Movimento dello stato nei sistemi lineari

Soluzione generale nel caso a tempo continuo

Si consideri un sistema dinamico lineare libero (senza ingresso)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)\,, \quad x(t_0^-) = x_0 \quad (\star)$$

In generale abbiamo visto che qualunque soluzione $x(t)\,,\ \ t \in [t_0, t_1]$ di $(\star)$ deve soddisfare anche

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x(\tau)d\tau\,, \quad t \in [t_0, t_1]$$

Si definisce la sequenza di approssimazioni successive:

$$\varphi_0(t, t_0, x_0) = x_0$$

$$\varphi_1(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)x_0 d\tau$$

$$\varphi_2(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\varphi_1(\tau, t_0, x_0)d\tau$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\varphi_{m-1}(\tau, t_0, x_0)d\tau$$

Evidentemente

$$\varphi_m(t,t_0,x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)x_0 d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)x_0 d\tau_2 d\tau_1$$

$$\cdots + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\cdots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)x_0 d\tau_m \cdots d\tau_1$$

$$= \left[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1\right.$$

$$\left.\cdots + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1)\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\cdots\int_{t_0}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m)d\tau_m \cdots d\tau_1\right] x_0$$

dove I e\` la matrice identica di dimensione n

Si dimostra che la sequenza di funzioni $\{\varphi_m(t, t_0, x_0),\ m = 0, 1, 2, \ldots\}$ converge uniformemente all'unica soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$ di $(\star)$ su sottoinsiemi compatti di $\Re$

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0) x_0$$

con

$$\Phi(t, t_0) = \Bigg[I + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1$$

$$\cdots + \int_{t_0}^{t} A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \cdots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} A(\tau_m) d\tau_m \cdots d\tau_1 + \cdots \Bigg]$$

serie di Peano-Baker

Si vede subito che

$$\Phi(t,t) = I\,,\ \forall t$$

Inoltre, differenziando l’espressione di $\Phi(t,t_0)$ si ha subito

$$\dot{\Phi}(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

E` ora evidente che assegnato lo stato iniziale x_0 e conoscendo la matrice di funzioni del tempo $\Phi(t,t_0)$ risulta univocamente determinato $x(t),\ \forall t > t_0$

La matrice $\Phi(t,t_0)$ prende il nome di matrice di transizione dello stato per il sistema $(\star)$ ed ha un’importanza fondamentale nello studio del comportamento dei sistemi lineari.

Si consideri ora un sistema dinamico lineare libero tempo-invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t)\,, \qquad x(t_0^-) = x_0 \qquad (\star\star)$$

La matrice di transizione dello stato assume ora una forma particolare; si ha infatti:

$$\varphi_m(t, t_0, x_0) = \Bigg[I + A \int_{t_0}^{t} d\tau_1 + A^2 \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 d\tau_1$$

$$\cdots + A^m \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} d\tau_m \cdots d\tau_1 \Bigg] x_0$$

$$= \left[I + A(t-t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \cdots + A^m \frac{(t-t_0)^m}{m!} \right] x_0$$

Si dimostra che la sequenza di funzioni $\{\varphi_m(t, t_0, x_0),\ m = 0, 1, 2, \ldots\}$

converge uniformemente all'unica soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$ di $(\star\star)$ su

sottoinsiemi compatti di $\Re$

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0$$

con

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= \left[I + A(t - t_0) + A^2\frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots + A^m\frac{(t - t_0)^m}{m!} + \cdots\right] \\ &= \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{(t - t_0)^k}{k!}\right]\end{aligned}$$

Osserviamo che $\Phi(t, t_0)$ in realta` non dipende dagli istanti $t$ e $t_0$ separatamente, ma dipende dalla differenza $(t - t_0)$ e questa e` una conseguenza della tempo-invarianza.

Con leggero abuso notazionale si scrivera`

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 := \Phi(t - t_0)x_0$$

Si consideri ora un sistema dinamico con ingresso

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \qquad x(t_0^-) = x_0 \qquad (\bullet)$$

Si supponga che la soluzione di $(\bullet)$ assuma la forma

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

dove $\Phi(t, t_0)$ e` la matrice di transizione dello stato associata a $(\star)$

- Per $t = t_0$ ➡ $\varphi(t_0, t_0, x_0) = \Phi(t_0, t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$
- Poi, ricordando che $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{r(t)} f(t,\tau)d\tau = \dot{r}(t)f[t, r(t)] + \int_{t_0}^{r(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,\tau)d\tau$, si ha

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t, t_0, x_0, u(\cdot)) &= \dot{\Phi}(t, t_0)x_0 + \Phi(t, t)B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} \dot{\Phi}(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= A(t)\Phi(t, t_0)x_0 + B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= A(t)\left[\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] + B(t)u(t) \\ &= A(t)\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) + B(t)u(t)\end{aligned}$$

soluzione di $(\bullet)$ quindi unica soluzione di $(\bullet)$

Riassumendo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \quad x(t_0^-) = x_0$$

ha soluzione unica

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot)) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

- Se $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t, t_0, 0, u(\cdot)) = \varphi_F(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Movimento forzato

- Se $u(t) = 0,\ \forall t \geq t_0$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t, t_0, x_0, 0) = \varphi_L(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

Movimento libero

e la soluzione totale e\` esprimibile come

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi_L(t) + \varphi_F(t)$$

Si consideri ora un sistema dinamico con ingresso ed eq. d'uscita

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \qquad x(t_0^-) = x_0$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Si ottiene immediatamente

$$y(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

- Se $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_F(t) = \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

risposta forzata

- Se $u(t) = 0, \forall t \geq t_0$

$$\Rightarrow \quad y(t) = y_L(t) = C(t)\Phi(t,t_0)x_0$$

risposta libera

e la risposta totale e` esprimibile come

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

Soluzione generale nel caso a tempo discreto

Si consideri un sistema dinamico lineare libero a tempo discreto

$$x(k+1) = A(k)x(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0 \qquad (\star)$$

Evidentemente $x(k)\,,\ k > k_0$ puo` essere determinato iterando l'equazione di stato (*non serve risolvere un problema differenziale*)

$$x(k_0) = x_0$$

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1) = A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)$$

$$\vdots$$

$$x(k) = A(k-1)A(k-2)A(k-3)\cdots A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)$$

Quindi, in analogia col caso a tempo continuo, abbiamo

$$x(k) = \varphi(k, k_0, x_0) = \Phi(k, k_0)x_0$$

con $\quad \Phi(k, k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} A(j)\,, \qquad k > k_0\,; \qquad \Phi(k_0, k_0) = I$

matrice di transizione dello stato a tempo discreto

Consideriamo ora un sistema dinamico lineare a tempo discreto con ingresso

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$

Evidentemente

$$x(k_0) = x_0$$

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0) + B(k_0)u(k_0)$$

$$\begin{aligned} x(k_0+2) &= A(k_0+1)x(k_0+1)+B(k_0+1)u(k_0+1) \\ &= A(k_0+1)[A(k_0)x(k_0)+B(k_0)u(k_0)]+B(k_0+1)u(k_0+1) \\ &= A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)+A(k_0+1)B(k_0)u(k_0)+B(k_0+1)u(k_0+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k_0+3) &= A(k_0+2)x(k_0+2)+B(k_0+2)u(k_0+2) \\ &= A(k_0+2)A(k_0+1)A(k_0)x(k_0)+A(k_0+2)A(k_0+1)B(k_0)u(k_0) \\ &\quad +A(k_0+2)B(k_0+1)u(k_0+1)+B(k_0+2)u(k_0+2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

Quindi, utilizzando

$$\Phi(k,k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} A(j)\,, \qquad k > k_0\,; \qquad \Phi(k_0,k_0) = I$$

otteniamo

$$\begin{aligned} x(k) &= \varphi(k,k_0,x_0,\{u(k_0),\ldots,u(k-1)\}) \\ &= \Phi(k,k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k,j+1)B(j)u(j)\,, \qquad k > k_0 \end{aligned}$$

- Se $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} x(k) &= \varphi(k,k_0,0,\{u(k_0),\ldots,u(k-1)\}) = \varphi_F(k) \\ \Rightarrow \quad &= \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k,j+1)B(j)u(j)\,, \qquad k > k_0 \end{aligned}$$

Movimento forzato

- Se $u(k) = 0,\ \forall k \geq k_0$

$$\Rightarrow \quad x(k) = \varphi(k,k_0,x_0,0) = \varphi_L(k) = \Phi(k,k_0)x_0\,, \qquad k > k_0$$

Movimento libero

e la soluzione totale e` esprimibile come

$$\varphi(k,k_0,x_0,\{u(k_0),\ldots,u(k-1)\}) = \varphi_L(k) + \varphi_F(k)$$

Consideriamo ora un sistema dinamico lineare a tempo discreto con ingresso ed equazione d'uscita

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$
$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

Evidentemente

$$y(k) = C(k)\Phi(k,k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k,j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k)\,, \qquad k > k_0$$

- Se $x_0 = 0$

$$y(k) = y_F(k) = \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k,j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k)\,,\ k > k_0$$

Risposta forzata

- Se $u(k) = 0,\ \forall k \geq k_0$

$$y(k) = y_L(k) = C(k)\Phi(k,k_0)x_0\,,\ k > k_0$$

Risposta libera

e la risposta totale e` esprimibile come

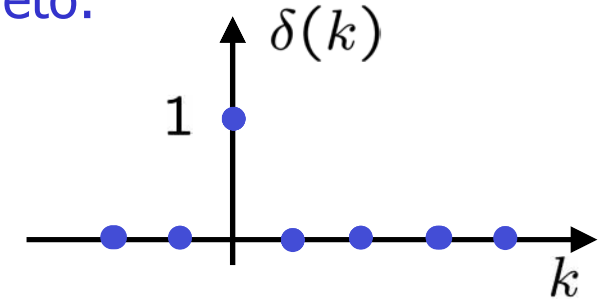
$$y(k) = y_L(k) + y_F(k)$$

Descrizione esterna di sistemi lineari: Caso a tempo discreto

Premesse

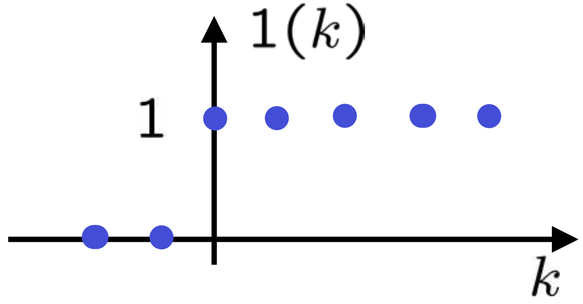
Consideriamo l'impulso unitario a tempo discreto:

$$\delta(k) = \begin{cases} 0, & k \neq 0,\ k \in \mathcal{Z} \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$



ed il gradino unitario a tempo discreto

$$1(k) = \begin{cases} 0, & k < 0,\ k \in \mathcal{Z} \\ 1, & k \geq 0,\ k \in \mathcal{Z} \end{cases}$$



Evidentemente

$$\delta(k) = 1(k) - 1(k-1) \quad \text{e} \quad 1(k) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \delta(k-j), & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Inoltre una sequenza arbitraria $\{x(k)\}$ puo` essere espressa come

$$x(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)\delta(k-j)$$

Consideriamo ora un sistema lineare a tempo discreto (ingresso e uscita scalari)

Analizziamo in quali condizioni, la relazione "esterna" tra ingresso e uscita

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(k,j)u(j) \quad (\star)$$

puo` rappresentare compiutamente il sistema dal punto di vista ingresso-uscita per una opportuna funzione $h(k,j)$

Ipotesi: le sequenze $\{h(k,j)\}$ per qualunque k fissato e $\{u(j)\}$ sono tali per cui $(\star)$ e` ben definita. Per esempio, $\{h(k,j)\} \in l_2$ e $\{u(j)\} \in l_2$

Nelle condizioni in cui la $(\star)$ e` ben definita, essa e` anche una relazione lineare

- Supponiamo ora che $h(k,j)$ indichi la risposta del sistema all'istante k causata da un impulso unitario applicato all'istante j
- Per la linearita` la risposta del sistema all'istante $k$ causata da un impulso all'istante $j$ di ampiezza $u(j)$ e` $h(k,j)u(j)$
- Sempre per la linearita`, la risposta del sistema all'istante $k$ causata da due impulsi agli istanti $j_1$ e $j_2$ di ampiezze $u(j_1)$ e $u(j_2)$ e` $h(k,j_1)u(j_1) + h(k,j_2)u(j_2)$
- Pertanto, all'istante k la sequenza in uscita al sistema dinamico $y(k)$ causata da una sequenza d'ingresso $\{u(j)\}$ si puo` esprimere

$$\boxed{y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(k,j)u(j)}$$

dove $h(k,j)$ rappresenta quindi la risposta all'istante k causata da un impulso unitario $\delta(k-j)$ applicato all'istante j

