

# Stabilità dei sistemi dinamici

# Stabilità`:



- del movimento
- dell'equilibrio
- dei sistemi lineari

# Stabilita` del movimento

Consideriamo un sistema dinamico avente funzione di transizione

$$\varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

Fissati uno stato iniziale  $\bar{x}_0$  e un ingresso  $\bar{u}(\cdot)$  il movimento è descritto da:

$$\bar{x}(\cdot) = \varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$$

Cosa accade al movimento quando si perturbano lo stato iniziale o l'ingresso?

$$u(\cdot) = \bar{u}(\cdot) + \delta u(\cdot)$$

$$x(0) = \bar{x}_0 + \delta \bar{x}$$



$$\varphi(t, t_0, \bar{x}_0 + \delta \bar{x}, \bar{u}(\cdot) + \delta u(\cdot))$$

Movimento **perturbato** dello stato

## Stabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale:

Il movimento  $\bar{x}(\cdot)$

si dice stabile rispetto alle perturbazioni dello stato iniziale  $\bar{x}_0$  se

$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tale che

se  $\|\delta\bar{x}\| < \delta(\varepsilon, t_0)$

allora

$$\|\varphi(t, t_0, \bar{x}_0 + \delta\bar{x}, \bar{u}(\cdot)) - \varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

## Stabilità asintotica rispetto a perturbazioni dello stato iniziale:

Il movimento  $\bar{x}(\cdot)$

si dice asintoticamente stabile rispetto alle perturbazioni dello stato iniziale  $\bar{x}_0$  se è stabile ed *attrattivo*, ossia

$\forall t_0 > 0 \exists \eta(t_0) > 0$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, t_0, \bar{x}_0 + \delta\bar{x}, \bar{u}(\cdot)) - \varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))\| = 0 \quad \forall \|\delta\bar{x}\| < \eta$$

## Instabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale:

Il movimento  $\bar{x}(\cdot)$

si dice instabile rispetto alle perturbazioni dello stato iniziale  $\bar{x}_0$  se non è stabile rispetto a dette perturbazioni.

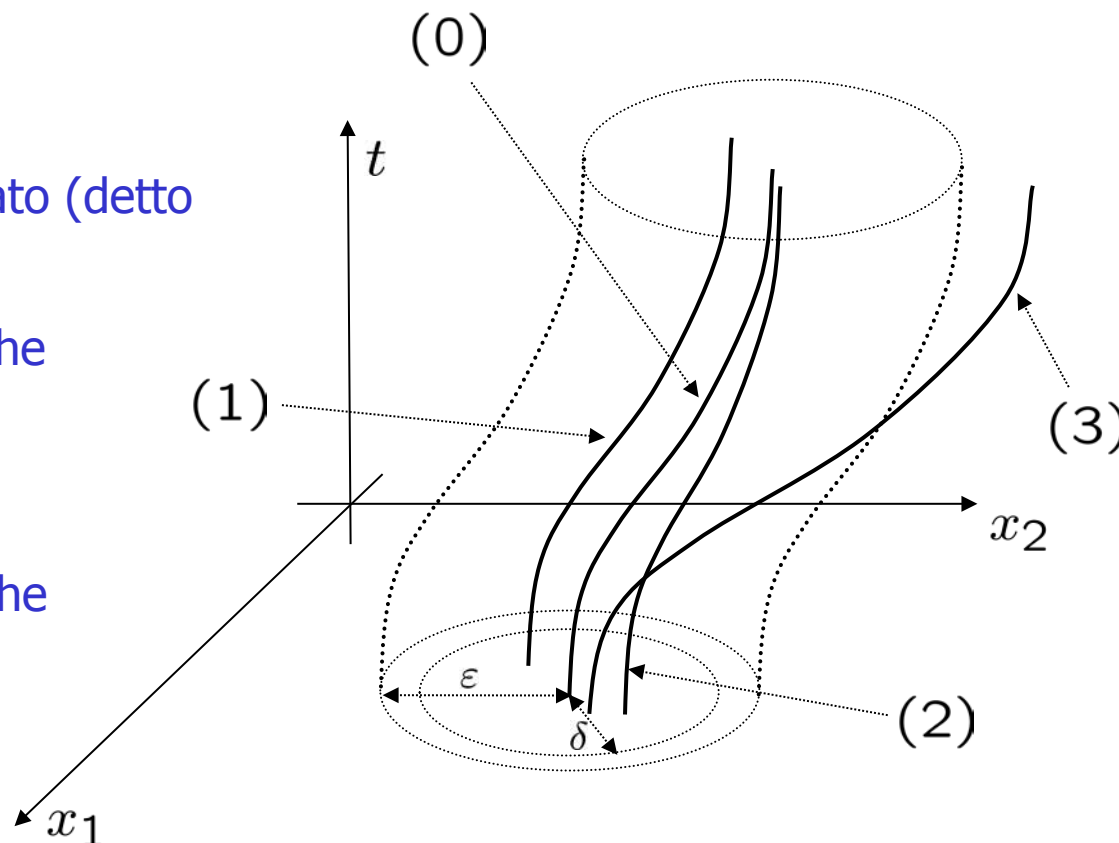
## Significato geometrico:

(0) movimento non perturbato (detto anche *nominale*)

(1) movimento perturbato che rimane confinato nella circonferenza di raggio  $\varepsilon$

(2) movimento perturbato che rimane confinato nella circonferenza di raggio  $\varepsilon$  e converge al movimento non perturbato

(3) movimento perturbato che esce dalla circonferenza di raggio



## Stabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso:

Il movimento  $\bar{x}(\cdot)$

si dice stabile rispetto alle perturbazioni dell'ingresso  $\bar{u}(\cdot)$  se

$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tale che

se  $\forall \|\delta \bar{u}(\cdot)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$

allora

Una qualsiasi *norma di funzione*



$$\|\varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot) + \delta \bar{u}(\cdot)) - \varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

## Instabilità rispetto a perturbazioni dell'ingresso

Il movimento  $\bar{x}(\cdot)$  si dice instabile rispetto alle perturbazioni dell'ingresso  $\bar{u}(\cdot)$  se non è stabile rispetto a dette perturbazioni.

# Stabilità`:

- del movimento



- dell'equilibrio

- del sistema (solo sistemi lineari)

## Stabilità dell' equilibrio

- L' equilibrio è caratterizzato da un *movimento costante rispetto al tempo*.
- La stabilità dell' equilibrio consiste nella **stabilità del movimento costante associato all' equilibrio** (in tempo infinito, si vedano i lucidi della parte 1).
- Pertanto tutte le definizioni relative alla stabilità del movimento possono essere particolarizzate al caso dell' equilibrio, come nell' esempio seguente.

## Stabilità dell' equilibrio

Lo stato di equilibrio  $\bar{x}$  corrispondente all'ingresso  $\bar{u}(\cdot)$  si dice stabile rispetto a perturbazioni dello stato se

$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tale che

$$\|\delta\bar{x}\| < \delta(\varepsilon, t_0) \quad \longrightarrow \quad \|\varphi(t, t_0, \bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

## Stabilità asintotica dell'equilibrio

Lo stato di equilibrio  $\bar{x}$  corrispondente all'ingresso  $\bar{u}(\cdot)$  si dice asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni dello stato se è:

- stabile
- attrattivo, cioè

$\forall t_0 > 0 \exists \eta(t_0) > 0$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, t_0, \bar{x}_0 + \delta\bar{x}, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| = 0 \quad \forall \|\delta\bar{x}\| < \eta$$

## Stabilità uniforme

- Nelle definizioni precedenti, valide in generale per sistemi tempo-varianti, il valore di  $\delta$  dipende dall'istante iniziale:

$$\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$$

- Qualora  $\delta$  non dipenda dall'istante iniziale, cioè si abbia

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

si parla di stabilità *uniforme*.

- Restano quindi definiti i concetti di *stabilità uniforme* e di *stabilità asintotica uniforme*.

## Instabilità e divergenza delle traiettorie

E' importante osservare che l'instabilità non è legata necessariamente alla divergenza delle traiettorie: esistono sistemi privi di traiettorie divergenti che tuttavia non ammettono stati di equilibrio stabili.

Un esempio significativo è il cosiddetto oscillatore di Van der Pol

# Oscillatore di Van der Pol

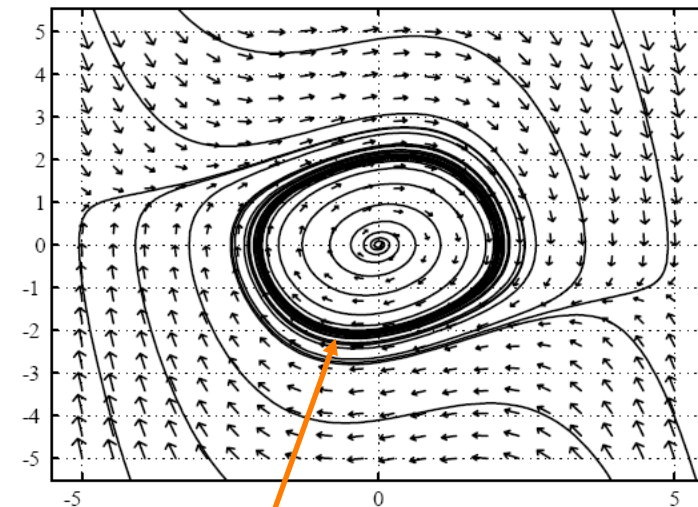
E' governato da un' equazione del secondo ordine non lineare, corrispondente a un circuito oscillante RLC in cui l' elemento resistivo ha una caratteristica non lineare.

$$\frac{x(t)}{C} + \dot{x}(t)(3x^2(t) - \alpha) + \ddot{x}(t)L = 0$$

Rappresentazione di stato:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{LC} - \frac{x_2}{L}(3x_1^2 - \alpha)$$



Il sistema ammette l' origine come unico stato di equilibrio e tale stato di equilibrio è instabile.

Tuttavia, *nessuna traiettoria è divergente*. Infatti tutte le traiettorie, qualunque sia lo stato iniziale convergono ad una curva detta *ciclo limite*.

## Stabilità e convergenza delle traiettorie

Va inoltre osservato che la convergenza di tutte le traiettorie di un sistema ad un certo stato di equilibrio non implica la stabilità di detto stato.

Vi sono infatti dei sistemi le cui traiettorie sono *tutte convergenti* verso uno (o più) stati di equilibrio instabili. Ad esempio il sistema a tempo discreto seguente:

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & \text{se } \|x(t)\| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'origine è chiaramente uno stato di equilibrio (l'unico). Inoltre tutte le traiettorie vi convergono. Tuttavia non si tratta di uno stato di equilibrio stabile. (Perché?)

# Stabilità nei sistemi regolari a dimensioni finite

Si tratta di sistemi descrivibili come segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

Si voglia studiare la stabilità, rispetto a perturbazioni dello stato iniziale, di un generico movimento  $\bar{x}(t) = \varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$

$$z(t) := x(t) - \bar{x}(t)$$

Differenza fra movimento  
perturbato e movimento nominale  $\bar{u}$

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{f(z(t) + \bar{x}(t), \bar{u}(t), t) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}_{:= w(z(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), t)}$$

Dove  $w$  gode della proprietà:  $w(0, \bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = 0, \quad \forall t \geq t_0$

## Da stabilità del movimento a stabilità dell'equilibrio

Il sistema dinamico  $\dot{z}(t) = w(z(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$

descrive la dinamica dei movimenti perturbati rispetto al movimento nominale.

Fissato il movimento, cioè fissati  $\bar{x}(t)$  e  $\bar{u}(t)$  la funzione  $w$  dipende solo da  $z$  e  $t$  e quindi si tratta di un sistema *autonomo*.

La proprietà  $w(0, \bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = 0, \quad \forall t \geq t_0$

mostra che questo sistema dinamico ammette lo stato di equilibrio (cioè il movimento costante):

$$z(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Pertanto si è ricondotto lo studio della *stabilità di un generico movimento* allo studio della *stabilità di uno stato di equilibrio* (in particolare, l'origine) di un opportuno sistema autonomo (questo che descrive la dinamica del movimento perturbato).



Non è restrittivo trattare solo la stabilità dell'equilibrio

## Una classe di perturbazioni più generale

Le perturbazioni sullo stato iniziale permettono di modellare tutte le azioni sullo stato del sistema intervenute per effetto di disturbi agenti per  $t \leq t_0$

In generale però i disturbi persistono durante tutta l'evoluzione del sistema, e quindi anche per  $t > t_0$

Pertanto si potrebbe pensare che l'analisi di stabilità rispetto alle perturbazioni dello stato iniziale non sia adeguata per trattare il caso di tali disturbi.

Il teorema di Malkin della pagina seguente stabilisce un legame fra la stabilità rispetto alle perturbazioni dello stato iniziale e gli effetti sul movimento di un disturbo *persistente*  $p(x, t)$  che agisce in maniera additiva, cioè

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) + p(x, t)$$



disturbo persistente

## Teorema di Malkin

Dato il sistema regolare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Sia  $\bar{x}$  uno stato di equilibrio asintoticamente stabile rispetto a perturbazioni dello stato iniziale. Allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \eta > 0$  tali che

il movimento perturbato  $\varphi_p(\cdot, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$  descritto dall'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) + p(x, t)$$

è tale che

$$\|\varphi_p(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

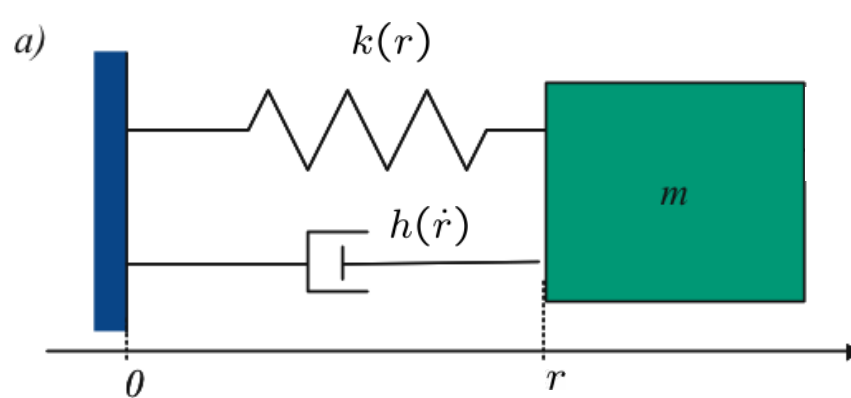
$$\forall x_0 : \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \text{ e } \forall \|p(x, t)\| < \eta, \quad \forall x, \forall t \geq t_0$$

## Stabilità dell'equilibrio: metodo diretto di Lyapunov (sistemi a tempo continuo)

**Osservazione:** se l'energia totale di un sistema meccanico (o elettrico) è continuamente dissipata il sistema deve evolvere verso uno stato di equilibrio.

Il metodo diretto di Lyapunov generalizza questa osservazione, associando allo stato del sistema una opportuna **funzione scalare positiva** che svolge il ruolo di “energia”.

## Esempio: sistema meccanico non lineare



$$k(r) = k_0 r + k_1 r^3$$

$$h(\dot{r}) = b \dot{r} |\dot{r}|$$

$$k_0, k_1, b > 0$$

$$m\ddot{r} + b\dot{r}|\dot{r}| + k_0 r + k_1 r^3 = 0$$

Ponendo  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \dot{r}$  si ottiene la rappresentazione di stato:

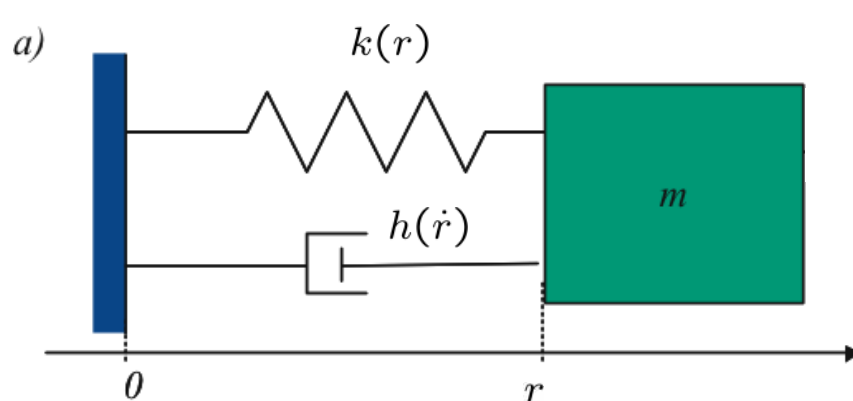
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3 - \frac{b}{m}x_2|x_2|$$

Non c'è ingresso, quindi si tratta di un sistema autonomo o libero

L'origine dello spazio di stato (stato in cui la molla è a riposo) è chiaramente di equilibrio.

