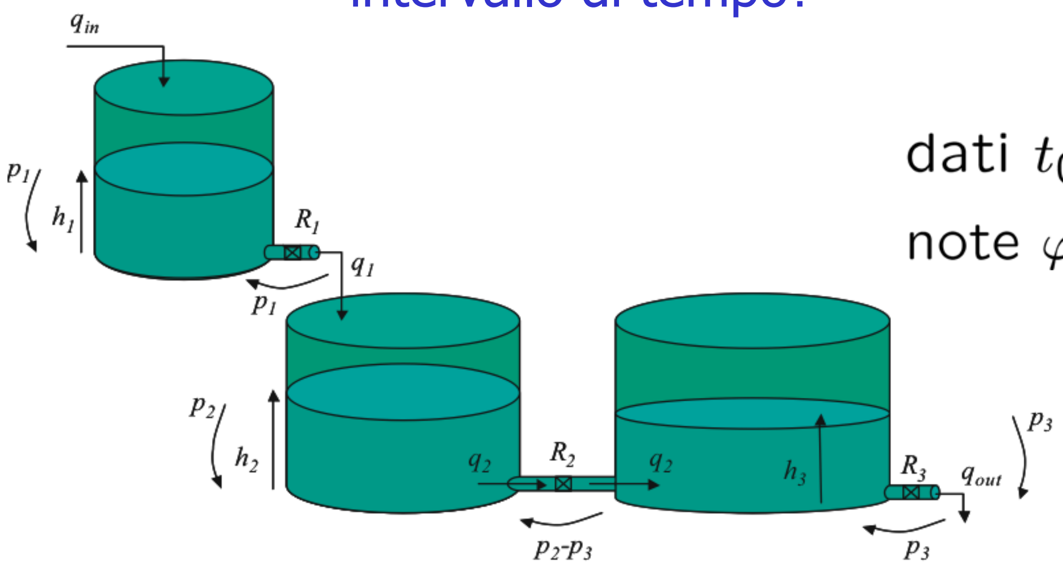
Osservabilità e ricostruibilità

Definizioni e proprietà per i sistemi dinamici

Definizioni generali

- Che cosa si intende per "osservabilità " e per "ricostruibilità " ?
  - Nelle applicazioni lo **stato del sistema spesso**, anche se ne è richiesta la conoscenza (si veda la retroazione algebrica dello stato [assegnazione degli autovalori]) è **non accessibile**.
  - È possibile allora **determinare lo stato** a partire dalla **conoscenza della risposta** del sistema ad un **ingresso assegnato**, risposta che viene osservata per un certo intervallo di tempo?



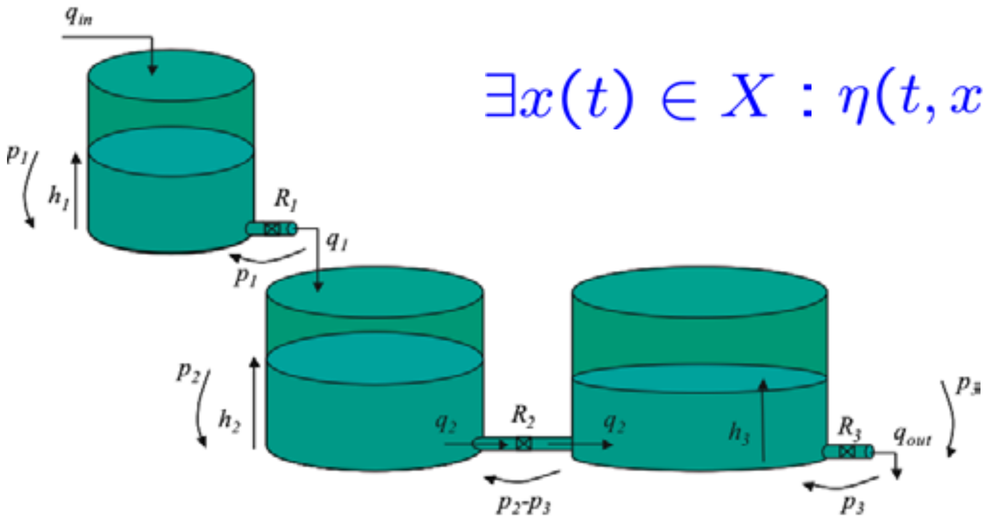
dati $t_0 \in T,\ q_{in}(\cdot) \in \Omega,\ q_{out}(\cdot) \in \Gamma$

note $\varphi(\cdot),\ \eta(\cdot)$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= ? \\ x(t) &= ? \end{aligned}}$$

- Più precisamente:
  - facendo riferimento alla definizione assiomatica di TDSC – Parte 2, la teoria dell'**osservabilità** e della **ricostruibilità** affronta il problema della **determinazione dello stato** iniziale (rispettivamente dello stato attuale) sulla base della conoscenza della funzione d'uscita del sistema, della funzione d'ingresso e della struttura del sistema.

dati $t_0 \in T,\ q_{in}(\cdot) \in \Omega,\ q_{out}(\cdot) \in \Gamma$ note $\varphi(\cdot), \eta(\cdot)$



$$\exists x(t) \in X : \eta(t, x(t), q_{in}(t)) = q_{out}(t) \ \ \forall t \geq t_0$$

problema di ricostruibilità

problema di osservabilità

$$\exists x_0 \in X : \eta\left(t,\ \varphi(t, t_0, x_0, q_{in}(\cdot)),\ q_{in}(t)\right) = q_{out}(t) \ \ \forall t \geq t_0$$

Stati indistinguibili

- Di un sistema dinamico sia $\eta(\cdot)$ la **trasformazione d'uscita** e sia τ un istante temporale, che penseremo **istante iniziale** per la definizione che segue:
  - due **stati** x_1 **ed** x_2 del sistema dinamico si definiscono **indistinguibili nel futuro** a partire dall'istante τ se

$$\forall u(\cdot) \in \Omega$$

$$\eta\left(\xi, \varphi\left(\xi, \tau^-, x_1, u(\cdot)\right)\right) = \eta\left(\xi, \varphi\left(\xi, \tau^-, x_2, u(\cdot)\right)\right)$$

$$\forall \xi \geq \tau$$

- Dalla conoscenza della sola funzione d'uscita in tal caso non è possibile risalire allo stato iniziale.

- La definizione è del tutto generale e fornisce scarsi risultati (come fare a determinare l'insieme degli stati indistinguibili? Per ispezione nello spazio di stato? Per tutti i possibili ingressi?).

- Nel caso di **sistemi dinamici lineari** tuttavia (al solito) la teoria è molto più sviluppata ed effettivamente si ottengono **risultati importanti**.

- Infatti per sistemi dinamici lineari la risposta può venire espressa come somma di due componenti:
  - risposta **libera**, che dipende SOLTANTO dallo **stato iniziale**;
  - risposta **forzata**, che dipende SOLTANTO dall'applicazione del **controllo** (dell'ingresso).

$$\eta\left(\xi,\, \varphi\left(\xi,\, \tau^{-},\, x,\, u(\cdot)\right)\right) = \eta\left(\xi,\, \varphi_l\left(\xi,\, \tau^{-},\, x\right)\right) + \\ + \eta\left(\xi,\, \varphi_f\left(\xi,\, \tau^{-},\, 0,\, u(\cdot)\right)\right)$$

- A questo punto, fissato l'ingresso $u(\cdot)$ la risposta forzata

$$\eta\left(\xi, \varphi_f\left(\xi, \tau^-, 0, u(\cdot)\right)\right)$$

risulta perfettamente nota.

