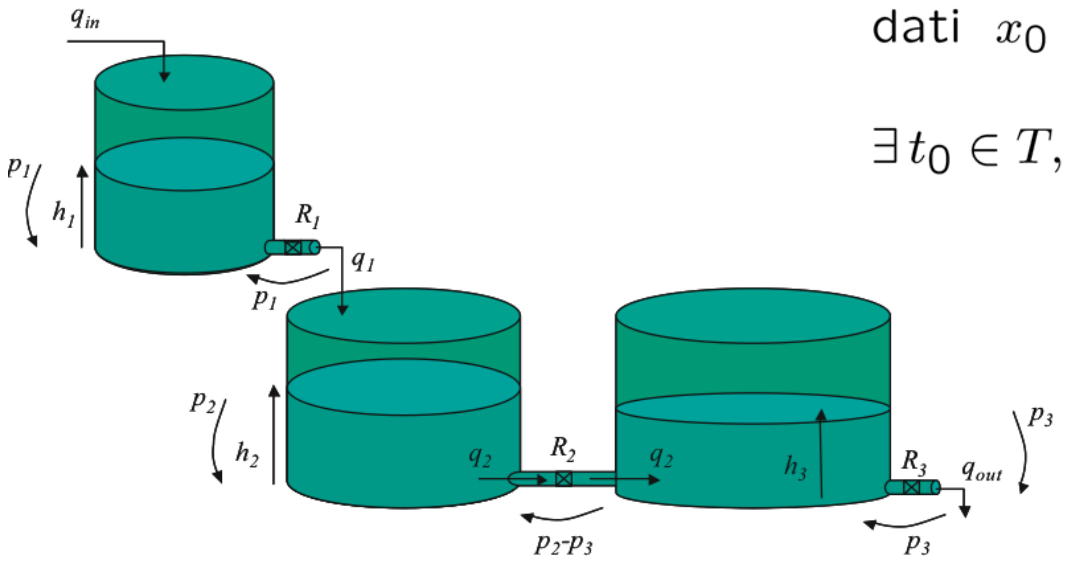
Controllabilità e raggiungibilità

Definizioni e proprietà per i sistemi dinamici

Definizioni generali

- Che cosa si intende per "controllabilità " o per "raggiungibilità "?
  - Facendo riferimento alla definizione assiomatica di TDSC-Parte 2, la **teoria** della **controllabilità** e della **raggiungibilità** è legata alla possibilità di "**pilotare**" l'andamento temporale dello **stato** attraverso una opportuna scelta della funzione d'ingresso



dati $x_0 = \left[\bar{h}_1\, \bar{h}_2\, \bar{h}_3\right]^T, \quad \hat{x} = \left[\hat{h}_1\, \hat{h}_2\, \hat{h}_3\right]^T$

$\exists\, t_0 \in T,\ t_0 \leq t,\ \exists\, q_{in}(\cdot) \in \Omega :$

$$\varphi(t, t_0, x_0, q_{in}(\cdot)) = \hat{x}$$

Es. a casa: $\hat{h}_1 \leq \hat{h}_2 \leq \hat{h}_3$?

Stato controllabile

- Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla funzione di transizione dello stato $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$

- **Definizione**: Uno stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un **sistema dinamico a tempo continuo** si definisce **stato controllabile** (a zero) dall'istante t_0 se è possibile trovare una funzione di controllo che, applicata a partire dallo stato $\bar{x}$, faccia evolvere il sistema in modo da raggiungere lo stato nullo:

$\bar{x}$ **controllabile** dall'istante t_0 $\Leftarrow$

dato $\bar{x} = x(t_0) \in X \equiv \mathbb{R}^n$

$\exists\, t_1 > t_0,\ \exists\, u(\cdot) \in \Omega$:

$\varphi\left(t_1, t_0^-, \bar{x}, u(\cdot)\right) = 0$

sistema a tempo continuo

- **Osservazione**: per i **sistemi dinamici a tempo discreto** non ha senso definire l'istante k_0^-, per cui si scriverà

$\bar{x}$ **controllabile** dall'istante k_0 $\Leftarrow$

dato $\bar{x} = x(k_0) \in X \equiv \mathbb{R}^n$

$\exists\, k_1 > k_0,\ \exists\, u(\cdot) \in \Omega$:

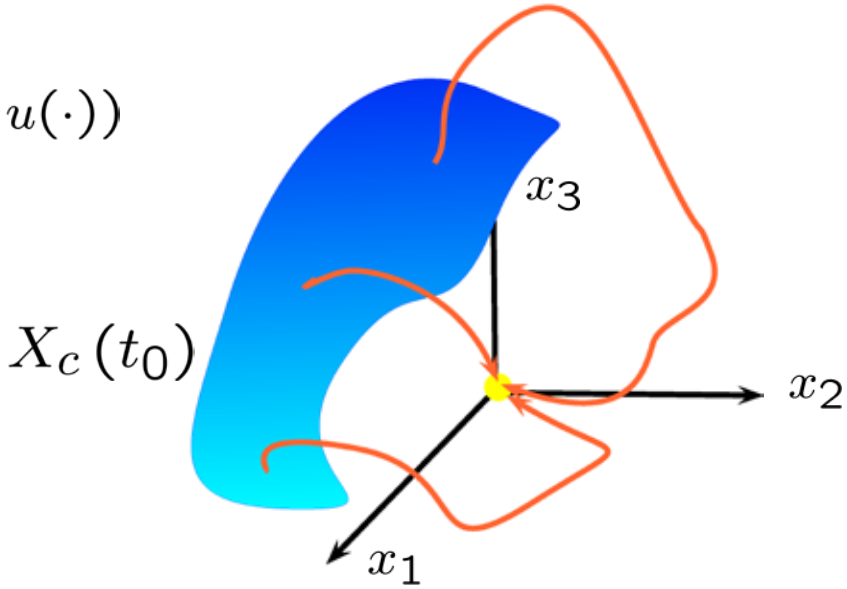
$\varphi\,(k_1, k_0, \bar{x}, \{u(k_0), \ldots, u(k_1 - 1)\}) = 0$

sistema a tempo discreto

- L'**insieme** di tutti gli **stati controllabili** (a zero) a partire dall'istante t_0 si indica con $X_c(t_0)$

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^3$$



- **Osservazione**: appartengono all'insieme $X_c(t_0)$ tutti gli stati del sistema (a tempo continuo o discreto) per i quali l'applicazione di una opportuna funzione di controllo permette di portare lo stato a zero, indipendentemente da quanto tempo si impiegherà per raggiungere tale stato nullo.

- **Definizione**: un **sistema** dinamico di ordine *n* si dice **completamente controllabile a partire dall'istante** t_0 se

$$X_c(t_0) \equiv X \ (\equiv \mathbb{R}^n)$$

- **Definizione**: se vale che

$$\forall t_0 \quad X_c(t_0) \equiv X \ (\equiv \mathbb{R}^n)$$

allora il **sistema** si dice **completamente controllabile**.