## Esempio: sistema meccanico non lineare



$$k(r) = k_0 r + k_1 r^3$$

$$h(\dot{r}) = b \dot{r} |\dot{r}|$$

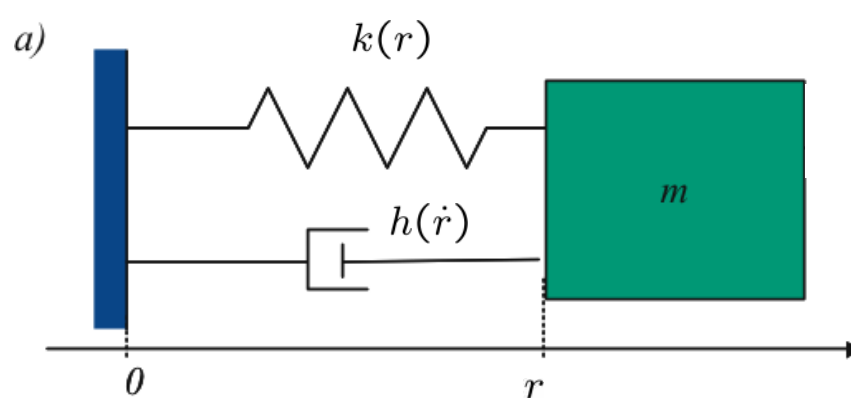
L'energia totale del sistema è pari alla somma di energia cinetica e di energia potenziale elastica:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m x_2^2 + \int_0^{x_1} k(\xi) d\xi = \frac{1}{2} m x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 x_1^2 + \frac{1}{4} k_1 x_1^4$$



Funzione scalare positiva dello stato. E' nulla solo nello stato di equilibrio.

## Esempio: sistema meccanico non lineare



$$k(r) = k_0 r + k_1 r^3$$

$$h(\dot{r}) = b \dot{r} |\dot{r}|$$

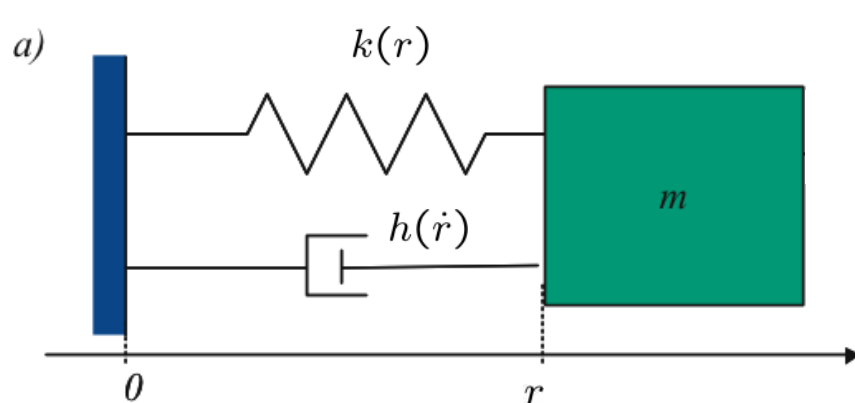
Come varia nel tempo l'energia totale del sistema?

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = m x_2 \dot{x}_2 + k_0 x_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1^3 \dot{x}_1 = -b |x_2|^3$$

Pertanto si ha una continua dissipazione di energia (ad eccezione degli istanti in cui la massa inverte il proprio moto, in cui  $x_2 = 0$ , nel qual caso l'energia resta istantaneamente costante).

Funzione del solo *stato*. Non dipende esplicitamente dal tempo. Ciò significa che assegnato lo stato, è assegnato anche il tasso di variazione dell'energia.

## Esempio: sistema meccanico non lineare



$$k(r) = k_0 r + k_1 r^3$$

$$h(\dot{r}) = b \dot{r} |\dot{r}|$$

E' possibile sfruttare la condizione appena trovata, cioè

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$$

per trarre delle conclusioni sulla stabilità dello stato di equilibrio?

**SI' !**



Teoria della stabilità di Lyapunov

## Metodo diretto di Lyapunov (sistemi a tempo continuo)

Il metodo diretto di Lyapunov consiste nell' associare allo stato del sistema una opportuna funzione scalare positiva che svolge il ruolo di “energia” e nel (cercare di) mostrare che questa “energia” è decrescente lungo le traiettorie del sistema.

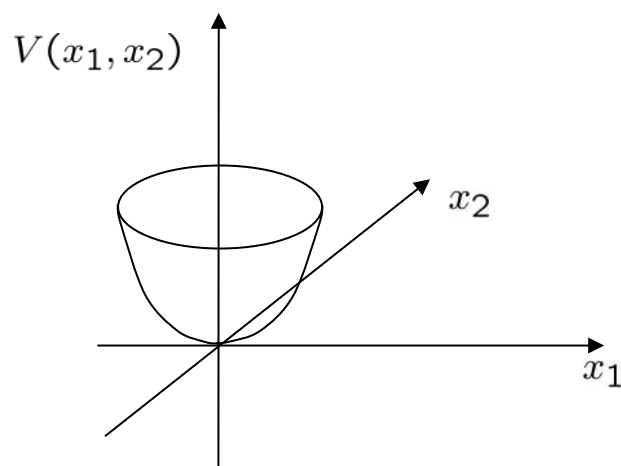
Nozioni preliminari:

- Funzioni (semi)definite positive e (semi)definite negative
- Calcolo di  $\dot{V}(x)$

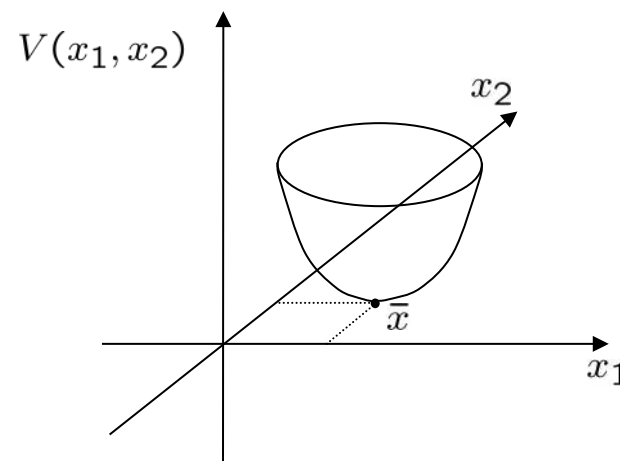
## Funzioni definite positive

Una funzione  $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *definita positiva* in  $\bar{x}$  se

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad \exists \xi > 0 : V(x) > 0 \quad \forall x : \|x - \bar{x}\| < \xi, x \neq \bar{x}$$



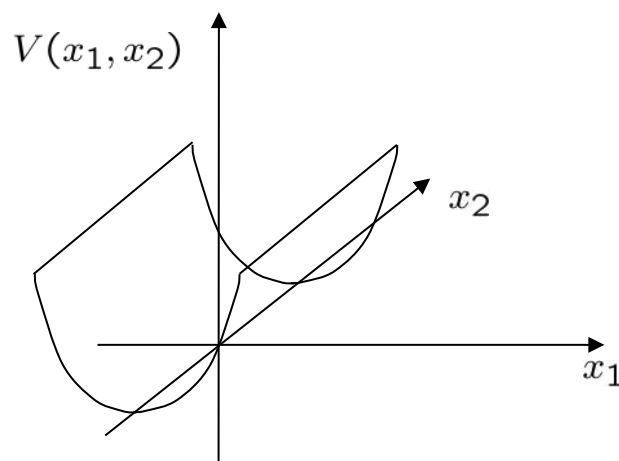
Definita positiva  
nell'origine



Definita positiva in  $\bar{x}$

## Funzioni semidefinite positive

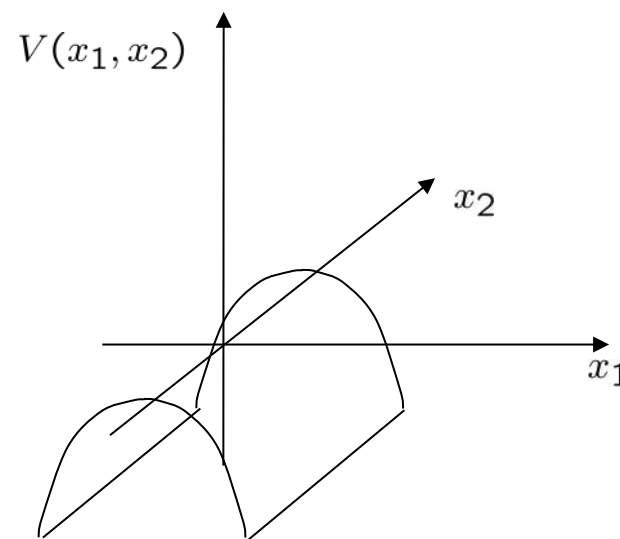
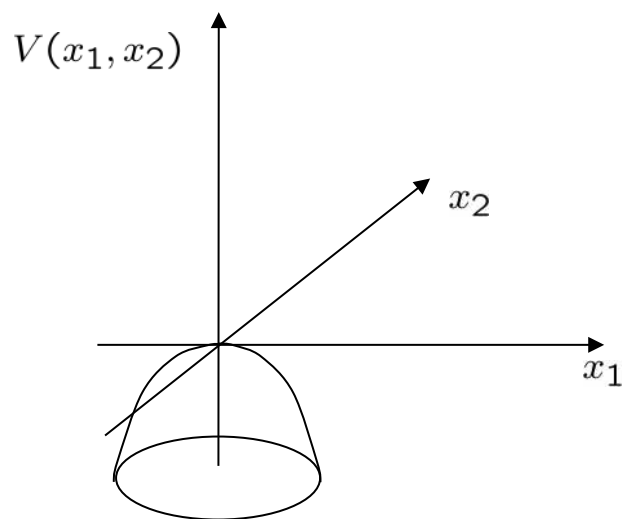
Una funzione  $V(\cdot) : R^n \rightarrow R$  si dice *semidefinita positiva* in  $\bar{x}$  se  $V(\bar{x}) = 0$  e  $\exists \xi > 0 : V(x) \geq 0 \quad \forall x : \|x - \bar{x}\| < \xi, x \neq \bar{x}$



Semidefinita positiva in ogni  $x : x_1 = 0$

## Funzioni (semi)definite negative

Una funzione  $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *(semi)definita negativa* in  $\bar{x}$  se  $-V(\cdot)$  è (semi)definita positiva in  $\bar{x}$



## Funzioni quadratiche

- Particolarmente utili per le applicazioni sono le funzioni quadratiche del tipo

$$V(x) = x^\top A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

dove  $A$  è una matrice simmetrica.

- La matrice  $A$  si dice definita positiva se la forma quadratica  $V(x) = x^\top A x$  è definita positiva nell'origine e analoghe definizioni valgono negli altri casi.
- Se  $A$  non è simmetrica, si può dimostrare che solo la sua parte simmetrica contribuisce alla forma quadratica e quindi si può rimpiazzare  $A$  con la sua parte simmetrica  $A^S$

$$a_{ij}^S = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$$

## Criteri per la definitezza di una matrice

- La matrice  $A$  è definita positiva *se e solo se* tutti i suoi autovalori sono strettamente positivi, cioè

$$\lambda_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- La matrice  $A$  è semidefinita positiva *se e solo se* tutti i suoi autovalori sono non negativi, cioè

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

(si ricorda che gli autovalori di una matrice simmetrica sono reali)

- Analoghi criteri valgono per la (semi)definitezza negativa.

## Calcolo di $\dot{V}(x)$

$\dot{x} = f(x)$       sistema autonomo tempo-invariante

$V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$       funzione scalare dello stato

Come varia  $V$  lungo le traiettorie del sistema?

$$V(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow x(t) \rightarrow V(x(t))$$

È FUNZIONE DEL SOLO STATO:  
PER CONOSCERLA NON SERVE  
CALCOLARE LE TRAIETTORIE  
DEL SISTEMA

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x)$$

dove  $\nabla V(x) \doteq \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]$

## Teorema di Lyapunov

Dato il sistema autonomo  $\dot{x} = f(x)$  avente  $\bar{x}$  come stato di equilibrio, sia  $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua con le sue derivate parziali e definita positiva in  $\bar{x}$ . Allora

$\dot{V}(x)$  semi-definita negativa in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è stabile.

$\dot{V}(x)$  definita negativa in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.

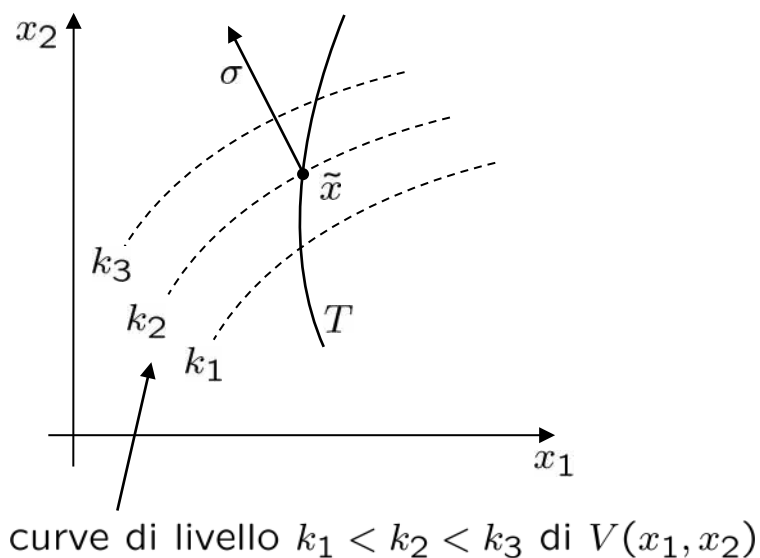
$\dot{V}(x)$  definita positiva in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è instabile.

## Osservazioni

- 1) Il teorema è di importanza fondamentale perché permette di trarre conclusioni sulla stabilità di uno stato di equilibrio (e quindi di un generico movimento) senza calcolare le traiettorie del sistema, cioè senza risolvere l'equazione differenziale.
- 2) D'altra parte il teorema fornisce delle condizioni *solo sufficienti*. In altre parole la determinazione di una funzione  $V(x)$  che non soddisfi nessuna delle specifiche su  $\dot{V}(x)$  non permette di trarre alcuna conclusione sulla stabilità dello stato di equilibrio considerato.