- La **differenza** tra due possibili uscite allora, fissata la funzione di ingresso $u(\cdot)$, **DEVE** dipendere dall'influenza degli **stati iniziali**. Nel caso dei sistemi dinamici lineari allora l'indistinguibilità di due stati si deve riferire al solo **movimento libero dell'uscita**:

$$\eta\left(\xi, \varphi_l\left(\xi, \tau^-, x\right)\right)$$

- Questo **risultato** è **importante** perché permette di studiare il problema dell'indistinguibilità (e quindi della ricostruibilità e dell'osservabilità) analizzando proprietà del sistema legate alla sua sola "risposta ad ingresso nullo" o "risposta libera".

Ricostruibilità ed osservabilità nei sistemi lineari e stazionari (LTI)

Definizioni e proprietà

Definizioni per sistemi LTI

- Sulla base del risultato ottenuto a proposito dell' indistinguibilità per sistemi lineari, possiamo allora considerare soltanto sistemi dinamici LTI **autonomi**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A\,x(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) &= A\,x(k) \\ y(k) &= C\,x(k) \end{cases}$$

aventi condizioni iniziali rispettivamente

$$x\left(0^-\right) = x_0 \qquad x\,(0) = x_0$$

Stato non osservabile

- Uno **stato** $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice **non osservabile** (**indistinguibile dallo stato nullo**) se

$$\eta\left(t,\, \varphi_l\left(t,\, 0^-,\, \bar{x}\right)\right) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

nel caso a tempo continuo ed analogamente per quello a tempo discreto

$$\eta\left(k,\, \varphi_l\left(k,\, 0,\, \bar{x}\right)\right) = 0 \quad \forall k \geq 0$$

- Ricordando l'espressione del movimento libero dell'uscita per un sistema LTI si arriva allora a scrivere

$$y(t) = C\, e^{A\,t}\, \bar{x} = 0 \qquad y(k) = C\, A^k\, \bar{x} = 0$$

$$\forall t \geq 0 \qquad \forall k \geq 0$$

Proprietà: sottospazio di non osservabilità

- L'insieme degli stati non osservabili è un sottospazio dello spazio di stato:

$$X_{no} \triangleq \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n,\ y(t) = C\, e^{At}\, \bar{x} = 0 \quad \forall t \geq 0 \right\}$$

Nel caso a tempo continuo

$$X_{no} \triangleq \left\{ \bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n,\ y(k) = C\, A^{k}\, \bar{x} = 0 \quad \forall k \geq 0 \right\}$$

Nel caso a tempo discreto

Dimostrare per esercizio che X_{no} è un sottospazio dello spazio di stato

Definizione: osservazione

- Problema di **osservazione**:
  - determinazione dello **stato iniziale** sulla base della conoscenza della funzione d'uscita e della struttura del sistema.

Definizione: ricostruzione

- Problema di ricostruzione:
  - determinazione dello **stato attuale** sulla base della conoscenza della funzione d'uscita e della struttura del sistema.

Sistema completamente osservabile (ricostruibile)

- Nel caso in cui il **problema** di osservazione (ricostruzione) ammetta **sempre soluzione unica** per un sistema LTI, si dice che il **sistema** risulta **completamente osservabile** (**ricostruibile**).

Osservabilità rispetto a ricostruibilità

- Se il problema di osservazione ammette soluzione unica, allora anche la ricostruzione ammette soluzione unica:
  - infatti se il valore di $x(0^-)$ può essere **determinato** in **modo univoco**, allora può venire **determinato univocamente** anche il valore dello **stato** in **qualsiasi istante di tempo**

$$x(t) = \varphi_l\left(t, 0^-, x\left(0^-\right)\right)$$

  - Per il caso a tempo discreto vale la medesima considerazione (espressa col simbolismo appropriato).

- Il **viceversa in generale NON è vero**!

- Infatti in generale non è garantito che esista la funzione

$$\varphi_l{}^{-1} : \; x(t) \quad \Longrightarrow \quad x\left(0^-\right)$$

- Se la funzione $\varphi_l(\cdot)$ non è invertibile, allora la conoscenza di $x(t)$ non è sufficiente a determinare lo stato iniziale $x(0^-)$.

- Per analogia con il caso della raggiungibilità e della controllabilità si può dire che:
  - per **sistemi LTI a tempo continuo** i due problemi coincidono, nel senso che **la completa osservabilità implica la completa ricostruibilità e viceversa**;
  - per **sistemi LTI a tempo discreto** nel caso in cui (ancora una volta) si abbia $\mathrm{rank}\, A^k < n$ (quindi la **matrice** A^k **non invertibile**) la **completa osservabilità implica la completa ricostruibilità, ma NON il viceversa**.

Sistemi LTI a tempo continuo

- Da ora in avanti saranno analizzati soltanto **sistemi LTI a tempo continuo**.
- Per tali sistemi il problema della completa osservabilità e della completa ricostruibilità sono perfettamente sovrapponibili: la **completa osservabilità implica** la **completa ricostruibilità e viceversa**.
- I **risultati** per **sistemi LTI a tempo discreto** si possono ottenere **in maniera analoga** a quelli che troveremo, facendo attenzione (come nel caso di controllabilità e raggiungibilità) che in tal caso osservabilità e ricostruibilità possono avere soluzioni differenti (e quindi **in generale ha maggiore interesse** risolvere il problema dell'**osservabilità**).

Osservabilità per sistemi LTI a tempo continuo

- Sulla base della definizione di **stato non osservabile**, vale che:
  - il problema dell'**osservazione** ammette **soluzione unica** SOLO SE

$$X_{no} = \{0\}$$

Dimostrazione:

- Per assurdo

$$\exists \bar{x} \in X_{no},\ \bar{x} \neq 0 \Rightarrow \bar{y}(t) = Ce^{At}\bar{x} = 0\ \forall t \geq 0$$

  - Ma allora, considerato un qualsiasi stato iniziale (generico)

$$x(0^-) = x_1 \Rightarrow y_1(t) = Ce^{At}x_1$$

- se si costruisce un nuovo stato $\hat{x}(0^-) = x_2 = x_1 + \bar{x}$
- l'uscita a partire da x_2 è indistinguibile da quella ottenuta con stato iniziale il solo x_1

$$y_2(t) = C\,e^{A\,t}\,x_2 = C\,e^{A\,t}\,(x_1 + \bar{x}) =$$

$$= C\,e^{A\,t}\,x_1 = y_1(t)$$

- Allora i due stati x_1 ed x_2 sono indistinguibili (contro l'ipotesi). Di conseguenza, per avere completa osservabilità nel caso di sistemi LTI a tempo continuo è sufficiente che sia

$$X_{no} = \{0\}$$

Un primo esempio

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- La risposta libera del sistema è data in generale da

$$y_l(t) = C\, e^{At} x\left(0^-\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\left(0^-\right) \\ x_2\left(0^-\right) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-t}\left[x_1\left(0^-\right) + x_2\left(0^-\right)\right]$$

$$y_l(t) = e^{-t}\left[x_1\left(0^-\right) + x_2\left(0^-\right)\right]$$

- L'andamento della risposta libera e' allora influenzato dalla somma delle componenti dello stato iniziale.

