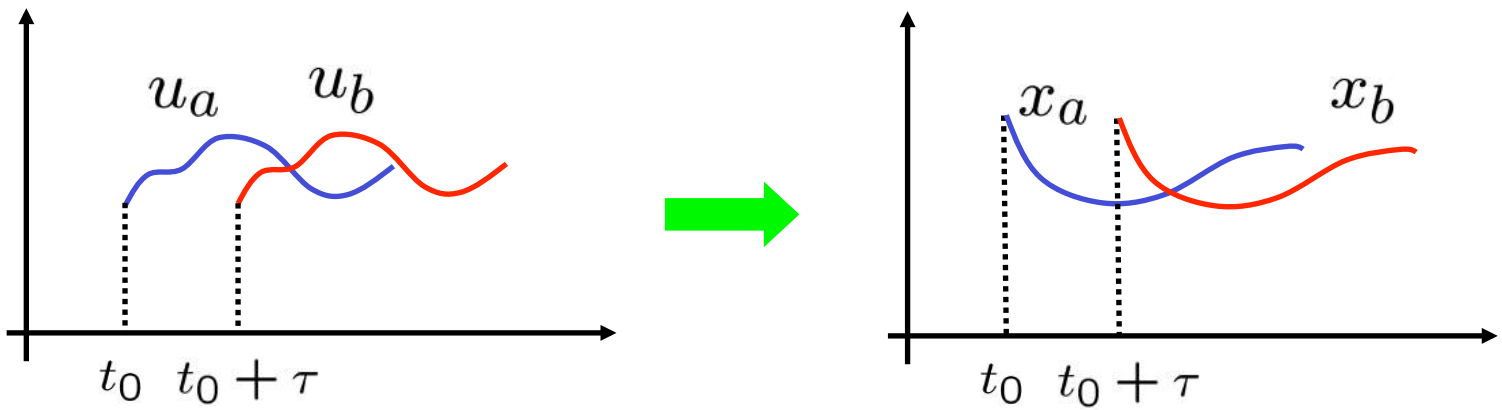
Istante iniziale in sistemi tempo-invarianti a tempo c.

Dato: $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$
$y(t) = g(x(t), u(t))$

$x(t_0) = x_0$
$u_a(t) = u(t),\ t \in [t_0, t_1)$ → soluzione $x_a(t)\,,\ t \in [t_0, t_1]$

$x(t_0 + \tau) = x_0$
$u_b(t) = u_a(t - \tau),\ t \in [t_0 + \tau, t_1 + \tau)$

→ soluzione $x_b(t) = x_a(t - \tau)\,,\ t \in [t_0 + \tau, t_1 + \tau]$



convenzionalmente $t_0 = 0$

Sistemi a tempo continuo: istante iniziale, causalita`, memoria

Si riconsideri il problema differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)\,, \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (\star)$$

E` necessario chiarire con precisione il significato di assegnare lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ all' istante t_0

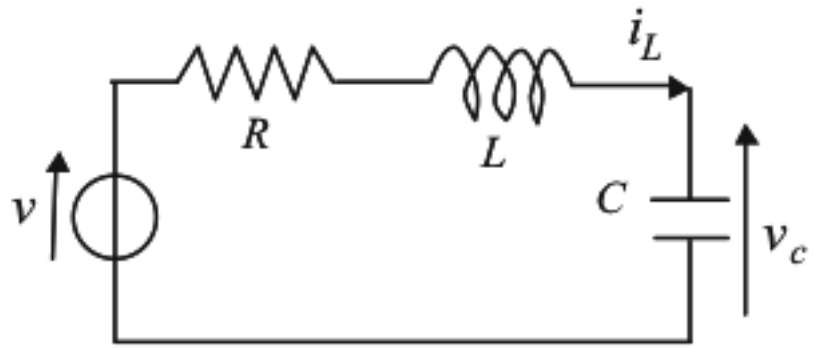
Questione importante:

Le condizioni iniziali sulle variabili di stato sono applicate proprio all' istante $t = t_0$? Prima? Dopo? Che differenza c' è tra "prima" e "dopo"?

Esempio:

$$x_1 := i_L,\ x_2 := v_C$$

$$v(t) \ = \ 1(t - t_0)$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}v \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

$$x_1(t_0) = i_L(t_0) \ = \ \hat{i}_L$$
$$x_2(t_0) = v_C(t_0) \ = \ \hat{v}_C$$

- lo stato $x(t_0)$ al generico istante t_0 racchiude informazioni sul passato $t < t_0$ e sul presente $t = t_0$ del sistema;
- la conoscenza di $x(t_0)$ e di $u(t), t \in [t_0, t_1)$ permette di determinare $x(t_1)$ per qualunque $t_1 > t_0$
- vale la proprieta` di causalita`
- la memoria del sistema e` conservata in $x(t_0^-)$ (prima dell' applicazione dell' ingresso)

- In generale possiamo quindi affermare che lo stato iniziale debba essere assegnato in t_0^- **prima** dell'applicazione dell'ingresso. Cio` assicura la causalita` e irreversibilita` del sistema.

- In generale non e` invece possibile affermare che t_0^+ contenga la memoria del sistema in quanto tale valore potrebbe dipendere anche dall'applicazione della particolare funzione d'ingresso

- Evidentemente, se $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot))$ e` continua rispetto al tempo in $t = t_0$, si ha

$$x(t_0^-) = x(t_0^+) = x(t_0)$$

e cio` avviene per qualunque scelta di funzione d'ingresso continua a tratti, visto che vale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \,, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

- La discontinuita` rispetto al tempo di $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot))$ e` tuttavia tutt'altro che non significativa dal punto di vista pratico (si pensi a fenomeni di urto in sistemi meccanici, fenomeni di carica istantanea di condensatori in circuiti elettrici, ecc.)

- Tale discontinuita` causa $x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$ per cui $x(t_0^+)$ non e` rappresentativo della memoria del sistema

- La discontinuita` rispetto al tempo di $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}(\cdot))$ e` tipicamente causata da **ingressi impulsivi** contenenti cioe` impulsi di Dirac