Consideriamo ora un sistema lineare a tempo discreto (ingresso e uscita scalari) tempo-invariante

se $\{h(k,0)\}$ e` la risposta a $\{\delta(k)\}$ ne consegue che $\{h(k-j,0)\}$ e` la risposta a $\{\delta(k-j)\}$

Quindi, con leggero abuso notazionale si definisce

$$h(k-j) := h(k-j,0)$$

e pertanto si ottiene la ben nota somma di convoluzione

$$y(k) = u(k) * h(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(k-j)u(j)$$

Evidentemente, con un cambio di variabile si ha anche

$$y(k) = h(k) * u(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)u(k-i)$$

La proprieta` di causalita` implica ed e` implicata dal fatto che l'uscita deve essere identicamente nulla prima che un ingresso sia applicato.

$$h(k,j) = 0 \quad \forall j,\, \forall k < j$$

E quindi quando il sistema e` causale si ha

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{k} h(k,j)u(j)$$

$$\Rightarrow \quad y(k) = \sum_{j=-\infty}^{k_0-1} h(k,j)u(j) + \sum_{j=k_0}^{k} h(k,j)u(j)$$

$$= Y(k;k_0-1) + \sum_{j=k_0}^{k} h(k,j)u(j)$$

Si definisce che il sistema e` in quiete all'istante k_0 se

$$u(k) = 0,\ \forall k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad y(k) = 0,\ \forall k \geq k_0$$

e cio` implica $Y(k;k_0-1) = 0$

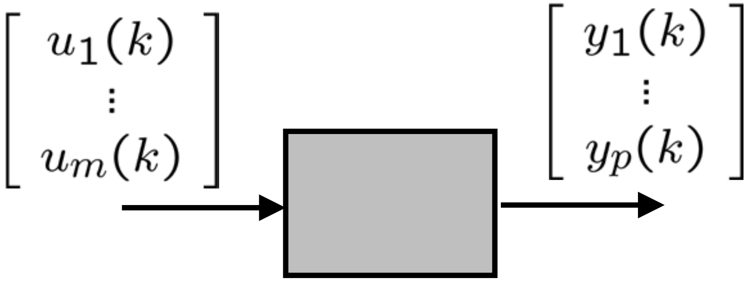
Se quindi si sa che il sistema e` in quiete all'istante $k_0$ si puo` scrivere

$$y(k) = \sum_{j=k_0}^{\infty} h(k,j)u(j)$$

e nel caso di sistema causale in quiete all'istante k_0 si ha infine

$$y(k) = \sum_{j=k_0}^{k} h(k,j)u(j)$$

Possiamo generalizzare al caso di sistema lineare a tempo discreto (ingresso e uscita vettoriali)



Si vede subito che si puo` scrivere

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H(k,j)u(j)$$

dove la matrice di risposta impulsiva a tempo discreto e` data da

$$H(k,j) = \begin{bmatrix} h_{11}(k,j) & h_{12}(k,j) & \cdots & h_{1m}(k,j) \\ h_{21}(k,j) & h_{22}(k,j) & \cdots & h_{2m}(k,j) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ h_{p1}(k,j) & h_{p2}(k,j) & \cdots & h_{pm}(k,j) \end{bmatrix}$$

e $h_{rs}(k,j)$ indica la componente r della risposta del sistema all'istante k causata da un impulso unitario applicato all'istante j sulla componente s dell'ingresso mentre tutte le altre componenti dell'ingresso sono identicamente nulle.

- Tutte le considerazioni e definizioni del caso scalare si estendono al caso vettoriale senza difficolta`

Infine, nel caso in cui si disponga di una descrizione in eq. di stato con stato iniziale nullo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k)\,, \qquad x(k_0) = 0 \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned}$$

e ricordando che

$$y(k) = \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k,j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k)\,, \qquad k > k_0$$

otteniamo subito

$$H(k,j) = \begin{cases} C(k)\Phi(k,j+1)B(j)\,, & k > j \\ D(k) & k = j \\ 0 & k < j \end{cases}$$

che nel caso tempo-invariante diventa

$$H(k-j) = \begin{cases} CA^{k-(j+1)}B\,, & k > j \\ D & k = j \\ 0 & k < j \end{cases}$$

Descrizione esterna di sistemi lineari: Caso a tempo continuo

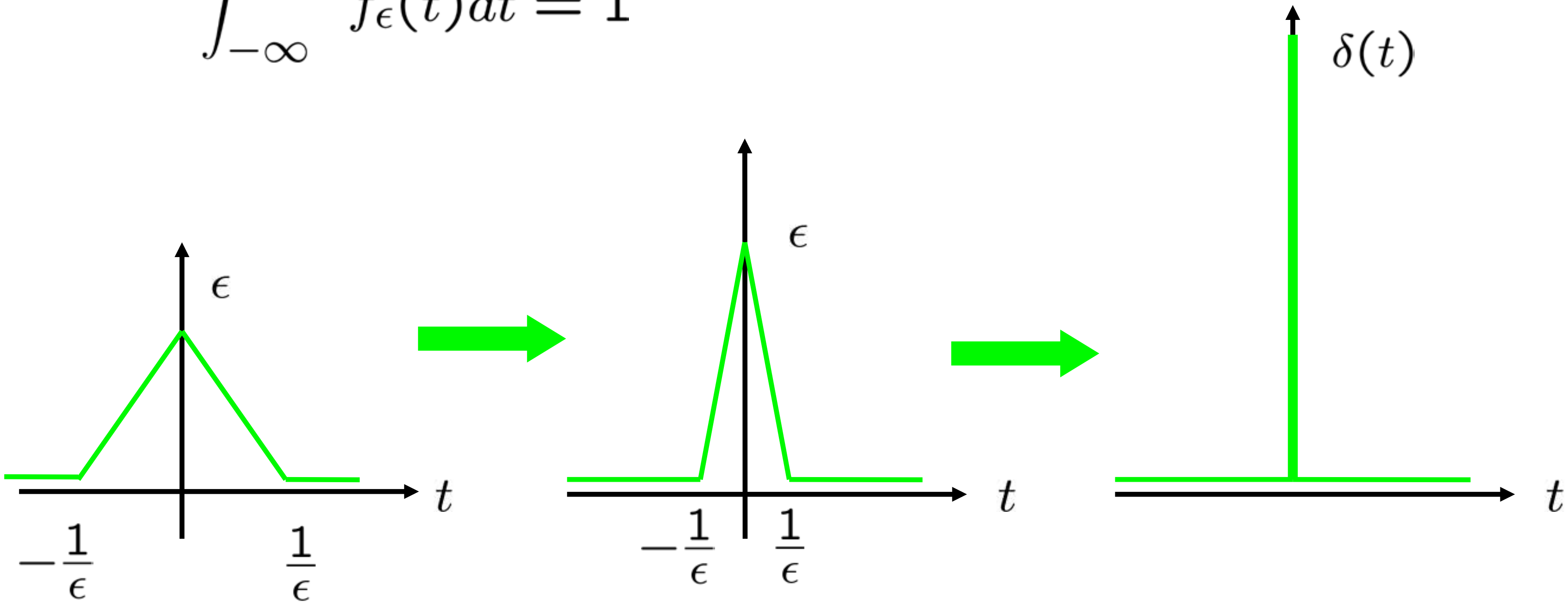
Ricordiamo: "funzione" impulso di Dirac

L' impulso di Dirac non e` una funzione nel senso usuale del termine ma e` una cosiddetta "distribuzione" o "funzione generalizzata" definita come:

$$\delta(t) := \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

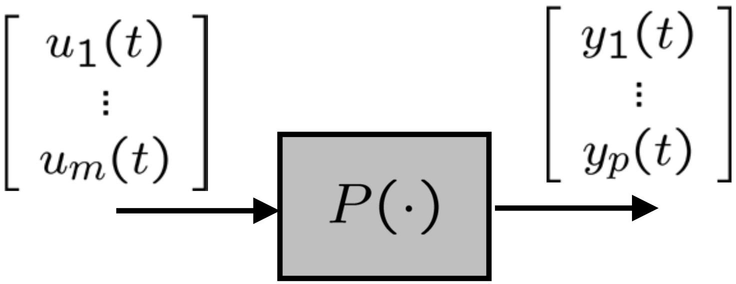
Si può vedere come il $\lim_{\epsilon \to \infty} f_\epsilon(t)$ di una successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)dt = 1$$



Descrizione esterna di sistemi lineari a tempo continuo

Si dimostra (Antsaklis-Michel) che



$$y(t) = (Pu)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_P(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Se $u_j(t) \neq 0,\ u_k(t) = 0,\ \forall k = 1, \ldots, m,\ k \neq j$

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{P_{ij}}(t,\tau)u_j(\tau)d\tau$$

con $H_P(t,\tau) = [h_{P_{ij}}(t,\tau)]$ matrice di risposta impulsiva dove $h_{P_{ij}}(t,\tau)$ e` la componente i della risposta all'istante t ad un impulso all'istante τ applicato sulla componente j dell'ingresso mentre tutte le altre componenti dell'ingresso sono identicamente nulle

Per la causalita` l'uscita deve essere nulla prima dell'applicazione di un ingresso. Quindi

$$\forall\tau,\ H_P(t,\tau) = 0,\ \forall t < \tau \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} H_P(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t_0} H_P(t,\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} H_P(t,\tau)u(\tau)d\tau \\ &:= Y(t;t_0) + \int_{t_0}^{t} H_P(t,\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Si puo` quindi dire che il sistema e` in quiete all'istante t_0 se

$$u(t) = 0,\ \forall t \geq t_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0,\ \forall t \geq t_0$$

Nel caso tempo-invariante $H_P(t,\tau) = H_P(t-\tau,0)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = (H_P * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} H_P(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Siccome $H_P(t)$ caratterizza le risposte al tempo t ad ingressi impulsivi applicati in $\tau = 0$ la causalita` implica $H_P(t) = 0, \forall t < 0$

Inoltre, se il sistema e` in quiete all'istante $t_0 = 0$ (nel caso tempo invariante non si perde in generalita`)

$$y(t) = \int_{0}^{t} H_P(t-\tau)u(\tau)d\tau\,, \qquad t \geq 0$$

ed operando la trasformata di Laplace membro a membro

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\int_{0}^{t} H_P(t-\tau)u(\tau)d\tau\right]$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = H_P(s)U(s)$$

dove $H_P(s)$ e` la trasformata di Laplace della matrice di risposta impulsiva e coincide con la matrice di trasferimento del sistema.

Infine, nel caso in cui si disponga di una descrizione in eq. di stato con stato iniziale nullo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \qquad x(t_0^-) = 0$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

e osservando che

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \\ &= \int_{t_0}^{t} [C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)u(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

otteniamo subito

$$H_P(t,\tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

Calcolo del movimento nel caso lineare tempo-invariante a tempo continuo

Abbiamo visto che nel caso di un sistema dinamico lineare libero tempo-invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t)\,, \qquad x(t_0^-) = x_0$$

l'unica soluzione $\varphi(t, t_0, x_0)$ e` data da

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t - t_0)x_0$$

con

$$\begin{aligned}\Phi(t-t_0) &= \left[I + A(t - t_0) + A^2\frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots + A^m\frac{(t - t_0)^m}{m!} + \cdots\right] \\ &= \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{(t - t_0)^k}{k!}\right]\end{aligned}$$

Si definisce la matrice di transizione in termini dell'esponenziale di matrice

$$e^{A(t-t_0)} := \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{(t - t_0)^k}{k!}\right]$$

per cui

$$\boxed{\varphi(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0}$$

e quindi, ponendo $t_0 = 0$ si ha

$$\varphi(t, 0, x_0) = e^{At} x_0$$

L'esponenziale di matrice gode delle seguenti importanti proprieta`

$$e^{At_1} e^{At_2} = e^{A(t_1 + t_2)}, \ \forall t_1, t_2$$

$$A e^{At} = e^{At} A$$

$$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$$

Possiamo ora particolarizzare la relazione tra descrizione interna in equazioni di stato ed esterna tramite la risposta impulsiva nel caso tempo-invariante; abbiamo quindi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0^-) = 0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

da cui

$$H_P(t-\tau) = \begin{cases} Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

Calcolo di e^{At}

L'esponenziale di matrice e^{At} gioca un ruolo fondamentale e quindi il suo calcolo e` inevitabile per determinare il movimento dello stato.