## Interpretazione geometrica <sup>(1)</sup>

Consideriamo un sistema del secondo ordine e supponiamo che ad un dato istante, esso si trovi nello stato  $\tilde{x}$  appartenente alla traiettoria  $T$



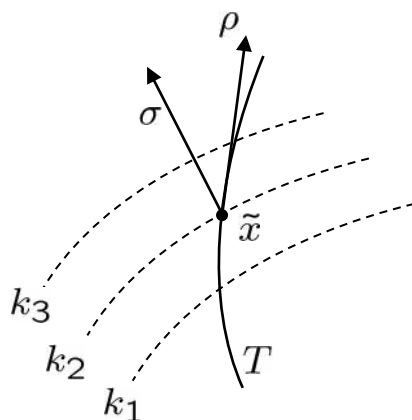
Indichiamo con  $\sigma$  il vettore normale alla curva di livello  $k_2 = V(\tilde{x})$  nel punto  $\tilde{x}$

Fissato  $\tilde{x}$  resta univocamente determinato il valore (e, in particolare, il segno) di  $\dot{V}(\tilde{x})$

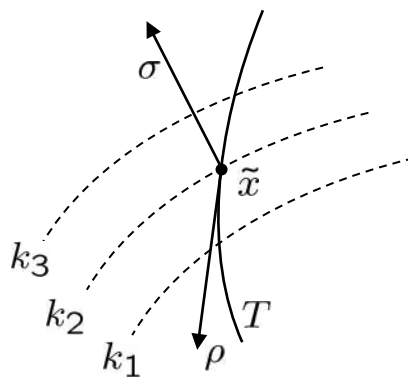
La conoscenza di  $\dot{V}(\tilde{x})$  permette di stabilire in che verso, rispetto alle curve di livello di  $V$ , sta evolvendo lo stato

## Interpretazione geometrica <sup>(2)</sup>

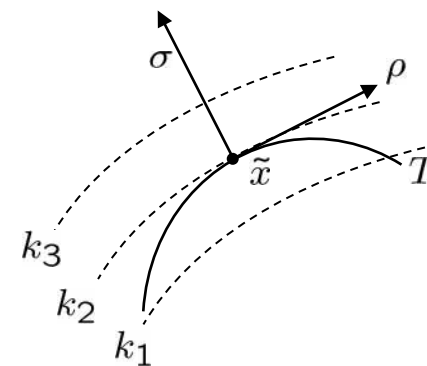
In particolare, si danno tre casi (con  $\rho$  si indica il vettore tangente alla traiettoria nel verso di percorrenza)



$$\dot{V}(\tilde{x}) > 0$$



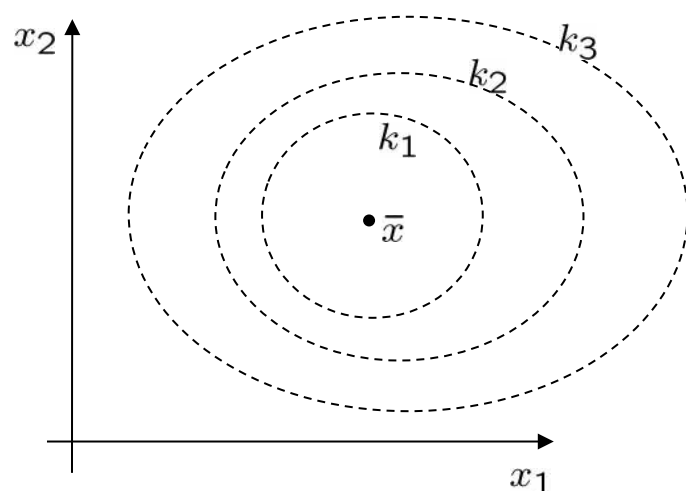
$$\dot{V}(\tilde{x}) < 0$$



$$\dot{V}(\tilde{x}) = 0$$

## Interpretazione geometrica (3)

Poiché  $V(x)$  è continua e definita positiva, le sue curve di livello sono, almeno in un intorno di  $\bar{x}$ , delle *curve chiuse* che contengono al loro interno lo stato  $\bar{x}$ .



L'insieme compatto delimitato da una curva di livello  $k$  si dice *insieme di sottolivello*  $k$ .

Ciò permette di capire il significato delle condizioni del teorema di Lyapunov.

Ad esempio è chiaro il significato della condizione

$\dot{V}(x)$  definita negativa

Essa implica che lo stato del sistema non possa che evolvere “entrando” in un insieme di sottolivello inferiore e quindi convergendo allo stato di equilibrio.

## Dimostrazione <sup>(1)</sup>

Dimostriamo la prima implicazione, cioè:

$\dot{V}(x)$  semi-definita negativa in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è stabile.

Anzitutto osserviamo che:

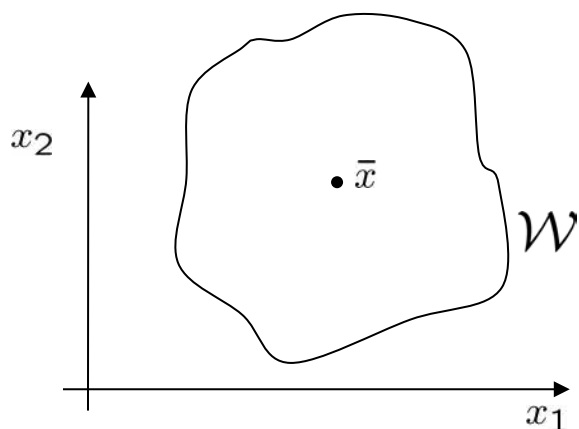
$V(x)$  definita positiva in  $\bar{x}$

$\dot{V}(x)$  semi-definita negativa in  $\bar{x}$



Esiste un intorno  $\mathcal{W}$  di  $\bar{x}$   
in cui:

$$V(x) > 0, \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq \bar{x}$$



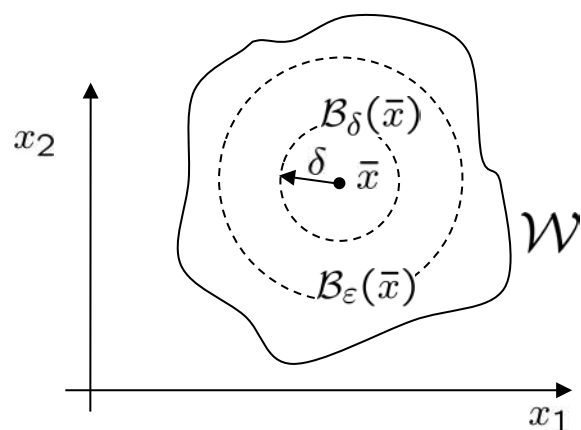
## Dimostrazione <sup>(2)</sup>

Per provare la stabilità di  $\bar{x}$  bisogna dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \|\delta \bar{x}\| < \delta \xrightarrow{\text{green arrow}} \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Non è restrittivo supporre che  $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})$  sia contenuto in  $\mathcal{W}$

(infatti se esiste un  $\delta$  per  $\varepsilon : \mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x}) \subset \mathcal{W}$  quello stesso  $\delta$  va bene per  $\varepsilon : \mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x}) \not\subset \mathcal{W}$ )



$$\text{Sia } m = \min_{x \in \partial \mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})} V(x)$$

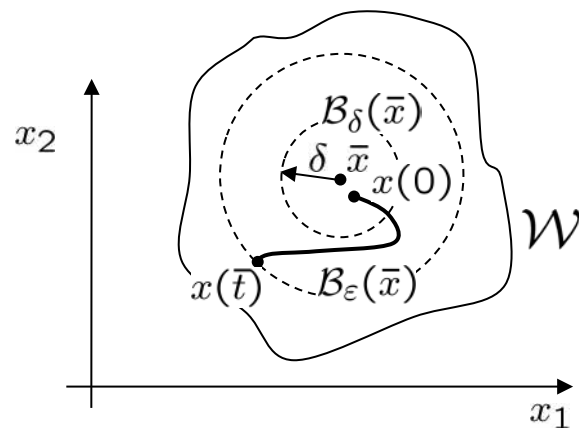
che esiste poiché  $V(x)$  è continua e l'insieme è chiuso e limitato

## Dimostrazione <sup>(3)</sup>

Scegliamo  $\delta$  in modo che si abbia  $\max_{x \in \mathcal{B}_\delta(\bar{x})} V(x) := M < m$

ciò è possibile poiché  $V(x)$  è continua e nulla in  $\bar{x}$ .

Poniamo  $x(0) \in \mathcal{B}_\delta(\bar{x})$  e supponiamo per assurdo che la traiettoria conseguente esca dalla sfera  $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})$ .



Sia  $\bar{t}$  il primo istante in cui la traiettoria interseca la frontiera di  $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})$ :

$$\bar{t} = \min\{t \geq 0 : x(t) \in \partial\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{x})\}$$

## Dimostrazione (4)

Si ha quindi, per la particolare scelta di  $x(0)$  e  $\bar{t}$  :

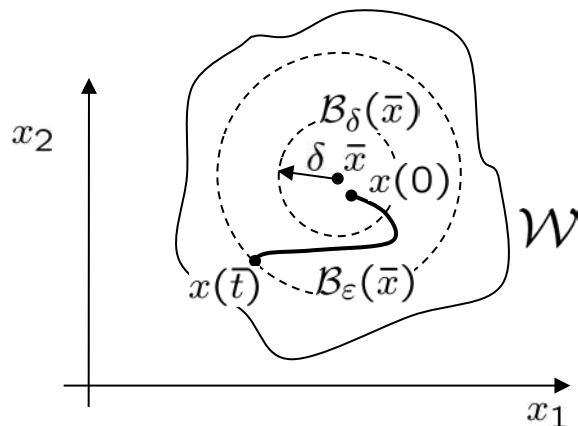
$$V(x(0)) \leq M < m \leq V(x(\bar{t}))$$

da cui

$$V(x(0)) < V(x(\bar{t}))$$

$V$  non può  
crescere lungo le  
traiettorie del  
sistema!

Ma ciò è impossibile poiché  $\dot{V}$  è per ipotesi semidefinita negativa:



$$V(x(\bar{t})) - V(x(0)) = \int_0^{\bar{t}} \underbrace{\dot{V}(x(t))}_{\leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{W}} dt \leq 0$$

Quindi la traiettoria non esce mai dalla sfera  $B_\epsilon(\bar{x})$  e ciò prova la stabilità. C.V.D.

Le restanti implicazioni del Teorema di Lyapunov si dimostrano in maniera simile.

## Esempio 1

Sistema del primo ordine:  $\dot{x} = (1 - x)^5$

il cui unico stato di equilibrio è  $\bar{x} = 1$ .

Per studiarne la stabilità, si può considerare la funzione di Lyapunov

$$V(x) = (1 - x)^2$$

che è continua con derivata continua ed è definita positiva in  $\bar{x} = 1$ .

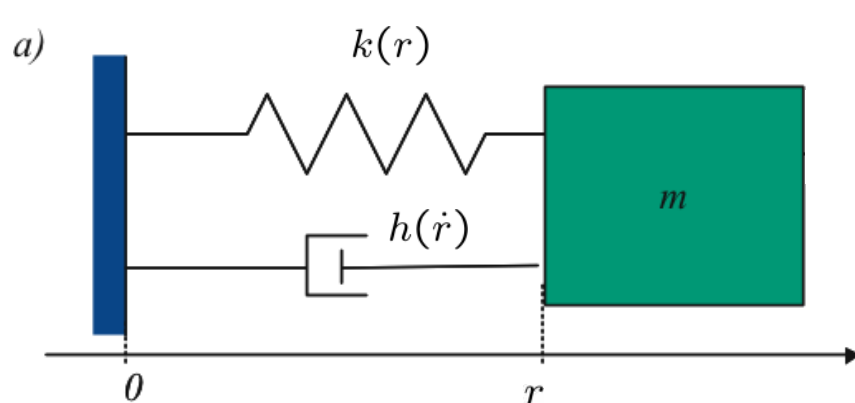
Si trova

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dx} f(x) = -2(1-x)(1-x)^5 = -2(1-x)^6$$

che è definita negativa in  $\bar{x}$  poiché  $\dot{V}(\bar{x}) = 0$  e  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \neq \bar{x}$

Dunque per il teorema di Lyapunov lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

## Esempio 2: sistema meccanico non lineare



$$k(r) = k_0 r + k_1 r^3$$

$$h(\dot{r}) = b \dot{r} |\dot{r}|$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m x_2^2 + \frac{1}{2} k_0 x_1^2 + \frac{1}{4} k_1 x_1^4$$

Continua con le sue derivate prime e definita positiva

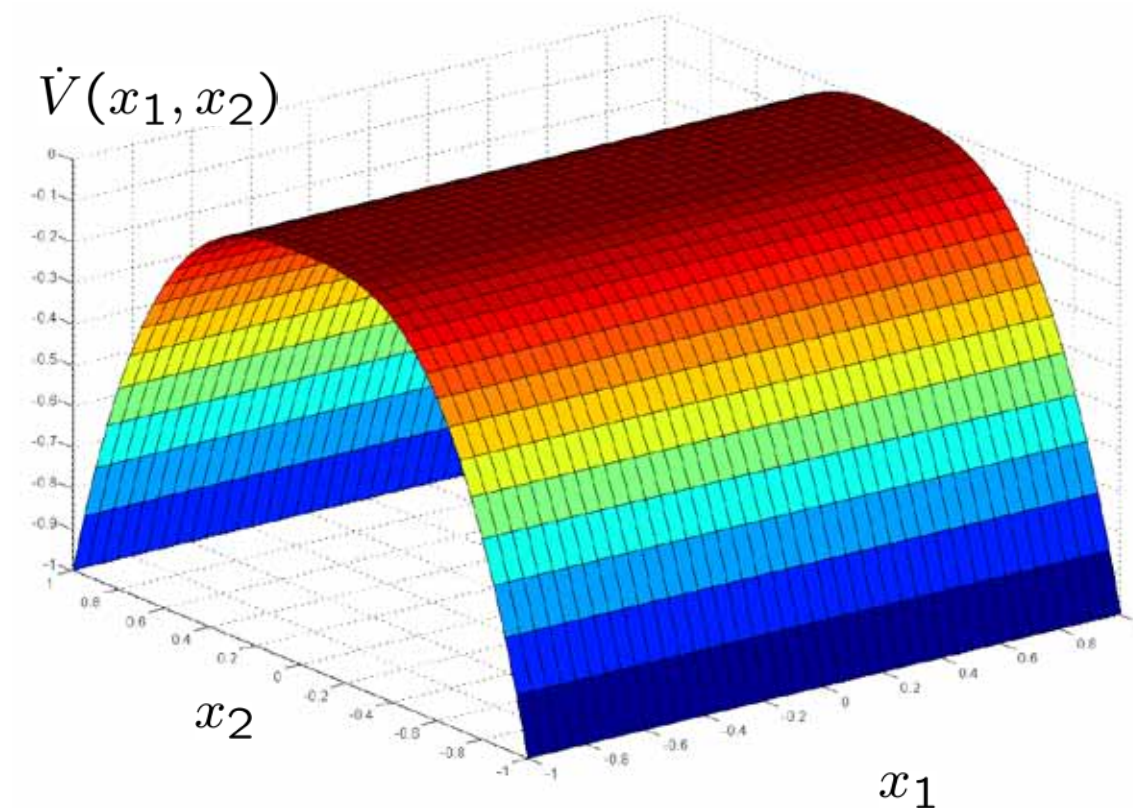
$$\dot{V}(x_1, x_2) = m x_2 \dot{x}_2 + k_0 x_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1^3 \dot{x}_1 = -b |x_2|^3$$

Semidefinita negativa nell'origine

$$\dot{V}(x_1, x_2) = mx_2\dot{x}_2 + k_0x_1\dot{x}_1 + k_1x_1^3\dot{x}_1 = -b|x_2|^3$$

Infatti non si annulla solo nell'origine ma ovunque sia  $x_2 = 0$  :

$$\dot{V}(x_1, 0) = 0, \quad \forall x_1$$



Dunque per il teorema di Lyapunov lo stato di equilibrio è stabile.

## Controesempio (oscillatore di Van del Pol)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{x_1}{LC} - \frac{x_2}{L}(3x_1^2 - \alpha) \quad L, C, \alpha > 0\end{aligned}$$

L'origine è l'unico stato di equilibrio:  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Consideriamo la funzione  $V(x) = x_1^2 + LCx_2^2$   
che è continua con derivata continua ed è definita positiva nell'origine.

Si trova

$$\dot{V}(x) = [2x_1 \quad 2LCx_2] \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{LC} - \frac{x_2}{L}(3x_1^2 - \alpha) \\ x_2 \end{bmatrix} = -2Cx_2^2(3x_1^2 - \alpha)$$

che è semidefinita positiva, perché vale zero se  $x_2 = 0$   
ed è strettamente positiva per  $x_1$  sufficientemente piccolo.

Nessuna conclusione  
è possibile sulla  
base del solo  
teorema di Lyapunov

## Metodo diretto di Lyapunov (sistemi a tempo discreto)

- Analoghi risultati esistono per i sistemi a tempo di discreto. Si noti che in questo caso, è sufficiente la continuità della funzione  $V(x)$ . Cioè non è necessario assumere che ammetta derivate continue.
- Inoltre la variazione di  $V(x)$  lungo le traiettorie del sistema viene ora espressa in termini di incremento in un passo temporale:

$$\Delta V(x) := V(f(x)) - V(x)$$

## Teorema di Lyapunov (sistemi a tempo discreto)

Dato il sistema autonomo  $x(t+1) = f(x(t))$  avente  $\bar{x}$  come st. di equilibrio, sia  $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua e definita positiva in  $\bar{x}$ . Allora

$\Delta V(x)$  semi-definita negativa in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è stabile.

