

Decomposizione canonica

**Decomposizione canonica per sistemi LTI o
decomposizione canonica di Kalman**

**Proprietà della matrice di trasferimento
ingresso/uscita**

Sistemi LTI a tempo continuo ed a tempo discreto

- Come già fatto in precedenza (TDSC Parti 4 e 5) verranno esposti **risultati** principalmente per **sistemi LTI a tempo continuo**.
- I risultati valgono anche per **sistemi LTI a tempo discreto** qualora si sostituisca (al solito) il termine "controllabilità" con "raggiungibilità".

Introduzione

- Consideriamo un sistema LTI a tempo continuo descritto dalle equazioni di stato seguenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Il termine algebrico in uscita $[D u(t)]$ non compare, in quanto ininfluenza sulle proprietà di controllabilità e di osservabilità.

- In (Parte 4) e (Parte 5) abbiamo visto che esistono matrici di funzioni di trasferimento particolari, analizzando le quali e' possibile ottenere informazioni su controllabilità ed osservabilità

- nella matrice di FdT **ingresso/stato**

$$T_{xu}(s) = (sI - A)^{-1} B$$

sono presenti **tutti e soli i poli controllabili**

- nella matrice di FdT **“stato iniziale”/uscita**

$$T_{yx_0}(s) = C (sI - A)^{-1}$$

sono invece presenti **tutti e soli i poli osservabili** del sistema.

- Ma allora e' lecito chiedersi che proprietà possieda la matrice di FdT ingresso/uscita

$$T_{yu}(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

- In **maniera intuitiva**: la matrice di FdT $T_{y,u}(s)$ e' costituita dalla composizione delle due matrici di FdT analizzate in precedenza.
- Allora, per quanto riguarda controllabilità ed osservabilità, ci si deve aspettare che i poli di $T_{y,u}(s)$ siano tutti e soli i poli contemporaneamente controllabili ed osservabili del sistema.
- Verificheremo formalmente ciò dopo aver introdotto la **decomposizione canonica di Kalman**
 - **trasformazione di variabile** di stato che mette in evidenza (nelle equazioni di stato stesse) le **parti controllabili e non, osservabili e non** del sistema.

Lemma 6.1

- La matrice di trasferimento $T_{y_u}(s)$ e' invariante rispetto a cambiamenti di base.
- **Dimostrazione:** consideriamo due rappresentazioni di un sistema LTI a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1} A T z(t) + T^{-1} B u(t) \\ y(t) = C T z(t) \end{cases}$$

$$x(t) = T z(t)$$

e determiniamo l'espressione della $T_{y_u}(s)$ nel secondo caso.

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1} A T z(t) + T^{-1} B u(t) \\ y(t) = C T z(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_{yu}(s) &= C T (sI - T^{-1} A T)^{-1} T^{-1} B = \\ &= C T [T^{-1} (sI - A) T]^{-1} T^{-1} B = \end{aligned}$$

- Sfruttando la regola $(\alpha\beta\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}$

$$= C T T^{-1} (sI - A)^{-1} T T^{-1} B = C (sI - A)^{-1} B$$

- Così l'invarianza e' dimostrata. 