- Il sottospazio di non osservabilità in questo caso e' dato da

$$C\, e^{At}\, \bar{x} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = e^{-t}\left[\bar{x}_1 + \bar{x}_2\right] = 0$$

$$X_{no} \Longleftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Ancora un esempio

- Assegnato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

determinare lo stato iniziale $x(0^-)$ sapendo che l'uscita del sistema ha espressione

$$y_l(t) = 2\,e^{-t} + 3\,e^{-2t}$$

- **Soluzione**
  - la trasformata di Laplace della risposta e' data da

$$Y_l(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,x\left(0^-\right)$$

$$Y_l(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\left(0^-\right) \\ x_2\left(0^-\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x_1\left(0^-\right)}{s+1} + \frac{x_2\left(0^-\right)}{s+2}$$

$$y_l(t) = x_1\left(0^-\right) e^{-t} + x_2\left(0^-\right) e^{-2t}$$

- Per confronto diretto si arriva a

$$x_1\left(0^-\right) = 2, \quad x_2\left(0^-\right) = 3$$

Lemma 5.1

- Condizione **sufficiente** affiche' un sistema LTI **non** sia **completamente osservabile** e' che esista **almeno una variabile di stato** che **non influenza l'uscita**, ne' direttamente ne' indirettamente.

- **Dimostrazione**:

  Consideriamo un sistema LTI a tempo continuo le cui equazioni di stato abbiano la forma seguente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ \underbrace{A_{2,1}}_{m} & \underbrace{A_{2,2}}_{n-m} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n-m \end{matrix} \cdot x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \underbrace{C_1}_{m} & \underbrace{0}_{n-m} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$A_{1,1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

- L'uscita e' influenzata soltanto dalle prime m componenti del vettore di stato.
- A loro volta queste prime m componenti del vettore di stato sono indipendenti dall'evoluzione delle rimanenti $n-m$. Infatti

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = e^{A_{1,1}t} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \\ \vdots \\ x_m(0^-) \end{bmatrix}$$

- Di conseguenza

$$y(t) = C_1 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = C_1\, e^{A_{1,1}t} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \\ \vdots \\ x_m(0^-) \end{bmatrix}$$

- E' evidente che l'uscita libera dipende soltanto dalle condizioni iniziali delle prime m componenti dello stato e NON dipende dalle rimanenti $n-m$ componenti dello stato.

- Pertanto il sistema NON può essere completamente osservabile.

▲

Osservazione

- La proprietà di osservabilità di un sistema LTI a tempo continuo DEVE dipendere allora dalle caratteristiche delle matrici A, C del sistema.

Teorema 5.2

- Condizione **NECESSARIA e SUFFICIENTE** affinché un **sistema LTI a tempo continuo** sia **completamente osservabile** (o equivalentemente la coppia (A, C) sia completamente osservabile) e' che

$$\text{rank}\{Q\} := \text{rank}\left\{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right\} = n$$

- **Dimostrazione**:
  - dapprima la **necessità**: supponiamo che il sistema sia completamente osservabile, ma che sia

$$\operatorname{rank}\{Q\} < n$$

  - Allora

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^n \ \alpha \neq 0 : \ Q\alpha = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \alpha = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C\alpha = 0 \quad CA\alpha = 0 \quad \cdots \quad CA^{n-1}\alpha = 0$$

- Se si esprime ora il movimento libero dell'uscita a partire dallo stato x_1 , si ottiene

$$y_1(t) = C\,e^{A\,t}\,x_1 = C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,t^k\right) x_1$$

- Facendo uso del teorema di Cayley-Hamilton, si può riscrivere l'espressione precedente come

$$y_1(t) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} C\,A^k\,\gamma(k)\,t^k\right] x_1\,, \qquad \gamma(k) \in \mathbb{R}$$

- Ora consideriamo un nuovo stato iniziale, così composto

$$x\left(0^-\right) = x_2 = x_1 + \alpha$$

e valutiamo la risposta libera del sistema a partire da x_2 .

- Analogamente a quanto ottenuto in precedenza, si può scrivere

$$y_2(t) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} C\,A^k\,\gamma(k)\,t^k\right] x_2 =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} C\,A^k\,x_1\,\gamma(k)\,t^k\right] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} C\,A^k\,\alpha\,\gamma(k)\,t^k\right] =$$

$$= y_1(t) + \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n-1} C\,A^k\,\alpha\,\gamma(k)\,t^k\right]}_{=\,0} = y_1(t)$$

$$Q\alpha = 0$$

- In definitiva abbiamo ottenuto che $y_1(t) = y_2(t)$
  - questo risultato e' in contraddizione con l'ipotesi di completa osservabilità del sistema!

- Dimostrazione della **sufficienza**:
  - Si noti che valgono queste relazioni

$$y(t) = C\,x(t)\,;\ \dot{y}(t) = C\,A\,x(t)\,;\ \ldots\ y^{(n-1)}(t) = C\,A^{n-1}\,x(t)$$

  - ed in particolare valgono le seguenti

$$y\left(0^-\right) = C\,x\left(0^-\right)\,;\ \dot{y}\left(0^-\right) = C\,A\,x\left(0^-\right)\,;$$

$$\ddot{y}\left(0^-\right) = C\,A^2\,x\left(0^-\right)\,;\ \ldots\ y^{(n-1)}\left(0^-\right) = C\,A^{n-1}\,x\left(0^-\right)$$

Per esercizio, verificare le relazioni appena descritte.

- Riscrivendo in forma matriciale le ultime relazioni, si nota che

$$\begin{bmatrix} y\left(0^-\right) \\ \dot{y}\left(0^-\right) \\ \ddot{y}\left(0^-\right) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(0^-\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C\,A \\ C\,A^2 \\ \vdots \\ C\,A^{n-1} \end{bmatrix} x\left(0^-\right) = Q\,x\left(0^-\right)$$

- Ora, solo se $\text{rank}\,\{Q\} = n$ il sistema di equazioni appena determinato ammette una soluzione unica in $x(0^-)$ e quindi e' completamente osservabile.

Un esempio

- Riconsideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Determiniamo lo stato iniziale $x(0^-)$ che ha generato l'uscita libera

$$y_l(t) = 2\,e^{-t} + 3\,e^{-2t}$$

facendo uso del teorema 6.2. Per far ciò verifichiamo dapprima che il sistema sia effettivamente completamente osservabile

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ C\,A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det Q \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{rank} Q = 2$$

- Allora il sistema

$$\begin{bmatrix} y\left(0^-\right) \\ \dot{y}\left(0^-\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x\left(0^-\right)$$

ammette soluzione

$$x\left(0^-\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Osservazione

- Quando il **sistema** risulta **non completamente osservabile**, allora lo **stato iniziale non** può essere **determinato in modo univoco**:
  - in realtà si riesce a determinarlo **a meno di** un qualsiasi **vettore** che appartenga al **sottospazio di non osservabilità** X_{no}

Esempio

- Analizziamo nuovamente il sistema
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

  per cercare lo stato iniziale associato alla risposta libera

$$y(t) = 2\,e^{-t}$$

- Stavolta e'

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ C\,A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rank}\,Q = 1 < 2$$

  quindi il sistema NON e' completamente osservabile.