Stato raggiungibile

- Si consideri un sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla funzione di transizione $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$

- **Definizione**: uno **stato** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un **sistema dinamico a tempo continuo** si dice **raggiungibile** all'istante t_1 se esiste una funzione di controllo che permette, partendo dallo stato iniziale nullo ad un istante $t_0 < t_1$, di raggiungere lo stato $\bar{x}$

dato $\bar{x} \in X \equiv \mathbb{R}^n$

$\bar{x}$ **raggiungibile** all'istante t_1 $\Leftarrow$ $\exists t_0 < t_1,\ \exists u(\cdot) \in \Omega$:

$$\varphi\left(t_1, t_0^-, 0, u(\cdot)\right) = \bar{x}$$

sistema a tempo continuo

- **Osservazione**: anche stavolta nel caso di sistemi dinamici a tempo discreto non ha senso definire l'istante temporale k_0^- , per cui la definizione va scritta semplicemente

$\bar{x}$ **raggiungibile** all'istante k_1 $\Leftarrow$

dato $\bar{x} \in X \equiv \mathbb{R}^n$

$\exists\, k_0 < k_1,\ \exists\, \{u(k_0), \ldots, u(k_1 - 1)\} \in \Omega$:

$\varphi\,(k_1, k_0, 0\,, \{u(k_0), \ldots, u(k_1 - 1)\}) = \bar{x}$

sistema a tempo discreto

- Per analogia col caso della controllabilità a tempo continuo si definisce l'**insieme** degli **stati raggiungibili** all'istante t_1 :

$$X_r(t_1) = \left\{\bar{x} \in X : \exists\, t_0 < t_1, \exists\, u(\cdot) \in \Omega : \varphi\left(t_1, t_0^-, 0, u(\cdot)\right) = \bar{x}\right\}$$

- Analogamente nel caso a tempo discreto si definisce l'**insieme** degli **stati raggiungibili** all'istante k_1 :

$$X_r(k_1) = \{\bar{x} \in X : \exists\, k_0 < k_1, \exists\, \{u(k_0), \ldots, u(k_1 - 1)\} \in \Omega : \varphi(k_1, k_0, 0, \{u(k_0), \ldots, u(k_1 - 1)\}) = \bar{x}\}$$

- **Definizione**: un **sistema dinamico** di ordine *n* si dice **completamente raggiungibile all'istante** k_1 se:

$$X_r(k_1) \equiv X \ (\equiv \mathbb{R}^n)$$

- **Definizione**: se vale che

$$\forall k_1 \quad X_r(k_1) \equiv X \ (\equiv \mathbb{R}^n)$$

allora il **sistema** si dice **completamente raggiungibile**.

Controllabilità e raggiungibilità nei sistemi lineari e stazionari (LTI)

Definizioni e proprietà

Definizioni: il caso dei sistemi a tempo continuo, lineari e stazionari (LTI)

- Abbiamo visto che, data l'equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(t_0^-) = x_0$$

la sua unica soluzione è esprimibile tramite

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x\left(t_0^-\right) + \int_{t_0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

- In questo caso si può riutilizzare l'espressione della soluzione del movimento dello stato per caratterizzare le proprietà di controllabilità e di raggiungibilità.

- Grazie alla tempo-invarianza ogni proprietà non dipende dalla scelta dell'istante iniziale: allora per sistemi LTI a tempo continuo si farà riferimento all'istante iniziale $t = 0^-$

- **Controllabilità**: uno **stato** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un **sistema LTI a tempo continuo** è **controllabile** se

$$\forall t > 0,\ \exists u(\,\cdot\,) \in \Omega :\ e^{At}\,\bar{x} + \int_{0^-}^{t} e^{A\,(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (\star)$$

- L'insieme degli stati per i quali vale la relazione $(\star)$ si indica con X_c . Quando si ha che $X_c \equiv \mathbb{R}^n$ allora il **sistema** si dice **completamente controllabile**.

- **Raggiungibilità**: uno **stato** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un **sistema LTI a tempo continuo** è **raggiungibile** se

$$\forall t > 0,\ \exists u(\,\cdot\,) \in \Omega : \int_{0^-}^{t} e^{A\,(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau = \bar{x} \qquad (\diamond)$$

- L'insieme degli stati per i quali vale la relazione $(\diamond)$ si indica con X_r . Quando si ha che $X_r \equiv \mathbb{R}^n$ allora il **sistema** si dice **completamente raggiungibile**.

- **Osservazione**: la funzione d'ingresso $u(\cdot) \in \Omega$ da utilizzare ovviamente dipenderà dall'istante t , cioè per **controllare** a zero/**raggiungere** da zero lo stesso stato in **istanti** di tempo **diversi** sono necessarie **funzioni d'ingresso diverse**.

Definizioni: il caso dei sistemi a tempo discreto, lineari e stazionari (LTI)

- Nel caso di sistemi LTI a tempo discreto descritti da

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k), \qquad x(k_0) = x_0$$

la soluzione (il movimento dello stato) è data da

$$x(k) = A^{k-k_0}\,x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-1-j}\,B\,u(j)$$

- Sfruttando anche stavolta la tempo-invarianza, imponiamo che l'istante iniziale sia $k_0 = 0$

- **Controllabilità**: uno stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un sistema LTI a tempo discreto si dice controllabile se

$$\exists\, u(j),\, j = 0,\, 1,\, 2, \ldots\, n-1 \,:\, A^n\, \bar{x} + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j}\, B\, u(j) = 0$$

- **Raggiungibilità**: uno stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un sistema LTI a tempo discreto si dice raggiungibile se

$$\exists\, u(j),\, j = 0,\, 1,\, 2, \ldots\, n-1 \,:\, \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j}\, B\, u(j) = \bar{x}$$

- In modo analogo al caso a tempo continuo si definiscono gli insiemi X_c e X_r. Quando si ha che $X_c \equiv \mathbb{R}^n$ $(X_r \equiv \mathbb{R}^n)$ allora il **sistema** si dice **completamente controllabile (raggiungibile)**.

Considerazioni per i sistemi LTI a tempo continuo

- Rispetto alle definizioni date in precedenza, per **sistemi LTI a tempo continuo** si è sostituito nella definizione di stato controllabile

$$\exists\, t > 0\,(t_0)\,,\ \exists\, u(\,\cdot\,) \in \Omega\ :\quad \cdots$$

con l'espressione

$$\forall\, t > 0\,(t_0)\,,\ \exists\, u(\,\cdot\,) \in \Omega\ :\quad \cdots$$

In maniera analoga si è fatto nella definizione di stato raggiungibile.

- Dimostreremo infatti che uno **stato controllabile (raggiungibile)** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di un **sistema LTI a tempo continuo** può essere **controllato (raggiunto) in qualsiasi intervallo di tempo**.

Considerazioni per i sistemi LTI a tempo discreto

- Nel caso di **sistemi LTI a tempo discreto** invece si è utilizzata la proprietà [dimostrata più avanti] che
  - uno **stato** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ controllabile (raggiungibile) può venire **controllato (raggiunto) in al massimo** n **istanti di tempo** (dove n è l'ordine del sistema).

Lemma 4.1

- Per un sistema dinamico LTI (a tempo continuo oppure a tempo discreto) di ordine n , gli insiemi X_c ed X_r sono **sottospazi** di $\mathbb{R}^n$:

$$x_1 \in X_r,\ x_2 \in X_r \quad \Rightarrow \quad \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \in X_r$$

$$x_1 \in X_c,\ x_2 \in X_c \quad \Rightarrow \quad \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \in X_c$$

Cenni di dimostrazione

- La illustriamo solo nel caso di sistemi a tempo continuo e solamente per quanto riguarda il sottospazio di raggiungibilità X_r

$$x_1 \in X_r,\ x_2 \in X_r \quad \Rightarrow \quad \forall t > 0,\ \exists\, u_1(\cdot),\ u_2(\cdot)\ :$$

$$\int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}\, B\, u_1(\tau)\, d\tau = x_1 \quad , \quad \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)}\, B\, u_2(\tau)\, d\tau = x_2$$

- Allora definendo l'ingresso

$$u_3(t) = \alpha\, u_1(t) + \beta\, u_2(t)$$

Per la linearità dell'integrale si ottiene

$$\int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u_3(\tau)\, d\tau = \alpha \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u_1(\tau)\, d\tau +$$

$$+\beta \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \alpha\, x_1 + \beta\, x_2$$

- In definitiva quindi

$$\alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \in X_r$$

- Risulta così dimostrato che:

$$x_1 \in X_r,\ x_2 \in X_r \quad \Rightarrow \quad \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 \in X_r$$

Teorema 4.2: relazione tra X_c e X_r

1. Per sistemi **LTI a tempo continuo** si ha che

$$X_c \equiv X_r$$

2. Nel caso di sistemi **LTI a tempo discreto** invece in generale vale che

$$X_c \supseteq X_r$$

Cenni di dimostrazione

- Per semplicità si considerano soltanto i **casi** di
  a) **sistemi completamente controllabili:**

$$X_c \equiv \mathbb{R}^n$$

  b) **sistemi completamente raggiungibili**:

$$X_r \equiv \mathbb{R}^n$$

- Nel **caso (1.a)** allora si può scrivere che

$$\forall t_1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists u(\,\cdot\,) \in \Omega : \int_{0^-}^{t_1} e^{A\,(t_1-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau = -e^{At_1}\, x \qquad (\ddagger)$$

- Chiaramente $u(\,\cdot\,)$ dipenderà sia da x che dall'istante t_1 .