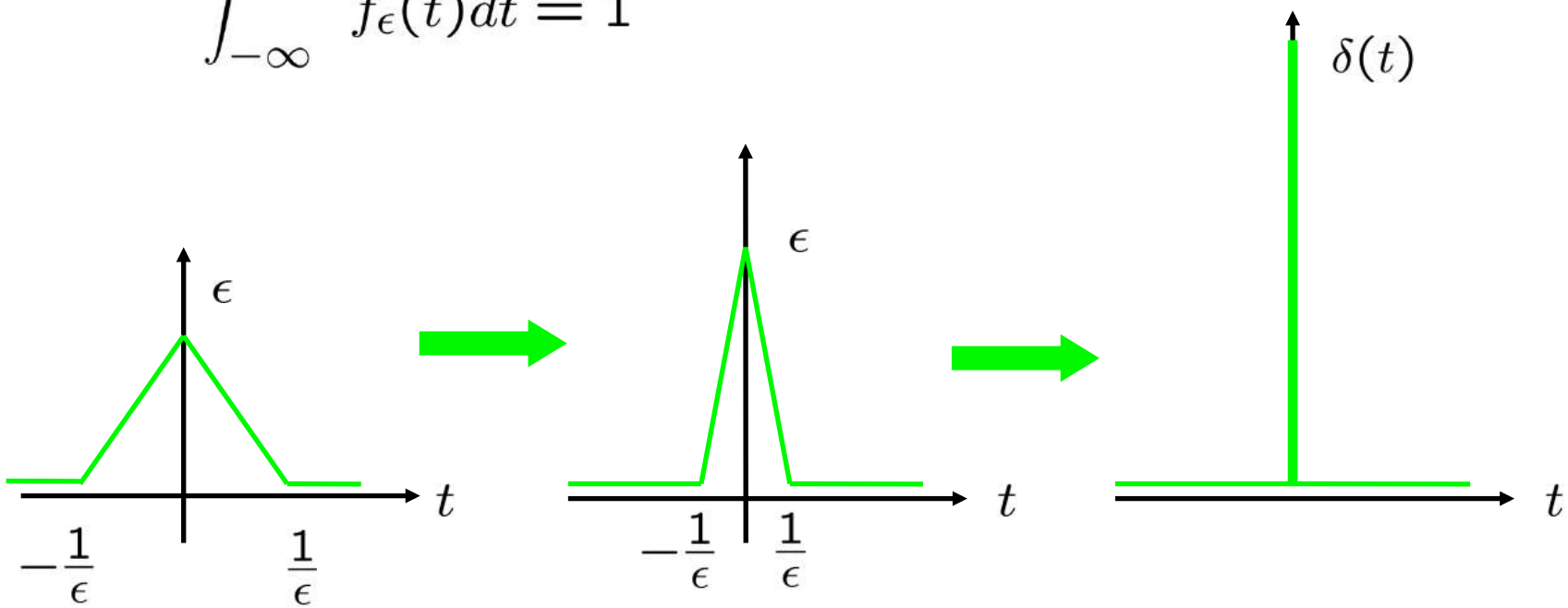
La "funzione" impulso di Dirac

L'impulso di Dirac non e` una funzione nel senso usuale del termine ma e` una cosiddetta "distribuzione" o "funzione generalizzata" definita come:

$$\delta(t) := \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Si può vedere come il $\lim_{\epsilon \to \infty} f_\epsilon(t)$ di una successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)dt = 1$$



Stati e uscite di equilibrio

$\bar{x} \in \Re^n$ stato di equilibrio se $\forall t_0 \in \Re, \exists \bar{u}(\cdot)$ tale che

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \bar{x} \\ u(\cdot) &= \bar{u}(\cdot) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \bar{x}\,, \quad \forall t > t_0$$

$\bar{y} \in \Re^p$ uscita di equilibrio se $\forall t_0 \in \Re, \exists x_0, \bar{u}(\cdot)$ tali che

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ u(\cdot) &= \bar{u}(\cdot) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \bar{y}\,, \quad \forall t \geq t_0$$

In generale:

- la funzione d'ingresso dipende da t_0
- sistema in uno stato di equilibrio non implica necessariamente uscita in equilibrio

Stati di equilibrio di sistemi tempo-invarianti a tempo c.

Tutti gli stati di equilibrio sono ottenibili tramite ingressi costanti

$\bar{x} \in \Re^n$ stato di equilibrio se $\exists \bar{u}$ tale che

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \bar{x} \\ u(t) &= \bar{u} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \bar{x}\,, \quad \forall t > t_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(\bar{x}, \bar{u}) = 0}$$

Possiamo quindi caratterizzare i seguenti insiemi:

$$\bar{X}_{\bar{u}} := \{\bar{x} \in \Re^n : f(\bar{x}, \bar{u}) = 0\}$$

$$\bar{X} := \{\bar{x} \in \Re^n : \exists \bar{u} \in \Re^m \text{ tale che } f(\bar{x}, \bar{u}) = 0\}$$

Sistemi a tempo discreto

Sia:
$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(x(k), u(k), k) \end{aligned} \quad , \quad k > k_0, \; x(k_0) = x_0$$

Evidentemente $x(k)$, $k > k_0$ puo` essere determinato iterando l'equazione di stato (*non serve risolvere un problema differenziale*)

$$x(k_0) = x_0$$
$$x(k_0+1) = f(x(k_0), u(k_0), k_0)$$
$$\begin{aligned} x(k_0+2) &= f(x(k_0+1), u(k_0+1), k_0+1) \\ &= f(f(x(k_0), u(k_0), k_0), u(k_0+1), k_0+1) \end{aligned}$$
$$x(k_0+3) = f(x(k_0+2), u(k_0+2), k_0+2)$$
$$= f(f(f(x(k_0), u(k_0), k_0), u(k_0+1), k_0+1), u(k_0+2), k_0+2)$$

... e cosi` via

Causalita`

$$x(k) = \varphi(k, k_0, x_0, \{u(k_0), \ldots, u(k-1)\})$$

funzione di transizione dello stato

Istante iniziale in sistemi tempo-invarianti a tempo d.

Dato: $x(k+1) = f(x(k), u(k))$
$y(k) = g(x(k), u(k))$

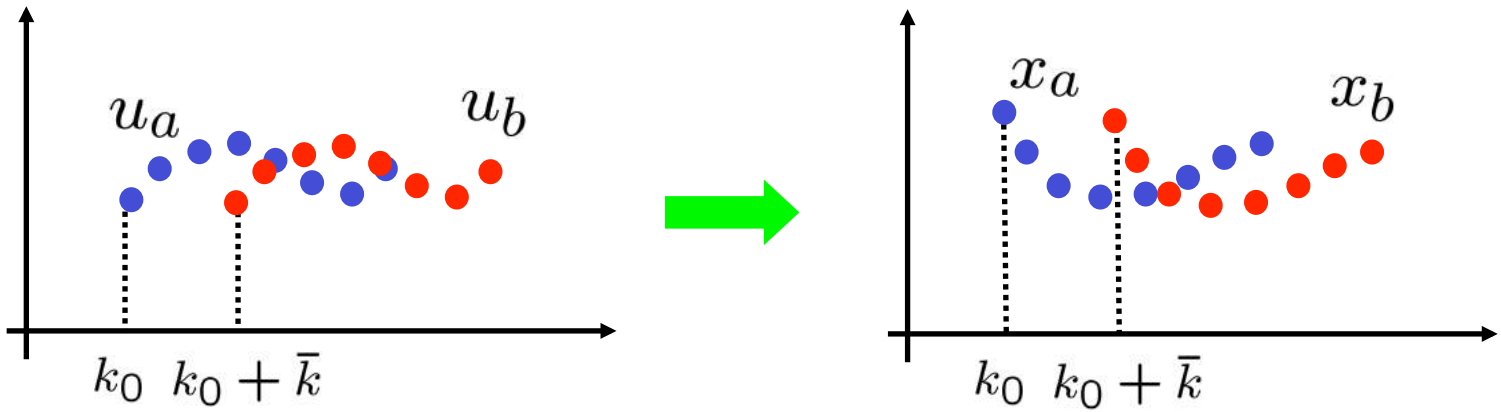
$x(k_0) = x_0$
$u_a(k) = u(k),\ k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$

soluzione

$x_a(k),\ k \in \{k_0, \ldots, k_1\}$

$x(t_0 + \bar{k}) = x_0$
$u_b(k) = u_a(k - \bar{k}),\ k \in \{k_0 + \bar{k}, \ldots, k_1 + \bar{k}\}$

soluzione $x_b(k) = x_a(k - \bar{k}),\ k \in \{k_0 + \bar{k}, \ldots, k_1 + \bar{k}\}$



convenzionalmente $k_0 = 0$

Stati e uscite di equilibrio

$\bar{x} \in \Re^n$ stato di equilibrio se $\forall k_0 \in \Re, \exists \{\bar{u}\}$ tale che

$$\begin{array}{l} x(k_0) = \bar{x} \\ u(k) = \bar{u}(k),\ k \geq k_0 \end{array} \Rightarrow \quad x(k) = \bar{x}\,, \quad \forall k > k_0$$