- Inoltre sappiamo già che $$X_{no} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

- Cercando di risolvere il problema si arriva ad un'unica equazione

$$\begin{bmatrix} y(0^-) \\ \dot{y}(0^-) \end{bmatrix} = Q\,x(0^-) \quad \Longrightarrow \quad 2 = x_1(0^-) + x_2(0^-)$$

che identifica tutti i possibili stati iniziali che danno origine alla risposta libera assegnata:

$$x(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\in X_{no}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Lemma 5.3

- Se $\mathrm{rank}\, Q = m < n$ (lo spazio di stato e' $\mathbb{R}^n$), una base per il sottospazio di non osservabilità X_{no} e' data da

$$\{\alpha \neq 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}^n : Q\,\alpha = 0\} \qquad\qquad X_{no} = \ker Q$$

Definizione

- Si definisce "**sottospazio di osservabilità**" il complemento ortogonale ad X_{no} nello spazio di stato

$$X_o \oplus X_{no} = \mathbb{R}^n \qquad\qquad X_o \perp X_{no}$$

Osservazione

- L'affermazione "*ogni stato osservabile appartiene al sottospazio* X_o " è **FALSA**!

- L'insieme degli **stati osservabili** NON è un sottospazio!

- L'affermazione corretta è :
  - "ogni stato osservabile non e' ortogonale ad X_o "
  - "ogni stato osservabile ha componente non nulla appartenente ad X_o "

$$\bar{x} \text{ osservabile} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x} \perp v_o \neq 0 \quad \forall v_o \in X_o$$

Teorema 5.4

- La proprietà di **osservabilità** e' **invariante** rispetto a **cambiamenti di base**.

- **Dimostrazione**: consideriamo due rappresentazioni di un sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}A\,T\,z(t) \triangleq \tilde{A}\,z(t) \\ y(t) = C\,T\,z(t) \triangleq \tilde{C}\,z(t) \end{cases}$$

$$x(t) = T\,z(t)$$

- Le matrici di osservabilità Q nei due casi sono legate dalla relazione

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \cdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = QT$$

- In definitiva vale che

$$\operatorname{rank} T = n \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} \tilde{Q} = \operatorname{rank} Q$$

Teorema 5.5

- Il sottospazio X_{no} e' invariante rispetto alla matrice A , cioè

$$\forall v \in X_{no} \Rightarrow Av \in X_{no}$$

- **Dimostrazione**

$$\forall v \in X_{no} \qquad Q\,v = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v = 0 \quad v \neq 0$$

- Ma allora

$$QAv = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ CA^n \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ CA^n \end{bmatrix}$$

Tutti nulli per quanto scritto prima

Per il teorema di Cayley-Hamilton

$$CA^n = 0$$

- In definitiva

$$QAv = 0 \quad \Rightarrow \quad Av \in X_{no}$$

▲

Forma standard di osservabilità

- È possibile **decomporre** un sistema dinamico in una **parte osservabile** ed in una **non osservabile** ?

- Si consideri un sistema LTI non completamente osservabile

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A\,x(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{rank}\,\{Q\} = q < n$$

- Per mettere in evidenza la parte osservabile e quella non osservabile del sistema, è necessario ricorrere ad una opportuna trasformazione, ovvero un cambiamento di base nello spazio di stato.

$$T = \begin{array}{c} \left[\, T_1 \,\middle|\, T_2 \,\right] \\ \underbrace{\hphantom{T_1}}_{q}\ \underbrace{\hphantom{T_2}}_{(n-q)} \end{array} \Big\}\, n$$

matrice di cambio-base

$$x(t) = T\, z(t)$$

- Matrice T_2: matrice $n \times (n-q)$ formata dai vettori della **base di** X_{no} cioè dalle colonne lin. indipendenti del nucleo della matrice Q .

- Matrice T_1 : matrice $n \times q$ formata dai vettori della **base di** X_o .

- La matrice di trasformazione T è certamente **invertibile** (dato che vale la relazione $X_o \oplus X_{no} \equiv \mathbb{R}^n$). Sia allora

$$T^{-1} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} H_1 \\ \hline H_2 \end{array}\right]}_{n} \begin{array}{l} \}\ q \\ \}\ (n-q) \end{array}$$

- Che relazione c'è tra il partizionamento di T e di T^{-1} ?

$$T^{-1}T = \left[\begin{array}{c} H_1 \\ \hline H_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} H_1 T_1 & H_1 T_2 \\ \hline H_2 T_1 & H_2 T_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{I}^{q \times q} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{I}_{(n-q)\times(n-q)} \end{array}\right]$$

- In definitiva allora vale che:

$H_1 T_2 = 0$

- Le righe di H_1 sono vettori tutti ortogonali ai vettori-colonna di T_2, quindi ortogonali alla base di X_{no} : allora le **righe di** H_1 sono **vettori base di** X_o .

- Applichiamo allora il cambiamento di base descritto dalla matrice T .

$$x(t) = T\,z(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = T^{-1} A\, T\, z(t)$$

- Per il teorema 5.4, la **trasformazione non modifica** le caratteristiche di **osservabilità del sistema**.

- La trasformazione mette in evidenza però un **particolare partizionamento delle matrici** A **e** C **,** mettendo in evidenza il sottosistema completamente osservabile e quello non osservabile.

$$\dot{z}(t) = \overbrace{T^{-1} A\, T}^{\hat{A}}\, z(t)$$
$$y(t) = \underbrace{C\, T}_{\hat{C}}\, z(t)$$

- Come sono strutturate allora le nuove matrici $\hat{A}$ e $\hat{C}$?

$$\hat{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c} H_1 \\ \hline H_2 \end{array}\right] A \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} H_1 A T_1 & H_1 A T_2 \\ \hline H_2 A T_1 & H_2 A T_2 \end{array}\right]$$

- Definiamo ora le sottomatrici

$$H_1 A T_1 = \underbrace{\hat{A}_{1,1}}_{q \times q} \qquad H_1 A T_2 = \hat{A}_{1,2}$$

$$\underbrace{H_2 A T_1}_{(n-q) \times q} \qquad H_2 A T_2 = \underbrace{\hat{A}_{2,2}}_{(n-q) \times (n-q)}$$

- Questa **sottomatrice** DEVE essere **nulla**: le colonne di T_2 sono vettori base per X_{no}, per il teorema 6.5 allora anche le colonne di AT_2 sono vettori di X_{no} ed infine le righe di H_1 sono vettori base di X_o (ortogonale per definizione ad X_{no}).

- In definitiva

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & 0 \\ \hat{A}_{2,1} & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix}$$

- Con considerazioni analoghe si può mostrare che DEVE valere anche

$$\hat{C} = CT = C\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\hat{C}_1}{CT_1} & \overset{0}{CT_2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma standard di osservabilità

- Scelta la trasformazione T come descritto nelle slide precedenti, allora si definisce **forma standard di osservabilità**, o forma canonica di osservabilità (**decomposizione canonica di osservabilità di Kalman**) la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

$$T = \left[\, \underbrace{T_1}_{\{X_o\}} \,\middle|\, \underbrace{T_2}_{\{X_{no}\}} \,\right]$$

$$x(t) = T\,z(t)$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & 0 \\ \hat{A}_{2,1} & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} z(t) \end{cases}$$

- $(\hat{A}_{1,1}, \hat{C}_1)$ risulta essere **completamente osservabile** (ricostruibile): lo si vede facilmente determinando la matrice di osservabilità nelle nuove coordinate. Infatti:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{C}_1\hat{A}_{1,1} & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \hat{C}_1\hat{A}_{1,1}^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- A questo punto, ricordando che $\hat{A}_{1,1} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ si ha

$$\mathrm{rank}\left\{\hat{Q}\right\} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1\hat{A}_{1,1} \\ \vdots \\ \hat{C}_1\hat{A}_{1,1}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1\hat{A}_{1,1} \\ \vdots \\ \hat{C}_1\hat{A}_{1,1}^{q-1} \end{bmatrix} = q$$