Cenni di dimostrazione (continua…)

- Dato che la matrice e^{At_1} è una matrice sempre a rango pieno ("es. per casa": perché?) è sempre vero che

$$\forall \widehat{x} \in X_c \equiv \mathbb{R}^n, \ \exists x \in \mathbb{R}^n : \ -e^{At_1} x = \widehat{x}$$

- Ma allora riscrivendo la relazione (‡) nel modo seguente

$$\forall t > 0, \ \forall \widehat{x} \in \mathbb{R}^n \quad \exists u(\,\cdot\,) \in \Omega : \int_{0^-}^{t_1} e^{A\,(t_1-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau = \widehat{x}$$

si può affermare che ogni stato $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile, quindi:

$$X_c \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_r \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_c \equiv X_r$$

- Nel **caso (1.b)** la dimostrazione è simile, basata ancora sul fatto che la matrice e^{At_1} è invertibile:

$$\forall t > 0, \ \forall x \in X_r \equiv \mathbb{R}^n \quad \exists \widetilde{x} \in \mathbb{R}^n : \ x = -e^{A\,t_1}\, \widetilde{x}$$

$$X_r \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_c \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_r \equiv X_c$$

Cenni di dimostrazione (continua…)

- Nel **caso (2.b)**, supponendo al solito $X_r \equiv \mathbb{R}^n$ è possibile scrivere che

$$\forall x \in X_r \equiv \mathbb{R}^n,\ \exists u(k) \in \Omega,\ k = 1,\, 2,\, \cdots,\, (n-1):$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)}\, B\, u(k) \;=\; x$$

- Comunque sia fatta la matrice A, vale che (verifica "per casa", si sfrutta il teorema di Cayley-Hamilton)

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ A^n\, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \equiv X_r$$

quindi $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ \exists u(k) \in \Omega,\ k = 1,\, 2,\, \cdots,\, (n-1)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)}\, B\, u(k) \;=\; -A^n\, \tilde{x}$$

$$X_r \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_c \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_r \equiv X_c$$

Cenni di dimostrazione (continua…)

- Nel caso **(2.a)** non si può ottenere il risultato del caso (1.a): infatti stavolta anche se si suppone che $X_c \equiv \mathbb{R}^n$ non si riesce a dimostrare che un qualsiasi stato controllabile (a zero) sia anche raggiungibile (da zero).

$$\forall \bar{x} \in X_c \equiv \mathbb{R}^n,\ \exists\, u(j),\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-1\ :$$

$$A^n\,\bar{x} + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j}\,B\,u(j) = 0$$

- Se la **matrice** A^n **non** è **a rango pieno** si può concludere che

$$\text{rank}\,(A^n) < n \;\Rightarrow\; \mathcal{R}\,\{A^n\} \subset \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \{-A^n\,\bar{x},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n$$

e quindi si ottiene solamente che, in questo caso, vale la seguente relazione:

$$X_c \equiv \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_r \subset \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad X_c \supset X_r$$

Controllabilità e raggiungibilità per i sistemi LTI

- NB: d'ora in avanti saranno analizzati risultati per i **sistemi LTI a tempo continuo**!

- Per i **sistemi LTI a tempo discreto** si possono dimostrare facilmente risultati analoghi, **sostituendo** al termine **"controllabilità"** il termine **"raggiungibilità".**

- Di conseguenza d'ora in avanti si farà uso solo del termine **"controllabilità",** ad eccezione di alcuni casi.

Controllabilità per un sistema LTI a tempo continuo

- Se il **sistema** è **completamente controllabile**, allora è possibile **trasferire lo stato**
  - da un **qualsiasi stato iniziale** $x(0^-) = x_1 \in \mathbb{R}^n$
  - ad un **qualsiasi stato finale** $x(t) = x_2 \in \mathbb{R}^n$
  - in un **intervallo di tempo** t di durata **qualsiasi**

- Sfruttando il fatto che $X_c \equiv \mathbb{R}^n \Rightarrow X_r \equiv \mathbb{R}^n$ [sistema a tempo continuo]
  si opera in due passi:
  1. da x_1 allo stato nullo (controllabilità)

$$\exists u_1(\cdot) \in \Omega : \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u_1(\tau)\, d\tau = -e^{At} x_1$$

2. dallo stato nullo allo stato x_2 (raggiungibilità)

$$\exists u_2(\cdot) \in \Omega : \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u_2(\tau)\, d\tau = x_2$$

- Sommando i due ingressi si ottiene

$$x_2 = -e^{At} x_1 + \int_{0^-}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, [u_1(\tau) + u_2(\tau)]\, d\tau$$

- **Osservazione**: la proprietà di completa controllabilità **NON** fornisce nessuna informazione sul **COME ottenere** le funzioni d'ingresso $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$.
- In generale **esistono infiniti modi** per controllare a zero (o raggiungere da zero) uno stato x.

Un primo esempio: determinazione dell'ingresso

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad u(t) \in \mathbb{R}$$

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{u(t) = ?}$$

- Facendo uso della trasformata di Laplace

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B\,U(s) \quad \Rightarrow \quad B\,U(s) = (sI - A)\,X(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 0 & = & sX_1(s) - X_2(s) \\ U(s) & = & X_1(s) + (s+2)X_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 & = & sX_1(s) - X_2(s) \\ U(s) & = & X_1(s) + (s+2)X_2(s) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$X_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad \Longrightarrow \quad U(s) = X_1(s)\,[1 + (s+2)\,s]$$

- Per la fisica realizzabilità di $u(\cdot)$ [assenza di impulsi]:

$$\deg\,[D_1(s)] > \deg\,[N_1(s)] + 2$$

- Per esempio si potrebbe scegliere

$$\begin{cases} x_1(t) & = & a\,t^3 + b\,t^4 \\ x_2(t) & = & 3a\,t^2 + 4b\,t^3 \end{cases} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a & = & 3 \\ b & = & -2 \end{cases}$$

- In definitiva:

$$x_1(t) = 3t^3 - 2t^4 \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(s) = \frac{18s - 48}{s^5}$$

$$U(s) = \frac{\left(s^2 + 2s + 1\right)(18s - 48)}{s^5}$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$$

Un secondo esempio: determinazione dell'insieme di raggiungibilità

- Dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad u(t) \in \mathbb{R}$$

con $x(0^-) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ determinare X_r

- Utilizzando la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1} U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{1}{s+1} U(s) \end{cases} \Rightarrow \quad x_1(t) = x_2(t)$$

- In definitiva quindi: $x_1(t) = x_2(t)$

$$X_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

- Non è possibile invece raggiungere stati dell'insieme:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq b \right\}$$

Osservazione:

- Il fatto di non poter raggiungere alcuni stati in $\mathbb{R}^2$, partendo dallo stato nullo, deve dipendere da caratteristiche proprie del sistema, in particolare dalla struttura delle matrici A e B.

Lemma 4.3

- Condizione **sufficiente** affinché un sistema **non** sia **completamente controllabile** è che **almeno una variabile** di stato **non** sia **influenzata** né direttamente né indirettamente **dall'ingresso**.

Dimostrazione:

- Si consideri il sistema descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{x}(t) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-m \\ \}\, m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n-m} & \underbrace{\quad}_{m} \end{array} \end{array} \cdot x(t) + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-m \\ \}\, m \end{array} \cdot u(t)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \; u(t) \in \mathbb{R}$$

- La funzione d'**ingresso** $u(t)$ **influenza direttamente** solo le prime $n-m$ **variabili di stato**. Le rimanenti hanno un'evoluzione dettata da:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{n-m+1}(t) \\ \dot{x}_{n-m+2}(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{n-m+1}(t) \\ x_{n-m+2}(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- L'evoluzione di queste variabili non dipende da $u(t)$ né direttamente né indirettamente, attraverso l'influenza delle altre variabili di stato:

$$\begin{bmatrix} x_{n-m+1}(t) \\ x_{n-m+2}(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_{2,2}t} \cdot \begin{bmatrix} x_{n-m+1}(0^-) \\ x_{n-m+2}(0^-) \\ \dots \\ x_n(0^-) \end{bmatrix}$$

per qualsiasi scelta di $u(t)$.