$\Delta V(x)$  definita negativa in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.

$\Delta V(x)$  definita positiva in  $\bar{x}$    $\bar{x}$  è instabile.

**Esempio (1)**

$$x_1(t+1) = \frac{x_2(t)}{1+x_2^2(t)}$$

$$x_2(t+1) = \frac{x_1(t)}{1+x_2^2(t)}$$

L'origine è chiaramente stato di equilibrio

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{è continua e definita positiva}$$

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(f(x)) - V(x) = \left( \frac{x_2}{1+x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{x_1}{1+x_2^2} \right)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \frac{-2x_2^2 - x_2^4}{(1+x_2^2)^2} (x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

semidefinita  
negativa

Dunque per il teorema di Lyapunov lo stato di equilibrio è stabile.

## Esempio (2)

Scegliendo una diversa  $V(x)$  si può ottenere un risultato più forte:

$$V(x) = (x_1^2 + x_2^2) \left( 1 + \frac{1}{(1 + x_2^2)^2} \right)$$

Con calcoli elementari si trova:

$$\Delta V(x) = \underbrace{\frac{x_1^2 + x_2^2}{[(1 + x_2^2)^2 + x_1^2]^2}}_{\text{Nullo nell'origine e strettamente positivo altrove}} \underbrace{\left\{ (1 + x_2^2)^2 - [(1 + x_2^2)^2 + x_1^2]^2 \right\}}_{\text{Nullo nell'origine e strettamente negativo altrove (verificare per esercizio)}}$$

Dunque  $\Delta V(x)$  è definita negativa e ciò implica che lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

## Generalizzazione al caso tempo-variante

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{Sistema tempo-variante}$$

$$0 = f(0, t), \forall t \geq t_0 \quad \text{Per semplicità assumiamo che l'origine sia stato di equilibrio}$$

Scelta una  $V(\cdot)$  la corrispondente  $\dot{V}(\cdot)$  sarà comunque esplicitamente dipendente dal tempo:

$$V = V(x) \quad \longrightarrow \quad \frac{dV(x)}{dt} = \nabla V(x) \cdot f(x, t) = \dot{V}(x, t)$$

$$V = V(x, t) \quad \longrightarrow \quad \frac{dV(x, t)}{dt} = \nabla V(x) \cdot f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{V}(x, t)$$

## Funzioni di $V(x,t)$ definite positive

Una funzione  $V(x, t)$  si dice definita positiva nell'origine se  
 $V(0, t) = 0, \quad \forall t \geq t_0$  ed esiste una funzione scalare  $\alpha(\cdot)$   
continua, non decrescente, con  $\alpha(0) = 0$  tale che

$$0 < \alpha(\|x\|) \leq V(x, t), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x \neq 0$$

Analoghe definizioni si danno per le altre condizioni di definitezza.

## Teorema

- Dato il sistema  $\dot{x} = f(x, t)$  avente l'origine quale stato di equilibrio, sia  $V(x, t)$  definita positiva e continua con le sue derivate parziali.

Se

$$\dot{V}(x, t) = \nabla V(x) \cdot f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

è semidefinita negativa, allora l'origine è stato di equilibrio è stabile.

- Se inoltre esiste una funzione scalare  $\beta(\cdot)$  continua, non decrescente, con  $\beta(0) = 0$  e tale che  $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$ ,  $\forall t \geq t_0$ ,  $\forall x \neq 0$  allora l'origine è uno stato di equilibrio **uniformemente** stabile.

# Stabilità:

- del movimento
- dell'equilibrio
- dei sistemi lineari



Generico sistema lineare regolare a dimensione finita:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \quad \text{Con } f \text{ e } g \text{ lineari rispetto a } x \text{ e } u$$
$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$

Vogliamo studiare la stabilità rispetto a perturbazioni dello stato iniziale del generico movimento  $\bar{x}(t) = \varphi(t, t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$

Analogamente a quanto fatto nel caso generale, definiamo lo scostamento

$$z(t) := x(t) - \bar{x}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = f(z(t) + \bar{x}(t), \bar{u}(t), t) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \\ &= A(t)(z(t) + \bar{x}(t)) + B(t)\bar{u}(t) - A(t)\bar{x}(t) - B(t)\bar{u}(t) \\ &= A(t)z(t) \end{aligned}$$

per la linearità di  $f$

## Fatto fondamentale:

Lo scostamento rispetto al movimento nominale evolve secondo la

$$\dot{z}(t) = f(z(t), \bar{u}(t), t) = A(t)z(t)$$

e quindi non dipende dallo stato iniziale (ma solo dallo scostamento iniziale  $z(0)$  ).

Ciò significa che se il sistema è lineare TUTTI i movimenti (e quindi anche i movimenti costanti, cioè gli equilibri) condividono le stesse proprietà di stabilità. Si può pertanto parlare di stabilità DEL SISTEMA. In altre parole, la proprietà di stabilità è, per i sistemi lineari, una proprietà GLOBALE.

# **Stabilità dei sistemi lineari tempo-invarianti a tempo continuo**

## Stabilità e autovalori

(★)  $\dot{x} = Ax$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo continuo)

### Teorema

Il sistema (★) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori  $A$  hanno parte reale strettamente negativa. E' stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa o nulla e, qualora abbiano parte reale nulla, sono radici semplici (cioè di molteplicità unitaria) del polinomio minimo.

## Dimostrazione

Indichiamo con  $J = T^{-1}AT$  la forma canonica di Jordan di  $A$

Si ha:

$$\|x(t)\| = \|Te^{Jt}T^{-1}x(0)\| \leq \|T\| \|e^{Jt}\| \|T^{-1}\| \|x(0)\|$$

Dove  $\|M\|$  con  $M$  matrice indica la norma indotta di matrice

$$\|M\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

che, nel caso di matrici quadrate  $n \times n$ , gode delle proprietà:

- $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$
- $\|M\| \leq n \max_{i,j} |m_{ij}|$

Consideriamo dapprima l'affermazione sulla stabilità:

(★) stabile



Tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa o nulla e, qualora abbiano parte reale nulla, sono radici semplici (cioè di molteplicità unitaria) del polinomio minimo.

e dimostriamo anzitutto l'implicazione ( $\Leftarrow$ )

Come è noto dallo studio del movimento (cfr slides della parte 3):

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_0 t} & \dots & \dots & 0 \\ & e^{J_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & e^{J_s t} \end{bmatrix}$$

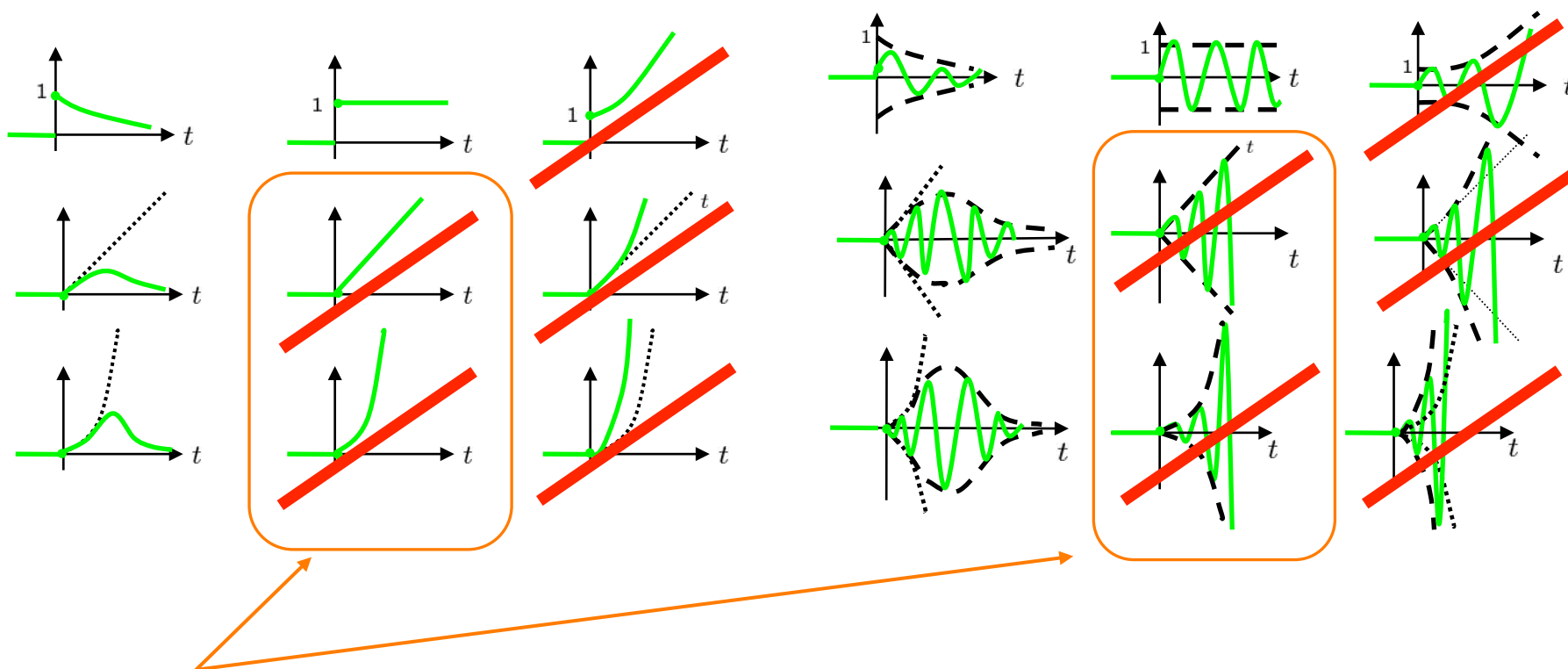
dove

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_{k+i} t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & t \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, s$$

La condizione sugli autovalori implica che la matrice  $e^{Jt}$  sia LIMITATA, in altre parole:

$$\exists k > 0 : [e^{Jt}]_{ij} \leq k, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i, j$$

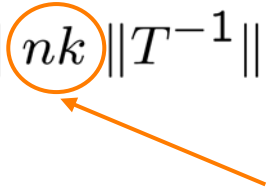
Infatti richiedere che gli autovalori abbiano parte reale negativa o nulla, e se nulla, che siano radici semplici del polinomio minimo significa escludere che vi siano modi divergenti.



Questi casi non si possono verificare perché  $n_i = 1, \forall i : Re(\lambda_i) = 0$

Sfruttando la seconda proprietà della norma di matrice e la limitatezza di  $e^{Jt}$  si può dunque scrivere che  $\forall t \geq 0$

$$\|x(t)\| \leq \|T\| \|e^{Jt}\| \|T^{-1}\| \|x(0)\| \leq \|T\| nk \|T^{-1}\| \|x(0)\| \quad (**)$$

Fissato arbitrariamente  $\varepsilon > 0$  basta prendere   $maggiora \|e^{Jt}\|$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\| nk \|T^{-1}\|}$$

per garantire che ogni traiettoria con inizio in  $\mathcal{B}_\delta(0)$  sia contenuta in  $\mathcal{B}_\varepsilon(0)$ .

Infatti la  $(**)$  garantisce che  $\|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|x(0)\|$  e quindi

$$\|x(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Pertanto l'origine (e quindi il sistema) è stabile.

Ora dimostriamo l'implicazione ( $\Rightarrow$ ) facendo vedere che se la condizione sugli autovalori è violata allora il sistema non è stabile.

Supponiamo che vi sia un modo della matrice  $e^{Jt}$  non limitato e sia esso  $[e^{Jt}]_{ij}$

Allo stato iniziale:

$$x(0) = T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j - \text{ma componente}$$

corrisponde il movimento

$$x(t) = Te^{Jt}T^{-1}x(0) = T\alpha \overbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ [e^{Jt}]_{ij} \\ \vdots \end{bmatrix}}^{j - \text{ma colonna di } e^{Jt}} \leftarrow i - \text{ma componente}$$

che è non limitato  $\forall \alpha \neq 0$ . Pertanto l'origine (e quindi il sistema) non è stabile.

Consideriamo ora l'affermazione sulla asintotica stabilità:

(★) Asintoticamente stabile  $\iff$  Tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa.

( $\Leftarrow$ )

Basta dimostrare che l'origine è stabile ed attrattiva. La stabilità è garantita per quanto appena dimostrato. Quanto all'attrattività, discende direttamente dal fatto che tutti i modi del sistema convergono a zero.

( $\Rightarrow$ )

La dimostrazione è simile a quella già vista per la stabilità: si suppone esista un modo non convergente (provocato da un autovalore a parte reale non strettamente negativa) e si dimostra che esiste uno stato iniziale che genera un movimento non convergente, il che nega la asintotica stabilità.

## Corollario

(★)  $\dot{x} = Ax$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo continuo)

Il sistema (★) è instabile se e solo se almeno un autovalore di  $A$  ha parte reale strettamente positiva oppure ha parte reale nulla ma è radice di molteplicità maggiore di uno del polinomio minimo.

## Teorema (di Lyapunov per sistemi lineari)

( $\star$ )  $\dot{x} = Ax$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo continuo)

### Teorema

Il sistema ( $\star$ ) è asintoticamente stabile se e solo se per ogni matrice  $Q$  simmetrica e definita positiva esiste una matrice  $P$  simmetrica e definita positiva tale che

$$A^T P + P A = -Q$$

Equazione di Lyapunov

## Dimostrazione

( $\Leftarrow$ )

Siano  $P, Q$  matrici simmetriche e definite positive che soddisfano l'equazione di Lyapunov. Per dimostrare che il sistema è asintoticamente stabile basta prendere

$$V(x) = x^\top P x$$

Segue che

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = (Ax)^\top P x + x^\top P A x = \\ &= x^\top (A^\top P + P A) x = -x^\top Q x \end{aligned} < 0, \quad \forall x \neq 0$$

Dunque  $\dot{V}(x)$  è definita negativa e per il Teorema di Lyapunov l'origine è stato di equilibrio asintoticamente stabile. Pertanto il sistema  $(\star)$  è asintoticamente stabile.

## Dimostrazione

( $\Rightarrow$ )

Sia  $(\star)$  asintoticamente stabile e sia  $Q$  simmetrica e definita positiva.

Bisogna dimostrare che esiste  $P$  simmetrica e definita positiva che soddisfa l'equazione di Lyapunov.

Prendiamo  $P$  nella maniera seguente:

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt$$

Si può dimostrare che la matrice così definita esiste (cioè l'integrale improprio converge) poiché il sistema è per ipotesi asintoticamente stabile e pertanto tutti i suoi modi convergono esponenzialmente a zero.

Inoltre è simmetrica essendo integrale di matrici simmetriche:

$$\left( e^{A^\top t} Q e^{At} \right)^\top = e^{A^\top t} Q e^{At}$$

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt$$

infine, è definita positiva poiché la matrice integranda è definita positiva  $\forall t$

$$x^\top \left( e^{A^\top t} Q e^{At} \right) x = \left( e^{At} x \right)^\top Q \left( e^{At} x \right) > 0, \quad \forall x \neq 0$$

Infatti  $Q$  è per ipotesi definita positiva e  $e^{At}$  (che ha per autovalori  $e^{\lambda_i t}$ ) ha nucleo banale:

$$\ker \left[ e^{At} \right] = \{0\}, \quad \forall t$$

Riassumendo, la  $P$  così scelta è simmetrica e definita positiva. Per completare la dimostrazione è quindi sufficiente mostrare che è soluzione dell'equazione di Lyapunov...

... il che è immediato per sostituzione:

$$\begin{aligned} A^\top P + PA &= A^\top \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt + \int_0^{+\infty} e^{A^\top t} Q e^{At} dt A = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{A^\top t} Q e^{At} A \right) dt = \left[ e^{A^\top t} Q e^{At} A \right]_0^\infty = -Q \end{aligned}$$

C.V.D.