$\bar{y} \in \Re^p$ uscita di equilibrio se $\forall k_0 \in \Re, \exists x_0, \{\bar{u}\}$ tali che

$$\begin{array}{l} x(k_0) = x_0 \\ u(k) = \bar{u}(k),\ k \geq k_0 \end{array} \Rightarrow \quad y(k) = \bar{y}\,, \quad \forall k \geq k_0$$

In generale:

- la funzione d'ingresso dipende da k_0
- sistema in uno stato di equilibrio non implica necessariamente uscita in equilibrio

Stati di equilibrio di sistemi tempo-invarianti a tempo d.

Tutti gli stati di equilibrio sono ottenibili tramite ingressi costanti

$\bar{x} \in \Re^n$ stato di equilibrio se $\exists \bar{u}$ tale che

$$\begin{array}{l} x(k_0) = \bar{x} \\ u(k) = \bar{u},\ k \geq k_0 \end{array} \Rightarrow x(k) = \bar{x}\,, \quad \forall k > k_0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}}$$

Possiamo quindi caratterizzare i seguenti insiemi:

$$\bar{X}_{\bar{u}} := \{\bar{x} \in \Re^n : f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}\}$$

$$\bar{X} := \{\bar{x} \in \Re^n : \exists \bar{u} \in \Re^m \text{ tale che } f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}\}$$

Ma … come si determina un modello in equazioni di stato?

Scelta delle variabili di stato

Ricordiamo il concetto *qualitativo* fondamentale:

Variabili di stato:

variabili da conoscere in t_0 per determinare $y(t), t \geq t_0$

a partire da $u(t), t \geq t_0$

$$x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n$$ (variabili di stato)

Dobbiamo porci alcune importanti domande:

- criteri sistematici per la scelta delle variabili?
- la scelta e` univoca?
- il numero n e` univocamente determinato?

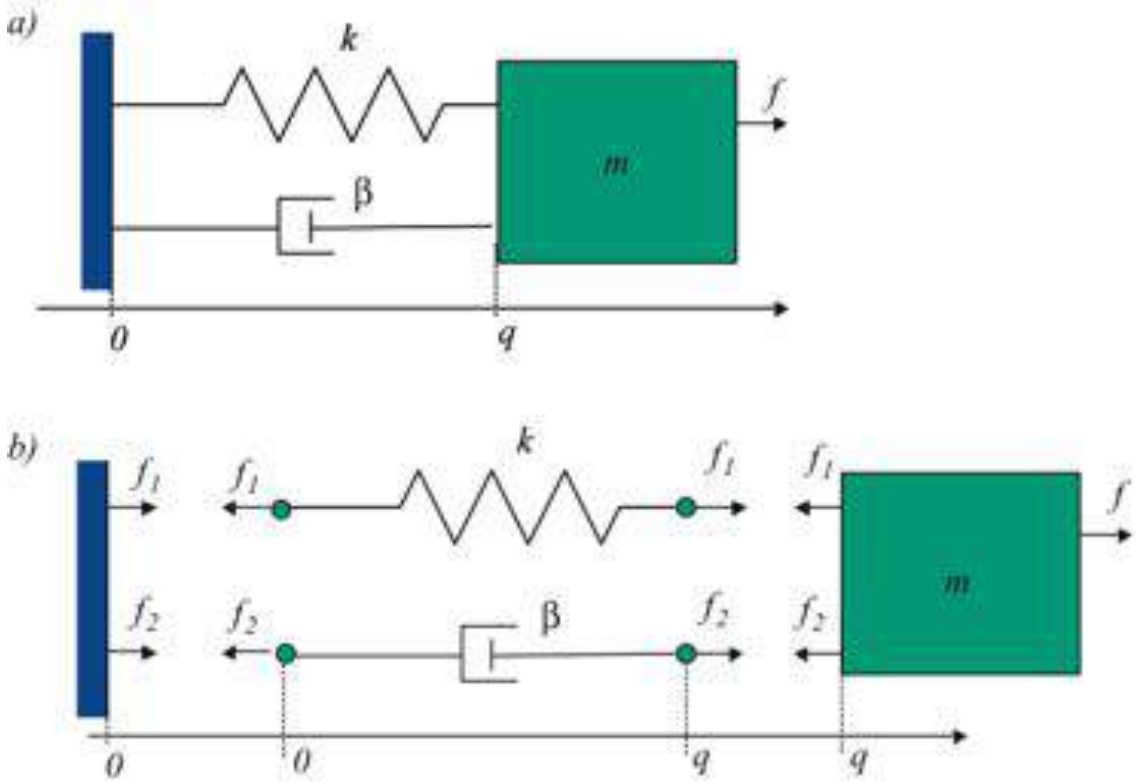
Un criterio "fisico"

Variabili di stato ⟷ grandezze associate ad accumuli di energie, massa, ecc….

Con riferimento ai modelli fisici visti in precedenza:

Tipo di sistema	Variabili di stato
Elettrico	Tensioni sui condensatori, correnti negli induttori
Meccanico traslaz.	Posizioni e velocita` lineari di ogni massa indipendente
Meccanico rotaz.	Posizioni e velocita` angolari di ogni inerzia indipendente
Idraulico	Pressioni o livelli di fluido nei serbatoi
Termico	Temperature