Esempio

- Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$u(t) \in \mathbb{R} \qquad x\left(0^-\right) = 0$$

la soluzione è data dall'espressione

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

- In definitiva, qualsiasi sia l'ingresso, possono essere raggiunti soltanto stati del tipo

$$x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Il sistema è **non completamente raggiungibile** (e quindi **non completamente controllabile**).

Teorema 4.4

Un **sistema** LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

è **completamente controllabile** (o equivalentemente la **coppia (A, B)** è completamente controllabile) se e solo se

$$\boxed{\text{rank}\,\{P\} \triangleq \text{rank}\left\{\left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\ \right]\right\} = n}$$

Dimostrazione:

1. Necessità:

$$x(t_1) = \int_{0^-}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

soluzione generale per $x(0^-) = 0$

esiste soluzione $\forall x(t_1) \in \mathbb{R}^n$
SOLO SE rank $P = n$.

$$e^{A(t_1-\tau)} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t_1-\tau)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad x(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B \int_{0^-}^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^k}{k!} u(\tau)\, d\tau$$

$$x(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B\, \alpha(k, u, t_1)$$

$$\alpha(k, u, t_1) = \int_{0^-}^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^k}{k!} u(\tau)\, d\tau \qquad \alpha(k, u, t_1) \in \mathbb{R}^m$$

- In definitiva, si può esprimere $x(t_1)$ come combinazione lineare delle colonne delle matrici

$$B,\ AB,\ A^2B,\ A^3B,\ \cdots A^k B \quad k = 0, 1, \ldots, \infty$$

- Ora per il teorema di Cayley-Hamilton, se $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\Rightarrow \quad p(A) = A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_0 I = 0$$

- Quindi è possibile scrivere che

$$A^r = \text{lin}\left(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, I\right) \qquad r \geq n$$

dove $\text{lin}(\cdot, \cdot)$ indica "*combinazione lineare delle matrici argomento*". In definitiva quindi:

$$x(t_1) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \, \beta(k, u, t_1) \qquad (\star)$$

con $\beta(k, u, t_1)$ opportuni. Allora $x(t_1)$ e' combinazione delle colonne di

$$P = \left[\, B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B \, \right]$$

- Se fosse $\text{rank}\{P\} < n$ allora non sarebbe possibile determinare i coefficienti $\beta(\cdot)$ (e gli $\alpha(\cdot)$) per risolvere $\forall x \in \mathbb{R}^n$ la $(\star)$

- Così **è dimostrata la necessità**.

2. Sufficienza: per dimostrarla usiamo (senza dimostrazione: si veda il testo consigliato di Antsaklis-Michel) questo **risultato preliminare**

Si definisca

$$W(t_1) := \underbrace{\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau}_{\text{Gramiano di controllabilità}}, \ \forall t_1 > 0$$

$$P = \left[\, B \,\middle|\, AB \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A^{n-1}B \, \right], \ \text{rank}\{P\} = n$$

$$\Rightarrow \ \text{rank}\left\{ \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau \right\} = n, \ \forall t_1 > 0$$

Ora, scegliendo come funzione di ingresso

$$\forall \bar{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n \quad u(\tau) = B^\top e^{-A^\top \tau} W^{-1}(t_1) e^{-A t_1} \bar{x}(t_1) \, , \tau \in [0, t_1)$$

e sostituendo nella

$$x(t_1) = \int_{0^-}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad \Rightarrow$$

$$x(t_1) = e^{A t_1} \left[\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau \right] W^{-1}(t_1) e^{-A t_1} \bar{x}(t_1)$$

$$= e^{A t_1} W(t_1) W^{-1}(t_1) e^{-A t_1} \bar{x}(t_1) = \bar{x}(t_1)$$

- Così risulta dimostrata la **sufficienza**: infatti se è verificata la

$$\text{rank}\{P\} = \text{rank}\left\{ \left[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B \right] \right\} = n$$

allora partendo da $x\left(0^-\right) = 0$ si può raggiungere un qualsiasi stato $\bar{x}$ all'istante t_1, scegliendo come ingresso proprio

$$u(\tau) = B^T e^{-A^T \tau} W^{-1}(t_1) e^{-A t_1} \bar{x}(t_1) \ , \tau \in [0, t_1)$$

Lemma 4.5

- Il **sottospazio di controllabilità** X_c è generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice

$$X_c = \langle P \rangle = \left\langle \left[\, B \,\middle|\, AB \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A^{n-1}B \, \right] \right\rangle$$

Definizione

- Si definisce **sottospazio di non—controllabilità** X_{nc} il complemento ortogonale a X_c nello spazio di stato:

$$X_{nc} \oplus X_c = \mathbb{R}^n \qquad X_{nc} \perp X_c$$

Osservazione

- L'affermazione "*ogni stato non controllabile appartiene al sottospazio* X_{nc} " è **FALSA**!

- L'insieme degli **stati non controllabili** NON è un sottospazio!

- L'affermazione corretta è :
  - "ogni stato non controllabile non e' ortogonale ad X_{nc} "
  - "ogni stato non controllabile ha componente non nulla appartenente ad X_{nc} "

$$\bar{x} \text{ non controllabile} \iff \bar{x} \perp v_{nc} \neq 0 \quad \forall v_{nc} \in X_{nc}$$

Esempio

- Riconsideriamo l'esempio $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

$$u(t) \in \mathbb{R}$$

- Gli stati raggiungibili e controllabili sono (come già trovato in precedenza):

$$X_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

- La matrice P di raggiungibilità (e controllabilità) è pari a

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\{P\} = 1$$

- Di conseguenza $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{rank}\{P\} = 1$

$$\text{base per } X_c \quad \Rightarrow \quad v_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{base per } X_{nc} \quad \Rightarrow \quad v_{nc} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Si consideri ora uno stato non raggiungibile (e quindi non controllabile):

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \; a \neq b, a, \; b \in \mathbb{R}$$

- Si vede facilmente che

$$\bar{x} \notin X_c \,, \; \bar{x} \notin X_{nc}$$

$$\boxed{\bar{x} = \alpha \, v_c + \beta \, v_{nc}}$$

- Se la proprietà di controllabilità di un sistema LTI a tempo continuo e' funzione solo della coppia di matrici (A, B) , che succede se si cambia base (insieme di variabili di stato)?

Lemma 4.6

- La proprietà di **controllabilità** per un sistema LTI è **invariante** rispetto ad un **cambiamento di base** (per le variabili di stato).

Dimostrazione:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$x(t) = T\,z(t)$$

$$\dot{z}(t) = T^{-1}\,A\,T\,z(t) + T^{-1}\,B\,u(t)$$

$$\dot{z}(t) = \hat{A}\,z(t) + \hat{B}\,u(t)$$

$$P = ? \qquad \hat{P} = ?$$

- Applicando la definizione $\hat{P} = \left[\, \hat{B} \,\middle|\, \hat{A}\hat{B} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \hat{A}^{n-1}\hat{B} \,\right]$

$$\hat{P} = \left[\, T^{-1}B \,\middle|\, T^{-1}AT\,T^{-1}B \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \left(T^{-1}AT\right)^{n-1} T^{-1}B \,\right]$$

- Ora, poiché vale che

$$\left(T^{-1}AT\right)^{r} = T^{-1}A^{r}T$$

si ottiene

$$\hat{P} = \left[\, T^{-1}B \,\middle|\, T^{-1}AB \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, T^{-1}A^{n-1}B \,\right] = T^{-1}P$$

$$\text{rank}\{T\} = n \quad \Longrightarrow \quad \text{rank}\left\{\hat{P}\right\} = \text{rank}\{P\}$$

Teorema 4.7

- Il **sottospazio** X_c è **invariante** rispetto alla **matrice** A .

$$\forall v \in X_c \longrightarrow Av \in X_c$$

Dimostrazione:

- Preso un qualsiasi elemento di X_c lo si può esprimere come segue

$$\forall v \in X_c \quad v = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \alpha_k \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

- Di conseguenza

$$Av = \sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1} B \alpha_k = \sum_{k=0}^{n-2} A^{k+1} B \alpha_k + A^n B \alpha_{n+1}$$

$$Av = \sum_{k=0}^{n-2} A^{k+1} B \alpha_k + A^n B \alpha_{n+1} \quad \Leftarrow \quad A^n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

teorema di Cayley–Hamilton

- In definitiva si ottiene

$$Av = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \gamma_k \quad \Rightarrow \quad Av \in X_c$$

che dimostra il teorema. ▲

- Questo risultato porta a dimostrare che il sottospazio di controllabilità gode di un'importante proprietà anche considerando il **movimento dello stato**.