## Test di stabilità

Si può dimostrare che data  $Q$  simmetrica e definita positiva, la soluzione  $P$  dell'equazione di Lyapunov è unica. Ciò permette di formulare il seguente

### TEST DI STABILITA'

Dato un sistema  $(\star)$  si scelga  $Q$  simmetrica e definita positiva e si risolva l'equazione di Lyapunov nell'incognita  $P$ . Se la soluzione di tale equazione è definita positiva il sistema è asintoticamente stabile, altrimenti non lo è.

## Osservazione 1

Se il test di stabilità dà esito positivo, allora (come è chiaro dalla dimostrazione del teorema), la forma quadratica

$$V(x) = x^{\top} P x$$

è una funzione di Lyapunov per il sistema. Quindi il teorema di Lyapunov fornisce un metodo sistematico per trovare una funzione di Lyapunov (per sistemi lineari).

## Osservazione 2

Fissata  $Q$  simmetrica, l'equazione di Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

è un sistema lineare di equazioni algebriche avente:

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{equazioni linearmente indipendenti}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{incognite ( ovvero i } p_{ij} = p_{ji} \text{ )}$$

**PER CASA:** verificare che la generica equazione del sistema lineare è:

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} p_{jk} + \sum_{j=1}^n p_{ij} a_{jk} = -q_{ik}$$

## Analisi di Stabilità nel dominio di Laplace

Si è visto che nel caso dei sistemi lineari, la stabilità è equivalente alla limitatezza della risposta libera dello stato, e la stabilità asintotica alla convergenza a zero della risposta libera dello stato a fronte di qualsiasi stato iniziale.

ATTENZIONE, ciò vale solo per i sistemi lineari! (cfr. oscillatore di Van del Pol, la cui risposta libera dello stato è limitata)

Ma ricorrendo alla trasformata di Laplace, la risposta libera dello stato può essere espressa in questo modo:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ (sI - A)^{-1} x(0^-) \right]$$

è una matrice di funzioni razionali del tipo  $\frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)}$

E' evidente che per garantire la limitatezza (ed eventualmente la convergenza a zero) della risposta libera a fronte di un qualsiasi stato iniziale è necessario e sufficiente che tutti gli elementi della matrice

$$(sI - A)^{-1}$$

abbiano antitrasformata limitata (ed eventualmente convergente a zero).

Supponiamo che il generico elemento della matrice di trasferimento abbia un polo reale  $p_k$  di molteplicità  $m_k$  :

$$\frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \frac{N_{ij}(s)}{(s - p_1)^{m_1} \dots (s - p_k)^{m_k} \dots}$$

I termini dello sviluppo in fratti semplici della funzione razionale, relativi al polo  $p_k$  sono allora:

$$\frac{r_{k1}}{(s - p_k)} + \frac{r_{k2}}{(s - p_k)^2} + \dots + \frac{r_{km_k}}{(s - p_k)^{m_k}}$$

Ricordando che:

$$\mathcal{L} \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{\beta t} \mathbf{1}(t) \right) = \frac{1}{(s-\beta)^\alpha}$$

Si ottiene:

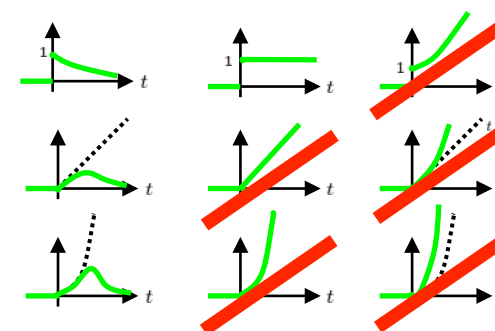
$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} \right] = \left[ \dots + r_{k1} e^{p_k t} + \dots + \frac{r_{km_k}}{(m_k-1)!} t^{m_k-1} e^{p_k t} + \dots \right] \cdot \mathbf{1}(t)$$

Questi addendi sono limitati se e solo se:

$$p_k < 0 \quad \text{oppure} \quad p_k = 0 \text{ e } m_k = 1$$

Sono limitati e convergenti a zero se e solo se:

$$p_k < 0$$



Ad analoghe conclusioni si giunge in presenza di coppie di poli complessi coniugati.

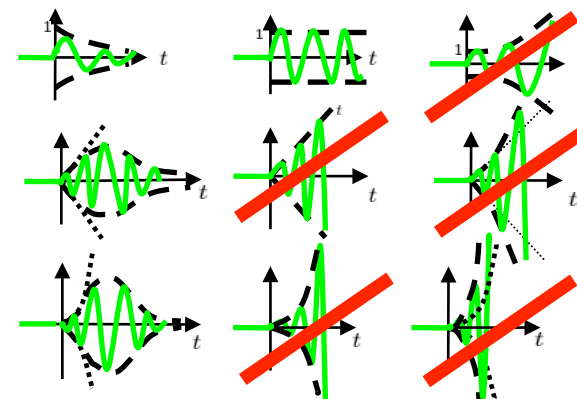
In particolare si avrà, per una coppia di poli  $\sigma_k \pm j\omega_k$  di molteplicità  $m_k$  che:

il contributo al movimento libero è limitato se e solo se:

$$\sigma_k < 0 \quad \text{oppure} \quad \sigma_k = 0 \text{ e } m_k = 1 .$$

E' limitato e convergente se e solo se:

$$\sigma_k < 0$$



Pertanto è possibile enunciare il teorema della pagina seguente.

(★)  $\dot{x} = Ax$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo continuo)

### Teorema

Il sistema (★) è

- stabile se e solo tutti i poli di tutti gli elementi della matrice  $(sI - A)^{-1}$  hanno parte reale strettamente negativa o nulla e quelli aventi parte reale nulla hanno molteplicità unitaria.
- asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli di tutti gli elementi della matrice  $(sI - A)^{-1}$  hanno parte reale strettamente negativa.
- instabile altrimenti

## Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Si trova facilmente che

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

segue che il sistema è instabile, dal momento che vi sono due elementi della matrice

$$(sI - A)^{-1}$$

che hanno almeno un polo strettamente positivo.

## Osservazione

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Siamo in presenza di un sistema che ammette la divergenza del movimento libero dello stato, ma non del movimento libero dell'uscita:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C (sI - A)^{-1} B = \frac{1}{s + 1}$$

Il modo instabile non compare nella funzione di trasferimento

Dunque l'esame della sola funzione di trasferimento non è sufficiente a studiare la stabilità (ciò verrà approfondito nella parte del corso dedicata all'osservabilità)

## Il criterio di Routh

- Si è visto finora che la stabilità per i sistemi lineari è legata al segno della parte reale delle radici di opportuni polinomi (il polinomio caratteristico  $p(\lambda)$  di  $A$ , le cui radici sono tutti e soli gli autovalori di  $A$ , oppure i denominatori degli elementi della matrice  $(sI - A)^{-1}$ , le cui radici sono autovalori di  $A$  ).
- E' quindi utile disporre di uno strumento per studiare il segno delle parti reali delle radici di un generico polinomio, senza doverle calcolare.
- Il criterio di Routh, basato sull'omonimo teorema, permette di fare ciò.
- E' particolarmente utile nel trattare polinomi i cui coefficienti dipendono da parametri.

# Tabella di Routh

Dato  $\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$

$n + 1$   
righe

|          |             |             |             |         |
|----------|-------------|-------------|-------------|---------|
| $n$      | $\varphi_0$ | $\varphi_2$ | $\varphi_4$ | $\dots$ |
| $n - 1$  | $\varphi_1$ | $\varphi_3$ | $\varphi_5$ | $\dots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$    | $\vdots$    | $\dots$ |
| $i$      | $h_1$       | $h_2$       | $h_3$       | $\dots$ |
| $i - 1$  | $k_1$       | $k_2$       | $k_3$       | $\dots$ |
| $i - 2$  | $l_1$       | $l_2$       | $l_3$       | $\dots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$    | $\vdots$    | $\dots$ |
| $0$      |             |             |             |         |

$$l_1 = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad l_2 = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_3 \\ k_1 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\dots \quad l_j = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

## Teorema di Routh-Hurwitz

Se la tabella di Routh è ben definita (cioè se gli elementi della prima colonna sono tutti non nulli eccetto al più l'ultimo), allora il numero di radici con parte reale positiva è pari al numero di cambiamenti di segno nella prima colonna della tabella di Routh ed il numero di radici con parte reale negativa è pari al numero di permanenze di segno nella prima colonna della tabella di Routh.

## Esempio 1

$$\varphi(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$$

|   |          |   |   |
|---|----------|---|---|
| 3 | 1        | 1 | 0 |
| 2 | -4       | 6 | 0 |
| 1 | $\alpha$ |   |   |
| 0 | $\beta$  |   |   |

$$\alpha = -\frac{1}{-4} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}$$

$$\beta = -\frac{1}{\alpha} \det \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = 6$$

due variazioni e una  
permanenza



Due radici a  $Re > 0$

Una radice a  $Re < 0$

In effetti il polinomio può essere scritto così:

$$\varphi(s) = (s + 1)(s - 2)(s - 3) = s^3 - 4s^2 + s + 6$$

## Esempio 2

$$\varphi(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$$

|   |                |    |    |
|---|----------------|----|----|
| 4 | 2              | 3  | 10 |
| 3 | 1              | 5  |    |
| 2 | -7             | 10 |    |
| 1 | $\frac{45}{7}$ |    |    |
| 0 | 10             |    |    |

due variazioni e due  
permanenze



Due radici a  $Re > 0$

Due radici a  $Re < 0$

## Osservazioni

|   |               |   |   |
|---|---------------|---|---|
| 3 | 1             | 1 | 0 |
| 2 | -4            | 6 | 0 |
| 1 | $\frac{5}{2}$ |   |   |
| 0 | 6             |   |   |

|   |                |    |    |
|---|----------------|----|----|
| 4 | 2              | 3  | 10 |
| 3 | 1              | 5  |    |
| 2 | -7             | 10 |    |
| 1 | $\frac{45}{7}$ |    |    |
| 0 | 10             |    |    |

- 1) In entrambi i casi l'ultimo elemento della prima colonna coincide con il coefficiente di grado zero del polinomio. Ciò non è un caso, ma avviene sempre per il modo in cui la tabella è costruita.
- 2) Nel passare da una riga di indice pari a quella di indice dispari successiva, il numero di elementi della riga diminuisce di uno. Nell'altro caso resta invariato. Le ultime due righe hanno un solo elemento.

## Singularità della tabella di Routh

Quando il primo elemento di una riga della tabella di Routh è nullo, la costruzione della riga successiva non è possibile (comporterebbe una divisione per zero). Si distinguono due casi:

- CASO A: il primo elemento di una riga è nullo, ma vi è almeno un altro elemento non nullo nella stessa riga.
- CASO B: la riga è tutta nulla

In questi casi è comunque possibile analizzare le radici del polinomio, ma bisogna procedere nelle maniere illustrate dagli esempi che seguono.

## CASO A: primo elemento nullo ma riga non nulla

$$\varphi(s) = s^3 + 3s - 2$$

|   |   |    |
|---|---|----|
| 3 | 1 | 3  |
| 2 | 0 | -2 |
| 1 |   |    |
| 0 |   |    |

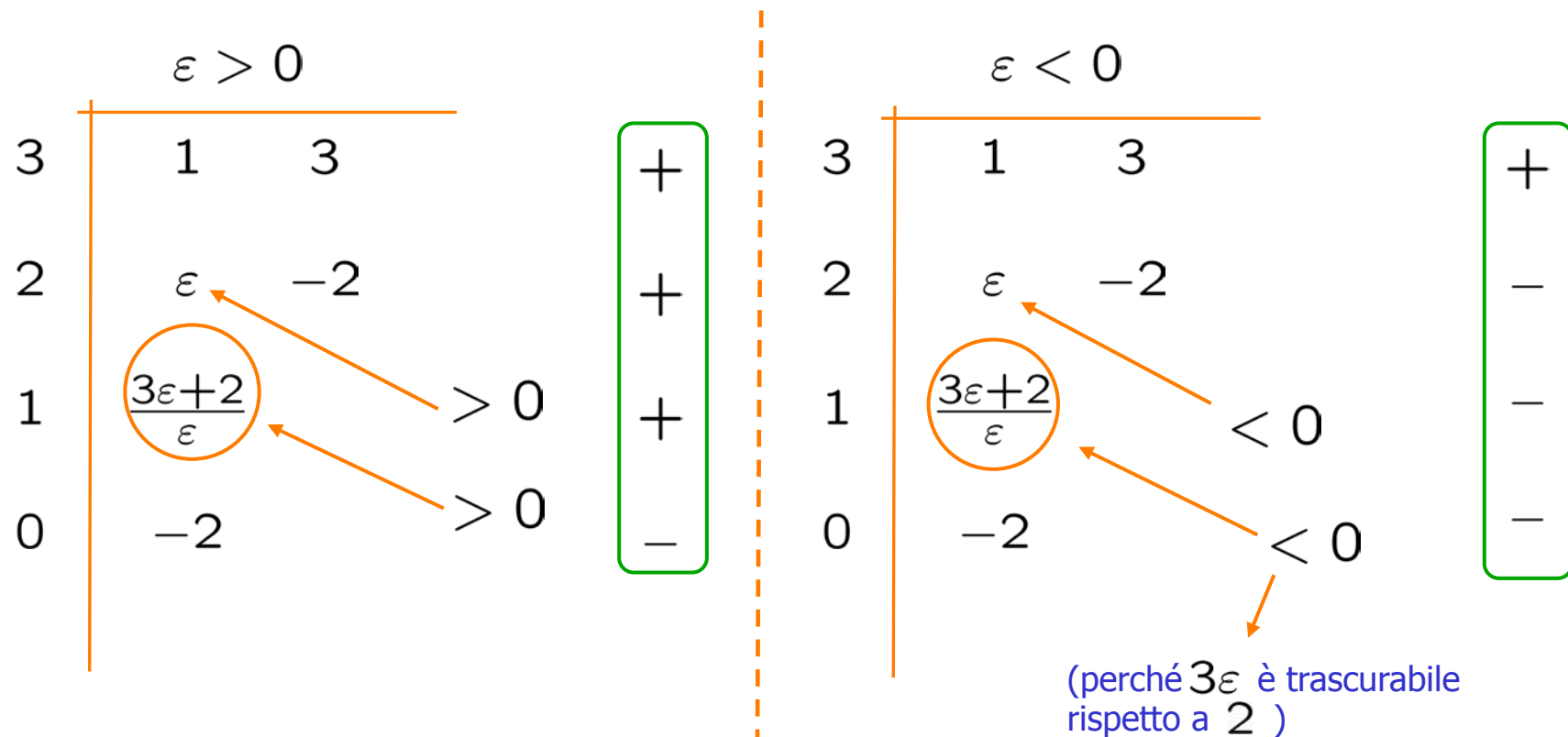
impossibile proseguire  
con la riga successiva

|   |                                      |    |
|---|--------------------------------------|----|
| 3 | 1                                    | 3  |
| 2 | $\varepsilon$                        | -2 |
| 1 | $\frac{3\varepsilon+2}{\varepsilon}$ |    |
| 0 | -2                                   |    |

La procedura consiste nel sostituire lo zero con un numero reale  $\varepsilon$  “piccolo”. Ciò equivale a “perturbare” i coefficienti del polinomio senza cambiare il segno della parte reale delle radici.

## CASO A: primo elemento nullo ma riga non nulla

Poi la costruzione della tabella può proseguire, e l'analisi venire condotta sui coefficienti della prima colonna ATTRIBUENDO UN SEGNO QUALSIVOGLIA ad  $\varepsilon$



In ambedue i casi si hanno due permanenze e una variazione



Due radici a  $Re < 0$   
Una radice a  $Re > 0$

## CASO B: riga tutta nulla <sup>(1)</sup>

In questo caso non si può procedere con il metodo appena visto. Illustriamo con un esempio la maniera di procedere.

$$\varphi(s) = s^4 + s^3 - 3s^2 - s + 2$$

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 4 | 1  | -3 | 2 |
| 3 | 1  | -1 |   |
| 2 | -2 | 2  |   |
| 1 | 0  |    |   |
| 0 |    |    |   |

← RIGA TUTTA NULLA (infatti la riga 1 ha un solo elemento)

Si può dimostrare che se una riga è tutta nulla o è di indice dispari oppure è la riga di indice 0 (cioè l'ultima riga).