Forma canonica di Kalman

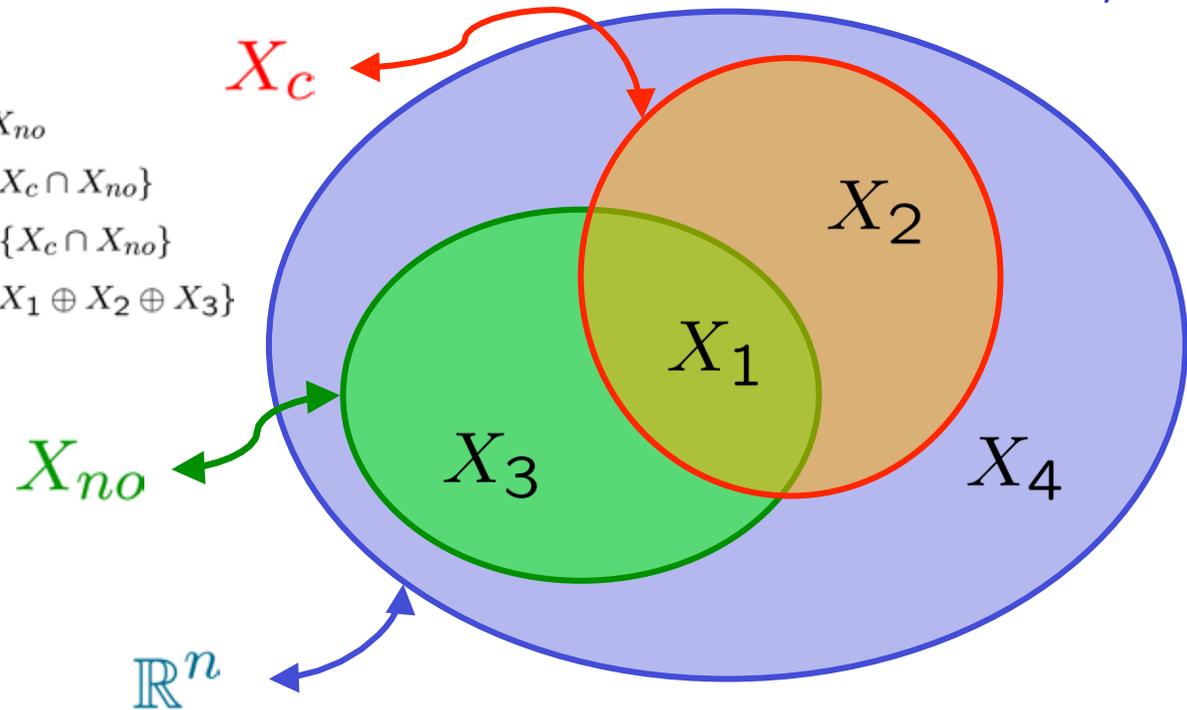
- Consideriamo un cambiamento di variabili di stato per il quale la matrice di trasformazione sia costruita come segue:

$$x(t) = T z(t) \quad T = \left[T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid T_4 \right]$$

- Le sottomatrici si determinano in base a

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 : \text{vettori base di } X_1 := X_c \cap X_{no} \\ T_2 : \text{vettori base di } X_2 := X_c \setminus \{X_c \cap X_{no}\} \\ T_3 : \text{vettori base di } X_3 := X_{no} \setminus \{X_c \cap X_{no}\} \\ T_4 : \text{vettori base di } X_4 := \mathbb{R}^n \setminus \{X_1 \oplus X_2 \oplus X_3\} \end{array} \right.$$

- T_1 : vettori base di $X_1 := X_c \cap X_{no}$
- T_2 : vettori base di $X_2 := X_c \setminus \{X_c \cap X_{no}\}$
- T_3 : vettori base di $X_3 := X_{no} \setminus \{X_c \cap X_{no}\}$
- T_4 : vettori base di $X_4 := \mathbb{R}^n \setminus \{X_1 \oplus X_2 \oplus X_3\}$



- Notazione utilizzata:



Insieme di vettori esprimibili come combinazione lineare di una base del sottospazio \equiv ma NON di una base del sottospazio \ominus

Gli insiemi X_1, X_2, X_3 ed X_4 sono chiaramente sottospazi dello spazio di stato (verificarlo per esercizio).

- Valgono inoltre le proprietà seguenti:

$$\{X_1 \oplus X_2\} = X_c \qquad \{X_1 \oplus X_3\} = X_{no}$$

- Per come e' stato definito, si vede inoltre che un modo per determinare X_4 può essere

$$X_4 = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall w \in \{X_1 \oplus X_2 \oplus X_3\} \subseteq \mathbb{R}^n, v \perp w\}$$

- Definendo ora la matrice T^{-1} con la seguente struttura

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{H_1}{\quad} \\ \frac{H_2}{\quad} \\ \frac{H_3}{\quad} \\ \frac{H_4}{\quad} \end{bmatrix}$$

si può sfruttare la relazione $T^{-1} T = I$ per ottenere le relazioni:

$$T^{-1}T = I_{n \times n} \quad \longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \cdot [T_1 | T_2 | T_3 | T_4] = \begin{bmatrix} H_1 T_1 & H_1 T_2 & H_1 T_3 & H_1 T_4 \\ H_2 T_1 & H_2 T_2 & H_2 T_3 & H_2 T_4 \\ H_3 T_1 & H_3 T_2 & H_3 T_3 & H_3 T_4 \\ H_4 T_1 & H_4 T_2 & H_4 T_3 & H_4 T_4 \end{bmatrix}$$