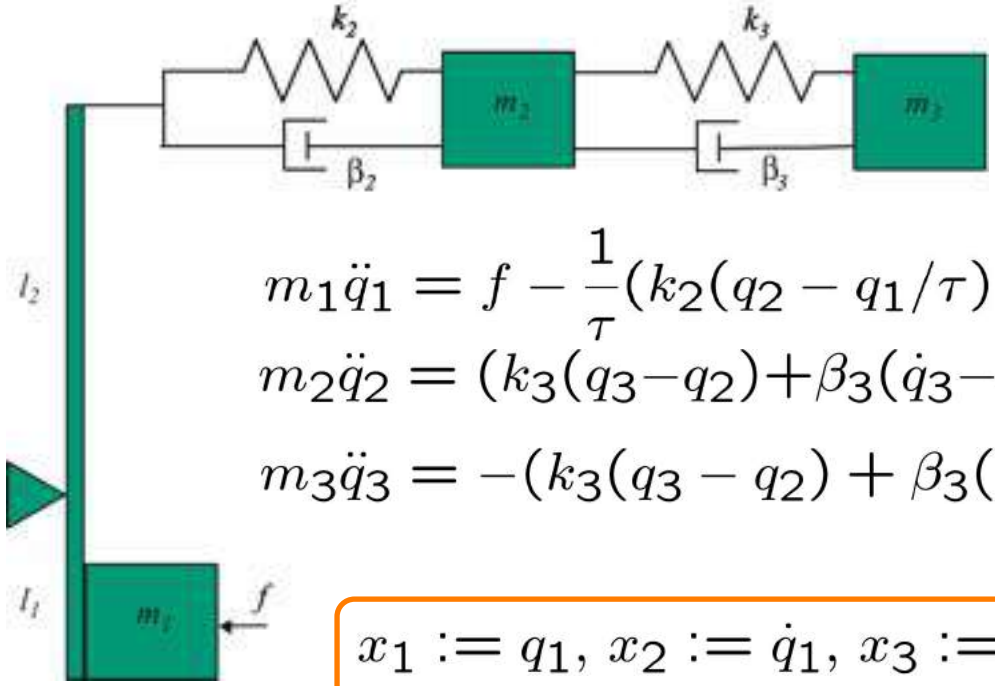
Esempio 1 (massa-molla-smorzatore)



$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + kq = f$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 := q \\ x_2 := \dot{q} \end{array}} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q} = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{\beta}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}f \end{cases}$$

Esempio 2 (sist. meccanico tre masse)



$$m_1\ddot{q}_1 = f - \frac{1}{\tau}(k_2(q_2 - q_1/\tau) + \beta_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1/\tau))$$

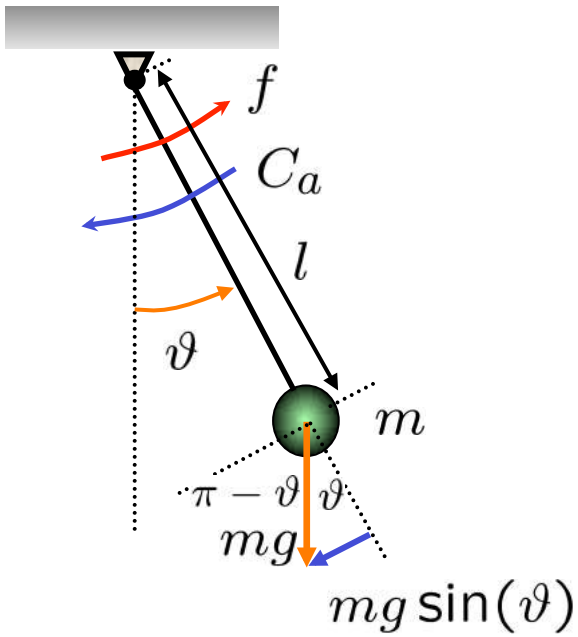
$$m_2\ddot{q}_2 = (k_3(q_3 - q_2) + \beta_3(\dot{q}_3 - \dot{q}_2)) - (k_2(q_2 - q_1/\tau) + \beta_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1/\tau))$$

$$m_3\ddot{q}_3 = -(k_3(q_3 - q_2) + \beta_3(\dot{q}_3 - \dot{q}_2))$$

$$\boxed{x_1 := q_1,\ x_2 := \dot{q}_1,\ x_3 := q_2,\ x_4 := \dot{q}_2,\ x_5 := q_3,\ x_6 := \dot{q}_3}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{m_1\tau}(k_2(x_3 - x_1/\tau) + \beta_2(x_4 - x_2/\tau)) + \dfrac{1}{m_1}f \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{1}{m_2}(k_3(x_5 - x_3) + \beta_3(x_6 - x_4)) - \dfrac{1}{m_2}(k_2(x_3 - x_1/\tau) + \beta_2(x_4 - x_2/\tau)) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -\dfrac{1}{m_3}(k_3(x_5 - x_3) + \beta_3(x_6 - x_4)) \end{cases}$$

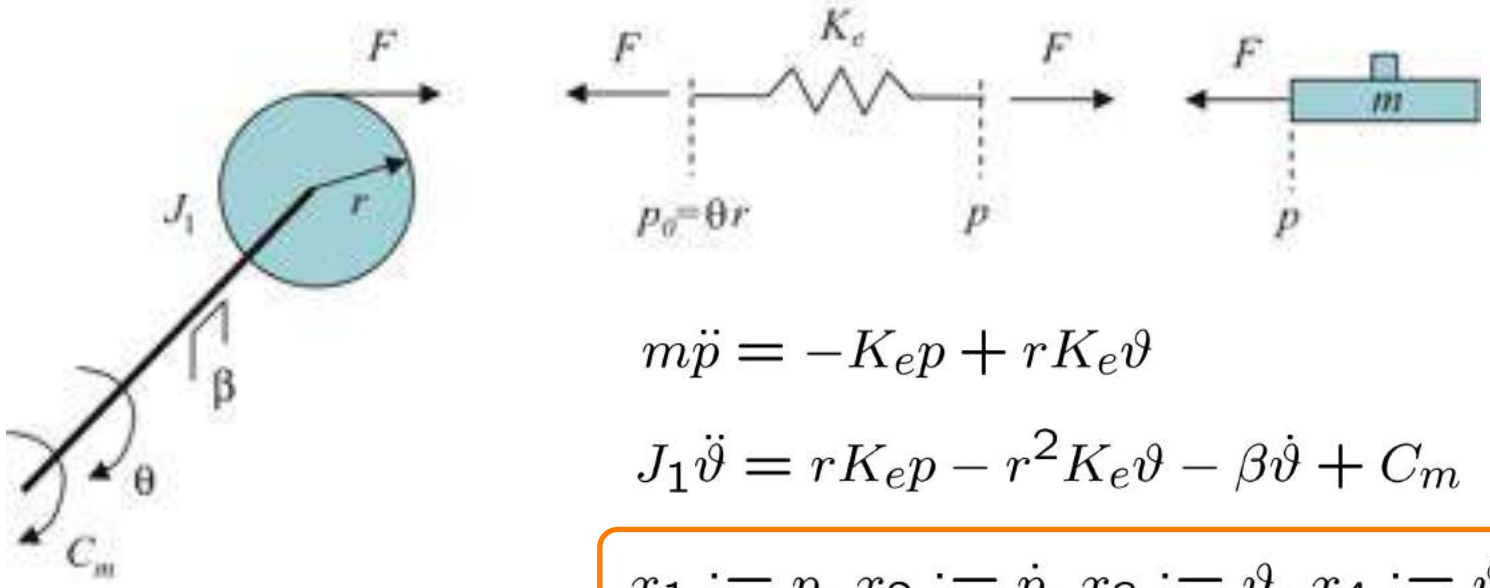
Esempio 3 (pendolo semplice)



$$f - \beta\dot{\vartheta} - mgl\sin\vartheta = ml^2\ddot{\vartheta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{array}} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\vartheta} = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 - \dfrac{\beta}{ml^2}x_2 + \dfrac{1}{ml^2}f \end{cases}$$

Esempio 5 (testina stampante)