N.B. Se si annulla la riga di indice 0 non serve alcun accorgimento particolare: significa semplicemente che il termine noto è nullo e quindi che il polinomio è divisibile per  $s$ , ovvero ha una radice nulla.

## Esempio

Se una riga dispari si annulla significa che il polinomio in esame è divisibile per un polinomio  $\varphi_1(s)$  di grado uguale all'indice della riga nulla più uno [in questo esempio di grado  $1+1=2$ ] i cui coefficienti di grado pari sono gli elementi della riga precedente e i cui coefficienti di grado dispari sono nulli.

$$\varphi(s) = \varphi_1(s)\varphi_2(s) = (-2s^2 + 2)\varphi_2(s)$$

Le righe precedenti quella tutta nulla forniscono informazioni sulle radici dell'altro fattore ( $\varphi_2(s)$ ) secondo le regole già viste (variazione  $\rightarrow$  radice a parte reale positiva, permanenza  $\rightarrow$  radice a parte reale negativa)

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 4 | 1  | -3 | 2 |
| 3 | 1  | -1 |   |
| 2 | -2 | 2  |   |
| 1 | 0  |    |   |
| 0 |    |    |   |

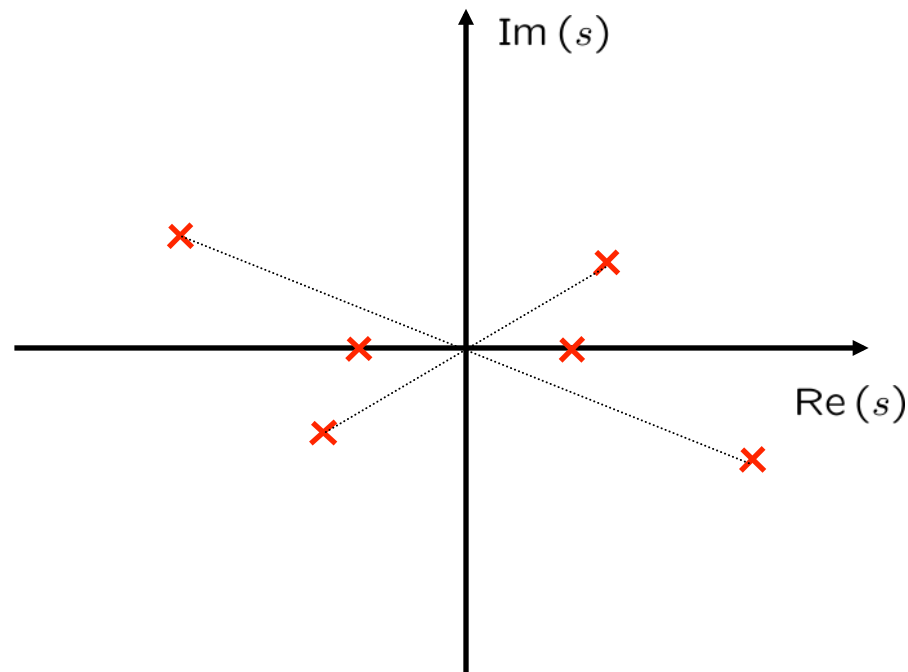
In questo caso: una permanenza e una variazione, ossia una radice a  $Re > 0$  una a  $Re < 0$

Sono i coefficienti di grado pari del polinomio fattore di  $\varphi(s)$

## Simmetria quadrantele

Dunque il polinomio  $\varphi_1(s)$  ha i coefficienti di grado dispari nulli.

Le radici di un polinomio avente nulli i coefficienti dispari hanno SIMMETRIA QUADRANTALE (se  $\bar{s}$  è radice, anche  $-\bar{s}$  lo è, come è immediato verificare).



## CASO B: riga tutta nulla <sup>(2)</sup>

Per avere informazioni sulle radici del fattore  $\varphi_1(s)$  bisogna:

- 1) Creare una nuova riga (nell'esempio la riga 1') costituita dai coefficienti del polinomio:

$$\varphi'_1(s) = \frac{d\varphi_1(s)}{ds} = -4s$$

- 2) Proseguire nella costruzione della tabella ignorando la riga nulla

La seconda parte di tabella fornisce informazioni sulle radici del fattore  $\varphi_1(s)$

|    |    |    |   |
|----|----|----|---|
| 4  | 1  | -3 | 2 |
| 3  | 1  | -1 |   |
| 2  | -2 | 2  |   |
| 1  | 0  |    |   |
| 1' | -4 |    |   |
| 0  |    | 2  |   |

nuova riga

Calcolato sulla base delle righe 2 e 1'

## CASO B: riga tutta nulla <sup>(3)</sup>

Della seconda parte di tabella si contano solo le variazioni di segno: ad ogni variazione corrisponde una coppia di radici, una a  $Re > 0$  e una a  $Re < 0$ . Le eventuali radici rimanenti hanno parte reale nulla.

Se la seconda parte di tabella ha, ad esempio, solo permanenze di segno, allora vuol dire che tutte le radici di  $\varphi_1(s)$  hanno parte reale nulla.

Quindi  $\varphi_1(s)$  ha due radici aventi parti reali opposte. Poiché il polinomio  $\varphi(s)$  è di quarto grado, l'analisi è conclusa, avendo ottenuto informazioni su  $2 + 2 = 4$  radici.

una variazione

|    |    |    |   |
|----|----|----|---|
| 4  | 1  | -3 | 2 |
| 3  | 1  | -1 |   |
| 2  | -2 | 2  |   |
| 1  | 0  |    |   |
| 1' | -4 |    |   |
| 0  | 2  |    |   |

-  
+

{

# Esempio

$$\varphi(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$$

due permanenze →  
due radici a parte  
reale negativa

|   |    |       |    |    |    |
|---|----|-------|----|----|----|
| + | 6  | 1     | -2 | -7 | -4 |
| + | 5  | 1     | -3 | -4 |    |
| + | 4  | 1     | -3 | -4 |    |
|   | 3  | 0     | 0  |    |    |
| + | 3' | 4     | -6 |    |    |
| - | 2  | -6/4  | -4 |    |    |
| - | 1  | -50/3 |    |    |    |
| - | 0  | -4    |    |    |    |

una variazione →  
due radici a parte  
reale opposta.

Il polinomio  $\varphi(s)$  è di sesto grado:  
rimangono due radici, che sono a  
parte reale nulla.

$$\varphi_1(s) = s^4 - 3s^2 - 4$$

$$\varphi'_1(s) = \frac{d\varphi_1(s)}{ds} = 4s^3 - 6s$$

## Altro esempio: polinomio parametrico

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K + 2$$

Per  $K \notin \{-2, 8\}$  non si hanno casi singolari, perché nessun elemento si annulla.

|  | 4 | 3 | 2        | 1       | 0 |
|--|---|---|----------|---------|---|
|  | 4 | 6 | 11       | $K + 2$ |   |
|  |   | 3 | 6        |         |   |
|  |   | 2 | 10       | $K + 2$ |   |
|  |   | 1 | $\alpha$ |         |   |
|  |   | 0 | $\beta$  |         |   |

$$\alpha = \frac{48 - 6K}{10}$$

$$\beta = K + 2$$

Per  $K = -2$  si annulla  $\beta$  e quindi il polinomio ha una radice nulla.

Per  $K = 8$  si annulla  $\alpha$  e quindi la riga 1 è tutta nulla. Dunque il polinomio è divisibile per

$$\varphi_1(s) = 10s^2 + K + 2 = 10s^2 + 10 = 10(s+j)(s-j)$$

che ha due radici immaginarie pure (le altre due sono a parte reale negativa, perché i coefficienti della prima parte di tabella sono concordi).

PER CASA: completare la tabella nel caso singolare  $K = 8$

# **Stabilità dei sistemi lineari stazionari a tempo discreto**

## Stabilità e autovalori

( $\star$ )  $x(t + 1) = Ax(t)$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo discreto)

In maniera del tutto analoga al caso a tempo continuo si dimostrano i seguenti:

### Teorema

Il sistema ( $\star$ ) è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno modulo strettamente minore di 1. E' stabile se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  hanno modulo minore o uguale di 1 e quelli con modulo unitario sono radici semplici (cioè di molteplicità unitaria) del polinomio minimo.

### Corollario

Il sistema ( $\star$ ) è instabile se e solo se almeno un autovalore di  $A$  ha modulo strettamente maggiore di 1 oppure ha modulo unitario ma è radice di molteplicità maggiore di uno del polinomio minimo.

## Teorema (di Lyapunov per sistemi lineari)

( $\star$ )  $x(t+1) = Ax(t)$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo discreto)

### Teorema

Il sistema ( $\star$ ) è asintoticamente stabile se e solo se per ogni matrice  $Q$  simmetrica e definita positiva esiste una matrice  $P$  simmetrica e definita positiva tale che

$$A^T P A - P = -Q$$

Equazione di Lyapunov

## Dimostrazione

( $\Leftarrow$ )

Siano  $P, Q$  matrici simmetriche e definite positive che soddisfano l'equazione di Lyapunov. Per dimostrare che il sistema è asintoticamente stabile basta prendere

$$V(x) = x^\top P x$$

Segue che

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= (Ax)^\top P Ax - x^\top P x = x^\top A^\top P Ax - x^\top P x = \\ &= x^\top (A^\top P A - P)x = -x^\top Q x \end{aligned}$$

$< 0, \quad \forall x \neq 0$

Dunque  $\Delta V(x)$  è definita negativa e per il Teorema di Lyapunov l'origine è stato di equilibrio asintoticamente stabile. Pertanto il sistema  $(\star)$  è asintoticamente stabile.

## Dimostrazione

( $\Rightarrow$ )

Sia  $(\star)$  asintoticamente stabile e sia  $Q$  simmetrica e definita positiva.

Bisogna dimostrare che esiste  $P$  simmetrica e definita positiva che soddisfa l'equazione di Lyapunov.

Prendiamo  $P$  nella maniera seguente:

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} (A^T)^i Q A^i$$

Si può dimostrare che la matrice così definita esiste (cioè la serie converge) poiché il sistema è per ipotesi asintoticamente stabile.

Inoltre è  $P$  è simmetrica e definita positiva.

Basta quindi mostrare che è soluzione dell'equazione di Lyapunov:

$$\begin{aligned} A^\top \left( \sum_{i=0}^{+\infty} (A^\top)^i Q A^i \right) A - \sum_{i=0}^{+\infty} (A^\top)^i Q A^i &= \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (A^\top)^{i+1} Q A^{i+1} - \sum_{i=0}^{+\infty} (A^\top)^i Q A^i = \\ &= \left[ (A^\top) Q A + (A^\top)^2 Q A^2 + \dots \right] - \left[ Q + (A^\top) Q A + \dots \right] = -Q \end{aligned}$$

C.V.D.

## Test di stabilità

Si può dimostrare che data  $Q$  simmetrica e definita positiva, la soluzione  $P$  dell'equazione di Lyapunov è unica. Ciò permette di formulare il seguente

### TEST DI STABILITA'

Dato un sistema  $(\star)$  si scelga  $Q$  simmetrica e definita positiva e si risolva l'equazione di Lyapunov nell'incognita  $P$ . Se la soluzione di tale equazione è definita positiva il sistema è asintoticamente stabile, altrimenti non lo è.

## Osservazione 1

Se il test di stabilità dà esito positivo, allora (come è chiaro dalla dimostrazione del teorema), la forma quadratica

$$V(x) = x^{\top} P x$$

è una funzione di Lyapunov per il sistema. Quindi il teorema di Lyapunov fornisce un metodo sistematico per trovare una funzione di Lyapunov (per sistemi lineari).

## Osservazione 2

Fissata  $Q$  simmetrica, l'equazione di Lyapunov

$$A^T P A - P = -Q$$

è un sistema lineare di equazioni algebriche avente:

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{equazioni linearmente indipendenti}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{incognite ( ovvero i } p_{ij} = p_{ji} \text{ )}$$

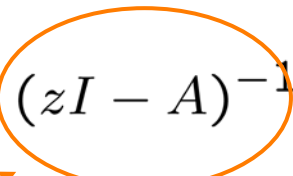
PER CASA: verificare che la generica equazione del sistema lineare è:

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} p_{jk} a_{jk} + p_{ik} = -q_{ik}$$

## Analisi di Stabilità nel dominio z

Anche nel caso dei sistemi a tempo discreto, poiché la limitatezza (convergenza a zero) di tutti i movimenti liberi è equivalente alla stabilità (stabilità asintotica) del sistema, l'analisi di stabilità può essere condotta nel dominio delle trasformate Z.

Ricorrendo alla trasformata-z, la risposta libera dello stato può essere espressa in questo modo:

$$x(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ z (zI - A)^{-1} x(0) \right]$$


matrice di funzioni razionali del tipo  $\frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)}$

E' evidente che per garantire la limitatezza (ed eventualmente la convergenza a zero) della risposta libera a fronte di un qualsiasi stato iniziale è necessario e sufficiente che tutti gli elementi della matrice

$$(zI - A)^{-1}$$

abbiano antitrasformata limitata (ed eventualmente convergente a zero).

Supponiamo che il generico elemento della matrice di trasferimento abbia un polo reale  $p_k$  di molteplicità  $m_k$  :

$$\frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)} = \frac{N_{ij}(z)}{(z - p_1)^{m_1} \dots (z - p_k)^{m_k} \dots}$$

I termini dello sviluppo di Heaviside della funzione razionale  $\frac{N_{ij}(z)}{zD_{ij}(z)}$ ,  
relativi al polo  $p_k$  sono allora:

$$\frac{r_{k1}}{(z - p_k)} + \frac{r_{k2}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{r_{km_k}}{(z - p_k)^{m_k}}$$

Ricordando che:

$$\mathcal{Z} \left[ \binom{t}{n} a^{t-n} \right] = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

Si ottiene:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{N_{ij}(z)}{D_{ij}(z)} \right] = \left[ \dots + r_{k1} p_k^t + \dots + r_{km_k} \binom{t}{m_k - 1} p_k^{t-m_k+1} + \dots \right] \cdot 1(t)$$

Questi addendi sono limitati se e solo se:

$$|p_k| < 1 \quad \text{oppure} \quad |p_k| = 1 \quad \text{e} \quad m_k = 1$$

Sono limitati e convergenti a zero se e solo se:

$$|p_k| < 1$$

Si vedano le slides (166-180) della parte dedicata alla trasformata- $z$ , che riportano gli andamenti di ciascun addendo nei vari casi di interesse.

Ad analoghe conclusioni si giunge in presenza di coppie di poli complessi coniugati. In particolare si avrà, per una coppia di poli  $\sigma_k \pm j\omega_k$  di molteplicità  $m_k$  che:

il contributo al movimento libero è limitato se e solo se:

$$\sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} < 1 \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} = 1 \text{ e } m_k = 1$$

E' limitato e convergente se e solo se:

$$\sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} < 1$$

Pertanto è possibile enunciare il teorema della pagina seguente.

Si vedano le slides (166-180) della parte dedicata alla trasformata-z, che riportano gli andamenti di ciascun addendo nei vari casi di interesse.

(★)  $x(t + 1) = Ax(t)$  (sistema lineare stazionario autonomo a tempo discreto)

### Teorema

Il sistema (★) è

- stabile se e solo se tutti i poli di tutti gli elementi della matrice  $(zI - A)^{-1}$  hanno modulo strettamente minore di uno o pari ad uno e quelli aventi modulo unitario hanno molteplicità unitaria.
- asintoticamente stabile se e solo se tutti i poli di tutti gli elementi della matrice  $(zI - A)^{-1}$  hanno modulo strettamente minore di uno.
- instabile altrimenti

## Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Si trova facilmente che

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & -\frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}$$

segue che il sistema è instabile, dal momento che vi è un elemento della matrice

$$(zI - A)^{-1}$$

che ha un polo di modulo unitario di molteplicità maggiore di uno.

## Trasformazione bilineare e teorema di Routh

$$p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$

Lo studio della stabilità analizzando il polinomio caratteristico  $p(z)$  non è agevole!

Con una opportuna trasformazione di variabile, si può ottenere un polinomio differente, da analizzare in modo molto più agevole, tramite il teorema di Routh.

La trasformazione è tale da garantire che i risultati sulla stabilità ottenuti analizzando il polinomio trasformato valgano anche per il polinomio caratteristico originario.