Esempio 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \cdots$$

$$= I + At = \begin{bmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 2

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Tuttavia in generale il calcolo e` molto piu` complicato.

Calcolo di e^{At} col metodo della serie infinita

Sia A una matrice costante (reale o complessa) e sia

$$S_q(t) = I + \sum_{k=1}^{q} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Si dimostra che ogni elemento della matrice $S_q(t)$ converge uniformemente su qualunque intervallo $(-a, a)$ per $q \to \infty$

Inoltre $\dot{S}_q(t) = AS_q(t) = S_q(t)A$

Quindi, per un t fissato, si puo` valutare $e^{At} \simeq S_q(t)$ per valori crescenti di $q$ fino a che gli elementi di $S_q(t)$ non cambiano piu` in modo significativo

In alcuni casi particolari $e^{At} = S_{\bar{q}}(t)$ per un valore specifico $\bar{q}$.
Questo e` il caso, per esempio, in cui tutti gli autovalori di A sono nulli per cui esiste $\bar{k} \leq n$ tale che $A^k = 0, \forall k \geq \bar{k}$

Calcolo di e^{At} col metodo della trasformazione di similitudine

Consideriamo $\dot{x}(t) = Ax(t)\,,\ x(0^-) = x_0$ ➡ $\varphi(t, 0, x_0) = e^{At}x_0$

$T \in \Re^{n\times n},\ \det(T) \neq 0$ ➡ $x = T\hat{x},\quad \hat{x} = T^{-1}x$

↳ $\dot{\hat{x}} = T^{-1}Ax = T^{-1}AT\hat{x}\,,\qquad \hat{x}_0 = T^{-1}x_0$

la cui soluzione e` $\psi(t, 0, \hat{x}_0) = e^{T^{-1}ATt}T^{-1}x_0$ e quindi, definendo $J := T^{-1}AT$ otteniamo

$$\boxed{\varphi(t, 0, x_0) = Te^{Jt}T^{-1}x_0}$$

Supponiamo ora che che la trasformazione di similitudine sia tale che

$$J := T^{-1}AT$$

sia in forma canonica di Jordan

Consideriamo innanzitutto il caso in cui A ammetta la costruzione di una base di n autovettori v_i linearmente indipendenti associati agli autovalori $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ (non necessariamente distinti)

Allora

$$T = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n] \quad \Rightarrow \quad J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e quindi

$$e^{Jt} = I + \sum_{k=1}^{\infty} J^k \frac{t^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t, 0, x_0) = Te^{Jt}T^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}x_0$$

Consideriamo ora il caso generale in cui vi siano autovalori multipli. E` sempre possibile costruire n vettori v_i linearmente indipendenti tali che

$$T = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n] \quad \Longrightarrow \quad J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & J_s \end{bmatrix}$$

dove $J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$

e $J_i,\ i \geq 1$ e` una matrice di dimensione $n_i \times n_i$ della forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{k+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{k+i} \end{bmatrix}$$

in cui non necessariamente $\lambda_{k+i} \neq \lambda_{k+j},\ i \neq j$ e

$$k + n_1 + \cdots + n_s = n$$

Ora evidentemente

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_0 t} & \cdots & \cdots & 0 \\ & e^{J_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{J_s t} \end{bmatrix}$$

dove $e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix}$

$$\varphi(t,0,x_0) = Te^{Jt}T^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} e^{J_0 t} & \cdots & \cdots & 0 \\ & e^{J_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{J_s t} \end{bmatrix} T^{-1}x_0$$

Per quanto riguarda $J_i,\ i = 1,\ldots,s$ si ha $J_i = \lambda_{k+i} I_i + N_i$ dove I_i e\` la matrice identica di ordine $n_i \times n_i$ e $N_i$ e\` una matrice $n_i \times n_i$ nilpotente ($N_i^k = 0,\ \forall k \geq n_i$) data da

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

D'altra parte si ha subito

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_{k+i} I_i t + N_i t} = e^{\lambda_{k+i} t} e^{N_i t}$$

Siccome $N_i^k = 0, \forall k \geq n_i$, la matrice $e^{N_i t}$ si puo` determinare con il metodo della serie infinita, ovvero

$$e^{N_i t} = I + \sum_{k=1}^{n_i - 1} N_i^k \frac{t^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\boxed{e^{J_i t} = e^{\lambda_{k+i} t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, s}$$

Calcolo di e^{At} mediante il teorema di Cayley-Hamilton

Data una matrice quadrata A di dimensione n e sia $p_A(\lambda)$ il suo poliniomio caratteristico della forma

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n$$

Si dimostra che

$$\boxed{p_A(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_n A^n = 0}$$

Ne consegue:

- $A^n = (-1)^{n+1}\left[\alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1}\right]$
- Dato un qualunque polinomio $f(\lambda)$ esistono $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ tali che
$$f(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \cdots + \beta_{n-1}A^{n-1} = 0$$
Infatti dividendo $f(\lambda)$ per $p_A(\lambda)$ abbiamo
$$f(\lambda) = p_A(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$$
dove il grado di $r(\lambda)$ e` al piu` $n-1$ e siccome $p_A(A) = 0$ si ha $f(A) = r(A)$

Vediamo ora come utilizzare il teorema di C.H. per determinare e^{At}

Si ha

$$e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}, \qquad t \in (-a, a)$$

Dal teorema di C.H. consegue che

$$f(A) = e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\, A^k$$

I coefficienti $\alpha_k(t)$ si determinano molto facilmente. Fattorizziamo il pol. caratteristico $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$ e consideriamo due funzioni $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ analitiche.

Se $\left.\frac{d^l}{d\lambda^l} f(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^l}{d\lambda^l} g(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i}$, $l = 0, \ldots, m_i - 1;\ i = 1, \ldots, p$

$\Rightarrow$ $f(A) = g(A)$

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $f(A) = e^{At}$, $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, $g(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ m_1 = 2$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= 1 = \alpha_0 \\ t e^{\lambda_1 t} &= t = \alpha_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = f(A) = g(A) = \alpha_1 A + \alpha_0 I = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{At} mediante la trasf. di Laplace

Consideriamo nuovamente $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0^-) = x_0$ ed operando la TdL ad ambo i membri

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t)]$$

- $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$
- $\mathcal{L}[Ax(t)] = A\mathcal{L}[x(t)]$
- $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0^-) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0^-) \end{bmatrix}$

Quindi $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t)] \Rightarrow sX(s) - x(0^-) = AX(s)$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = x_0 \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x_0$$

$$\varphi(t, 0, x_0) = \Phi(t, 0)x_0 = e^{At}x_0 = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]}$$

Consideriamo poi $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(0^-) = x_0$ ed operando la TdL ad ambo i membri

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[Bu(t)]$$

$$sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Utilizzando $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$ e la proprieta` della TdL del prodotto, otteniamo immediatamente

$$\varphi(t, 0, x_0, u(\cdot)) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Modi di risposta

Consideriamo nuovamente $\dot{x}(t) = Ax(t)\,,\; x(0^-) = x_0 \qquad (\star)$

$$\varphi(t,0,x_0) = \Phi(t,0)x_0 = e^{At}x_0$$

Ricordiamo $\det(sI - A) = \prod_{i=1}^{\sigma} (s - \lambda_i)^{n_i}$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ sono gli autovalori distinti di A ed n_i e` la molteplicita` algebrica di tali autovalori.

Ovviamente $\sum_{i=1}^{\sigma} n_i = n$

Si dimostra che

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{k=0}^{n_i-1} A_{ik} t^k e^{\lambda_i t} \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} [A_{i0}e^{\lambda_i t} + A_{i1} t e^{\lambda_i t} + \cdots + A_{i,n_i-1} t^{n_1-1} e^{\lambda_i t}] \end{aligned}$$

dove $A_{ik} = \dfrac{1}{k!} \dfrac{1}{(n_i - 1 - k)!} \lim_{s \to \lambda_i} \left\{ \dfrac{d^{n_i-1-k}}{ds^{n_i-1-k}} \left[(s - \lambda_i)^{n_i} (sI - A)^{-1} \right] \right\}$

La dimostrazione si basa sull'espansione in fratti semplici

Quindi:

e^{At} puo` essere sempre espressa come somma di termini $A_{ik}t^k e^{\lambda_i t}$

- $A_{ik}t^k e^{\lambda_i t}$ vengono denominati modi di risposta del sistema $(\star)$
- se un autovalore λ_i ha molteplicita` algebrica n_i in generale ad esso possono essere associati n_i modi di risposta

$$A_{ik}t^k e^{\lambda_i t},\ k = 0, 1, \ldots, n_i - 1$$

- evidentemente possono esservi particolari scelte di x_0 per cui modi di risposta si combinano o non si manifestano del tutto nella risposta complessiva $\varphi(t, 0, x_0)$
- quando gli autovalori di A sono distinti $\sigma = n, n_i = 1, i = 1, \ldots, n$ e si ha

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$$

dove $A_i = \lim_{s \to \lambda_i} \left[(s - \lambda_i)(sI - A)^{-1} \right]$

Esempio 1 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2,\, n_1 = 2$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{1} A_{1k} t^k e^{-2t} = A_{10} e^{-2t} + A_{11} t e^{-2t}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix}$$

$$A_{10} = \lim_{s \to -2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 (sI - A)^{-1} \right] \right\}$$

$$= \lim_{s \to -2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\cancel{(s+2)^2} \frac{1}{\cancel{(s+2)^2}} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \right] \right\} = \lim_{s \to -2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \lim_{s \to -2} \left[(s+2)^2 (sI - A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{s \to -2} \left[\cancel{(s+2)^2} \frac{1}{\cancel{(s+2)^2}} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \right] = \lim_{s \to -2} \left\{ \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} t e^{-2t}$$

Esempio 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2};\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s^2+s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \lim_{s \to -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (sI - A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{s \to -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\cancel{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \frac{1}{\cancel{\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \ldots = -\frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = A_1^*$$

$$e^{At} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_1^* e^{\lambda_1^* t} = \ldots$$

$$= 2(\mathrm{Re}(A_1))(\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t})) - 2(\mathrm{Im}(A_1))(\mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}))$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}t} \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \right]$$

Esempio 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ n_1 = 2$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{1} A_{1k} t^k e^t = A_{10} e^t + A_{11} t e^t$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{10} = \lim_{s \to 1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s-1)^2 (sI - A)^{-1} \right] \right\}$$

$$= \lim_{s \to 1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\cancel{(s-1)^2} \frac{1}{\cancel{(s-1)^2}} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \right] \right\} = \lim_{s \to 1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \lim_{s \to 1} \left[(s-1)^2 (sI - A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{s \to 1} \left[\cancel{(s-1)^2} \frac{1}{\cancel{(s-1)^2}} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t e^t$$

Non tutti i modi sono necessariamente presenti in e^{At}
la presenza o meno di tutti i modi dipende dal numero e dimensione dei sottoblocchi di Jordan associati ad autovalori multipli

Esempio 3 bis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ n_1 = 2$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{1} A_{1k} t^k e^t = A_{10} e^t + A_{11} t e^t$$

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{10} = \lim_{s\to 1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[(s-1)^2 (sI-A)^{-1} \right] \right\}$$

$$= \lim_{s\to 1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\cancel{(s-1)^2} \frac{1}{\cancel{(s-1)^2}} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \right] \right\} = \lim_{s\to 1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \lim_{s\to 1} \left[(s-1)^2 (sI-A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{s\to 1} \left[\cancel{(s-1)^2} \frac{1}{\cancel{(s-1)^2}} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t e^t$$

Ora tutti i modi sono presenti in e^{At} a causa del blocco di Jordan di ordine 2

Diversa caratterizzazione dei modi di risposta nel caso di autovalori distinti

Vogliamo scrivere i modi di risposta nel caso di autovalori distinti in modo da rendere esplicite alcune proprieta` da cui consegue la presenza o meno nella risposta di alcuni modi.