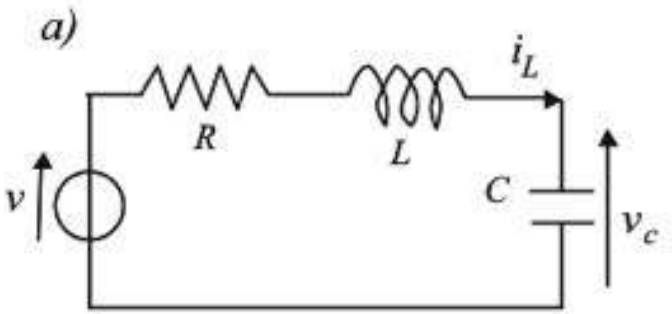
$$m\ddot{p} = -K_e p + rK_e\vartheta$$

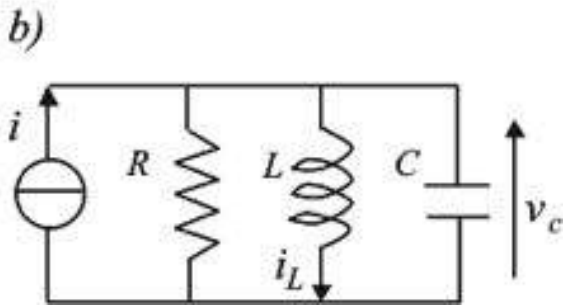
$$J_1\ddot{\vartheta} = rK_e p - r^2 K_e \vartheta - \beta\dot{\vartheta} + C_m$$

$$\boxed{x_1 := p,\ x_2 := \dot{p},\ x_3 := \vartheta,\ x_4 := \dot{\vartheta}}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K_e}{m}x_1 + \dfrac{rK_e}{m}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{rK_e}{J_1}x_1 - \dfrac{r^2K_e}{J_1}x_3 - \dfrac{\beta}{J_1}x_4 + \dfrac{1}{J_1}C_m \end{cases}$$

Esempio 6 (circuiti RLC risonanti)





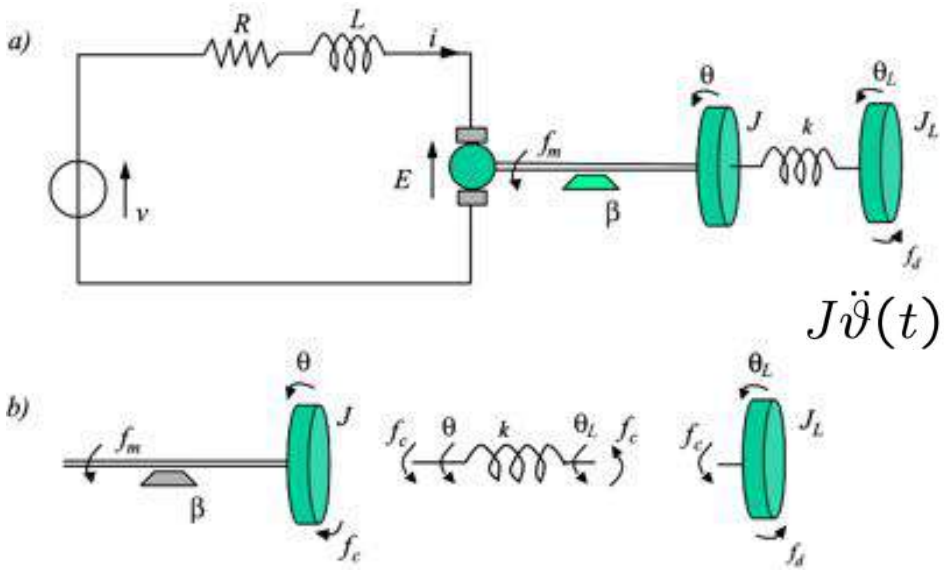
$$L\frac{di_L}{dt} = v - Ri_L - v_C \qquad C\frac{dv_C}{dt} = i - \frac{1}{R}v_C - i_L$$

$$C\frac{dv_C}{dt} = i_L \qquad L\frac{di_L}{dt} = v_C$$

$$\boxed{x_1 := i_L,\ x_2 := v_C}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}v \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{C}iv \end{cases}$$

Esempio 8 (sistema elettromeccanico)



$$L\frac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - K\dot{\vartheta}(t) + v(t)$$

$$J\ddot{\vartheta}(t) = Ki(t) - \beta\dot{\vartheta}(t) - k(\vartheta(t) - \vartheta_L(t))$$

$$J_L\ddot{\vartheta}_L(t) = k(\vartheta(t) - \vartheta_L(t)) + f_d(t)$$

$$\boxed{x_1 := i,\ x_2 := \vartheta,\ x_3 := \dot{\vartheta},\ x_4 := \vartheta_L,\ x_5 := \dot{\vartheta}_L}$$

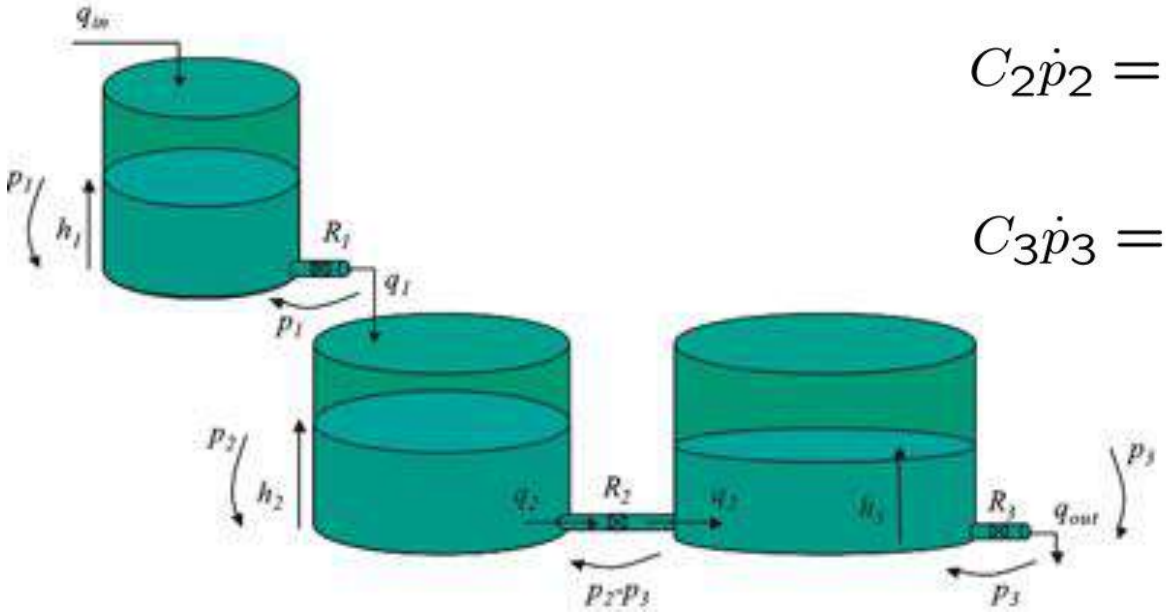
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{K}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}v \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{K}{J}x_1 - \dfrac{\beta}{J}x_3 - \dfrac{k}{J}(x_2 - x_4) \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = \dfrac{k}{J_L}(x_2 - x_4) + \dfrac{1}{J_L}f_d \end{cases}$$