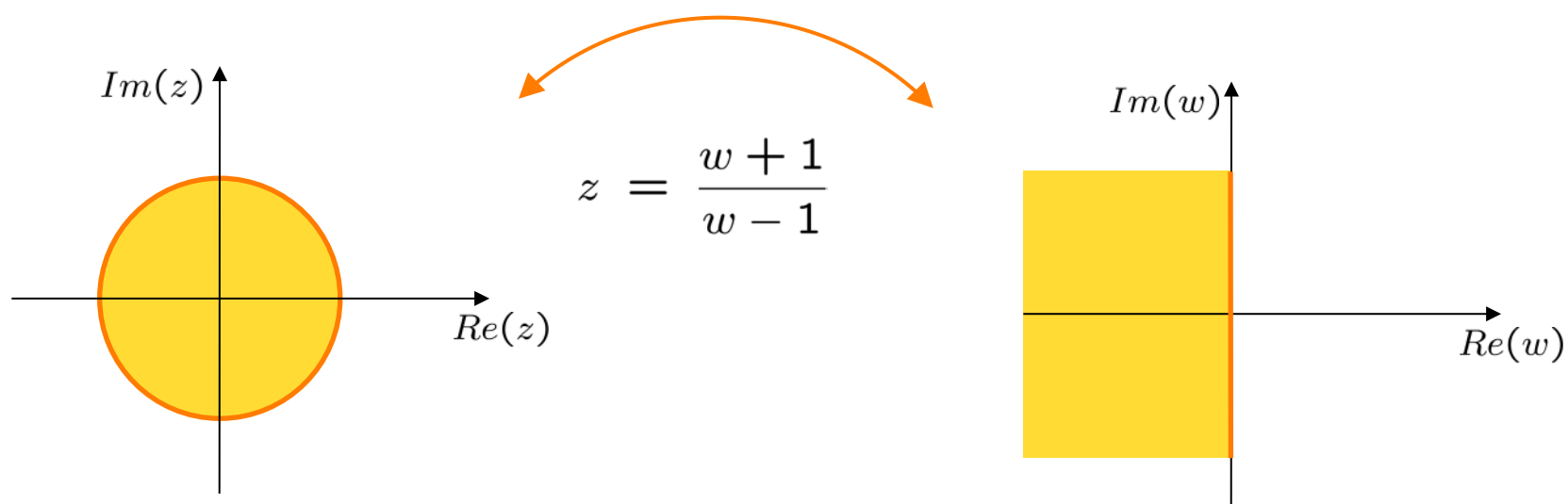
# Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$|z| < 1 \iff \text{Re}(w) < 0$$

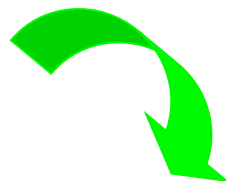
$$|z| = 1 \iff \text{Re}(w) = 0$$

$$|z| > 1 \iff \text{Re}(w) > 0$$



## Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$



$$p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$



$$q(w) = (w - 1)^n \left[ \varphi_0 \frac{(w + 1)^n}{(w - 1)^n} + \varphi_1 \frac{(w + 1)^{n-1}}{(w - 1)^{n-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \varphi_{n-1} \frac{(w + 1)}{(w - 1)} + \varphi_n \right]$$



$$q(w) = q_0 w^n + q_1 w^{n-1} + \dots + q_{n-1} w + q_n$$

# Trasformazione bilineare

La sostituzione diretta non è un metodo efficiente per ottenere il polinomio trasformato!

Algoritmo efficiente:

M. Policastro "A simple algorithm to perform the bilinear transformation," Int. Journal of Control, vol. 30, n. 4, 1979

## Alcuni esempi

(1) Studiare la stabilità del sistema con equazione caratteristica

$$p(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$$

L' applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio:

$$q(w) = (w-1)^3 \left[ \frac{(w+1)^3}{(w-1)^3} + 2 \frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + \frac{w+1}{w-1} + 1 \right]$$

$$q(w) = 5w^3 + w^2 + 3w - 1$$

$$q(w) = 5w^3 + w^2 + 3w - 1$$

Costruiamo la Tabella di Routh per applicare il relativo teorema.

|   |    |    |
|---|----|----|
| 3 | 5  | 3  |
| 2 | 1  | -1 |
| 1 | 8  |    |
| 0 | -1 |    |



Dall'analisi dei termini nella prima colonna della tabella di Routh risulta che il polinomio  $q(w)$  è instabile: c'è una variazione di segno nello schema. Una radice di  $q(w)$  è a parte reale positiva. Ciò significa che anche il polinomio originario  $p(z)$  risulta associato ad un sistema dinamico instabile e che, in particolare, esiste una radice con modulo maggiore dell'unità.

(2) Studiare la stabilità del sistema con equazione caratteristica

$$p(z) = z^4 + 1.4 z^3 + 0.71 z^2 + 0.154 z + 0.012$$

L' applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio:

$$q(w) = (w-1)^4 \left[ \frac{(w+1)^4}{(w-1)^4} + 1.4 \frac{(w+1)^3}{(w-1)^3} + 0.71 \frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + 0.154 \frac{w+1}{w-1} + 0.012 \right]$$

$$q(w) = 3.276 w^4 + 6.444 w^3 + 4.652 w^2 + 1.460 w + 0.168$$

$$q(w) = 3.276 w^4 + 6.444 w^3 + 4.652 w^2 + 1.460 w + 0.168$$

Costruiamo la Tabella di Routh per applicare il relativo teorema.

|   |        |       |       |
|---|--------|-------|-------|
| 4 | 3.276  | 4.652 | 0.168 |
| 3 | 6.444  | 1.460 |       |
| 2 | 3.9098 | 0.168 |       |
| 1 | 1.1831 |       |       |
| 0 | 0.168  |       |       |



Dall'analisi dei termini nella prima colonna della tabella di Routh risulta che il polinomio  $q(w)$  è stabile: c'è permanenza di segno nella prima colonna della tabella. Le radici di  $q(w)$  sono tutte a parte reale negativa. Ciò significa che anche il polinomio originario  $p(z)$  risulta associato ad un sistema dinamico stabile.

(3) Studiare la stabilità del sistema con equazione caratteristica

$$p(z) = z^2 + a z + b = 0$$

al variare dei parametri  $a, b \in \mathbb{R}$

L'applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio:

$$q(w) = (w - 1)^2 \left[ \frac{(w + 1)^2}{(w - 1)^2} + a \frac{(w + 1)}{(w - 1)} + b \right]$$

Da cui, con calcoli elementari:

$$q(w) = (1 + b + a) w^2 + 2(1 - b) w - a + 1 + b$$

$$q(w) = (1 + b + a) w^2 + 2(1 - b) w - a + 1 + b$$

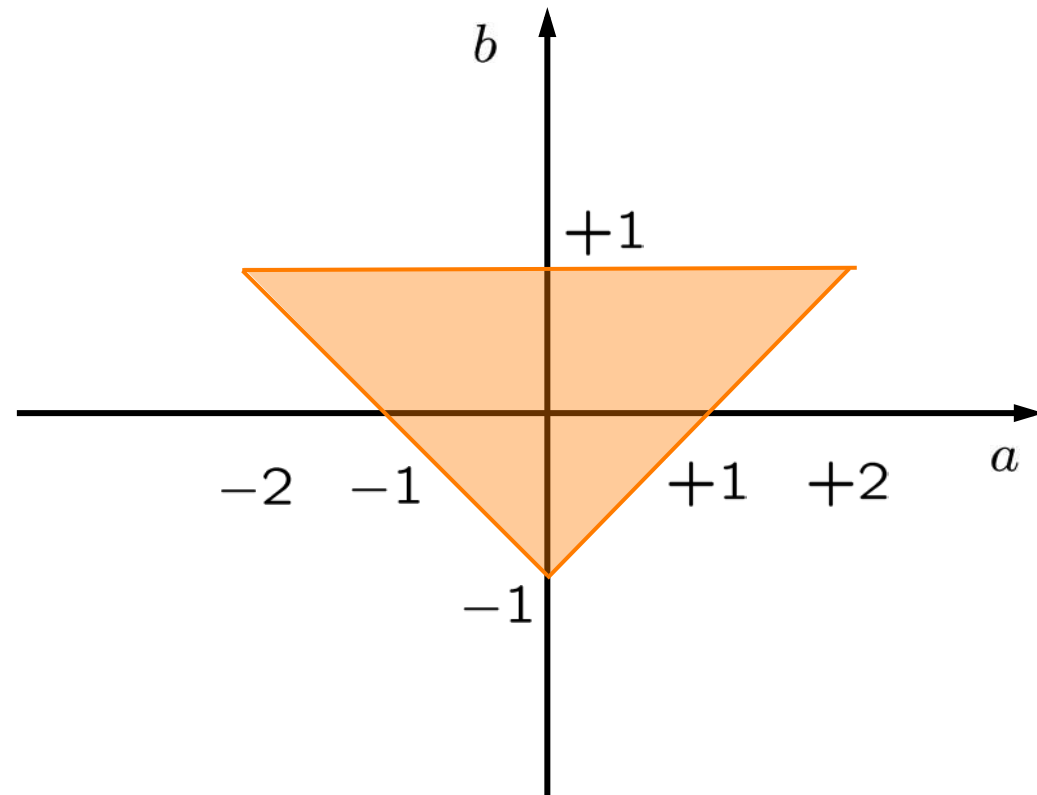
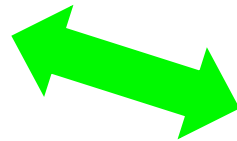
Calcolando la tabella di Routh si ottiene a questo punto

$$\begin{array}{c|cc} 2 & (1 + b + a) & (1 + b - a) \\ 1 & 2(1 - b) & \\ 0 & (1 + b - a) & \end{array}$$

Imponendo permanenza di segno agli elementi in prima colonna (cioè imponendo che siano tutto strettamente positivi o tutti strettamente negativi) si arriva a

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + b + a > 0 \\ 2(1 - b) > 0 \\ 1 + b - a > 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} b > -a - 1 \\ b < 1 \\ b > a - 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} b > -a - 1 \\ b < 1 \\ b > a - 1 \end{cases}$$



(4) Analizzare la stabilità al variare del parametro  $K$  del sistema a tempo discreto con equazione caratteristica

$$z^2 + (K - 1.8)z + (0.8 - 0.5K) = 0$$

con  $K \in \mathbb{R}$

L'applicazione della formula della trasformazione bilineare porta al polinomio:

$$q(w) = (w-1)^2 \left[ \frac{(w+1)^2}{(w-1)^2} + (K-1.8) \frac{(w+1)}{(w-1)} + (0.8-0.5K) \right]$$

$$q(w) = \frac{1}{2}K w^2 + \left(\frac{2}{5} + K\right)w + \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2}K\right)$$

$$q(w) = \frac{1}{2} K w^2 + \left(\frac{2}{5} + K\right) w + \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2} K\right)$$

La tabella di Routh per questo polinomio è

$$\begin{array}{c|c} 2 & \frac{1}{2} K \\ 1 & \left(\frac{2}{5} + K\right) \\ 0 & \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2} K\right) \end{array}$$

Imponendo permanenza di segno agli elementi in prima colonna si arriva a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} K > 0 \\ \left(\frac{2}{5} + K\right) > 0 \\ \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2} K\right) > 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}K > 0 \\ \left(\frac{2}{5} + K\right) > 0 \\ \left(\frac{18}{5} - \frac{3}{2}K\right) > 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} K > 0 \\ K > -\frac{2}{5} \\ K < \frac{12}{5} \end{array} \right.$$

$$0 < K < \frac{12}{5}$$

Condizione necessaria e sufficiente  
per l'asintotica stabilità.

## Trasformazione bilineare e teorema di Routh: conclusioni

- È il metodo che fornisce tutte le informazioni possibili a riguardo della posizione delle radici di un polinomio caratteristico di un sistema dinamico a tempo discreto (vantaggio).
- Nel caso in cui la stabilità del sistema dinamico a tempo discreto dipenda da parametri (qualche coefficiente del polinomio caratteristico è funzione di parametri) è il metodo da preferire (vantaggio).
- È computazionalmente oneroso (svantaggio). Esiste un algoritmo efficiente per eseguire la trasformazione bilineare.

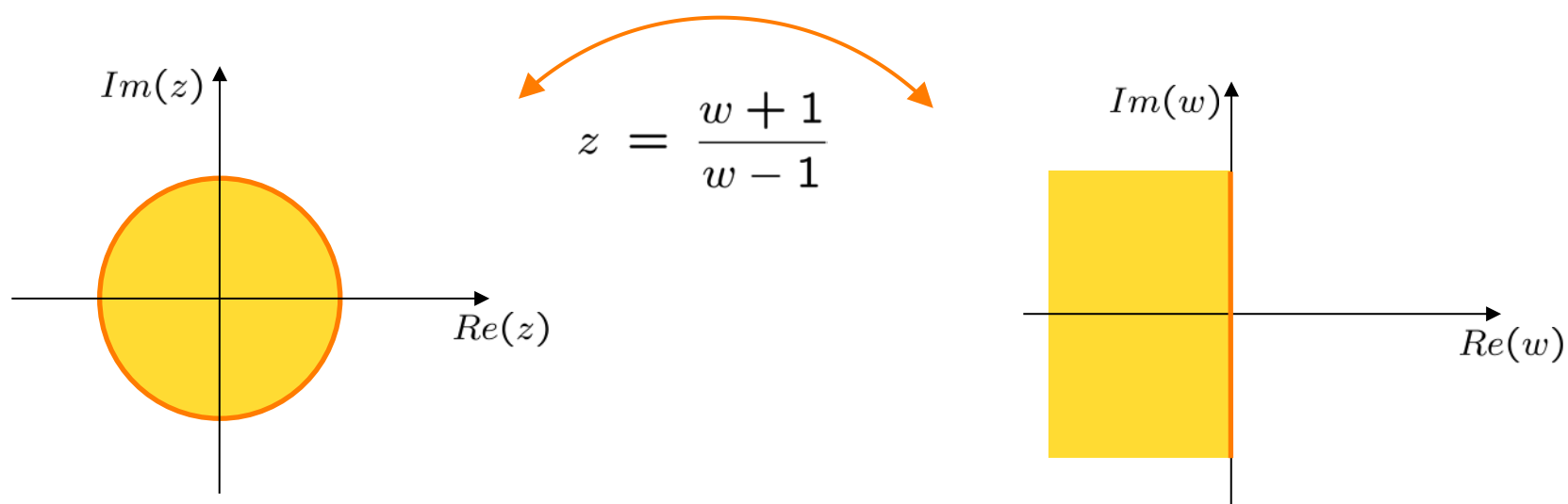
# Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$|z| < 1 \iff \text{Re}(w) < 0$$

$$|z| = 1 \iff \text{Re}(w) = 0$$

$$|z| > 1 \iff \text{Re}(w) > 0$$



## Trasformazione bilineare: verifica delle proprietà

- Verifichiamo le relazioni

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$
$$\begin{aligned} |z| < 1 & \iff \operatorname{Re}(w) < 0 \\ |z| = 1 & \iff \operatorname{Re}(w) = 0 \\ |z| > 1 & \iff \operatorname{Re}(w) > 0 \end{aligned}$$

- Poniamo  $w = x + jy$  ed applichiamo la relazione della trasformata bilineare.