In questo caso $\det(sI - A) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$ e $e^{At} = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$

Si dimostra che $\boxed{A_i = v_i \tilde{v}_i^\top}$ dove

$(\lambda_i I - A) v_i = 0$ $\quad v_i$ autovettore destro associato a λ_i

$\tilde{v}_i^\top (\lambda_i I - A) = 0$ $\quad \tilde{v}_i^\top$ autovettore sinistro associato a λ_i

Infatti si vede subito che (autovalori distinti implica n autovettori l.i.)

$$Q := [v_1 \,|\, v_2 \,|\, \cdots \,|\, v_n] \Rightarrow P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^\top \\ \vdots \\ \tilde{v}_n^\top \end{bmatrix}; \quad \tilde{v}_i^\top v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= [sI - Q\text{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] Q^{-1}]^{-1} \\ &= Q[sI - \text{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]]^{-1} Q^{-1} \\ &= Q\text{diag}\,[(s-\lambda_1)^{-1}, \ldots, (s-\lambda_n)^{-1}] Q^{-1} = \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{v}_i^\top (s-\lambda_i)^{-1} \end{aligned}$$

Ora, se lo stato iniziale e` "parallelo" ad uno degli autovettori $v_j$ di $A$ l'unico modo di risposta che si manifesta nel movimento dello stato e` $e^{\lambda_j t}$

$$x_0 = \alpha v_j \Rightarrow \varphi(t, 0, x_0) = e^{At} x_0$$
$$= v_1 \tilde{v}_1^\top x_0 e^{\lambda_1 t} + \cdots + v_n \tilde{v}_n^\top x_0 e^{\lambda_n t} = \alpha v_j e^{\lambda_j t}$$

Esempio $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$

$$Q = [v_1 \,|\, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ Q^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^\top \\ \\ \tilde{v}_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

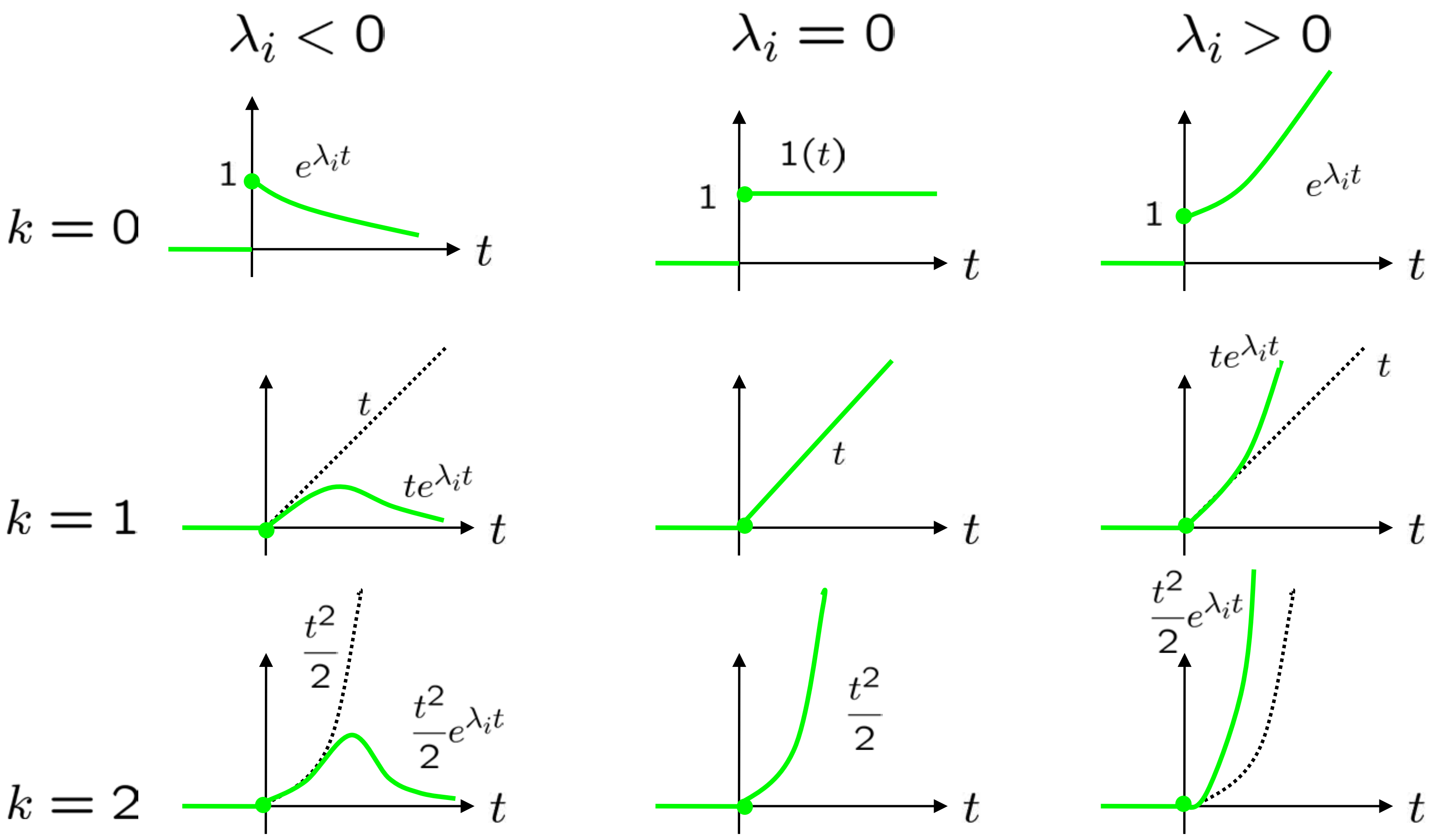
$$e^{At} = v_1 \tilde{v}_1^\top e^{-t} + v_2 \tilde{v}_2^\top e^{t} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{t}$$

e quindi se $x_0 = \alpha v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

il modo e^{t} non si manifesta nel movimento libero conseguente a tale stato iniziale

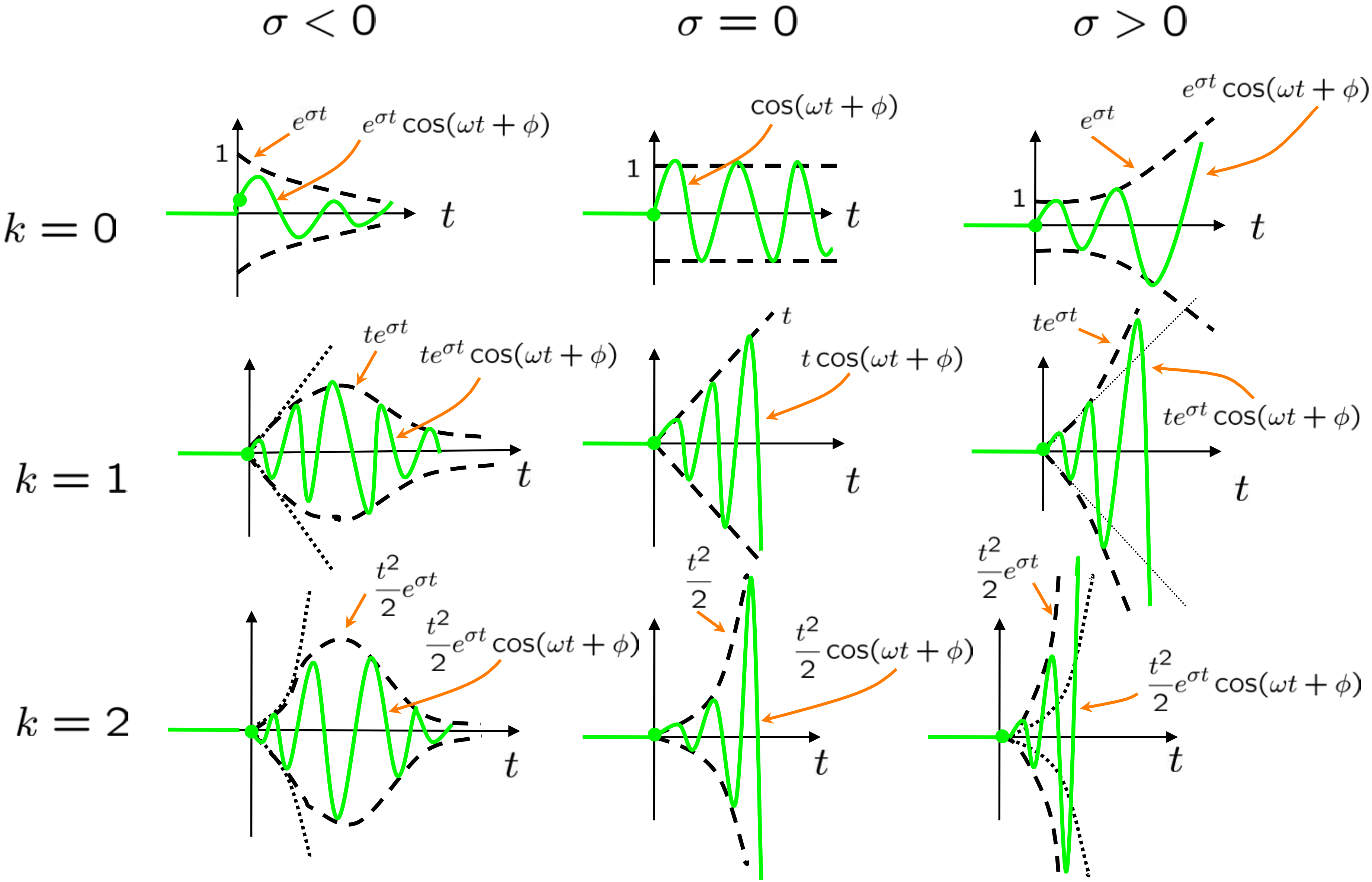
Studio qualitativo del termine $t^k e^{\lambda_i t}$

- $\lambda_i \in \Re$



Studio qualitativo del termine $t^k e^{\lambda_i t}$

- $\lambda \in \mathcal{C}$, $\lambda_1 = \sigma + j\omega$, $\lambda_2 = \sigma - j\omega$



Descrizione interna in equazioni di stato in relazione alla descrizione esterna ingresso-uscita

di sistemi lineari tempo-invarianti a tempo continuo

Ricordiamo:

si consideri un sistema lineare descritto da eq. di stato con stato iniziale nullo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)\,, \qquad x(t_0^-) = 0$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

e si aveva

$$H(t,\tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

Inoltre nel caso tempo-invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \qquad x(t_0^-) = 0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

abbiamo

$$H_P(t-\tau) = \begin{cases} Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

e

$$Y(s) = H_P(s)U(s)$$

Funzione di trasferimento

Riprendiamo alcuni concetti da Fond. di Automatica generalizzandoli quando necessario. Consideriamo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \qquad x(0^-) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Operando la trasf. di L. ad ambo i membri dell'eq. di stato:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

Se $x(0^-) = 0$

Funzione di trasferimento

$$Y(s) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{p\times n}\overbrace{(sI - A)^{-1}}^{n\times n}\overbrace{B}^{n\times m} + \overbrace{D}^{p\times m}\right]}_{p\times m}U(s) = H(s)U(s)$$

Vediamo la struttura della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} H_{11}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{i1}(s) & \cdots & H_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(s) & \cdots & H_{pm}(s) \end{bmatrix}\right\} p}_{m}$$

Considerando ora la componente i-esima del vettore di uscita

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(s) U_j(s) = H_{i1}(s)U_1(s) + H_{i2}(s)U_2(s) + \cdots$$

Per cui

$$\begin{aligned} & x(0^-) = 0 \\ & u_k(t) = 0, \;\; k \neq j \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad H_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

(sovrapposizione effetti)

Funzione di trasferimento di sistemi equivalenti

Ricordiamo

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$T \in \Re^{n \times n}$, $\det(T) \neq 0$

$$x = T\hat{x}, \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \\ y = CT\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\
&= C\left[T\left(sI - T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[T\left(sT^{-1}T - T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[T\left(T^{-1}(sI - A)T\right)^{-1}T^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[TT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D \\
&= H(s)
\end{aligned}
$$

La funzione di trasferimento non dipende dalla particolare scelta di variabili di stato considerata per la rappresentazione interna

Riassumendo:

Rappresentazione Interna

$$(A, B, C, D)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione Esterna

$$G(s) = \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]$$

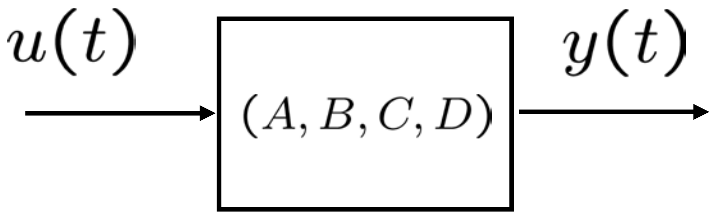
$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$(\text{con } x(0^-) = 0)$$