Esempio 9 (sistema idraulico tre serbatoi):

$$C_1\dot{p}_1 = q_{\text{in}} - \frac{\sqrt{p_1}}{R_1}$$

$$C_2\dot{p}_2 = \frac{\sqrt{p_1}}{R_1} - \frac{p_2 - p_3}{|p_2 - p_3|}\frac{\sqrt{|p_2 - p_3|}}{R_2}$$

$$C_3\dot{p}_3 = \frac{p_2 - p_3}{|p_2 - p_3|}\frac{\sqrt{|p_2 - p_3|}}{R_2} - \frac{\sqrt{p_3}}{R_3}$$



$$\boxed{x_1 := p_1,\ x_2 := p_2,\ x_3 := p_3}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{\sqrt{x_1}}{R_1C_1} + \dfrac{1}{C_1}q_{\text{in}} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\sqrt{p_1}}{R_1C_2} - \dfrac{x_2 - x_3}{|x_2 - x_3|}\dfrac{\sqrt{|x_2 - x_3|}}{R_2C_2} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_2 - x_3}{|x_2 - x_3|}\dfrac{\sqrt{|x_2 - x_3|}}{R_2C_3} - \dfrac{\sqrt{x_3}}{R_3C_3} \end{cases}$$

Un criterio "matematico"

- L'approccio "fisico" alla determinazione della rappresentazione di stato ha l'indubbio vantaggio di associare alle variabili stesse un significato tangibile
- Tuttavia in molti casi di interesse pratico a partire da un modello puo` essere conveniente pervenire a rappresentazioni di stato che non abbiano un significato fisico, ma che possano essere vantaggiose da altri punti di vista (per esempio computazionali). Si tratta del problema della realizzazione.

Supponiamo di disporre di un *modello differenziale (tempo continuo)*

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y, u, t\right)$$

oppure di un *modello alle differenze (tempo discreto)*

$$y(k+n) = \varphi\left(y(k+n-1), y(k+n-2), \ldots, y(k), u(k), k\right)$$

- Caso a tempo continuo:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y, u, t\right)$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1(t) := y(t) \\ x_2(t) := \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots \\ x_n(t) := \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{cases} \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x, u, t) \\ y = x_1 \end{cases}$$

- Caso a tempo discreto:

$$y(k+n) = \varphi\left(y(k+n-1), y(k+n-2), \ldots, y(k), u(k), k\right)$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1(k) := y(k) \\ x_2(k) := y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) := y(k+n-1) \end{cases} \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = \varphi(x, u, k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

Esempio

Si abbia l'eq. differenziale di ordine 3

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - y = 6u$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \frac{dy}{dt} \\ x_3 := \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_3 - 2x_2 + x_1 + 6u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Quindi: la scelta della rappresentazione di stato non e` univoca!

Rappresentazioni di stato equivalenti

- Caso a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

$$\hat{x} = Tx, \quad \hat{x} \in \Re^n, T \in \Re^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\dot{\hat{x}} = T\dot{x} = Tf(T^{-1}\hat{x}, u, t) =: \hat{f}(\hat{x}, u, t)$$
$$y = g(T^{-1}\hat{x}, u, t) =: \hat{g}(\hat{x}, u, t)$$

- Caso a tempo discreto:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$
$$y(k) = g(x(k), u(k), k)$$

$$\hat{x} = Tx, \quad \hat{x} \in \Re^n, T \in \Re^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\hat{x}(k+1) = Tx(k+1) = Tf(T^{-1}\hat{x}(k), u(k), k) =: \hat{f}(\hat{x}, u, k)$$
$$y(k) = g(T^{-1}\hat{x}(k), u(k), k) =: \hat{g}(\hat{x}, u, k)$$

Sistemi lineari

- Caso a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

rappresentano un sistema lineare se e solo se f e g sono lineari:

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Re$, $\forall x_1, x_2 \in \Re^n$, $\forall u_1, u_2 \in \Re^m$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, t) = \alpha_1 f(x_1, u_1, t) + \alpha_2 f(x_2, u_2, t)$$
$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, t) = \alpha_1 g(x_1, u_1, t) + \alpha_2 g(x_2, u_2, t)$$

- Caso a tempo discreto:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$
$$y(k) = g(x(k), u(k), k)$$

rappresentano un sistema lineare se e solo se f e g sono lineari:

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Re$, $\forall x_1, x_2 \in \Re^n$, $\forall u_1, u_2 \in \Re^m$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, k) = \alpha_1 f(x_1, u_1, k) + \alpha_2 f(x_2, u_2, k)$$
$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, k) = \alpha_1 g(x_1, u_1, k) + \alpha_2 g(x_2, u_2, k)$$

I sistemi lineari godono di alcune importanti proprieta`

- Scomposizione del movimento in libero e forzato
- Sovrapposizione degli effetti
- Forma matriciale per le equazioni di stato

Scomposizione del movimento in libero e forzato

In un sistema $\begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{array}$, $x(t_0) = x_0$

per cui valga la proprieta` di linearita`, i movimenti dello stato e dell'uscita si possono scomporre

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)\,, \qquad y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Dim.:

$$\dot{x}_l(t) = f(x_l, 0, t) \;\Rightarrow\; x_l(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_l(\tau), 0, \tau)d\tau$$

$$\dot{x}_f(t) = f(x_f, u, t),\; x(t_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_f(t) = \int_{t_0}^{t} f(x_f(\tau), u(\tau), \tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} x_l(t)+x_f(t) &= x_0+\int_{t_0}^{t} f(x_l(\tau), 0, \tau)d\tau+\int_{t_0}^{t} f(x_f(\tau), u(\tau), \tau)d\tau \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(x_l(\tau), 0, \tau) + f(x_f(\tau), u(\tau), \tau)]d\tau \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_l(\tau) + x_f(\tau), 0 + u(\tau), \tau)d\tau \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x(t) := x_l(t) + x_f(t)$ soddisfa $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\; x(t_0) = x_0$

Sovrapposizione degli effetti

In un sistema $\begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{array}$, $x(t_0) = x_0$

per cui valga la proprieta` di linearita` si considerino due movimenti:

$$x(t_0) = x_{a0},\ u(t) = u_a(t) \Rightarrow x_a(t), y_a(t)$$
$$x(t_0) = x_{b0},\ u(t) = u_b(t) \Rightarrow x_b(t), y_b(t)$$

Allora:

$$x(t_0) = \alpha x_{a0} + \beta x_{b0}$$
$$u(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t) \\ y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t) \end{array}$$

Dim.:

$$x_a(t) = x_{a0} + \int_{t_0}^{t} f(x_a(\tau), u_a(\tau), \tau) d\tau$$

$$x_b(t) = x_{b0} + \int_{t_0}^{t} f(x_b(\tau), u_b(\tau), \tau) d\tau$$

$$\alpha x_a(t) + \beta x_b(t) = \alpha x_{a0} + \beta x_{b0} + \int_{t_0}^{t} [\alpha f(x_a(\tau), u_a(\tau), \tau) + \beta f(x_b(\tau), u_b(\tau), \tau)] d\tau$$

$$= \alpha x_{a0} + \beta x_{b0} + \int_{t_0}^{t} f(\alpha x_a(\tau) + \beta x_b(\tau), \alpha u_a(\tau) + \beta u_b(\tau), \tau) d\tau$$