Teorema 4.8

- Per un sistema LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t),\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

si ha che

$$x\left(0^-\right) \in X_c \Longrightarrow x(t) \in X_c \quad \forall t > 0$$

Dimostrazione:

- Sappiamo che il movimento dello stato si può esprimere come somma di due contributi:
  - movimento libero e movimento forzato

$$x(t) = e^{At}\,x\left(0^-\right) + \int_{0^-}^{t} e^{A\,(t-\tau)}\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

- Analizziamoli separatamente

- Movimento libero:

$$x_l(t) = e^{At}\, x\left(0^-\right)$$

sviluppo in serie
e teorema di Cayley–Hamilton

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k\, \alpha(t,\, k) \qquad \alpha(t,\, k) \in \mathbb{R}$$

$$x_l(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k\, x\left(0^-\right)\, \alpha(t,\, k)$$

- Movimento forzato: $x_f(t) = \int_{0^-}^{t} e^{A\,(t-\tau)}\, B\, u(\tau)\, d\tau$

  – ricordando (teorema 4.4, $(\star)$) si può scrivere che

$$x_f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k\, B\, \beta\,(k,\, u,\, t)$$

- In definitiva:

$$x\left(0^-\right) \in X_c \quad \Rightarrow \quad A^k x\left(0^-\right) \in X_c \quad \forall k$$

$$x_l(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{A^k x\left(0^-\right)}_{\in X_c \quad \forall k} \alpha(s,\, k) \quad \Rightarrow \quad x_l(t) \in X_c,\ \forall t$$

$$x_f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B\, \beta\,(k,\, u,\, t_1) \quad \Rightarrow \quad x_f(t) \in \mathcal{R}\{P\}$$

$$\Rightarrow \quad x_f(t) \in X_c \quad \forall t$$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) \in X_c \quad \forall t$$

Forma standard di controllabilità

- È possibile **decomporre** un sistema dinamico in una **parte controllabile** ed in una **non controllabile**?

- Si consideri un sistema LTI non completamente controllabile

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{rank}\,\{P\} = p < n$$

- Per mettere in evidenza la parte controllabile e quella non controllabile del sistema, è necessario ricorrere ad una opportuna trasformazione, ovvero un cambiamento di base nello spazio di stato.

$$T = \left[\underbrace{T_1}_{p} \,\middle|\, \underbrace{T_2}_{(n-p)} \right] \Big\} n$$

matrice di cambio-base

$$x(t) = T\, z(t)$$

- Matrice T_1: matrice $n \times p$ formata dai vettori della **base di** X_c cioè dalle colonne lin. indipendenti della matrice P .

- Matrice T_2: matrice $n \times (n-p)$ formata dai vettori della **base di** X_{nc} .

- La matrice di trasformazione T è certamente **invertibile** (dato che vale la relazione $X_c \oplus X_{nc} \equiv \mathbb{R}^n$). Sia allora

$$T^{-1} = \underbrace{\left[\frac{H_1}{H_2} \right]}_{n} \begin{matrix} \Big\} p \\ \Big\} (n-p) \end{matrix}$$

- Che relazione c'è tra il partizionamento di T e di T^{-1} ?

$$T^{-1}T = \left[\begin{array}{c}H_1\\ \hline H_2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}T_1 & T_2\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c}H_1T_1 & H_1T_2\\ \hline H_2T_1 & H_2T_2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\overbrace{I}^{p\times p} & 0\\ \hline 0 & \underbrace{I}_{(n-p)\times(n-p)}\end{array}\right]$$

- In definitiva allora vale che:

$H_2T_1 = 0$

- Le righe di H_2 sono vettori tutti ortogonali ai vettori-colonna di T_1, quindi ortogonali alla base di X_c : allora le **righe di** H_2 sono **vettori base di** X_{nc} .

$H_1T_2 = 0$

- Analogamente, le **righe di** H_1 sono **vettori base di** X_c .

- Applichiamo allora il cambiamento di base descritto dalla matrice T .

$$x(t) = T\,z(t) \;\Rightarrow\; \dot{z}(t) = T^{-1}\,A\,T\,z(t) + T^{-1}\,B\,u(t)$$

- Per il Lemma 4.6, la **trasformazione non modifica** le caratteristiche di **controllabilità del sistema**.

- La trasformazione mette in evidenza però un **particolare partizionamento delle matrici** A **e** B **,** mettendo in evidenza il sottosistema completamente controllabile e quello non controllabile.

$$\dot{z}(t) = \underbrace{T^{-1}\,A\,T}_{\widehat{A}}\,z(t) + \underbrace{T^{-1}\,B}_{\widehat{B}}\,u(t)$$

- Come sono strutturate allora le nuove matrici $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$?

$$\hat{A} = T^{-1} A T = \left[\frac{H_1}{H_2}\right] A \left[\, T_1 \,|\, T_2 \,\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} H_1 A T_1 & H_1 A T_2 \\ \hline H_2 A T_1 & H_2 A T_2 \end{array}\right]$$

- Definiamo ora le sottomatrici

$$H_1 A T_1 = \underbrace{\hat{A}_{1,1}}_{p \times p} \qquad H_1 A T_2 = \underbrace{\hat{A}_{1,2}}_{p \times (n-p)}$$

$$H_2 A T_1 \qquad H_2 A T_2 = \underbrace{\hat{A}_{2,2}}_{(n-p) \times (n-p)}$$

- Questa **sottomatrice** DEVE essere **nulla**: le colonne di T_1 sono vettori base per X_c , per il teorema 4.7 allora anche le colonne di AT_1 sono vettori di X_c ed infine le righe di H_2 sono vettori base di X_{nc} (ortogonale per definizione ad X_c).

- In definitiva

$$\hat{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix}$$

- Con considerazioni analoghe si può mostrare che DEVE valere anche

$$\hat{B} = T^{-1} B = \left[\frac{H_1}{H_2}\right] B = \left[\frac{H_1 B}{H_2 B}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} = T^{-1} B = \left[\frac{\hat{B}_1}{0}\right]$$

Forma standard di controllabilità

- Scelta la trasformazione T come descritto nelle slide precedenti, allora si definisce **forma standard di controllabilità**, o forma canonica di controllabilità (decomposizione canonica di controllabilità/raggiungibilità di Kalman) la forma

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad T = \left[\, \underbrace{T_1}_{\{X_c\}} \,\middle|\, \underbrace{T_2}_{\{X_{nc}\}} \,\right]$$

$$x(t) = T\,z(t)$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- $\left(\hat{A}_{1,1},\, \hat{B}_1\right)$ risulta essere **completamente controllabile** (raggiungibile): lo si vede facilmente determinando la matrice di controllabilità nelle nuove coordinate. Infatti:

$$\hat{P} = \left[\, \hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \cdots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B} \,\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1}\hat{B}_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1}^{n-1}\hat{B}_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