- Dalla condizione $T^{-1}T = I$ si possono ricavare allora le seguenti

$$\left. \begin{array}{l} H_2 T_1 = 0 \\ H_2 T_3 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \forall h_i^T \in H_2, \forall v \in \{X_1 \oplus X_3\} \rightarrow h_i \perp v$$

$$\left. \begin{array}{l} H_4 T_1 = 0 \\ H_4 T_3 = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \forall h_i^T \in H_4, \forall v \in \{X_1 \oplus X_3\} \rightarrow h_i \perp v$$

$$\{X_1 \oplus X_3\} = X_{no} \longrightarrow X_o = \langle H_2^T | H_4^T \rangle$$

- Analogamente

$$\left. \begin{array}{l} H_3 T_1 = 0 \\ H_3 T_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \forall h_i^T \in H_3, \forall v \in \{X_1 \oplus X_2\} \rightarrow h_i \perp v \quad \curvearrowright$$

$$\{X_1 \oplus X_2\} = X_c \rightarrow X_{nc} = \langle H_3^T | H_4^T \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} H_4 T_1 = 0 \\ H_4 T_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \forall h_i^T \in H_4, \forall v \in \{X_1 \oplus X_2\} \rightarrow h_i \perp v \quad \curvearrowright$$

- In base all'invarianza rispetto ad A di X_c e di X_{no} (Parte 4 e Parte 5) valgono anche

$$\forall t_1 \in T_1 \implies At_1 \in X_1 \implies \langle AT_1 \rangle = X_c \cap X_{no}$$

$$\forall t_2 \in T_2 \implies At_2 \in X_c$$

$$\forall t_3 \in T_3 \implies At_3 \in X_{no}$$

- A questo punto si tratta di eseguire tutte le operazioni matriciali che compaiono nelle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} B u(t) \\ y(t) = C \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix} z(t) \end{array} \right.$$

ricordando che, oltre alle relazioni appena evidenziate, valgono anche le seguenti

$$\forall b_j \in B \implies b_j \in X_c$$

$$\forall c_i^T \in C, \forall \bar{x} \in X_{no} \implies c_i \perp \bar{x}$$

Decomposizione canonica di Kalman

- In definitiva si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad \tilde{C}_2 \quad 0 \quad \tilde{C}_4] z(t) \end{cases}$$

- parte **controllabile e non osservabile**: z_1
 - parte **controllabile ed osservabile**: z_2
 - parte **non controllabile e non osservabile**: z_3
 - parte **non controllabile ed osservabile**: z_4
- $$z(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

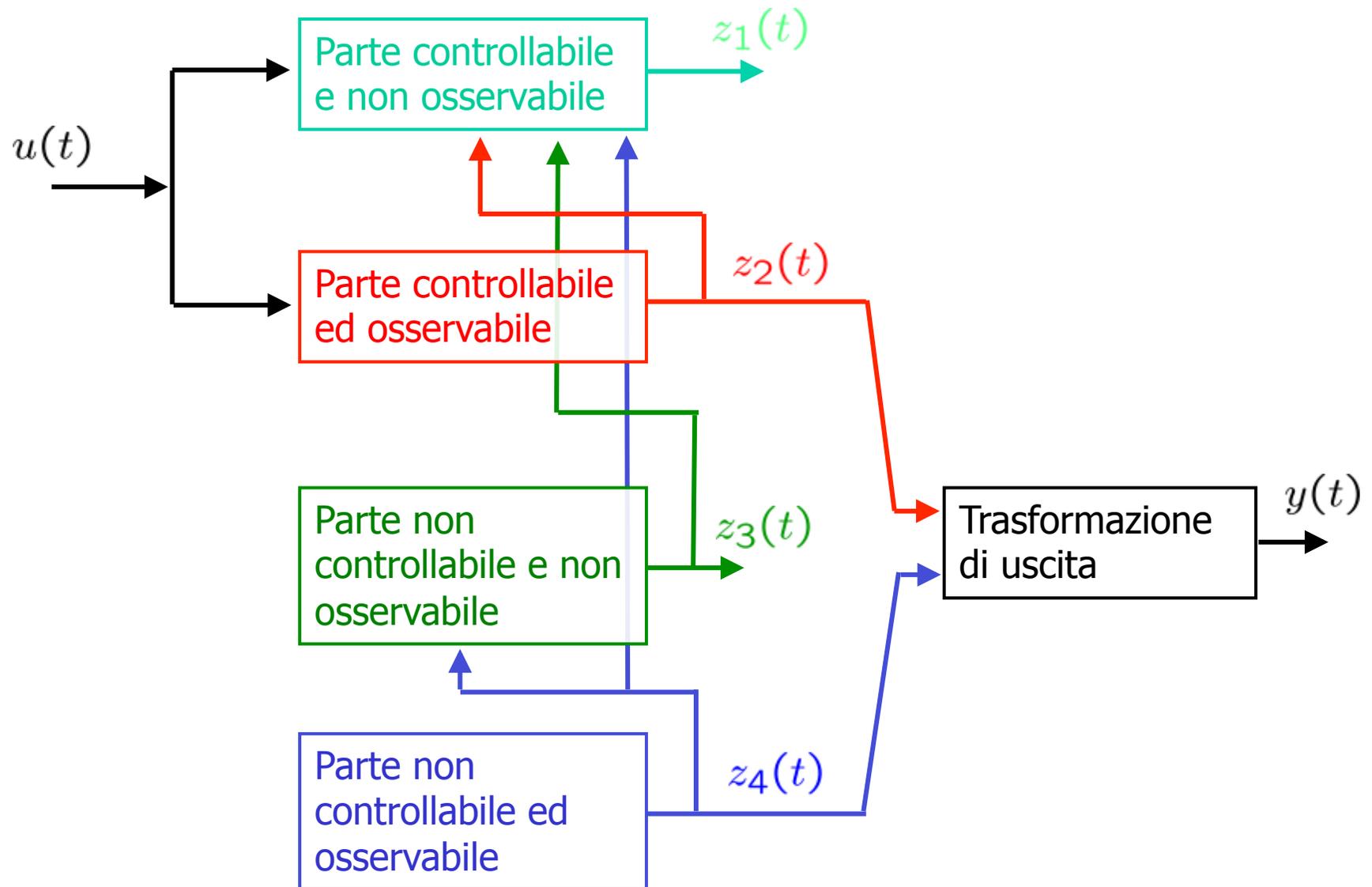
- In particolare risulta **completamente controllabile** il **sottosistema**