$x(t) := \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$ soddisfa

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = \alpha x_{a0} + \beta x_{b0}, \; u(t) = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$$

Forma matriciale per le equazioni di stato

In un sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad , \; x(t_0) = x_0$$

per cui valga la proprieta` di linearita` si puo scrivere:

$$\begin{cases} f_1(x,u,t) = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + \cdots + b_{1m}(t)u_m \\ \vdots \\ f_n(x,u,t) = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + \cdots + b_{nm}(t)u_m \\ \\ y_1 = c_{11}(t)x_1 + \cdots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + \cdots + d_{1m}(t)u_m \\ \vdots \\ y_p = c_{p1}(t)x_1 + \cdots + c_{pn}(t)x_n + d_{p1}(t)u_1 + \cdots + d_{pm}(t)u_m \end{cases}$$

dove i "parametri" $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) d_{ij}(t)$ sono generiche funzioni continue del tempo (la continuita` rispetto al tempo garantisce esistenza e unicita` almeno locali della soluzione).

Possiamo quindi organizzare le equazioni in forma vettoriale/matriciale:

$$A(t) := \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \quad B(t) := \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nm}(t) \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$C(t) := \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & \cdots & c_{pn}(t) \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p \quad D(t) := \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1}(t) & \cdots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}}_{m} \Big\} p$$

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

In un sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(x(k), u(k), k) \end{aligned} \quad , \; x(k_0) = x_0$$

per cui valga la proprieta` di linearita` si puo scrivere:

$$\begin{cases} f_1(x,u,k) = a_{11}(k)x_1 + \cdots + a_{1n}(k)x_n + b_{11}(k)u_1 + \cdots + b_{1m}(k)u_m \\ \vdots \\ f_n(x,u,k) = a_{n1}(k)x_1 + \cdots + a_{nn}(k)x_n + b_{n1}(k)u_1 + \cdots + b_{nm}(k)u_m \\ y_1 = c_{11}(k)x_1 + \cdots + c_{1n}(k)x_n + d_{11}(k)u_1 + \cdots + d_{1m}(k)u_m \\ \vdots \\ y_p = c_{p1}(k)x_1 + \cdots + c_{pn}(k)x_n + d_{p1}(k)u_1 + \cdots + d_{pm}(k)u_m \end{cases}$$

dove i "parametri" $a_{ij}(k), b_{ij}(k), c_{ij}(k) d_{ij}(k)$ sono generiche funzioni dell'indice k .

$$A(k) := \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}(k) & \cdots & a_{1n}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(k) & \cdots & a_{nn}(k) \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \quad B(k) := \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11}(k) & \cdots & b_{1m}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1}(k) & \cdots & b_{nm}(k) \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$C(k) := \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11}(k) & \cdots & c_{1n}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(k) & \cdots & c_{pn}(k) \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \quad D(k) := \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11}(k) & \cdots & d_{1m}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1}(k) & \cdots & d_{pm}(k) \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad u(t) := \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \quad y(t) := \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

Equilibrio per sistemi lineari tempo-invarianti a tempo c.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

$$0 = Ax + B\bar{u}$$

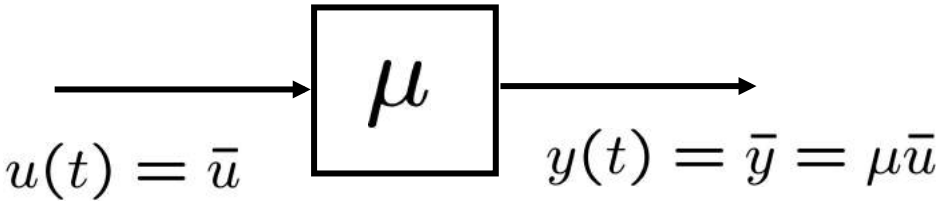
$$Ax = -B\bar{u}$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$\det(A) = 0$$

- $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \Rightarrow \exists\, \bar{x}$ unico

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = -CA^{-1}B\bar{u} + D\bar{u}$$
$$= \underbrace{\left(-CA^{-1}B + D\right)}_{\mu \text{ guadagno statico}} \bar{u}$$



- $\det(A) = 0$
  - $\exists \infty\, \bar{x} \quad \exists \infty\, \bar{y}$
  - $\nexists\, \bar{x} \quad \nexists\, \bar{y}$

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$T \in \Re^{n \times n}, \ \det(T) \neq 0$$

$$x = T\hat{x}, \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

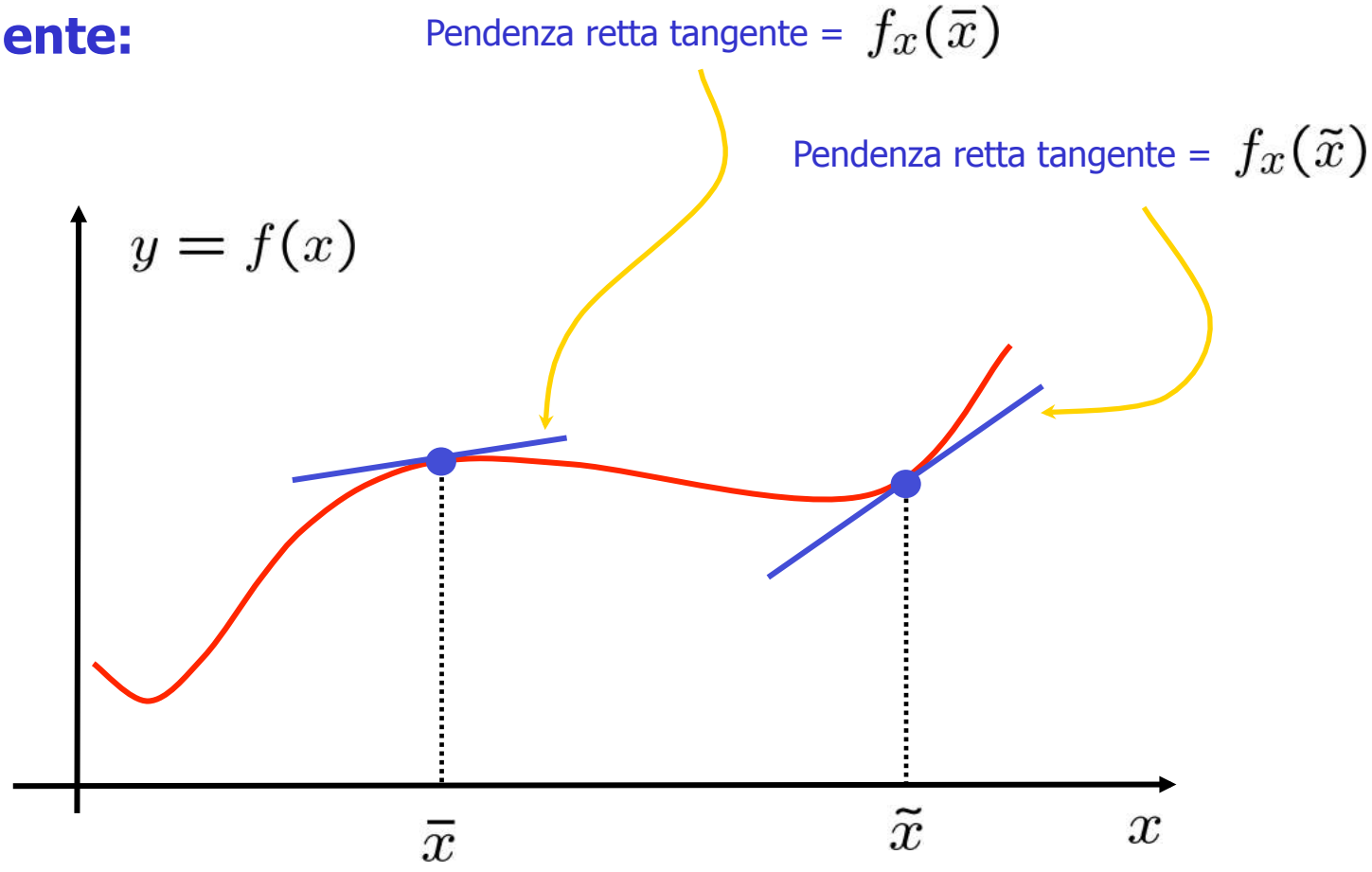
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = T^{-1}(Ax + Bu) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\hat{A}}\hat{x} + \underbrace{T^{-1}B}_{\hat{B}}u \\ y = \underbrace{CT}_{\hat{C}}\hat{x} + \underbrace{D}_{\hat{D}}u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Notazione: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