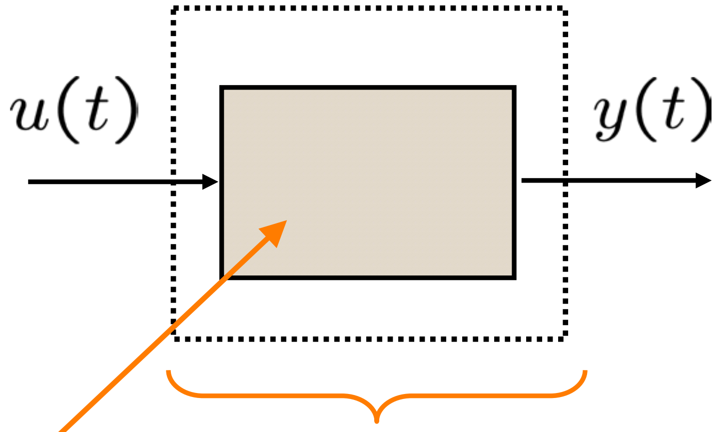
? **"Realizzazione"**

Rappresentazione Interna

Rappresentazione Esterna



Si tiene conto della struttura "interna" del sistema



Rappresentazione IN/OUT del sistema

Funzione di trasferimento, risposta impulsiva

Proprieta` della FDT nel caso scalare

Riprendiamo da Fond. di Automatica alcune proprieta`:

$$H(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & s - a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

Nel caso di ingresso ed uscita scalari:

Matrice compl. algebrici

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

- $\det(sI - A) = \varphi(s)$ polinomio di grado n
- $K(s) = \left[k_{ij}(s),\ i,j = 1,\dots,n\right]$

  $k_{ij}(s)$ polinomio di grado $< n, \ \forall\, i,j$
- $$C\,(sI - A)^{-1}\,B = \frac{1}{\det(sI - A)} \underbrace{CK(s)B}_{M(s)} = \frac{M(s)}{\varphi(s)}$$

  $M(s)$ polinomio di grado $< n$

Quindi:

$$H(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D$$

$$= \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

- $N(s)$ polinomio di grado n
- se $D = 0$

  ↳ $N(s)$ polinomio di grado $< n$

In conclusione (caso scalare):

- $G(s) = \dfrac{N(s)}{\varphi(s)}$ funzione razionale (rapporto di polinomi) in s

- $\varphi(s) = \det(sI - A)$ polinomio di grado n

- $N(s)$ ha grado $m \leq n$

  $= n$ solo se $D \neq 0$

salvo cancellazioni

Se ci sono fattori comuni:

$$H(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{\varphi}(s)}$$

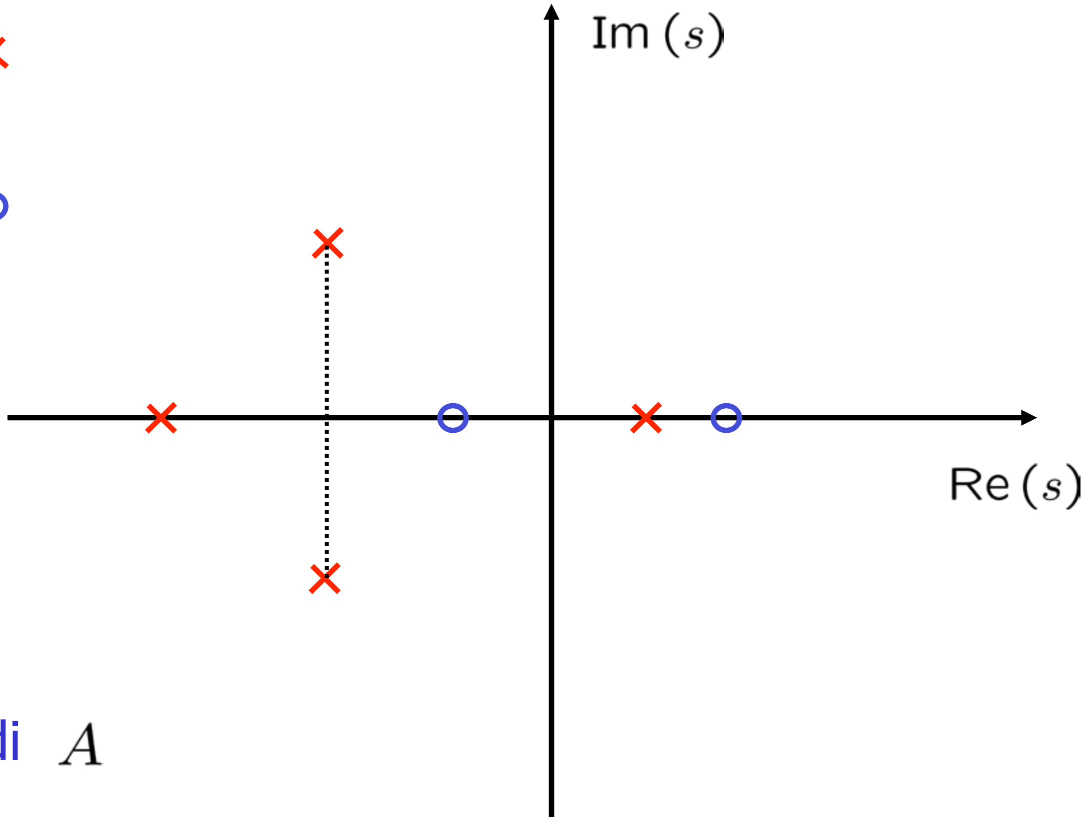
- $\bar{\varphi}(s)$ e` un fattore di $\varphi(s)$ di grado $\nu < n$
- $\bar{N}(s)$ ha grado $m < \nu$

  $= \nu$ solo se $D \neq 0$

Poli e zeri di una FDT nel caso scalare

- Poli: radici di $\varphi(s)$ $\times$
- Zeri: radici di $N(s)$ $\circ$

$$H(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$



- I poli sono autovalori di A
- Un autovalore di A puo` non essere un polo in caso di cancellazioni (vedi esempi)
- Il caso con piu` ingressi ed uscite richiede alcune cautele aggiuntive

Esempio 1

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [1 \;\; 1]\, x \end{cases} \qquad n = 2$$

$$H(s) = [1 \;\; 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \;\; 1] \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

$\bar{\varphi}(s) = s + 1$ e\` un fattore di $\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = x_1 \Longrightarrow x_1(t) = 0,\ \forall\, t \geq 0$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_2 = \cancel{x_1} - x_2 + u \\ y = \cancel{x_1} + x_2 \end{cases}}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

La parte della dinamica descritta da x_1 e\` "nascosta"

- Come si vedra\` piu\` avanti nel corso la presenza di dinamica "nascosta" e\` legata alla non minimalita\` della descrizione in eq. di stato (raggiungibilita\`, indistinguibilita\`)

Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [0 \;\; 1]\, x \end{cases} \qquad n = 2$$

$$G(s) = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \;\; 1] \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

$\bar{\varphi}(s) = s+1$ e` un fattore di $\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{array}} \end{cases}$$

questa parte della dinamica evolve senza essere influenzata dall'evoluzione di $x_1(t)$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

la parte della dinamica descritta da x_1 e\` "nascosta"

- Nuovamente, come vedremo piu\` avanti nel corso la presenza di dinamica "nascosta" e\` legata alla non minimalita\` della descrizione in eq. di stato (raggiungibilita\`, indistinguibilita\`)

FDT nel caso generale - considerazioni

Abbiamo visto che nel caso di piu` ingressi ed uscite si ha

$$Y(s) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{p \times n}\overbrace{(sI - A)^{-1}}^{n \times n}\overbrace{B}^{n \times m} + \overbrace{D}^{p \times m}\right]}_{p \times m} U(s) = H(s)U(s)$$

$$H(s) = \begin{array}{c} \left.\underbrace{\begin{bmatrix} H_{11}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{i1}(s) & \cdots & H_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(s) & \cdots & H_{pm}(s) \end{bmatrix}}_{m}\right\} p \end{array}$$

Il concetto di polo e zero tuttavia si complica.

Esempio 3

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [-3 \;\; 3]\, x \end{cases} \qquad n = 2$$

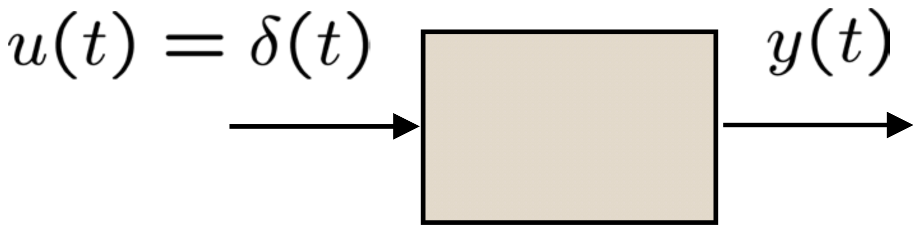
$$H(s) = [-3 \;\; 3] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= [-3 \;\; 3] \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{s+1} & \frac{3(s-1)}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(s-1)}{(s+1)^2} & \frac{3}{s+1} \end{bmatrix}$$

Come vedremo i poli di $H(s)$ in questo caso coincidono con gli autovalori di A e quindi tutta la dinamica “si vede” nella FdT. Tuttavia basta modificare le matrici B e C perche` si manifesti il problema di dinamiche nascoste, ovvero di autovalori di A non presenti nell’insieme di poli di $H(s)$

Definizione alternativa di FDT nel caso scalare



$$x(0^-) = 0$$
$$u(t) = \delta(t)$$

$$U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{1} = Y(s)$$

ovvero $H(s) = \mathcal{L}\left[\text{risposta all'impulso}\right]$

Calcolo del movimento nel caso lineare tempo-invariante a tempo discreto

Si consideri un sistema dinamico lineare libero a tempo discreto

$$x(k+1) = A(k)x(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$

Ricordiamo $\quad x(k) = \varphi(k, k_0, x_0) = \Phi(k, k_0)x_0$

con $\quad \Phi(k, k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} A(j)\,, \qquad k > k_0\,; \qquad \Phi(k_0, k_0) = I$

Quindi, avendo

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

otteniamo

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j)\,,\ k > k_0$$

$$y(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k, j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k)\,, \qquad k > k_0$$

Nel caso di un sistema dinamico lineare libero a tempo discreto tempo-invariante

$$x(k+1) = Ax(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$

Abbiamo

$$x(k) = \varphi(k, k_0, x_0) = \Phi(k-k_0)x_0$$

con

$$\Phi(k-k_0) = A^{(k-k_0)}\,, \qquad k \geq k_0$$

Quindi, avendo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

otteniamo

$$x(k) = A^{(k-k_0)}x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-(j+1)}Bu(j)\,,\; k > k_0$$

$$y(k) = CA^{(k-k_0)}x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-(j+1)}Bu(j) + Du(k)\,, \qquad k > k_0$$

Modi di risposta

Analogamente al caso a tempo continuo si esprime $A^{(k-k_0)}$ in "fratti semplici"; poniamo $k_0 = 0$

Ricordiamo $\det(zI - A) = \prod_{i=1}^{\sigma} (z-\lambda_i)^{n_i}$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ sono gli autovalori distinti di A ed n_i e` la molteplicita` algebrica di tali autovalori.

Ovviamente $\sum_{i=1}^{\sigma} n_i = n$

Si dimostra che

$$A^k = \sum_{i=1}^{\sigma} \left[A_{i0}\lambda_i^k 1(k) + \sum_{l=1}^{n_i-1} A_{il} k(k-1)\cdots(k-l+1)\lambda_i^{k-l} 1(k-l) \right]$$

dove $A_{il} = \dfrac{1}{l!}\dfrac{1}{(n_i-1-l)!} \lim_{z\to\lambda_i} \left\{ \dfrac{d^{n_i-1-l}}{dz^{n_i-1-l}} \left[(z-\lambda_i)^{n_i}(zI-A)^{-1} \right] \right\}$

La dimostrazione si basa sull'espansione in fratti semplici

Quindi:

A^k puo` essere sempre espressa come somma di termini $A_{il}k!\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\lambda_i^k$

- $A_{il}k!\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\lambda_i^k$ vengono denominati modi di risposta del sistema
- se un autovalore λ_i ha molteplicita` algebrica n_i in generale ad esso possono essere associati n_i modi di risposta

$$A_{il}k!\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}\lambda_i^k,\ l = 0, 1, \ldots, n_i - 1$$

- evidentemente possono esservi particolari scelte di x_0 per cui modi di risposta si combinano o non si manifestano del tutto nella risposta complessiva
- quando gli autovalori di A sono distinti $\sigma = n, n_i = 1, i = 1, \ldots, n$ e si ha

$$A^k = \sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^k$$

dove $A_i = \lim_{z \to \lambda_i} \left[(z - \lambda_i)(zI - A)^{-1} \right]$

Diversa caratterizzazione dei modi di risposta nel caso di autovalori distinti

Come nel caso a tempo continuo vogliamo scrivere i modi di risposta nel caso di autovalori distinti in modo da rendere esplicite alcune proprieta` da cui consegue la presenza o meno nella risposta di alcuni modi.