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u(t)$$

- Risulta inoltre **completamente osservabile** il **sottosistema**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Infine il **sottosistema** descritto da $(\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2)$ risulta **completamente controllabile ed osservabile**.



- Ora verifichiamo quanto introdotto in modo intuitivo in slide [TDSC – parte 6 #5](#) e per farlo determiniamo la matrice di FdT a partire dalla nuova rappresentazione di stato (si ricordi che per il lemma 7.1 la matrice $T_{y_u}(s)$ e' invariante rispetto a cambiamenti di base):

$$(sI - \tilde{A})^{-1} = \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} & M_{12}(s) & M_{13}(s) & M_{14}(s) \\ 0 & (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} & M_{23}(s) & M_{24}(s) \\ 0 & 0 & (sI - \tilde{A}_{33})^{-1} & M_{34}(s) \\ 0 & 0 & 0 & (sI - \tilde{A}_{44})^{-1} \end{bmatrix}$$

con matrici $M_{ij}(s)$ opportune e tali che valga

$$(sI - \tilde{A})^{-1} (sI - \tilde{A}) = I_{n \times n}$$

- Ora, data la struttura delle matrici \tilde{B} , \tilde{C}

$$\begin{aligned}
 T_{yu}(s) &= \tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - \tilde{A}_{11})^{-1} \tilde{B}_1 + M_{12}(s) \tilde{B}_2 \\ (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \tilde{C}_2 (sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \tilde{B}_2
 \end{aligned}$$

- In definitiva i poli presenti in $T_{yu}(s)$ sono le soluzioni di

$$\det(sI - \tilde{A}_{22}) = 0$$

quindi solo i **poli contemporaneamente controllabili ed osservabili**.

Teorema 6.2

- Un **sistema LTI a tempo continuo** descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

e' **completamente controllabile ed osservabile SE E SOLO SE** nella **matrice di trasferimento $T_{yu}(s)$ compaiono TUTTI i poli del sistema**, cioè tutti gli autovalori della matrice A delle equazioni di stato del sistema (con le relative molteplicità).

- **Dimostrazione**
- Proviamo che la **matrice di FdT** di un **sistema completamente controllabile ed osservabile** presenta **tutti i poli** del sistema.

Il caso contrario [cioè se la matrice di FdT presenta tutti i poli del sistema, allora esso è complet. controllabile ed osservabile] si dimostra facilmente sulla base di quanto dimostrato finora in TDSC Parti 4, 5 e 6. Lo si dimostri per esercizio.