- Il partizionamento in parte completamente osservabile e non-osservabile si può evidenziare anche utilizzando direttamente le equazioni di stato:

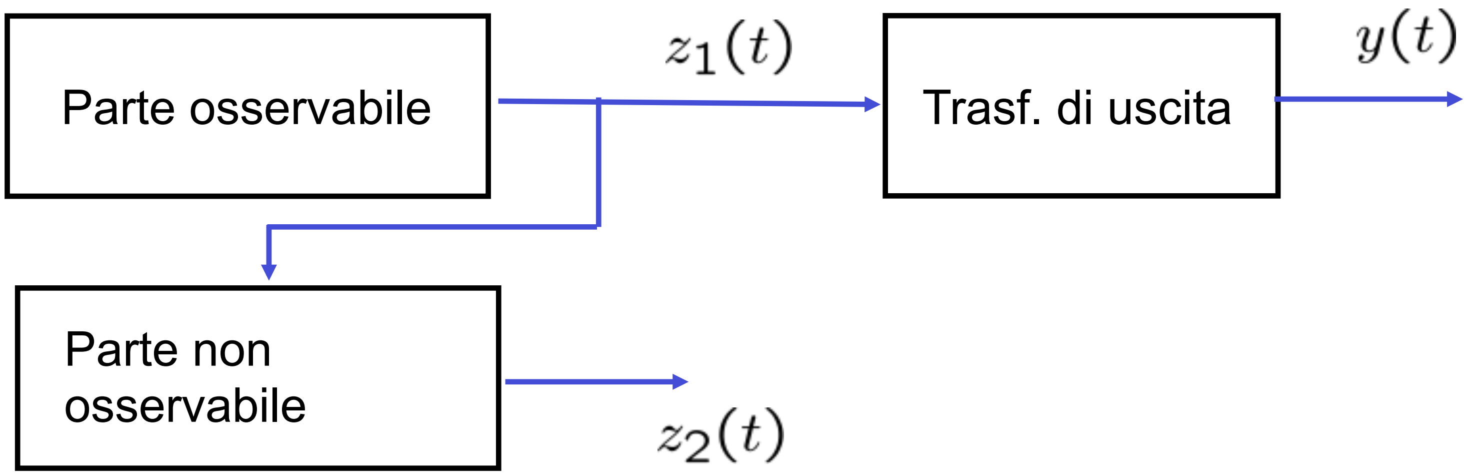
$$T = \left[\, \underbrace{T_1}_{q} \,\middle|\, \underbrace{T_2}_{(n-q)} \,\right] \Big\}\, n \quad \Rightarrow \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\; q \\ \}\; (n-q) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \hat{A}_{1,1}\, z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = \hat{A}_{2,1}\, z_1(t) + \hat{A}_{2,2}\, z_2(t) \\ y(t) = \hat{C}_1\, z_1(t) \end{cases}$$

- La **parte di sistema** relativa alle variabili di stato z_2 **evolve senza influenzare l'uscita del sistema**: l'evoluzione dell'uscita del sistema **dipende SOLO da** $z_1(0^-)$
- Inoltre z_1 influisce sull'evoluzione di z_2 come una sorta di ingresso aggiuntivo.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) &= \hat{A}_{1,1}\, z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \hat{A}_{2,1}\, z_1(t) + \hat{A}_{2,2}\, z_2(t) \\ y(t) &= \hat{C}_1\, z_1(t) \end{cases}$$

- La trasformazione T ha messo in evidenza un particolare aspetto della **struttura del sistema**, che può essere allora rappresentata graficamente così



Commenti ed osservazioni

- Si arriva alla struttura descritta in precedenza per la forma standard di osservabilità anche se la matrice T_1 non è formata da vettori ortogonali a quelli che formano la matrice T_2 (si ricordi: per T_1 si usa la base di X_o, per T_2 la base di X_{no}), ma "soltanto" da vettori linearmente indipendenti tra loro e lin. indipendenti da quelli di T_2 .

- Definizioni: la parte del sistema descritta da $z_1(t)$ viene detta "parte osservabile", mentre la parte descritta dalle variabili $z_2(t)$ si dice "parte non osservabile".

- $z(t) = T^{-1}x(t) \Longrightarrow z_2(t) = H_2 x(t)$

Sfruttando questa relazione si ottengono informazioni sulla parte non osservabile del sistema, nelle variabili di stato x .

Un esempio

- Riconsideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Per la matrice di osservabilità vale che

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} Q = 1 \Rightarrow$$

Sistema non completamente osservabile

$$X_{no} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X_o = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Si ottiene così

$$\hat{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} z(t) \end{cases}$$

- La componente di **stato osservabile** e' allora

$$z_1(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t) + x_2(t)\right)$$

- Quella **non osservabile** e' invece

$$z_2(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

$$z_1(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t) + x_2(t)\right)$$

$$z_2(t) = \frac{1}{2}\left(x_1(t) - x_2(t)\right)$$

- Il fattore ½ e' irrilevante: dipende soltanto dalla particolare scelta delle variabili di stato.
- L'informazione importante e' che l'uscita e' influenzata SOLTANTO dalla somma delle variabili di stato e non dalla loro differenza.
- In definitiva la conoscenza dell'uscita $y(t)$ in questo caso permette di determinare solo il valore di

$$\left[x_1\left(0^-\right) + x_2\left(0^-\right)\right]$$

Osservabilità rispetto a controllabilità

- La **forma standard di osservabilità** si sarebbe potuta determinare molto più velocemente facendo ricorso a proprietà che legano la controllabilità e l'osservabilità [raggiungibilità ed osservabilità nel caso di sistemi LTI a tempo discreto] attraverso il **concetto di dualità**.

- Il concetto di dualità ci permetterà (più avanti) di ottenere anche altre proprietà importanti in maniera molto rapida ed efficace (in particolare quando tratteremo il problema della realizzazione, oppure il controllo su base stato e la stima dello stato …)

Sistema duale

- La **definizione** viene fornita per un **sistema LTI a tempo continuo**, ma si può applicare in modo identico anche a sistemi LTI a tempo discreto.

- Definizione: dato un sistema
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale** il sistema descritto dalle equazioni di stato
$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A^\top w(t) + C^\top v(t) \\ \vartheta(t) = B^\top w(t) + D^\top v(t) \end{cases}$$

Lemma 6.6

- Per un **sistema LTI a tempo continuo** caratterizzato dalla **tripla** (A, B, C) le **proprietà** di controllabilità (osservabilità) sono **identiche** a quelle di osservabilità (controllabilità) del **sistema duale** $(A^\top, C^\top, B^\top)$.

- **Dimostrazione**:
  - La dimostrazione e' semplice e si basa sulle definizioni delle condizioni di controllabilità ed osservabilità.
  - Di conseguenza viene affrontato uno solo dei casi possibili: l'altro e' lasciato per esercizio.

- Dimostriamo allora che l'osservabilità del sistema primale equivale alla controllabilità del sistema duale.