- A questo punto, ricordando che $\hat{A}_{1,1} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ si ha

$$\operatorname{rank}\left\{\hat{P}\right\} = \operatorname{rank}\left[\, \hat{B}_1 \quad \hat{A}_{1,1}\hat{B}_1 \quad \cdots \quad \hat{A}_{1,1}^{n-1}\hat{B}_1 \,\right]$$

$$= \operatorname{rank}\left[\, \hat{B}_1 \quad \hat{A}_{1,1}\hat{B}_1 \quad \cdots \quad \hat{A}^{p-1}{}_{1,1}\hat{B}_1 \,\right] = p$$

- Il partizionamento in parte completamente controllabile e non-controllabile si può evidenziare anche utilizzando direttamente le equazioni di stato:

$$T = \left[\underbrace{T_1}_{p} \,\middle|\, \underbrace{T_2}_{(n-p)} \right] \Big\} n \quad \Rightarrow \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \; p \\ \} \; (n-p) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{1,1}\, z_1(t) + \hat{A}_{1,2}\, z_2(t) + \hat{B}_1\, u(t) \\ \dot{z}_2(t) = \hat{A}_{2,2}\, z_2(t) \end{cases}$$

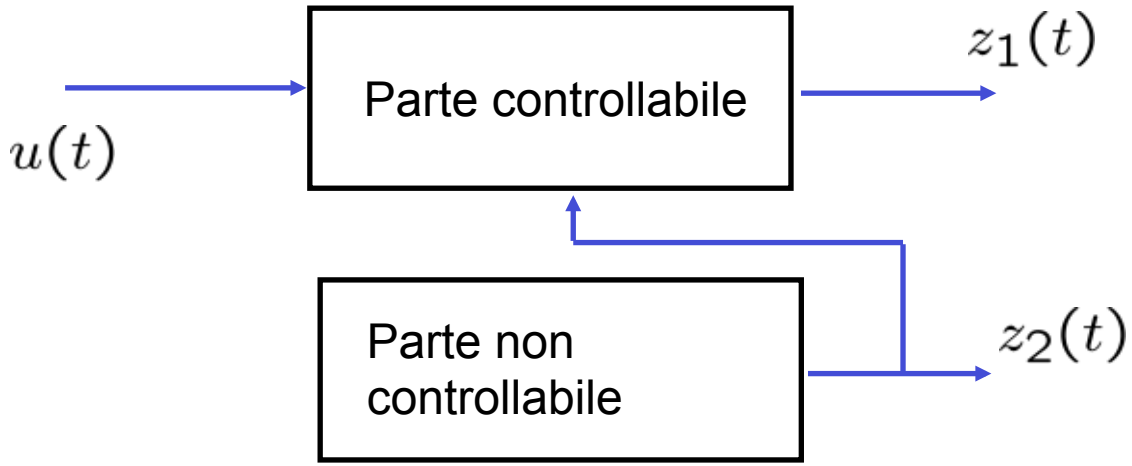
- La **parte di sistema** relativa alle variabili di stato z_2 **evolve in modo indipendente** dalla funzione d'ingresso u : l'evoluzione di questa parte del sistema **dipende SOLO da** $z_2(0^-)$
- Inoltre z_2 influisce sull'evoluzione di z_1 come una sorta di ingresso aggiuntivo.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= \hat{A}_{1,1}\, z_1(t) + \hat{A}_{1,2}\, z_2(t) + \hat{B}_1\, u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \hat{A}_{2,2}\, z_2(t) \end{cases}$$

- Nel caso in cui $z_2(0^-) = 0$ allora il **sistema** nel suo complesso si comporta (evolve) come un sistema di **ordine ridotto** (pari a *p*) con dinamica descritta soltanto dalle equazioni

$$\dot{z}_1(t) = \hat{A}_{1,1}\, z_1(t) + \hat{A}_{1,2}\, z_2(t) + \hat{B}_1\, u(t)$$

- La trasformazione T ha messo in evidenza un particolare aspetto della **struttura del sistema**, che può essere allora rappresentata graficamente così



Commenti ed osservazioni

- Si arriva alla struttura descritta in precedenza per la forma standard di controllabilità anche se la matrice T_2 non è formata da vettori ortogonali a quelli che formano la matrice T_1 (si ricordi: per T_1 si usa la base di X_c, per T_2 la base di X_{nc}), ma "soltanto" da vettori linearmente indipendenti tra loro e lin. indipendenti da quelli di T_1 .

- Definizioni: la parte del sistema descritta la $z_1(t)$ viene detta "parte controllabile", mentre la parte descritta dalle variabili $z_2(t)$ si dice "parte non controllabile".

- $z(t) = T^{-1}x(t) \Rightarrow z_2(t) = H_2 x(t)$
  Sfruttando questa relazione si ottengono informazioni sulla parte non controllabile del sistema, nelle variabili di stato x .

Un esempio

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$u(t) \in \mathbb{R}$$

- Già sappiamo che

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\{P\} = 1$$

- La matrice T che porta alla forma standard di controllabilità sarà allora

$$T = \begin{bmatrix} 1 & v_1 \\ 1 & v_2 \end{bmatrix} \; v_1 \neq v_2 \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{v_2 - v_1} \begin{bmatrix} v_2 & -v_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} a & -a \end{bmatrix}$$

- Di conseguenza, l'equazione di stato della parte non controllabile si lascia scrivere come

$$z_2 = H_2 x = a\,(x_1 - x_2)$$

- Questa equazione conferma quanto trovato in precedenza:
  - La funzione d'ingresso $u(t)$ NON può agire sulla differenza tra le due variabili di stato $x_1 - x_2$
  - Detto altrimenti: utilizzando la funzione d'ingresso $u(t)$ si possono raggiungere (dallo stato nullo) o equivalentemente controllare (a zero) solamente stati caratterizzati da valori identici per le variabili di stato x_1 e x_2 .

Definizione: polo controllabile

- Si definisce "**polo controllabile**" ciascun **autovalore** della matrice $\hat{A}_{1,1}$, cioè relativo al movimento della parte controllabile del sistema.

Proprietà

- I **poli** di un sistema sono **invarianti** rispetto a cambiamenti di base.

Dimostrazione

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{poli:} \\ s \in \mathbb{C} : \det(s\,I - A) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = T\,z(t) \quad \Rightarrow \quad \det\left(s\,I - \hat{A}\right) = \det\left(s\,I - T^{-1}\,A\,T\right) = ?$$

$$\det\left(s\,I - \hat{A}\right) = \det\left(s\,I - T^{-1}\,A\,T\right) =$$

$$= \det\left[T^{-1}\,(s\,I - A)\,T\right] =$$

$$= \det\left(T^{-1}\right)\det\left(s\,I - A\right)\det\left(T\right] =$$

$$= \det\left(s\,I - A\right) \qquad \triangle$$

Def.: poli di una matrice di funzioni razionali

- Si definiscono "**poli**" di una **matrice di funzioni razionali** $G_{ij}(s)$ le **radici** del polinomio **minimo comune multiplo** dei denominatori di tutti i minori non (identicamente) nulli.
- Allora per la matrice $(sI - A)^{-1}$ i poli sono tutte le radici dell'equazione

$$\det\left(sI - A\right) = 0$$

Poli della matrice di FdT, partendo dalla forma standard

- Consideriamo un sistema LTI descritto dalle equazioni di stato

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Vogliamo determinare la matrice di trasferimento ingresso/stato e da questa avere informazioni sui poli della parte controllabile e della parte non controllabile del sistema.

$$T_{z\,u}(s) = \left[sI - \hat{A}\right]^{-1} \hat{B}$$

$$\left[sI - \hat{A}\right]^{-1} = \left[sI - \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} & M_{1,2}(s) \\ \hdashline 0 & \left(sI - \hat{A}_{2,2}\right)^{-1} \end{array}\right]$$

- Sfruttando il fatto che $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  non è necessario determinare l'espressione di $M_{1,2}(s)$, dato che

$$\left[sI - \hat{A}\right]^{-1} \hat{B} = \begin{bmatrix} \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_{z\,u}(s)$$

$$T_{z\,u}(s) = \begin{bmatrix} \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- I **poli di** $T_{z,u}(s)$ sono allora gli **autovalori della matrice** $\hat{A}_{1,1}$, cioè **SOLTANTO** quelli che definiscono il movimento autonomo della **parte controllabile** del sistema.