- Per semplicità **consideriamo** anche stavolta (come già fatto in TDSC parti 4, 5) soltanto il caso di un **sistema ad un ingresso ed una uscita (sistema SISO)** ed inoltre la **matrice A** delle equazioni di stato del sistema possiede **autovalori tutti distinti**.

- Sfruttando il cambiamento di base che porta a diagonalizzare la matrice A si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad \leftarrow x(t) = Mz(t)$$



$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} z(t) + hu(t) \\ y(t) = fz(t) \end{cases} \quad \begin{aligned} h &:= M^{-1}b \\ f &:= cM \end{aligned}$$

- Analizzando le matrici (rispettivamente colonna e riga) h ed f si può concludere che

$$\boxed{\text{Completa controllabilità ed osservabilità}} \rightarrow \begin{cases} h_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \\ f_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

- Infatti se non fosse così, in base ai Lemmi 4.3 e/o 5.1 il sistema risulterebbe non completamente controllabile e/o non completamente osservabile!
- Ora non rimane che determinare l'espressione della matrice di FdT cercata:

$$T_{yu}(s) = \dots$$

$$T_{yu}(s) = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s - \lambda_1)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & (s - \lambda_n)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{f_1 h_1}{s + \lambda_1} + \frac{f_2 h_2}{s + \lambda_2} + \cdots + \frac{f_n h_n}{s + \lambda_n}$$

- E' chiaro che essendo $i \neq j \rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

non possono esserci cancellazioni e quindi nella matrice di FdT considerata compaiono TUTTI i poli.



Un esempio

- Consideriamo i sistemi

$$(a) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- Analizziamo le proprietà di controllabilità ed osservabilità utilizzando i test descritti in TDSC Parti 4 e 5 e successivamente verificiamo i risultati ottenuti determinando le varie matrici di FdT.

- (a) \longleftrightarrow non completamente controllabile e non completamente osservabile;
- (b) \longleftrightarrow completamente controllabile e non completamente osservabile;
- (c) \longleftrightarrow non completamente controllabile e completamente osservabile;
- (d) \longleftrightarrow completamente controllabile ed osservabile.

- Ritroviamo i medesimi risultati utilizzando l'analisi delle matrici di FdD.

$$(a) \quad T_{yu}(s) = \frac{1}{s+1} \quad \longrightarrow \quad 1 \text{ solo polo in } s = -1$$

$$(b) \quad T_{yu}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad 1 \text{ solo polo in } s = -1$$

$$(c) \quad T_{yu}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ solo polo in } s = -1$$

$$(d) \quad T_{yu}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 2 \text{ poli in } s = -1$$

- In base al teorema 6.2 soltanto il sistema della configurazione (d) risulta completamente controllabile ed osservabile.
- Per classificare gli altri in modo corretto vanno utilizzati i teoremi 4.9 e 5.7 .

Ancora un esempio

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- I test sulle matrici P e Q indicano che il sistema e' completamente controllabile ed osservabile: **lo si verifichi.**
- Calcolando la FdT si ottiene

$$T_{yu}(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

che contiene tutti i poli.

Esempio

- Consideriamo i due sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (\text{a})$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (\text{b})$$

- Come e' facile verificare (i due sistemi sono nella forma standard rispettivamente di controllabilità e di osservabilità) per i due sistemi si ha:
 - (a) non completamente controllabile e completamente osservabile
 - (b) completamente controllabile e non completamente osservabile

Si verifichi quanto appena affermato applicando il lemma 4.3 e/ o il lemma 5.1.

- Per quanto riguarda le FdT, esse sono in entrambi i casi pari a

$$T_{y u}(s) = \frac{1}{s + 1}$$

e ciò conferma che nessuno dei due sistema può essere completamente controllabile ed osservabile.

$$T_{yu}^{(a)}(s) = \frac{1}{s+1} = T_{yu}^{(b)}(s)$$

- Ma quale proprietà viene a mancare? Già sappiamo che non è la stessa per i due sistemi. Come fare utilizzando solo la matrice delle FdT?

Osservazione



- In generale è **impossibile** stabilire dalla sola struttura della matrice delle FdT ingressi/uscite di un sistema quali tra le proprietà di controllabilità ed osservabilità sia assente.
- Se una FdT non contiene tutti i poli certamente una delle due proprietà manca, ma per capire quale essa sia è necessario studiare la struttura del sistema che ha generato quella particolare FdT.