In questo caso $\det(zI - A) = \prod_{i=1}^{n}(z - \lambda_i)$ e $A^k = \sum_{i=1}^{n} A_i \lambda_i^k$

Si dimostra che $\boxed{A_i = v_i \tilde{v}_i^\top}$ dove

$(\lambda_i I - A) v_i = 0$ $\quad v_i$ autovettore destro associato a λ_i

$\tilde{v}_i^\top (\lambda_i I - A) = 0$ $\quad \tilde{v}_i^\top$ autovettore sinistro associato a λ_i

Infatti si vede subito che (autovalori distinti implica n autovettori l.i.)

$$Q := [v_1 \,|\, v_2 \,|\, \cdots \,|\, v_n] \Rightarrow P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^\top \\ \vdots \\ \tilde{v}_n^\top \end{bmatrix} ; \quad \tilde{v}_i^\top v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (zI - A)^{-1} &= [zI - Q\text{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] Q^{-1}]^{-1} \\ &= Q[zI - \text{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]]^{-1} Q^{-1} \\ &= Q\text{diag}\,[(z-\lambda_1)^{-1}, \ldots, (z-\lambda_n)^{-1}] Q^{-1} = \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{v}_i^\top (z-\lambda_i)^{-1} \end{aligned}$$

Ora, se lo stato iniziale e\` "parallelo" ad uno degli autovettori $v_j$ di $A$ l'unico modo di risposta che si manifesta nel movimento dello stato e\` ${\lambda_j}^k$

$$x_0 = \alpha v_j \quad \Rightarrow \quad x(k) = A^k x_0$$
$$= v_1 \tilde{v}_1^\top x_0 \lambda_1^k + \cdots + v_n \tilde{v}_n^\top x_0 \lambda_n^k = \alpha v_j \lambda_j^k$$

Esempio $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -1,\, \lambda_2 = 1$

$$Q = [v_1 \,|\, v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\; Q^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^\top \\ \tilde{v}_2^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = v_1 \tilde{v}_1^\top \lambda_1^k + v_2 \tilde{v}_2^\top \lambda_2^k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (-1)^k + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 1^k$$

e quindi se $x_0 = \alpha v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

il modo 1^k non si manifesta nel movimento libero conseguente a tale stato iniziale

Osservazioni

- La determinazione dell'evoluzione dello stato in forma numerica e` molto semplice
- il calcolo di

$$\Phi(k-k_0) = A^{(k-k_0)}\,, \quad k \geq k_0$$

  si puo` affrontare anche con tecniche viste per il calcolo di $e^{A(t-t_0)}$ anche se spesso non e` necessario; per esempio la tecnica facente uso del teorema di Cayley-Hamilton puo` rivelarsi utile (si vedano gli esempi durante le esercitazioni)

- In analogia col caso a tempo continuo, e` utile l'analisi di $A^{(k-k_0)}$ tramite trasformazione di similitudine

Calcolo di $A^{(k-k_0)}$ col metodo della trasformazione di similitudine

Consideriamo $x(k+1) = Ax(k)\,,\; x(0) = x_0$ $\Rightarrow$ $x(k) = A^k x_0$

$T \in \Re^{n\times n},\ \det(T) \neq 0$ $\Rightarrow$ $x = T\hat{x},\quad \hat{x} = T^{-1}x$

$\hat{x}(k+1) = T^{-1}Ax(k) = T^{-1}AT\hat{x}(k)\,,\qquad \hat{x}_0 = T^{-1}x_0$

la cui soluzione e` $\hat{x}(k) = \left(T^{-1}AT\right)^k T^{-1}x_0$ e quindi, definendo $J := T^{-1}AT$ otteniamo

$$\boxed{x(k) = TJ^kT^{-1}x_0}$$

Supponiamo ora che che la trasformazione di similitudine sia tale che

$$J := T^{-1}AT$$

sia in forma canonica di Jordan

Consideriamo innanzitutto il caso in cui A ammetta la costruzione di una base di n autovettori v_i linearmente indipendenti associati agli autovalori $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ (non necessariamente distinti)

Allora

$$T = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n] \quad \Rightarrow \quad J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e quindi

$$J^k = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & {\lambda_n}^k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x(k) = TJ^kT^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & {\lambda_n}^k \end{bmatrix} T^{-1}x_0$$

Consideriamo ora il caso generale in cui vi siano autovalori multipli. E` sempre possibile costruire n vettori v_i linearmente indipendenti tali che

$$T = [v_1 | v_2 | \cdots | v_n] \quad \Rightarrow \quad J = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & J_s \end{bmatrix}$$

dove $J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$

e $J_i,\ i \geq 1$ e` una matrice di dimensione $n_i \times n_i$ della forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_{k+i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{k+i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{k+i} \end{bmatrix}$$

in cui non necessariamente $\lambda_{k+i} \neq \lambda_{k+j},\ i \neq j$ e

$$k + n_1 + \cdots + n_s = n$$

Ora evidentemente

$$J^k = \begin{bmatrix} J_0^k & \cdots & \cdots & 0 \\ & {J_1}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & {J_s}^k \end{bmatrix}$$

dove $\quad {J_0}^k = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & {\lambda_r}^k \end{bmatrix}$

$$\boxed{x(k) = TJ^kT^{-1}x_0 = T \begin{bmatrix} J_0^k & \cdots & \cdots & 0 \\ & {J_1}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & {J_s}^k \end{bmatrix} T^{-1}x_0}$$

Per quanto riguarda $J_i,\ i = 1, \ldots, s$ si ha $J_i = \lambda_{r+i}I_i + N_i$ dove I_i e` la matrice identica di ordine $n_i \times n_i$ e $N_i$ e` una matrice $n_i \times n_i$ nilpotente ($N_i^k = 0,\ \forall k \geq n_i$) data da

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

D'altra parte si ha subito

$$
\begin{aligned}
J_i^k &= (\lambda_{r+i} I_i + N_i)^k \\
&= \lambda_{r+i} I + k\lambda_{r+i}^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_{r+i}^{k-2} N_i^2 + \cdots + k\lambda_{r+i} N_i^{k-1} + N_i^k
\end{aligned}
$$

e quindi e` possibile definire i modi di risposta a tempo discreto

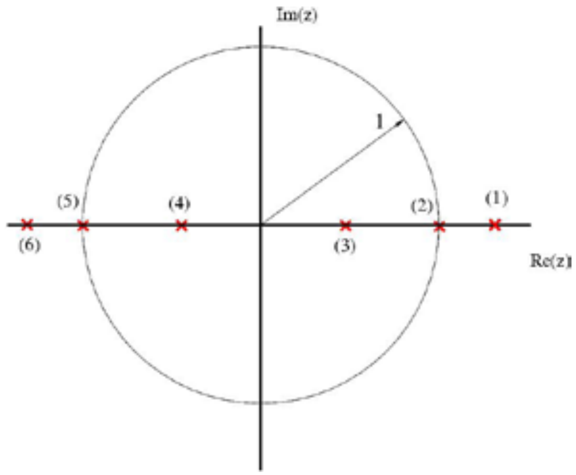
come termini del tipo

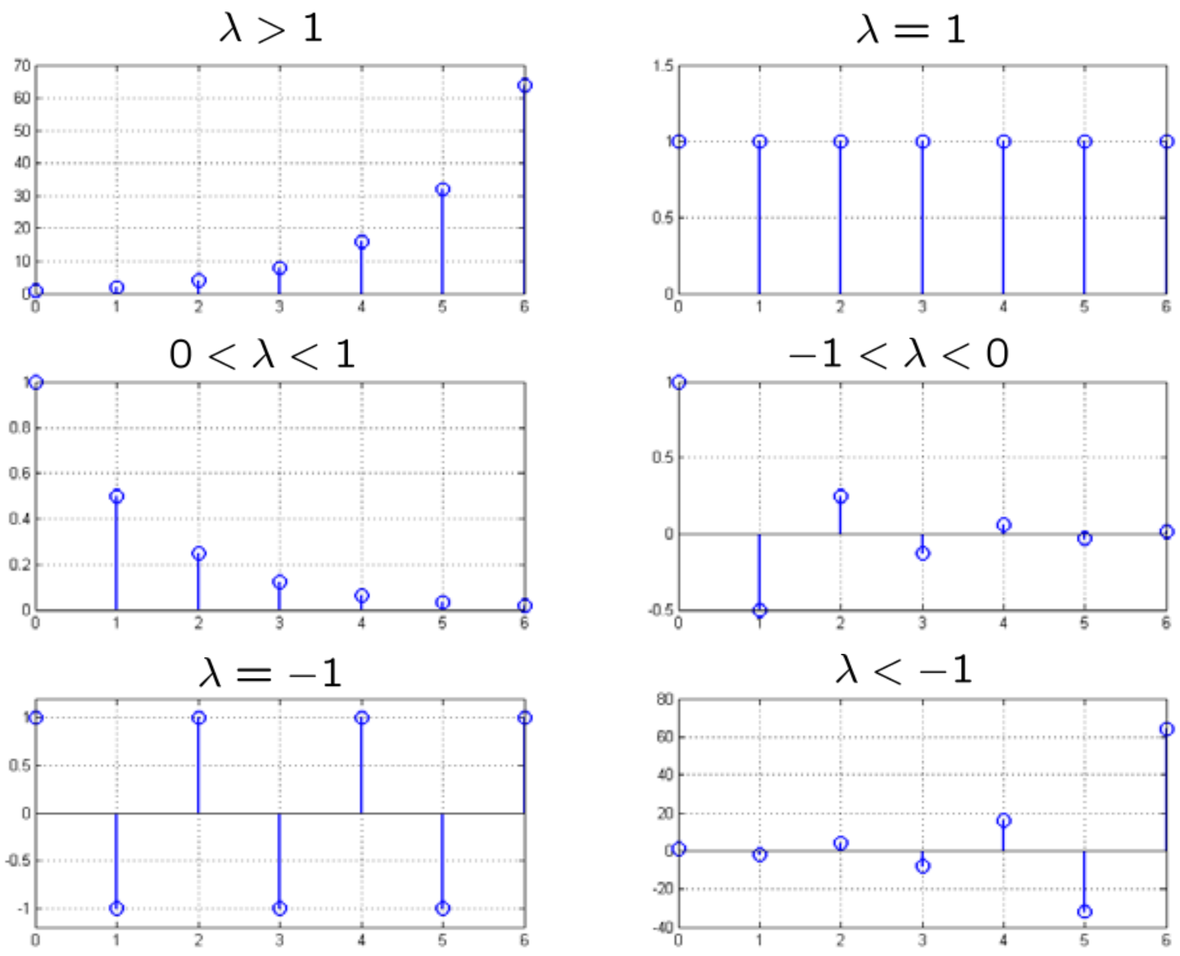
$$
\lambda^k, \begin{pmatrix} k \\ n_i \end{pmatrix} \lambda_i^{k-n_i}
$$

Le dimostrazioni sono analoghe al caso a tempo continuo con gli ovvi cambiamenti (si veda la bibliografia).