- Quelli considerati **NON** sono **TUTTI** i poli. Infatti vale che

$$\det(sI - A) = \det\left(sI - \hat{A}\right) =$$
$$= \det\left(sI - \hat{A}_{1,1}\right) \cdot \det\left(sI - \hat{A}_{2,2}\right)$$

poiché la matrice $\hat{A}$ è diagonale a blocchi.

$$\det(sI - A) = \det\left(sI - \hat{A}_{1,1}\right) \cdot \det\left(sI - \hat{A}_{2,2}\right)$$

- L'insieme degli autovalori della matrice A del sistema può venire diviso in due sottoinsiemi:
  - gli autovalori corrispondenti alla parte controllabile: "**poli controllabili**"
  - gli autovalori corrispondenti alla parte non controllabile: "**poli non controllabili**"

- Ricordando che $x(t) = T\,z(t)$ si ottiene

$$T_{x\,u}(s) = [sI - A]^{-1}\,B = T\,T_{z,u}(s) =$$

$$= \left[\, T_1 \,|\, T_2 \,\right] \begin{bmatrix} \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T_1 \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} \hat{B}_1$$

Proprietà della matrice di FdT ingresso/stato

$$T_{x\,u}(s) = T_1 \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} \hat{B}_1$$

- Nella **matrice di trasferimento ingresso/stato** possono comparire **SOLTANTO i poli controllabili**.

- Se il **sistema non** è completamente **controllabile** allora i poli presenti nella $T_{x,u}(s)$ sono un sottoinsieme di tutti i poli del sistema.
- Di conseguenza, nella **risposta forzata** dello stato i modi corrispondenti ai poli non controllabili NON possono essere presenti per alcuna scelta dell'ingresso $u(t)$.

- Se invece il sistema è completamente controllabile allora la matrice $T_{x,u}(s)$ presenta tutti i poli del sistema.

Teorema 4.9

- Un **sistema** LTI è **completamente controllabile SE E SOLO SE** la matrice di trasferimento $T_{x,u}(s)$ presenta **TUTTI i poli** del sistema (ciascun polo con la sua propria molteplicità).

Dimostrazione:

- Sfruttando i risultati e le considerazioni precedenti, si dimostra che la matrice $T_{x,u}(s)$ di un sistema completamente controllabile contiene come poli tutti gli autovalori della matrice A di stato.
- Per semplicità si considera un sistema ad un ingresso (*Single Input*)

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t) \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n \qquad u(t) \in \mathbb{R}$$

- Supponiamo (sempre per semplicità) che la matrice A abbia autovalori tutti distinti.
- Sfruttiamo allora il cambio di coordinate per portare la matrice A in forma diagonale:

$$x(t) = M\,z(t) \quad M \;:\; M^{-1}AM = \Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{z}(t) = \Lambda\,z(t) + h\,u(t) \quad h = M^{-1}\,b$$

- Osservazione: deve essere $h_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \ldots n$
- Se non fosse così il sistema sarebbe non completamente controllabile. Perché?

$$T_{z,u}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{s+\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{h_1}{s+\lambda_1} \\ \frac{h_2}{s+\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{h_n}{s+\lambda_n} \end{bmatrix}$$

- La matrice $T_{z,u}(s)$ presenta tutti i poli del sistema (per ipotesi $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j$).

- Poiché inoltre la matrice M ha rango massimo, vale anche che
$$T_{x,u}(s) = M\, T_{z,u}(s)$$
$T_{x,u}(s)$ presenta tutti i poli del sistema.

△

Ancora un esempio

- Consideriamo i due sistemi

$$\dot{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t) \quad u_1(t) \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2(t) \quad u_2(t) \in \mathbb{R}^2$$

- Le loro matrici di trasferimento sono

$$T_{x_1,u_1}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix} \qquad T_{x_2,u_2}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- Il polinomio caratteristico per entrambi gli esempi è pari a

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

- Per quanto riguarda i poli si ha che:
  1. per $T_{x_1,u_1}(s)$

$$\text{poli}\,\{T_{x_1,\,u_1}(s)\} = \{s = -1 \text{ semplice }\}$$

  2. per $T_{x_2,u_2}(s)$

$$\text{poli}\,\{T_{x_2,\,u_2}(s)\} = \{s = -1 \text{ doppio }\}$$

- In conclusione, il **primo sistema** è **non completamente controllabile**, mentre il **secondo** invece è **completamente controllabile**.

Lo si verifichi determinando la matrice P in entrambi i casi.

Teorema 4.10

- Dato il sistema LTI $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ si consideri la legge di controllo

$$u(t) = K\,x(t) + v(t)$$

- Si ottiene così il nuovo sistema

$$\dot{x}(t) = [A + BK]\,x(t) + B\,v(t)$$

- Il sistema di partenza risulta **completamente controllabile SE E SOLO SE** il polinomio caratteristico

$$\det\,[sI - (A + BK)]$$

può essere **scelto ad arbitrio** al **variare** della **matrice** K .

Dimostrazione

- Dimostriamo soltanto la necessità, cioè che
  - SE il sistema (A, B) non è completamente controllabile ALLORA gli autovalori di $(A + BK)$ non si possono scegliere ad arbitrio.

- Decomposto il sistema in forma standard di controllabilità si scrive

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= K\,x(t) + v(t) \\ x(t) &= T\,z(t) \\ T &= [T_1\ T_2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(t) = [KT_1\ KT_2]\,z(t) + v(t)$$

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} z(t) + \\ + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 K T_1 & \hat{B}_1 K T_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

- Riordinando l'espressione si arriva a

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} + \hat{B}_1 K T_1 & \hat{A}_{1,2} + \hat{B}_1 K T_2 \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{x}(t) = [A + BK]\, x(t) + B\, v(t)$$

- Valgono le relazioni:

$$\tilde{A} = T^{-1}\,[A + BK]\,T$$

$$\det\left(sI - \tilde{A}\right) = \det\left(sI - (A + BK)\right)$$

- Infine vale che (dato che $\tilde{A}$ e' diagonale a blocchi)

$$\det\left(sI - \tilde{A}\right) = \det\left[sI - \left(\hat{A}_{1,1} + \hat{B}_1\,K\,T_1\right)\right]\cdot\det\left(sI - \hat{A}_{2,2}\right)$$

- È chiaro che gli autovalori associati alla parte non controllabile (cioè alla matrice $\hat{A}_{2,2}$) non sono influenzati da K : in tal caso allora e' impossibile scegliere ad arbitro gli autovalori di $\tilde{A}$.

- **Concludendo**: una retroazione algebrica dello stato sull'ingresso del tipo

$$u(t) = K\,x(t) + v(t)$$

può modificare a piacimento SOLO il valore dei poli controllabili del sistema, mentre i poli non controllabili rimangono invariati.

Teorema 4.11

- Una retroazione algebrica sullo stato NON modifica le caratteristiche di controllabilità del sistema.

Dimostrazione:

- Considerato il sistema $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ sia $\bar{x}$ uno stato controllabile.
- Vale che

$$x\left(0^-\right) = \bar{x} \xrightarrow{\bar{u}\,(\bar{x},\,\bar{t},\,\tau)} x\,(\bar{t}) = 0$$

$\tilde{x}$ movimento dello stato

- Con la retroazione algebrica il sistema diviene

$$\dot{x}(t) = (A + BK)\,x(t) + B\,v(t)$$

- In effetti lo stato $\bar{x}$ è controllabile anche per il nuovo sistema, dato che

$$v(\tau) = -K\,\tilde{x}(\tau) + \bar{u}\,(\bar{x},\,\bar{t},\,\tau)$$

controlla a zero lo stato.

- Infatti, facendo uso di $v(t)$ nell'eq. del sist. retroazionato

$$\dot{x}(t) = (A+BK)\,x(t) + B\,[-K\,\tilde{x}(\tau) + \bar{u}\,(\bar{x},\,\bar{t},\,\tau)]$$

e si può verificare che una soluzione è ancora data da

$$x(\tau) = \tilde{x}(\tau)$$

- In definitiva allora lo stato $\bar{x}$ è controllabile anche per il nuovo sistema, qualsiasi sia K . In particolare,se (A, B) controllabile, allora anche $((A + BK), B)$ lo è per qualsiasi K .

Sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto

- I risultati ottenuti **finora** per la controllabilità sono stati determinati supponendo di analizzare/studiare soltanto **sistemi LTI a tempo continuo**.

- Per **sistemi LTI a tempo discreto** si possono trovare **risultati analoghi**. E` sufficiente sostituire il termine "controllabilità " in quanto detto finora a proposito di sistemi LTI con il termine "raggiungibilità ".

Teorema 4.12

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ x(k) \in \mathbb{R}^n,\ u(k) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

- Un **sistema** LTI a tempo discreto è **completamente raggiungibile** (o equivalentemente la **coppia (A, B)** è completamente raggiungibile) se e solo se

$$\text{rank}\,\{P\} \triangleq \text{rank}\left\{\left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\ \right]\right\} = n$$

- È l'omologo "a tempo discreto" del teorema 5.4 per i sistemi "a tempo continuo".

Dimostrazione:

- Deve essere possibile trasferire lo stato dallo stato nullo ad un qualsiasi valore, in un tempo finito, attraverso una opportuna sequenza di ingresso $u(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

- Partendo dallo stato nullo, il movimento è descritto da:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-1-k} B\, u(k) \quad i = 1, 2, \ldots$$

- Allora lo stato ad ogni istante è combinazione lineare delle colonne della matrice

$$\left[\, B \,\middle|\, A\,B \,\middle|\, A^2\,B \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, A^{i-1}\,B \,\right]$$

- Se per qualche i, la **matrice** in questione ha **rango massimo** (pari ad n) allora il sistema è **completamente raggiungibile**.

- Ovviamente, se la **matrice di raggiungibilità P**, definita da

$$P \triangleq \left[\, B \,\middle|\, A\,B \,\middle|\, A^2\,B \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, A^{n-1}\,B \,\right]$$

non ha rango massimo, allora non lo ha nemmeno la matrice

$$\left[\, B \,\middle|\, A\,B \,\middle|\, A^2\,B \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, A^{r-1}\,B \,\right] \qquad r \geq n+1$$

- Per verificarlo basta applicare il teorema di Cayley-Hamilton alle matrici

$$A^k \qquad k \geq n$$

- In definitiva è necessario che sia

$$\text{rank}\,\{P\} = n \qquad\qquad P \triangleq \left[\, B \,\middle|\, A\,B \,\middle|\, A^2\,B \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, A^{n-1}\,B \,\right]$$

per avere la completa raggiungibilità del sistema.

- La dimostrazione della sufficienza è ovvia.

Raggiungibilità in k passi

- Per un sistema LTI a tempo discreto completamente raggiungibile, **ogni stato** può essere **raggiunto** a partire dallo stato nullo **in un numero finito di passi**, in particolare in **al più n passi** (con n dimensione dello spazio di stato).

- Si possono definire allora gli spazi degli stati raggiungibili in 1, 2, … k passi, fino ad n passi:

$$X_r^1, \quad X_r^2, \quad \ldots, X_r^n \equiv X_r$$

- Le basi di questi spazi saranno le colonne linearmente indipendenti delle matrici

$$\begin{aligned} X_r^1 &\iff [B] \\ X_r^2 &\iff [B \; AB] \\ &\ldots \\ X_r^n &\iff \left[B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B\right] = P \end{aligned}$$

- Ovviamente sarà $$X_r^1 \subseteq X_r^2 \subseteq \ldots \subseteq X_r^n \equiv X_r$$

Un esempio

- Si consideri il sistema LTI a tempo discreto

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

- E' facilissimo verificare che si ha

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall k > 0$$

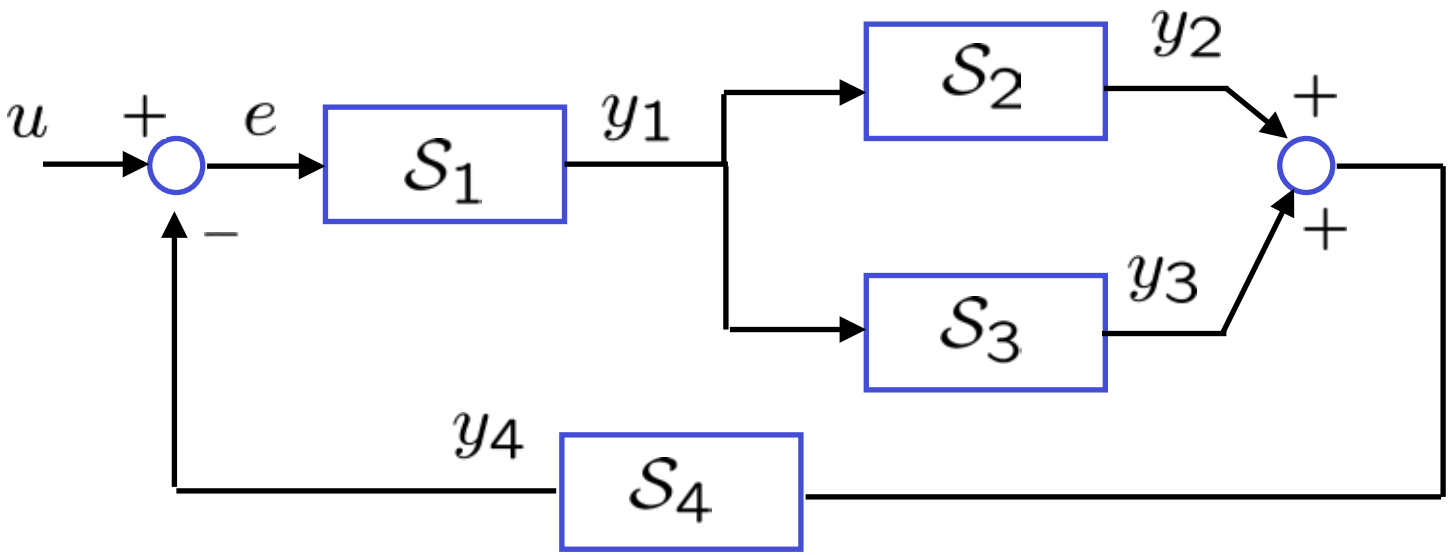
- Di conseguenza qualsiasi stato $\bar{x}$ è controllabile a zero in un solo passo:
  - Il sistema allora risulta **completamente controllabile.**

- A partire dallo stato nullo tuttavia non si può raggiungere nessun altro stato, indipendentemente dall'ingresso, al di fuori dello stato nullo stesso:
  - allora il **sistema** risulta **non completamente raggiungibile**.

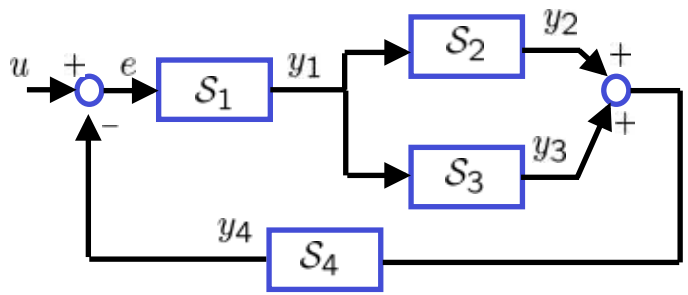
- In definitiva allora per il sistema si ha che $X_r \subset X_c$

Sistemi interconnessi

- Che cosa si può dire a proposito della controllabilità (raggiungibilità) di sistemi interconnessi, come quelli in figura?



Teorema 4.13



- Condizione **necessaria** affinché un **sistema ottenuto per interconnessione** sia **completamente controllabile** e che **ogni sottosistema** sia **completamente controllabile**.

- La dimostrazione è lasciata per esercizio (si basa sulla definizione di completa controllabilità / raggiungibilità).

- Si ricordi che lo spazio di stato di un sistema interconnesso, composto da m sottosistemi, è dato da

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_i} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m}$$