- Il termine D può essere trascurato perché e' irrilevante dal punto di vista delle proprietà di controllabilità e/o osservabilità.

$$(A,\, B,\, C)$$

$$\mathrm{rank}\{Q\} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = m \leq n \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

- Ora non rimane che determinare la matrice P_{Duale} di controllabilità per il sistema duale:

$$P_{\text{Duale}} = \left[\begin{array}{cccc} C^\top & A^\top C^\top & \cdots & \left(A^\top\right)^{n-1} C^\top \end{array} \right]$$

- E' facilissimo vedere che $P_{\text{Duale}} = Q^\top$
- Di conseguenza (poiché il rango di una matrice e' invariante rispetto ad operazioni di trasposizione)

$$\text{rank}\, Q = \text{rank}\left(Q^\top\right) = \text{rank}\left(P_{\text{Duale}}\right)$$

▲

Osservazione

- In base alla definizione fornita per "*sistema duale* " e' evidente che, se si indica con $\mathscr{D}\{\mathscr{S}\}$ l'operazione di "*dualizzazione* " del sistema, si ha che

$$\mathscr{D}\{\mathscr{D}\{\mathscr{S}\}\} = \mathscr{S}$$

Forma standard di osservabilità dalla dualità

- Si consideri il **sistema**
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A\,x(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{cases}$$
di cui si vuole determinare la **forma standard di osservabilità**. Per far questo si costruisce il **sistema duale**
$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= A^\top w(t) + C^\top v \\ \vartheta(t) &= B^\top w(t) \end{cases}$$
- A questo punto si determina la **forma standard di controllabilità** per il **sistema duale**
$$\dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{1,1} & \tilde{A}_{1,2} \\ 0 & \tilde{A}_{2,2} \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

- Ora si riapplica l'operatore di dualità, ottenendo

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{1,1}^\top & 0 \\ \tilde{A}_{1,2}^\top & \tilde{A}_{2,2}^\top \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1^\top & 0 \end{bmatrix} z(t) \end{cases}$$

- In base al Lemma 5.6, quella appena ottenuta e' la **forma standard di osservabilita` per il sistema di partenza**.

Definizione: polo osservabile

- In maniera analoga a quanto fatto per la controllabilità (si vedano le slide di TDSC Parte 4) si definisce **polo osservabile** ogni autovalore relativo alla parte osservabile del sistema.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \quad \xleftrightarrow{x(t) = T\,z(t)} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & 0 \\ \hat{A}_{2,1} & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} z(t) \end{cases}$$

- Ricordando che gli autovalori di un sistema LTI sono invarianti rispetto a cambiamenti di base (TDSC Parte 5), vale che

$$\det(sI - A) = \det\left(sI - \hat{A}\right) = \det\left(sI - \hat{A}_{1,1}\right) \cdot \det\left(sI - \hat{A}_{2,2}\right)$$

- Le soluzioni dell'equazione

$$\det\left(sI - \hat{A}_{1,1}\right) = 0$$

vengono dette **poli osservabili**.

- Le soluzioni dell'equazione

$$\det\left(sI - \hat{A}_{2,2}\right) = 0$$

vengono invece indicate come **poli non osservabili**.

- Dal **punto di vista fisico** i poli osservabili sono quelli che corrispondono ai modi dell'evoluzione libera dello stato che sono presenti in uscita.

Un esempio

- Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Il sistema e' già in forma standard di osservabilita`, per cui e' immediato riconoscere che
  - polo osservabile: $s = -1$
  - polo non osservabile $s = -2$

- L'espressione della risposta libera del sistema ci conferma che il modo e^{-2t} e' non osservabile:
$$y(t) = C\, e^{At} x\left(0^-\right) = e^{-t} x_1\left(0^-\right)$$

Teorema 5.7

- Un **sistema** LTI a tempo continuo e' **completamente osservabile** SE E SOLO SE la matrice

$$C\,(sI - A)^{-1}$$

presenta gli stessi poli del sistema, cioè TUTTE le soluzioni di

$$\det\,(sI - A)\,=\,0$$

- **Dimostrazione**:
  - Si determini la risposta libera del sistema, espressa sia in forma standard di osservabilità che tramite le equazioni di stato originarie:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \quad \xleftrightarrow{x(t) = T\,z(t)} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & 0 \\ \hat{A}_{2,1} & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot z(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} z(t) \end{cases}$$

- Nei due casi, facendo uso della trasformata di Laplace, si ottengono rispettivamente le espressioni

$$Y(s) = C\,(sI - A)^{-1} \cdot x\left(0^-\right)$$

$$Y(s) = \hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1} \cdot z\left(0^-\right)$$

- Vale inoltre $\quad z\left(0^-\right) = T^{-1} \cdot x\left(0^-\right)$

quindi si può scrivere

$$Y(s) = C\,(sI - A)^{-1} \cdot x\left(0^-\right) = \hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1} \cdot T^{-1} x\left(0^-\right)$$

- Poiché l'uguaglianza appena trovata e' indipendente dalla condizione iniziale $x(0^-)$, allora deve essere

$$C\,(sI-A)^{-1} = \hat{C}\left(sI-\hat{A}\right)^{-1}\cdot T^{-1}$$

- Sfruttando ora la forma della matrice $\hat{A}$ si può scrivere

$$\left[sI-\hat{A}\right]^{-1} = \left[sI-\left[\begin{array}{c:c} \hat{A}_{1,1} & 0 \\ \hdashline \hat{A}_{2,1} & \hat{A}_{2,2} \end{array}\right]\right]^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \left(sI-\hat{A}_{1,1}\right)^{-1} & 0 \\ \hdashline M_{2,1}(s) & \left(sI-\hat{A}_{2,2}\right)^{-1} \end{array}\right]$$

Matrice opportuna

- Non e' necessario determinare l'espressione della matrice $M_{2,1}(s)$ dato che e' ininfluente nella determinazione del risultato che ci interessa.
- Infatti, dato che

$$\hat{C} = \left[\begin{array}{cc} \hat{C}_1 & 0 \end{array} \right]$$

si ottiene

$$\hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1} \cdot T^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} \hat{C}_1 \left(sI - \hat{A}_{1,1}\right)^{-1} & 0 \end{array} \right] T^{-1}$$

- In definitiva, i poli della matrice di funzioni razionali

$$\hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1} \cdot T^{-1}$$

sono le radici del polinomio caratteristico della sottomatrice $\hat{A}_{1,1}$

$$\det\left(sI - \hat{A}_{1,1}\right) = 0$$

- Ma allora nella matrice $\hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1} \cdot T^{-1}$ compaiono **SOLO i poli osservabili**.

- Soltanto nel caso in cui $\hat{A}_{2,2} = \emptyset$ cioè solo se il **sistema** e' **completamente osservabile**, allora

$$\det\left(sI - \hat{A}_{1,1}\right) = \det\left(sI - A\right)$$

- Per sistemi completamente osservabili in definitiva la matrice

$$C\left(sI - A\right)^{-1}$$

presenta tutti i poli del sistema.

La dimostrazione che la matrice $C\left(sI - A\right)^{-1}$ di un sistema completamente osservabile presenta tutti i poli del sistema si può condurre, nel caso di sistemi ad una singola uscita (*Single Output*) e con autovalori tutti distinti, in modo analogo a quanto fatto nel teorema 5.9 (TDSC Parte 5) e per questo viene lasciata come esercizio.

Esempio

- Consideriamo due sistemi LTI, a tempo continuo, autonomi, descritti dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{w}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w(t) \\ v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \end{cases}$$

- I due sistemi presentano gli stessi autovalori per la matrice A delle equazioni di stato, ma differiscono per quanto riguarda la trasformazione d'uscita.