Retroazione algebrica dell'uscita

- Una legge di controllo del tipo $u(t) = K x(t) + v(t)$

può modificare a piacere i poli controllabili, scegliendo K (TdSC Parte 4, teorema 4.10).

- Che cosa si può dire adesso di una retroazione algebrica dell'uscita, cioè una legge di controllo del tipo

$$u(t) = H y(t) + v(t) \quad ?$$

- Gli effetti di una tale legge di controllo sono facilmente analizzabili se si fa riferimento alle equazioni espresse nella forma canonica di Kalman.

- Infatti in tal caso si può scrivere

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \ \tilde{C}_2 \ 0 \ \tilde{C}_4] z(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad u(t) = H \tilde{C} z(t) + v(t)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & H \tilde{C}_2 & 0 & H \tilde{C}_4 \end{bmatrix} z(t) + v(t)$$

$$\dot{z}(t) = \left[\tilde{A} + \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_1 H \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{B}_1 H \tilde{C}_4 \\ 0 & \tilde{B}_2 H \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{B}_2 H \tilde{C}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] z(t) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

- La nuova matrice di stato allora risulta composta da

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 H \tilde{C}_2 & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} + \tilde{B}_1 H \tilde{C}_4 \\ 0 & \tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 H \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{A}_{24} + \tilde{B}_2 H \tilde{C}_4 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix}$$

- Essendo diagonale a blocchi vale che

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det(sI - \tilde{A}_{11}) \cdot \det(sI - \tilde{A}_{22} - \tilde{B}_2 H \tilde{C}_2) \cdot \det(sI - \tilde{A}_{33}) \cdot \det(sI - \tilde{A}_{44})$$

- In definitiva possono venire **modificati attraverso la scelta di H SOLTANTO** i **poli controllabili ed osservabili**.

Osservazione

- E' importante notare che **in generale** utilizzando la **retroazione algebrica delle uscite NON** e' possibile **modificare** a piacere il valore di **OGNI polo** controllabile ed osservabile.
- I **vincoli** sono dovuti in generale
 - al **numero di parametri** liberi corrispondenti agli elementi della matrice H che possono venire scelti ad arbitrio;
 - alla particolare **forma** che viene assunta dalla matrice $H \tilde{C}_2$

Retroazione algebrica dell'uscita: caso SISO

- In questo caso la retroazione algebrica dell'uscita è caratterizzata da un solo parametro

$$u(t) = h y(t) + v(t) \quad h \in \mathbb{R}$$

- In tal caso quindi, anche se il sistema fosse completamente controllabile e completamente osservabile (quindi risulterebbe possibile modificare tutti i poli), attraverso la scelta di h sarà possibile fissare a piacere **UN SOLO polo** della nuova matrice di stato

$$\hat{A} = A + B h C$$

- I rimanenti $(n-1)$ poli sono **automaticamente fissati** come soluzioni di

$$\det(sI - \hat{A}) = 0$$

Un esempio

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

che sappiamo essere completamente controllabile ed osservabile.

- Con una retroazione algebrica dell'uscita vogliamo allora assegnare nuovi poli al sistema: poiché è un sistema SISO la retroazione sarà del tipo

$$u(t) = h y(t) + v(t) \quad h \in \mathbb{R}$$

- Sostituendo la legge di controllo nelle equazioni di stato si ottiene

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} h \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

- Riordinando i vari termini:

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & h \\ h & h \end{bmatrix} \right] x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

- La nuova matrice di stato e' allora

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} (h-1) & h \\ h & (h-2) \end{bmatrix}$$

- Gli autovalori associati alla nuova matrice di stato sono dati dalla soluzione dell'equazione

$$\det (sI - \hat{A}) = \det \left(sI - \begin{bmatrix} (h-1) & h \\ h & (h-2) \end{bmatrix} \right) = 0$$

cioè

$$[s - (h-1)] \cdot [s - (h-2)] - h^2 = 0$$

- Al variare di h tale equazione fornisce i due nuovi poli del sistema, ma non è possibile scegliere a piacere entrambi.
- Scelto uno dei due, viene ad essere fissato anche il valore del parametro h e quindi di conseguenza anche l'altro polo.

$$s_1 = -10 \quad \longrightarrow \quad h = -\frac{72}{17} \quad \longrightarrow \quad s_2 = -\frac{25}{17}$$

Per esempio
scelgo questo

Questo è imposto,
non posso sceglierlo