- 1° caso: cerchiamo il luogo nel piano  $w$  che corrisponde a  $|z| < 1$

$$|z| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = \left| \frac{x+jy+1}{x+jy-1} \right| < 1$$

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} < 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 < (x-1)^2 + y^2$$

$$x < 0$$

$$|z| < 1 \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{Re}(w) = x < 0$$

- 2° caso: cerchiamo il luogo nel piano  $w$  che corrisponde a  $|z| = 1$

$$|z| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = \left| \frac{x+jy+1}{x+jy-1} \right| = 1$$

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$x = 0$$

$$|z| = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{Re}(w) = x = 0$$

- 3° caso: cerchiamo il luogo nel piano  $w$  che corrisponde a  $|z| > 1$

$$|z| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = \left| \frac{x+jy+1}{x+jy-1} \right| > 1$$

$$\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} > 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 > (x-1)^2 + y^2$$

$$x > 0$$

$$|z| > 1 \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{Re}(w) = x > 0$$

## Stabilità ingresso-uscita (sistemi a tempo continuo)

Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases}$$

bounded-input/bounded-output

si dice *esternamente stabile* (oppure *stabile dal punto di vista ingresso uscita* oppure *BIBO-stabile*) se ogni ingresso limitato produce un'uscita limitata. Più precisamente se:

$\forall t_0 \geq 0 \quad \exists k > 0$  tale che, a condizioni iniziali nulle (  $x(t_0) = 0$  )

$$\|u(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq t_0 \quad \longrightarrow \quad \|y(t)\| \leq k, \quad \forall t \geq t_0$$

Se  $k$  non dipende da  $t_0$  si parla di stabilità esterna *uniforme*.

# Teorema

$$(\star) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x \end{cases}$$

non è restrittivo supporre che il sistema sia strettamente proprio perché se  $D(t)$  è limitata anche il termine  $D(t)u(t)$  lo è (per ingressi limitati). Se  $D(t)$  è illimitata allora il sistema è certamente non BIBO stabile.

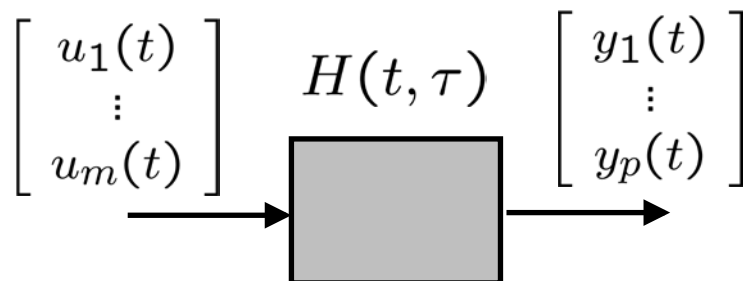
Il sistema  $(\star)$  è uniformemente esternamente stabile



$\exists L > 0$  tale che  $\forall t_0$  si ha

$$\int_{t_0}^t \|H(t, \tau)\| d\tau \leq L, \quad \forall t \geq t_0$$

matrice di risposta impulsiva



## Dimostrazione ( $\Leftarrow$ )

Dimostriamo solamente la sufficienza della condizione. Bisogna far vedere che se la norma della matrice di risposta impulsiva ha integrale limitato  $\forall(t, t_0) : t \geq t_0$  allora il sistema è BIBO stabile.

Consideriamo un istante iniziale  $t_0$  e un qualsiasi ingresso  $u(\cdot)$  tale che  $\|u(t)\| \leq 1, \forall t \geq t_0$ . Per condizioni iniziali nulle si ha,  $\forall t \geq t_0$ , quanto segue:

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t H(t, \tau) u(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^t \|H(t, \tau) u(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|H(t, \tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|H(t, \tau)\| d\tau \leq L\end{aligned}$$

C.V.D.

## Sistemi stazionari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

E' noto che per i sistemi lineari stazionari la matrice di risposta impulsiva è data da:

$$H(t) = \begin{cases} Ce^{At}B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Si può dimostrare che in questo caso la condizione necessaria e sufficiente per la BIBO stabilità è:

$$\int_0^{\infty} \|H(t)\| dt < \infty$$

Tale condizione ha una controparte nel dominio delle trasformate, come è stabilito dal teorema seguente.

## Teorema

$$(\star) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

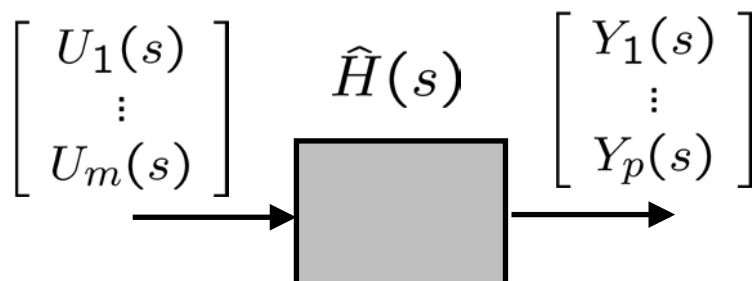
Il sistema  $(\star)$  è  
uniformemente  
esternamente stabile



Tutti i poli di tutti gli elementi della matrice di trasferimento

$$\hat{H}(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

hanno parte reale strettamente negativa.



## Dimostrazione

Ricordiamo anzitutto che la matrice di trasferimento e quella di risposta impulsiva sono legate dalla:

$$C(sI - A)^{-1}B = \mathcal{L} [Ce^{At}B \cdot 1(t)]$$

( $\Leftarrow$ )

Se i poli di  $\hat{H}(s)$  hanno tutti parte reale strettamente negativa, allora ciascun elemento di  $H(t)$  è la sommatoria di termini esponenziali convergenti a zero. Ne segue che l'integrale

$$\int_0^\infty \|H(t)\| dt$$

è finito e pertanto il sistema è BIBO stabile.

( $\Rightarrow$ )

Viceversa, se  $\int_0^\infty \|H(t)\| dt$  è finito, essendo ciascuno degli elementi di  $H(t)$  una sommatoria di esponenziali, tali esponenziali devono necessariamente avere parte reale strettamente negativa. Ma ciò significa che i poli di  $\hat{H}(s)$  hanno parte reale strettamente negativa.

## Stabilità ingresso-uscita (sistemi a tempo discreto)

Consideriamo per brevità solamente il caso stazionario. Il sistema:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

si dice *esternamente stabile* (oppure *stabile dal punto di vista ingresso uscita* oppure *BIBO-stabile*) se ogni ingresso limitato produce un'uscita limitata. Più precisamente se:

$\exists k > 0$  tale che, a condizioni iniziali nulle ( $x(0) = 0$ )

$$\|u(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \|y(t)\| \leq k, \quad \forall t \geq 0$$

N.B. nel caso di sistemi stazionari la BIBO-stabilità è sempre *uniforme*.

# Teorema

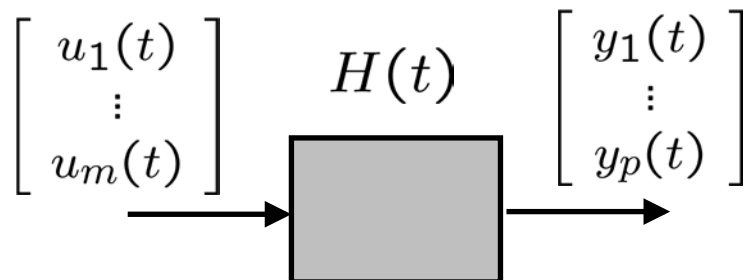
$$(\star) \quad \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Il sistema  $(\star)$  è  
uniformemente  
esternamente stabile



$$\sum_{t=0}^{\infty} \|H(t)\| < \infty$$

matrice di risposta impulsiva



$$H(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

In maniera analoga al caso continuo, si dimostra la controparte nel dominio delle trasformate del teorema precedente:

## Teorema

$$(\star) \quad \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

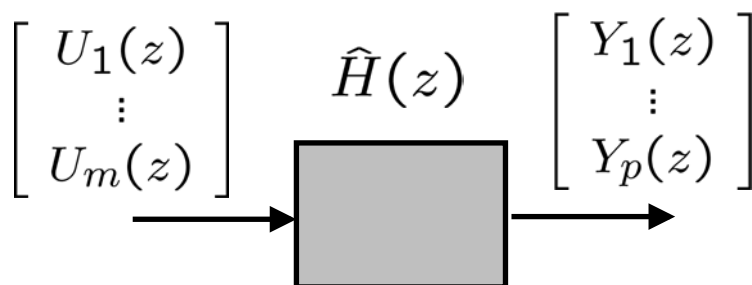
Il sistema  $(\star)$  è  
uniformemente  
esternamente stabile



Tutti i poli di tutti gli elementi della matrice di trasferimento

$$\hat{H}(z) = C(zI - A)^{-1}B$$

hanno modulo strettamente minore di uno.



## Analisi di stabilità tramite linearizzazione

La stabilità degli stati di equilibrio di sistemi non lineari può in molti casi essere studiata ricorrendo alla linearizzazione del sistema nell'intorno dell'equilibrio.

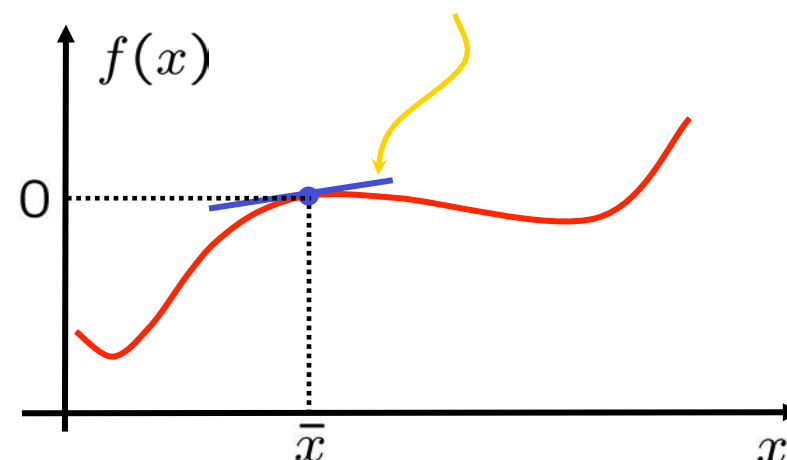
$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{sistema autonomo regolare})$$

supponiamo che  $\bar{x}$  sia stato di equilibrio per il sistema cioè  $f(\bar{x}) = 0$

Pendenza retta tangente =  $f_x(\bar{x})$

La linearizzazione consiste nell'effettuare l'approssimazione:

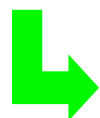
$$f(x) \simeq f(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$



Definiamo lo scostamento rispetto all'equilibrio:

$$\delta x(t) := x(t) - \bar{x} \quad \longrightarrow \quad x(t) = \delta x(t) + \bar{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = \delta \dot{x} &= f(\bar{x} + \delta x) = \cancel{f(\bar{x})} + f_x(\bar{x})\delta x + h(\delta x) \\ &= 0 \text{ (equilibrio)} \end{aligned}$$



$$\delta \dot{x} \simeq \underbrace{f_x(\bar{x})}_A \delta x$$

infinitesimo di ordine  
superiore rispetto a  $\delta x$

dove

$$f_x(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}}$$

matrice  
Jacobiana

## Teorema (criterio ridotto di Lyapunov)

Dato il sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

avente  $\bar{x}$  quale stato di equilibrio, sia  $A = f_x(\bar{x})$

Valgono le seguenti implicazioni:

- (1) Tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale strettamente negativa   $\bar{x}$  è stato di equilibrio asintoticamente stabile.
- (2) Almeno un autovalore di  $A$  ha parte reale strettamente positiva   $\bar{x}$  è stato di equilibrio instabile.

## Dimostrazione

Ci limitiamo a dimostrare l'implicazione (1) e supponiamo senza perdita di generalità che  $\bar{x} = 0$  ossia  $\delta x = x$  (se così non fosse, sarebbe sufficiente un cambio di coordinate per ricondursi a tale situazione).

Se  $A$  ha autovalori tutti a parte reale strettamente negativa significa che il sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  è asintoticamente stabile. Dunque esiste (ed è unica) una matrice  $P$  definita positiva soluzione dell'equazione di Lyapunov:

$$A^T P + P A = -I$$

Ora basta scegliere  $V(x) = x^T P x$  e dimostrare che tale funzione dello stato è strettamente decrescente lungo le traiettorie del sistema non lineare.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \nabla V(x)f(x) = 2x^T P(Ax + h(x)) \\
&= \underbrace{2x^T P A x}_{x^T P A x + x^T A^T P x} + 2x^T P h(x) \\
&= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P h(x) \\
&= -x^T x + 2x^T P h(x)
\end{aligned}$$

Ricordiamo che  $h(x)$  è infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $x$ . Quindi

$$\exists \delta > 0 : \frac{\|h(x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{2\|P\|}, \quad \forall \|x\| < \delta$$

Applicando la disuguaglianza di Schwartz si ha,  $\forall \|x\| < \delta$  :

$$| \underbrace{2x^T Ph(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{è il prodotto scalare fra i vettori } x \text{ e } 2Ph(x)}} | \leq \|x\| \|2Ph(x)\|$$

$$\leq 2\|x\| \|P\| \|h(x)\| < \|x\|^2 = x^T x$$

è il prodotto scalare fra i vettori  $x$  e  $2Ph(x)$

il che dimostra che  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall \|x\| < \delta$

Dunque per il teorema di Lyapunov, lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile. C.V.D.

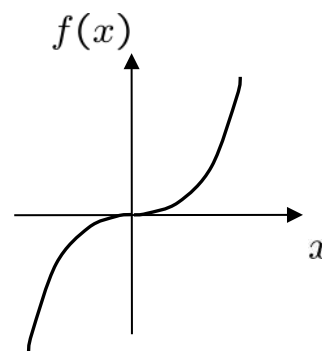
## Osservazione

Il criterio ridotto di Lyapunov non contempla tutti i casi possibili.

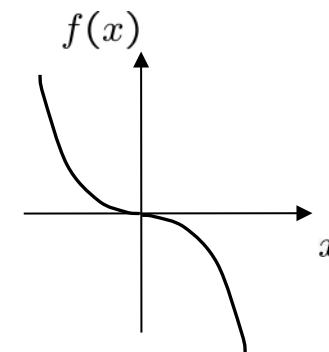
Infatti il teorema precedente non permette di trarre conclusioni sulla stabilità dell'equilibrio nel caso in cui il sistema linearizzato abbia autovalori tutti a parte reale minore o uguale a zero e vi siano autovalori a parte reale nulla.

In questi casi infatti la linearizzazione non “cattura” la dinamica del sistema, poiché essa dipende dai termini di grado maggiore di uno dello sviluppo in serie della  $f(x)$

Ai due sistemi qui a lato corrisponde lo stesso sistema linearizzato nell'intorno dell'origine, con un unico autovalore nullo.



L'origine è instabile



L'origine è stabile

## Esempi

Nei casi in cui il criterio ridotto di Lyapunov non permette di trarre conclusioni sulla stabilità dello stato di equilibrio, si può cercare di effettuare l'analisi di stabilità attraverso una opportuna funzione di Lyapunov. Ciò è illustrato dagli esempi che seguono.

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2^3 \end{aligned}$$

L'origine è stato di equilibrio e risulta:

$$A = f_x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non può essere applicato, ma se si considera la funzione  $V(x) = x_1^4 + 2x_2^2$  si trova:

$$\dot{V}(x) = [4x_1^3 \quad 4x_2] \begin{bmatrix} -x_1^3 + x_2 \\ -x_1^3 - x_2^3 \end{bmatrix} = -4x_1^6 - 4x_2^4$$

che è definita negativa. Quindi l'origine è stato di equilibrio asintoticamente stabile.

$$\begin{aligned} 2) \quad \dot{x}_1 &= x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + x_2^3 \end{aligned}$$

L'origine è stato di equilibrio e risulta ancora:

$$A = f_x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non può essere applicato, ma se si considera la funzione  $V(x) = x_1^4 + 2x_2^2$  si trova:

$$\dot{V}(x) = [4x_1^3 \quad 4x_2] \begin{bmatrix} x_1^3 + x_2 \\ -x_1^3 + x_2^3 \end{bmatrix} = 4x_1^6 + 4x_2^4$$

che è definita positiva. Quindi l'origine è stato di equilibrio instabile.

## Teorema (criterio ridotto di Lyapunov per sistemi a tempo discreto)

Il teorema seguente è la versione a tempo discreto del criterio ridotto di Lyapunov

Dato il sistema

$$x(t+1) = f(x(t))$$

avente  $\bar{x}$  quale stato di equilibrio, sia  $A = f_x(\bar{x})$

Valgono le seguenti implicazioni:

- (1) Tutti gli autovalori di  $A$  hanno modulo strettamente minore di uno.   $\bar{x}$  è stato di equilibrio asintoticamente stabile.
- (2) Almeno un autovalore di  $A$  ha modulo strettamente maggiore di uno   $\bar{x}$  è stato di equilibrio instabile.