- Per il primo sistema allora il calcolo della matrice $C\,(sI - A)^{-1}$ porta a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \Rightarrow C\,(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- In base a quanto richiamato in (TDSC Parte 4—slide #68), allora questa matrice di funzioni razionali ha UN UNICO POLO in s = -1 e quindi il **sistema** risulta **non completamente osservabile**.

- Nel secondo caso invece si ha

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w(t) \\ v(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w(t) \end{cases} \Rightarrow C\,(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$C\left(sI - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- In questo caso invece sono presenti entrambi i poli in s = -1 ed il **sistema** risulta **completamente osservabile**.

Ovviamente agli stessi risultati si sarebbe giunti applicando il test di completa osservabilità (che viene lasciato come esercizio).

Esempio: sistema non autonomo

- Consideriamo il sistema descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Il sistema e' completamente osservabile (verificarlo per esercizio).
- Al sistema, che si trova in uno stato iniziale $x(0^-)$ incognito, viene applicato un ingresso impulsivo

$$u(t) = \delta(t)$$

e la sua risposta e' data da

$$y(t) = \left[2\,e^{-t} + 2\,e^{-2t}\right] \cdot 1(t) \qquad x\left(0^-\right) = ?$$

- **Soluzione**: ricordando che l'uscita di un sistema lineare e' data dalla somma di due contributi diversi (risposta libera e forzata), dobbiamo trovare un modo per determinare l'espressione della sola risposta dipendente dalle condizioni iniziali.

- Facendo uso della trasformata di Laplace, si può scrivere la risposta forzata come segue

$$Y_f(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B \cdot 1 = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

- Antitrasformando si ottiene

$$y_f(t) = \left[e^{-t} + e^{-2t}\right] \cdot 1(t)$$

- A questo punto, sfruttando la linearità, la risposta libera e' data da

$$y(t) - y_f(t) = \left[e^{-t} + e^{-2t}\right] \cdot 1(t)$$

$$y(t) - y_f(t) = \left[e^{-t} + e^{-2t}\right] \cdot 1(t)$$

- Le condizioni iniziali possono venire determinate adesso facendo uso della matrice di osservabilità Q (esercizio “per casa”) oppure si possono ottenere dal confronto tra le trasformate di Laplace seguenti

$$C(sI - A)^{-1} x\left(0^-\right) = \frac{x_1\left(0^-\right)}{s+1} + \frac{x_2\left(0^-\right)}{s+2} =$$

$$= Y_l(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

- Il confronto fornisce la soluzione cercata

$$x\left(0^-\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Osservazione

- In questo esempio, a causa dell'**ingresso** di tipo **impulsivo**, il movimento dello stato presenta una discontinuità per t=0, per cui:

$$x\left(0^-\right) \neq x\left(0^+\right)$$

- Ecco allora un ulteriore motivazione all'introduzione delle condizioni iniziali (per sistemi dinamici a tempo continuo) all'istante t_0^- .

Esercizio "per casa": determinare i valori dello stato subito dopo l'applicazione dell'ingresso impulsivo (cioè $x(0^+)$).

Teorema 5.8

- Per un sistema LTI del tipo $$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

  una **retroazione algebrica sull'uscita NON modifica** le caratteristiche di **osservabilità**.

- **Dimostrazione**: sia (A, C) **completamente osservabile** ["esercizio per casa": dimostrarla nel caso in cui sia non completamente osservabile] e consideriamo la retroazione algebrica dell'uscita sull'ingresso data da

$$u(t) = H\,y(t) + v(t) = H\,C\,x(t) + v(t)$$

- Le equazioni del sistema divengono allora

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

$$u(t) = H\,C\,x(t) + v(t)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = [A + BHC]\,x(t) + B\,v(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases}$$

- Supponiamo ora **PER ASSURDO** che la coppia $(A + BHC, C)$ sia **non completamente osservabile**

$$\exists \alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} C \\ C(A+BHC) \\ \vdots \\ C\,(A+BHC)^{n-1} \end{bmatrix} \alpha = 0$$

$$C\,\alpha = 0$$

- Analizziamo le singole equazioni in sequenza:

$$C\,(A+BHC)\,\alpha = 0 \qquad\qquad C\,\alpha = 0$$

$$C\,A\,\alpha + C B H C\,\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad C\,A\,\alpha = 0$$

- Per induzione si può allora dimostrare che

$$C\,(A+BHC)^i\,\alpha = 0 \qquad i = 0,\,1,\,\cdots\,n-1 \quad \Rightarrow \quad C\,A^i\,\alpha = 0 \qquad i = 0,\,1,\,\cdots\,n-1$$

- In definitiva deve valere che

$$C\,\alpha = C\,A\,\alpha = \cdots = C\,A^{n-1}\,\alpha = 0$$

$$\text{rank}\,Q < n$$

$$C\,\alpha = C\,A\,\alpha = \cdots = C\,A^{n-1}\,\alpha = 0$$

$$\mathrm{rank}\,Q < n$$

- Questo risultato contraddice l'ipotesi di completa osservabilità da cui siamo partiti! ▲

La dimostrazione nel caso più generale di sistema non completamente osservabile e' identica e si basa sul fatto che le matrici di osservabilità del sistema di partenza e di quello retroazionato hanno lo stesso sottospazio ortogonale (cioè X_o).

Osservazione

- Una **retroazione algebrica sullo stato** può in generale modificare le caratteristiche di osservabilità.

Esempio

- Consideriamo il sistema (**completamente osservabile**) descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \qquad\qquad u(t) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

- Applichiamo la retroazione algebrica dello stato descritta da

$$u(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + v(t) \qquad v(t) \in \mathbb{R}^2$$

- Il **nuovo sistema** possiede equazioni di stato pari a

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) & = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Come si può vedere ad esempio applicando il test di osservabilità oppure cercando di portare il sistema in forma standard di osservabilità, esso risulta **non completamente osservabile**.

Sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto

- I **risultati** descritti finora sono stati ricavati per sistemi LTI a tempo continuo, ma poiche' riguardano la sola **osservabilità**, **valgono** anche **per sistemi LTI a tempo discreto**.

- Infatti per sistemi LTI a tempo discreto l'osservabilità implica la ricostruibilità (come descritto nelle slide iniziali di TDSC Parte 6).

- Anche stavolta (come per la controllabilità) e' chiaro che non ha senso parlare di istante iniziale " k_0^- ", ma soltanto " k_0 ".

- L'unica differenza tra i due "mondi" per quando riguarda l'osservabilità consiste nella modalità di determinazione dello stato iniziale a partire dall'uscita del sistema.

- Infatti, mentre per **sistemi LTI a tempo continuo** lo stato iniziale può essere determinato a partire dall'**osservazione dell'uscita** su di un **intervallo** temporale **di durata infinitesima**, sufficiente a calcolare i valori

$$y\left(0^{-}\right)\ ;\ \dot{y}\left(0^{-}\right)\ ;\ \ddot{y}\left(0^{-}\right)\ ;\ \ldots\ y^{(n-1)}\left(0^{-}\right)$$

nel caso dei **sistemi LTI a tempo discreto** e' necessario **osservare l'uscita** per **al più n campioni successivi** (a partire dal primo), come risulta dalle relazioni

$$y\,(0) = C\,x(0);\ y\,(1) = C\,x(1) = C\,A\,x(0); \cdots$$

$$\cdots y(n-1) = C\,x(n-1) = C\,A^{n-1}x(0)$$

Tali relazioni possono venire organizzate in forma matriciale nel modo usuale e la soluzione può essere determinata sfruttando ancora la matrice di osservabilità Q (lo si verifichi).