Studio qualitativo del termine $\binom{k}{n} \lambda^{k-n}$

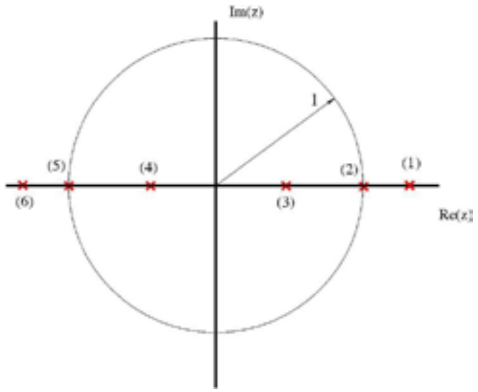
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ poli semplici

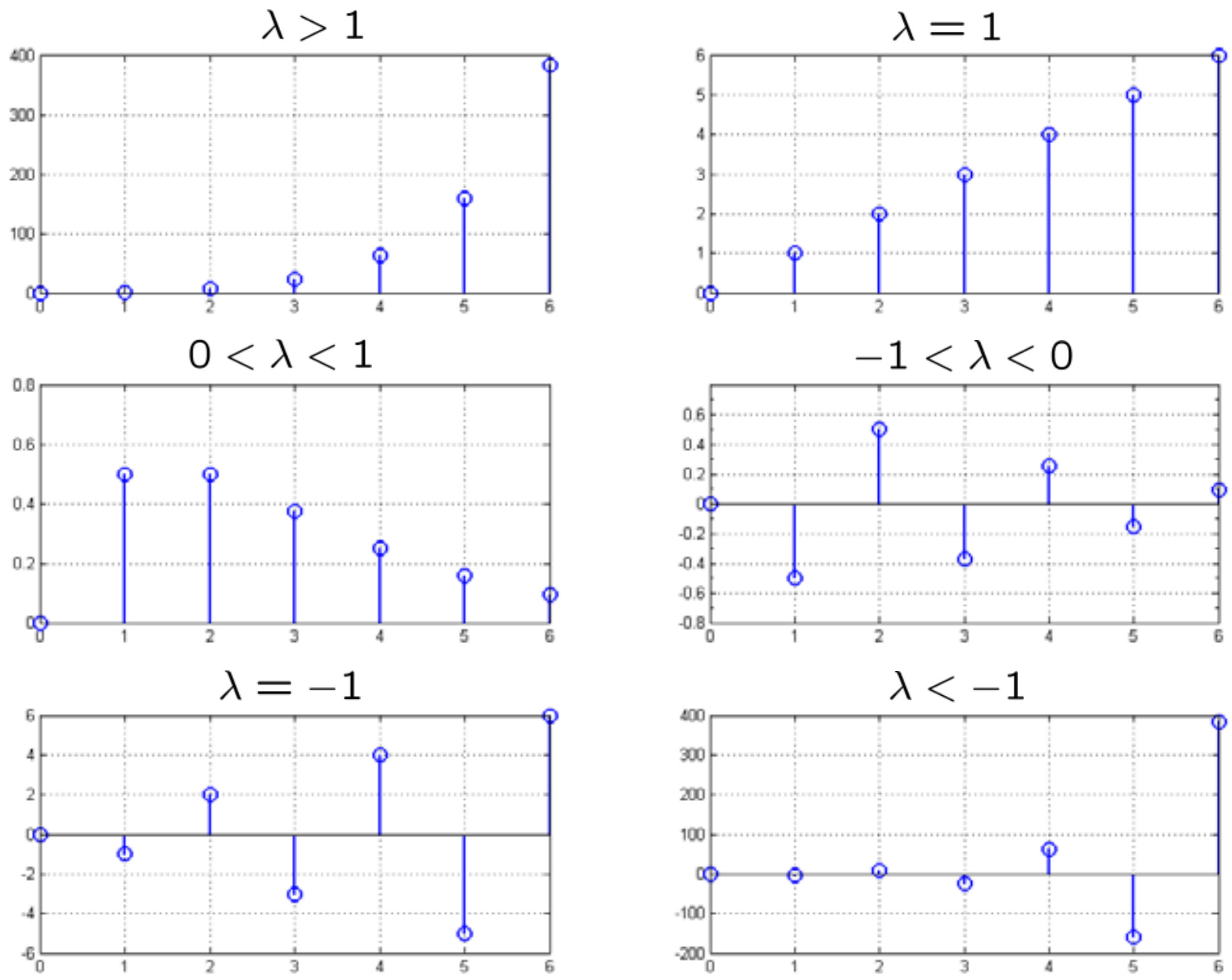




Studio qualitativo del termine $\binom{k}{n} \lambda^{k-n}$

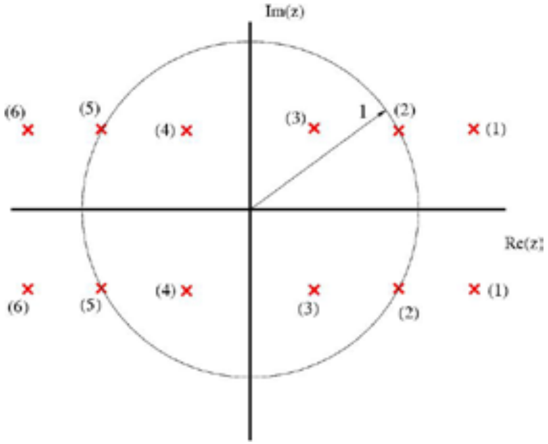
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ poli multipli (doppi)



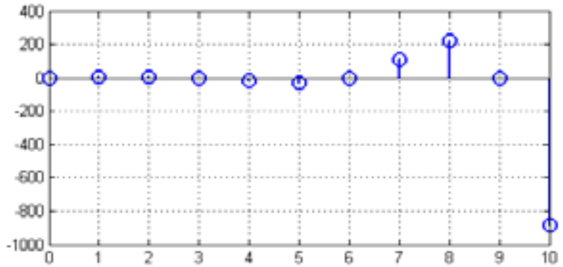


Studio qualitativo del termine $\binom{k}{n} \lambda^{k-n}$

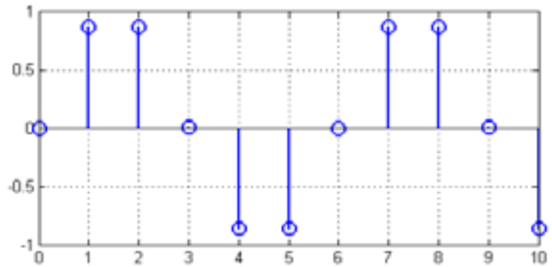
b) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ poli semplici



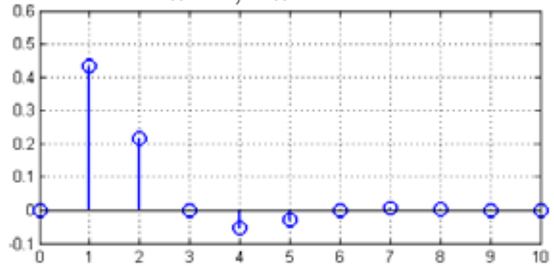
(1) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$



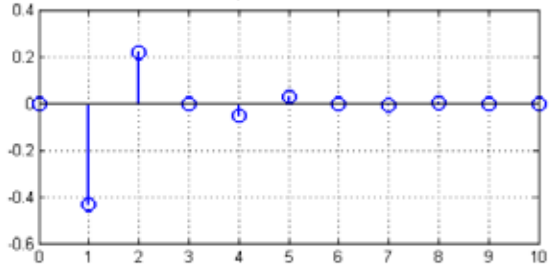
(2) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$



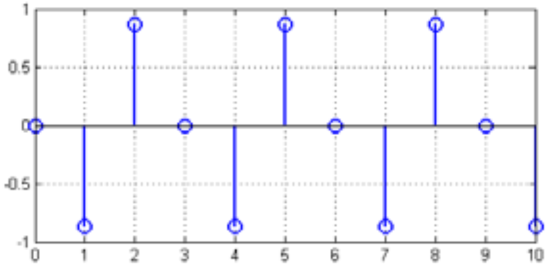
(3) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



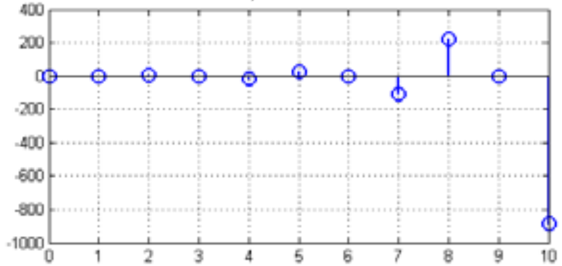
(4) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



(5) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$

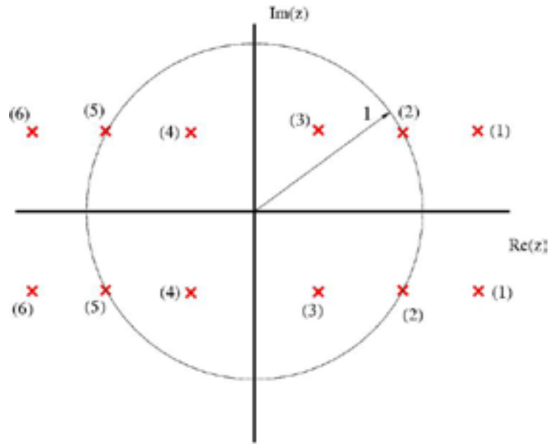


(6) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$

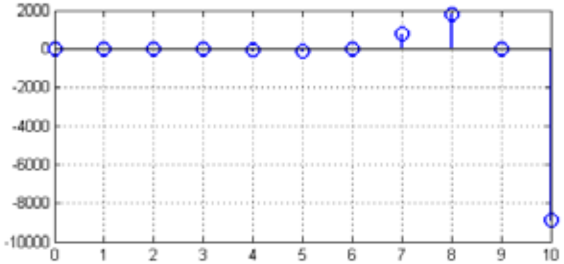


Studio qualitativo del termine $\binom{k}{n} \lambda^{k-n}$

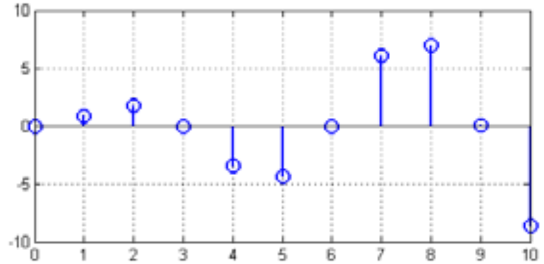
b) $\lambda \in \mathbb{C}$ poli multipli (doppi)



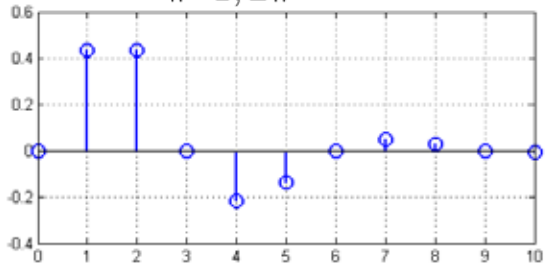
(1) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$



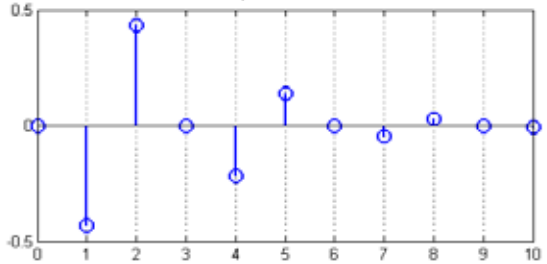
(2) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$



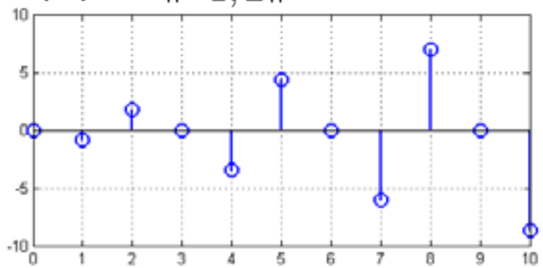
(3) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



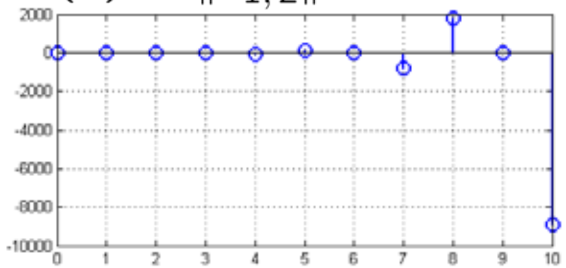
(4) $\|\lambda_{1,2}\| < 1$



(5) $\|\lambda_{1,2}\| = 1$



(6) $\|\lambda_{1,2}\| > 1$



Descrizione interna in equazioni di stato in relazione alla descrizione esterna ingresso-uscita

di sistemi lineari tempo-invarianti a tempo discreto

Ricordiamo:

si consideri un sistema lineare descritto da eq. di stato con stato iniziale nullo

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)\,, \qquad x(k_0) = 0$$
$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

e si aveva

$$H(k,j) = \begin{cases} C(k)\Phi(k,j+1)B(j)\,, & k > j \\ D(k) & k = j \\ 0 & k < j \end{cases}$$