Linearizzazione della rappresentazione di stato

Concettualmente:



$$y(x) \simeq y(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Linearizzazione rispetto ad un movimento nominale

- Sistema a tempo continuo
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

- Movimento nominale $\bar{x}(t),\ t \geq t_0$ ottenuto in corrispondenza di $x(t_0) = \bar{x}_0$ applicando $u(t) = \bar{u}(t),\ t \geq t_0$

- Perturbazioni
$$x(t_0) = \bar{x}_0 + \delta x_0$$
$$u(t) = \bar{u}(t) + \delta u(t)$$

$$\delta u(t) := u(t) - \bar{u}(t)$$
$$\delta x(t) := x(t) - \bar{x}(t)$$
scostamenti rispetto al movimento nominale

$$\dot{\bar{x}}(t) + \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t), t)$$

$$\simeq f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta x(t) + f_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta u(t)$$

Il movimento nominale e` soluzione del sistema $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$

$$\delta\dot{x}(t) \simeq f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta x(t) + f_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta u(t)$$
$$= A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t)$$

dove evidentemente

$$A(t) = f_x(\bar{x}, \bar{u}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x(t)=\bar{x}(t), u(t)=\bar{u}(t)}}_{n} \Bigg\} n$$

$$B(t) = f_u(\bar{x}, \bar{u}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x(t)=\bar{x}(t), u(t)=\bar{u}(t)}}_{m} \Bigg\} n$$

Per quanto riguarda la variabile d'uscita si ha

$$\bar{y}(t) = g(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \quad \text{e} \quad \delta y(t) := y(t) - \bar{y}(t)$$

Quindi: $y(t) = g(x(t), u(t), t) = g(\bar{x}(t) + \delta x(t), \bar{u}(t) + \delta u(t), t)$

$$\simeq g(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + g_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta x(t) + g_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta u(t)$$

$$\begin{aligned} \delta y(t) &= y(t) - \bar{y}(t) \\ &\simeq g_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta x(t) + g_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\delta u(t) \\ &= C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t) \end{aligned}$$

$$C(t) = g_x(\bar{x}, \bar{u}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial p_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x(t)=\bar{x}(t), u(t)=\bar{u}(t)}}_{n} \Bigg\} p$$

$$D(t) = g_u(\bar{x}, \bar{u}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{x(t)=\bar{x}(t), u(t)=\bar{u}(t)}}_{m} \Bigg\} p$$

In definitiva, dato il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

- Movimento nominale $\bar{x}(t),\ t \geq t_0$ ottenuto in corrispondenza di $x(t_0) = \bar{x}_0$ applicando $u(t) = \bar{u}(t),\ t \geq t_0$

- Perturbazioni
$$x(t_0) = \bar{x}_0 + \delta x_0$$
$$u(t) = \bar{u}(t) + \delta u(t)$$

$$\delta u(t) := u(t) - \bar{u}(t)$$
$$\delta x(t) := x(t) - \bar{x}(t)$$
$$\delta y(t) := y(t) - \bar{y}(t)$$

scostamenti rispetto al movimento nominale

$$\delta \dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t)$$
$$\delta y(t) = C(t)\delta x(t) + D(t)\delta u(t)$$

Sistema linearizzato rispetto al movimento nominale $\bar{x}(t),\ t \geq t_0$

Linearizzazione rispetto ad uno stato di equilibrio nel caso tempo-invariante

- Sistema a tempo continuo tempo-invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

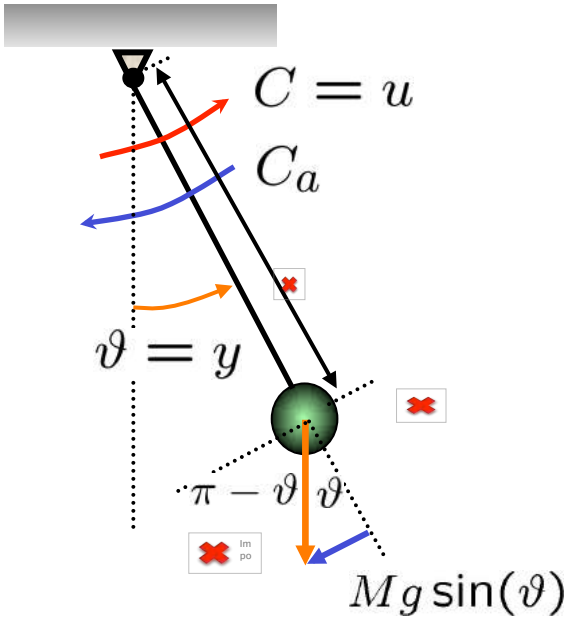
- Movimento di equilibrio $x(t) = \bar{x},\ t \geq t_0$ ottenuto in corrispondenza di $x(t_0) = \bar{x}$ applicando $u(t) = \bar{u},\ t \geq t_0$

$$\delta\dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$$
$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$$

Sistema linearizzato rispetto allo stato di equilibrio $\bar{x}$

- In questo caso particolare, le matrici A, B, C, D sono costanti (cfr. Fond. di Automatica)

Esempio



Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$f_x(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

Poi (tutte queste quantita` non dipendono dallo stato di eq.):

$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \bar{B}$$

$$f_u(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \tilde{B}$$

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{C}$$

$$g_x(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = 0_{\bar{x},\bar{u}} = 0$$

$$g_u(\tilde{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\tilde{x},\bar{u}} = 0_{\tilde{x},\bar{u}} = 0$$