Esempio:
sistema ricostruibile ma non osservabile

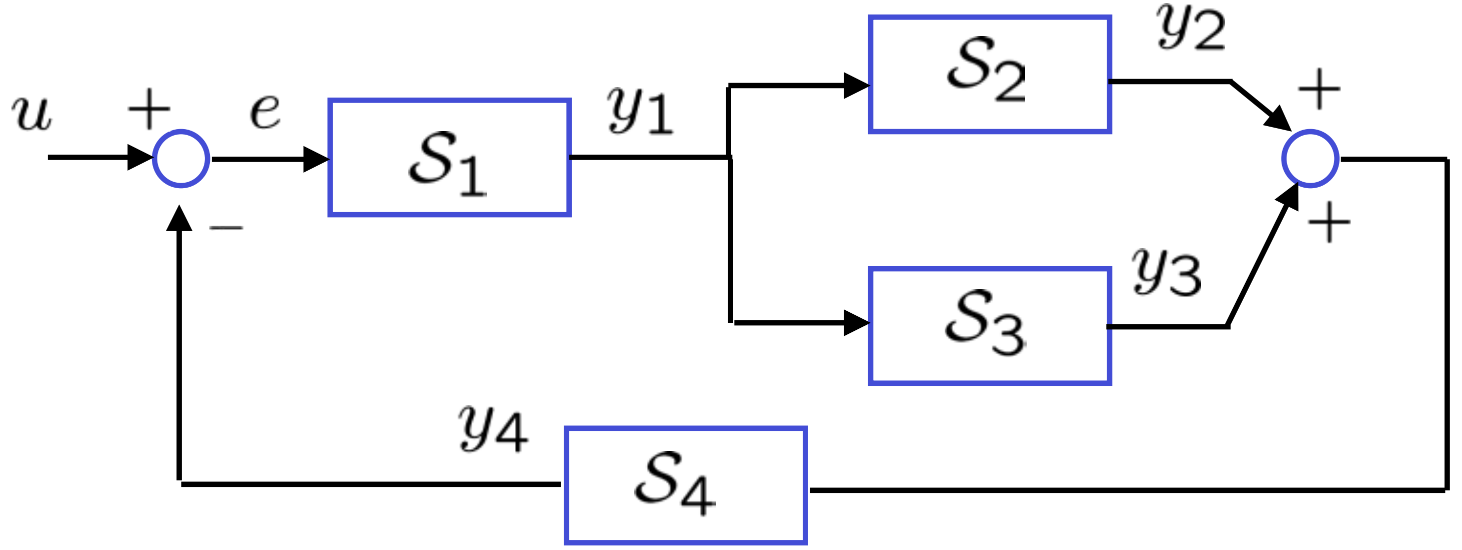
- Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

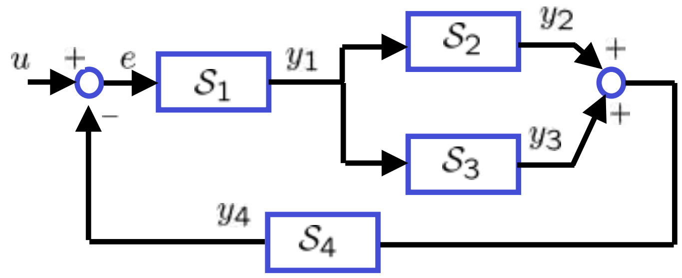
- L'uscita non fornisce alcuna informazione sullo stato iniziale, quindi il **sistema** e' certamente **non completamente osservabile** (lo si verifica facilmente).
- Tuttavia il **sistema** e' **completamente ricostruibile**, dato che, con certezza, $x(k+1)$ assumerà valore nullo $\forall k > 0$.

Sistemi interconnessi

- Che cosa si può dire a proposito della **osservabilità** (ricostruibilità) di **sistemi interconnessi**, come quelli in figura?

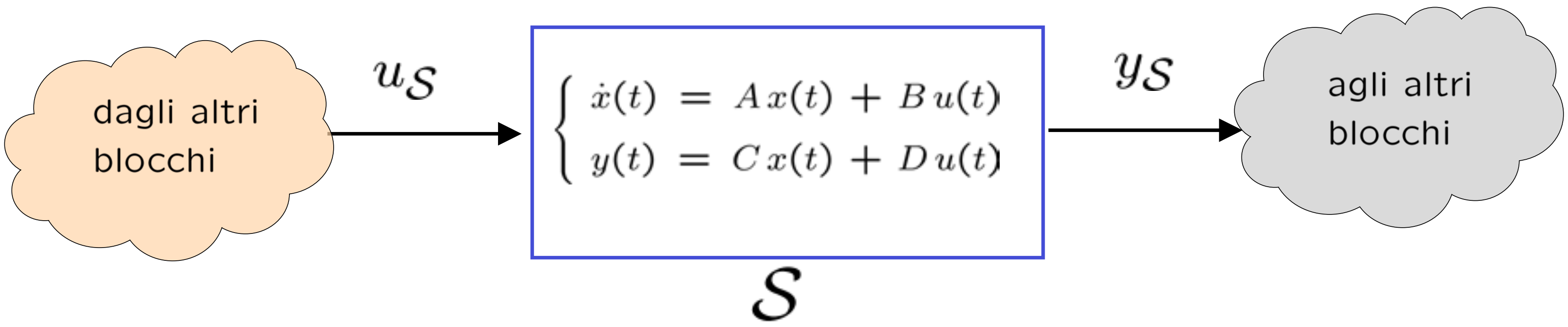


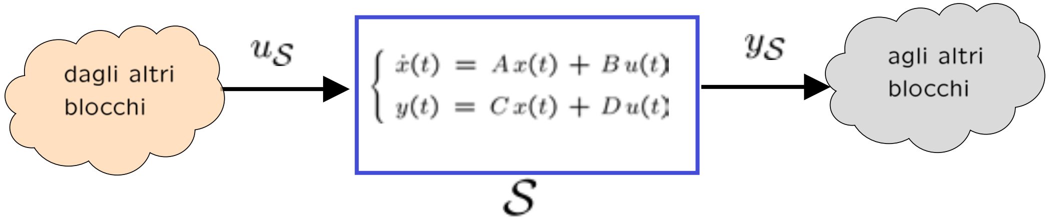
Teorema 5.9



- Condizione **necessaria** affinché un **sistema interconnesso** sia **completamente osservabile** e' che **ogni** suo **sottosistema** sia **completamente osservabile**.

- **Dimostrazione**: consideriamo un **sottosistema non completamente osservabile** per far vedere come questo causi la non completa osservabilità di tutto il sistema nel suo complesso.





- L'uscita $y_{\mathcal{S}}(t)$ (non necessariamente l'uscita del sistema interconnesso) si può esprimere come

$$y_{\mathcal{S}}(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

- Al solito $y_l(t)$ dipende dalle condizioni iniziali del sottosistema S mentre $y_f(t)$ dipende dall'applicazione dell'ingresso $u_{\mathcal{S}}(t)$.

- Ora appare evidente che le condizioni iniziali distinte

$$x_{\mathcal{S}}\left(0^-\right) = 0 \qquad\qquad x_{\mathcal{S}}\left(0^-\right) \in X_{no}$$

danno origine alla medesima evoluzione della risposta libera del sottosistema: risulta **impossibile** allora dall'osservazione dell'uscita **determinare lo stato iniziale** del sottosistema e quindi anche lo stato iniziale **di tutto il sistema interconnesso**.