Inoltre nel caso tempo-invariante

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)\,, \qquad x(k_0) = 0$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

abbiamo

$$H(k-j) = \begin{cases} CA^{k-(j+1)}B\,, & k > j \\ D & k = j \\ 0 & k < j \end{cases}$$

Funzione di trasferimento

Consideriamo
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)\,, \qquad x(k_0) = x_0$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Operando la Z-trasformata ad ambo i membri dell'eq. di stato:

$$z\,[X(z) - x_0] = AX(z) + BU(z)$$

$$\Rightarrow \quad (zI - A)X(z) = z\,x_0 + BU(z)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1} z\,x_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = C(zI - A)^{-1} z\,x(0) + \left[C(zI - A)^{-1}B + D\right] U(z)$$

Se $x_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad Y(z) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{p \times n}\overbrace{(zI - A)^{-1}}^{n \times n}\overbrace{B}^{n \times m} + \overbrace{D}^{p \times m}\right]}_{p \times m} U(z) = H(z)U(z)$$

Funzione di trasferimento

Vediamo la struttura della funzione di trasferimento:

$$H(z) = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} H_{11}(z) & \cdots & H_{1m}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{i1}(z) & \cdots & H_{im}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ H_{p1}(z) & \cdots & H_{pm}(z) \end{bmatrix}\right\} p}_{m}$$

Considerando ora la componente i-esima del vettore di uscita

$$Y_i(z) = \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(z)U_j(z) = H_{i1}(z)U_1(z) + H_{i2}(z)U_2(z) + \cdots$$

Per cui

$$\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ u_r(k) = 0, \;\; r \neq j \end{array} \quad \Rightarrow \quad H_{ij}(z) = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)}$$

(sovrapposizione effetti)

Funzione di trasferimento di sistemi equivalenti

In perfetta analogia con il caso a tempo continuo:

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad T \in \Re^{n \times n},\ \det(T) \neq 0$$

$$x = T\hat{x}, \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = T^{-1}AT\hat{x}(k) + T^{-1}Bu(k) \\ y(k) = CT\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(z) &= \hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\
&= C\left[T\left(zI - T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[T\left(zT^{-1}T - T^{-1}AT\right)^{-1}T^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[T\left(T^{-1}(zI - A)T\right)^{-1}T^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[TT^{-1}(zI - A)^{-1}TT^{-1}\right]B + D \\
&= C\left[(zI - A)^{-1}\right]B + D \\
&= H(z)
\end{aligned}
$$

La funzione di trasferimento non dipende dalla particolare scelta di variabili di stato considerata per la rappresentazione interna

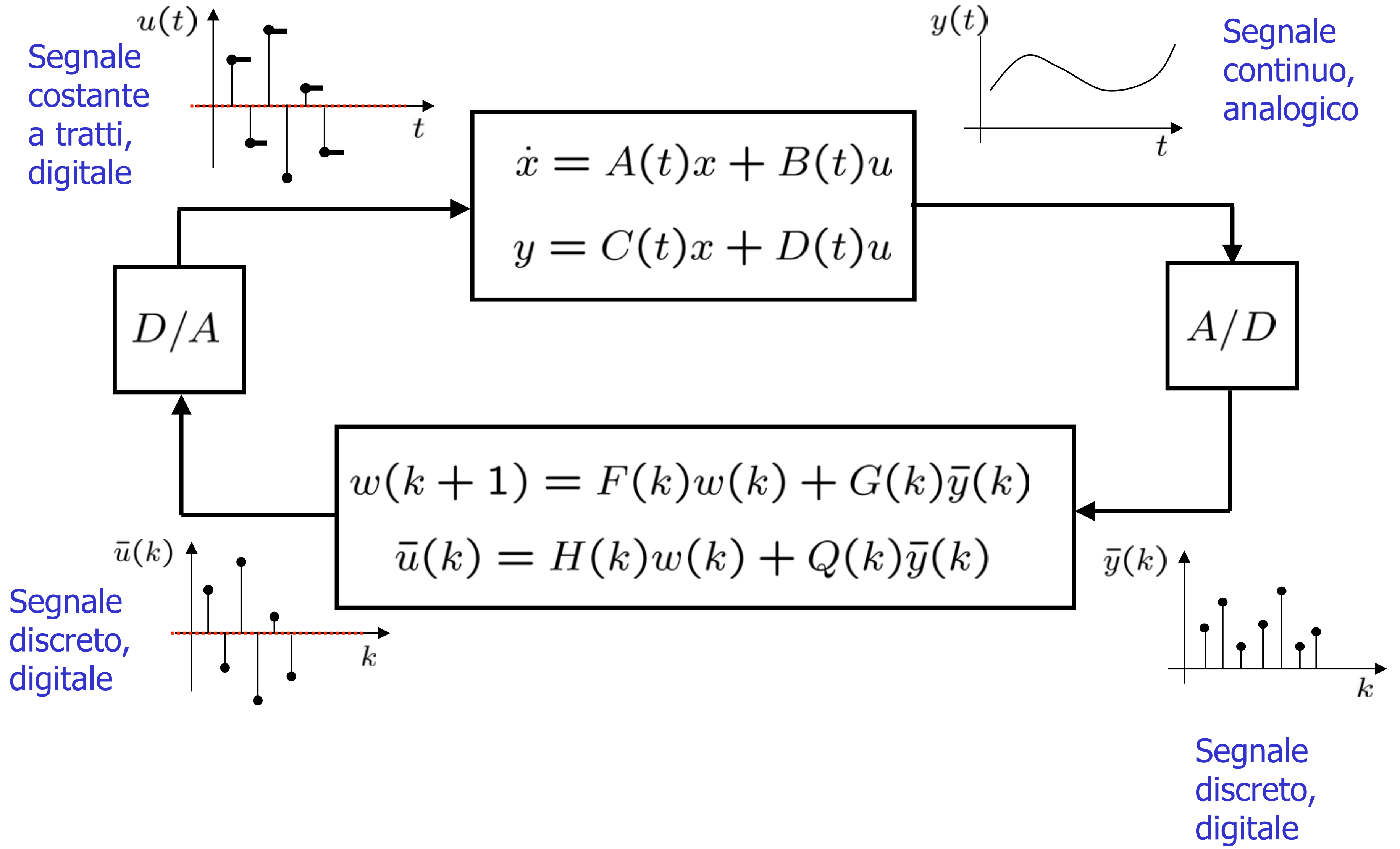
Proprieta` della FDT nel caso a tempo discreto

… perfettamente analoghe a quelle viste a tempo continuo

Caso notevole:

Sistemi a tempo discreto ottenuti da campionamento di Sistemi a tempo continuo

Consideriamo lo schema generale



- Per quanto riguarda il convertitore A/D, abbiamo

$$\bar{y}(k) = y(t_k)$$

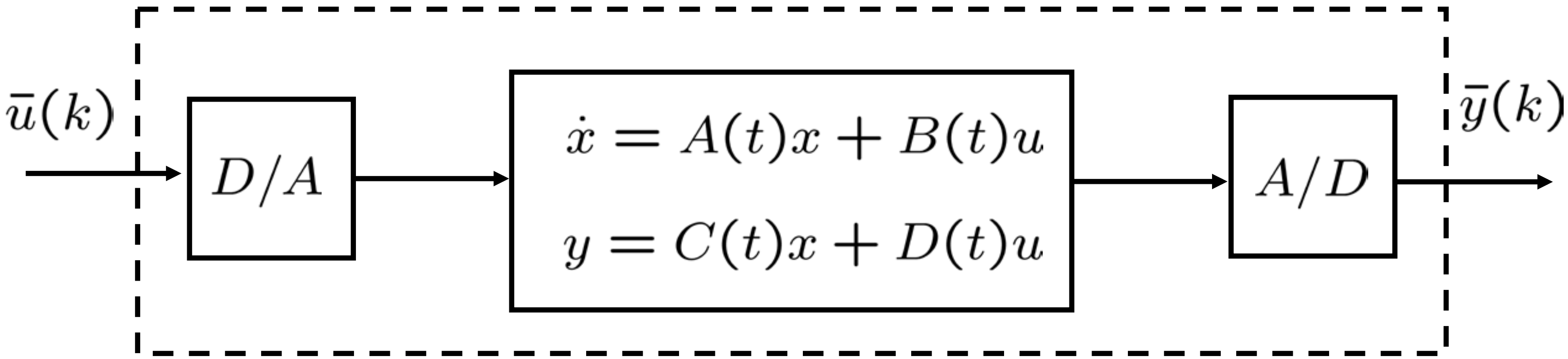
- Per quanto riguarda il convertitore D/A, si ottiene

$$u(t) = \bar{u}(k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}$$

  che prende il nome di tenuta di ordine 0.

- Ipotizziamo di trascurare l'effetto di digitalizzazione, ovvero della rappresentazione di numeri reali su parole di lunghezza limitata

- L'analisi di questo sistema ibrido si semplifica parecchio andando a considerare il sistema a tempo discreto in figura:



Ora: $$x(t) = \Phi(t,t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1},t_k)x(t_k) + \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)B(\tau)d\tau\right] u(t_k)$$

e quindi

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{x}(k) + \bar{B}(k)\bar{u}(k)$$
$$\bar{A}(k) := \Phi(t_{k+1},t_k)$$
$$\bar{B}(k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},\tau)B(\tau)d\tau$$

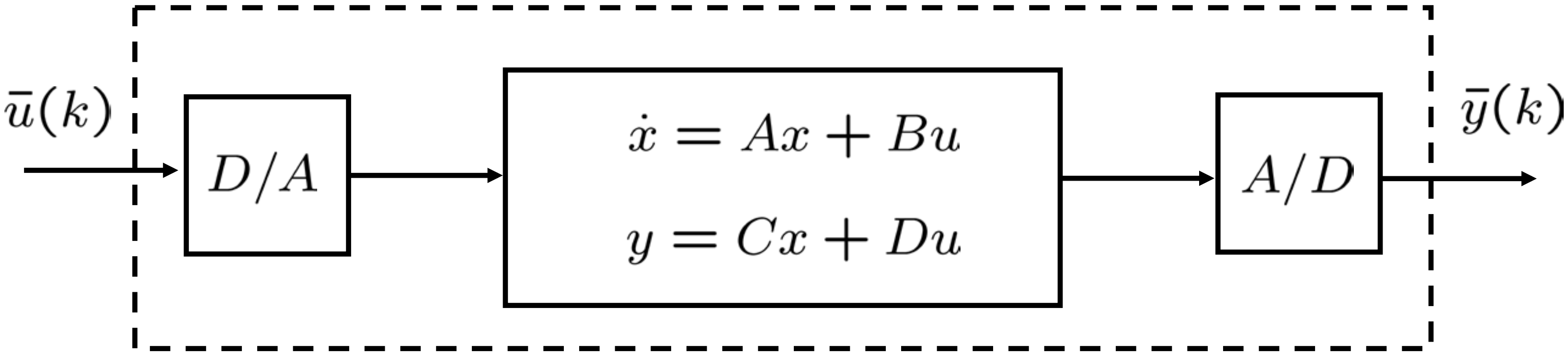
Se ora assumiamo che l'uscita del sistema sia campionata ad istanti $t'_k \neq t_k$ con $t_k \leq t'_k < t_{k+1}$

$$y(t'_k) = C(t'_k)\Phi(t'_k,t_k)x(t_k) + \left[C(t'_k)\int_{t_k}^{t'_k} \Phi(t'_k,\tau)B(\tau)d\tau\right] u(t_k) + D(t'_k)u(t_k)$$

e se $\bar{y}(k) := y(t'_k)$ abbiamo

$$\bar{y}(k) = \bar{C}(k)\bar{x}(k) + \bar{D}(k)\bar{u}(k)$$
$$\bar{C}(k) := C(t'_k)\Phi(t'_k,t_k)$$
$$\bar{D}(k) := C(t'_k)\int_{t_k}^{t'_k} \Phi(t'_k,\tau)B(\tau)d\tau + D(t'_k)$$

Ora consideriamo il caso tempo-invariante.



$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{u}(k)$$
$$\bar{y}(k) = \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}\bar{u}(k)$$

e se si pone $t_{k+1} - t_k = T_s,\ t'_k - t_k = \alpha$

$$\bar{A} = e^{AT_s},\ \bar{B} = \left(\int_0^{T_s} e^{A\tau} d\tau\right) B,\ \bar{C} = Ce^{A\alpha},\ \bar{D} = C\left(\int_0^{\alpha} e^{A\tau} d\tau\right) B + D$$

Osserviamo infine che se $t'_k = t_k$ ne consegue $\bar{C} = C,\ \bar{D} = D$