Il problema della realizzazione

Passaggio da rappresentazione ingresso/uscita ad equazioni di stato per sistemi LTI

Ordine minimo di un sistema dinamico LTI

Il caso dei sistemi SISO

Scelta della rappresentazione in termini di equazioni di stato

- Problema di **realizzazione**: come determinare una **rappresentazione in equazioni di stato** di un sistema, per il quale si dispone della **descrizione ingresso/uscita**?

$$T_{y\,u}(s) = \Big[T_{y_i\,u_j}(s)\Big]_{\substack{i\,=\,1,\,\ldots,\,r \\ j\,=\,1,\,\ldots,\,m}} \quad \xrightarrow{\;?\;} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Anche stavolta forniremo il risultato per **sistemi LTI a tempo continuo**. Per sistemi LTI a tempo discreto valgono tuttavia i medesimi risultati (ancora una volta semplicemente sostituiremo "controllabilità " con "raggiungibilità ").
- Per semplicità considereremo **soltanto sistemi SISO**.

Formalizzazione del problema

- Consideriamo un **sistema LTI SISO, descritto** dall'equazione differenziale

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=$$

$$(\star) \qquad = b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

e si supponga inoltre che $\qquad (m < n)$

$$u(t) \equiv 0 \quad \forall t < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$u\left(0^-\right)=\dot{u}\left(0^-\right)=\ddot{u}\left(0^-\right)=\cdots=u^{(m)}\left(0^-\right)=0$$

- **Realizzazione in equazioni di stato**: si vuole determinare una **rappresentazione in equazioni di stato** del tipo

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ \dim B = (n \times 1) \\ \dim C = (1 \times n) \end{array}$$

tale che sia equivalente calcolare y(t) come soluzione della $(\star)$ o della $(\diamond)$ nei casi

1. condizioni iniziali dell'uscita tutte nulle

$$y\left(0^-\right) = \dot{y}\left(0^-\right) = \ddot{y}\left(0^-\right) = \cdots = y^{(n-1)}\left(0^-\right) = 0$$

2. condizioni iniziali dell'uscita non tutte nulle

$$\left[y\left(0^-\right)\ \dot{y}\left(0^-\right)\ \ddot{y}\left(0^-\right)\ \cdots\ y^{(n-1)}\left(0^-\right)\right]^T \neq [0 \cdots 0]^T$$

Osservazioni

- Aver introdotto anche il caso (2) significa che si suppone che il sistema oggetto di studio sia completamente rappresentato dall'equazione $(\star)$.
- Ciò significa che nel caso (2) la soluzione dell'equazione $(\star)$ con ingresso

$$u(t) \equiv 0 \ \ \forall t \geq 0$$

e condizioni iniziali non nulle sull'uscita, genera TUTTE le possibili risposte libere del sistema.

- E se il sistema fosse non strettamente proprio? Il problema ammette soluzione per un sistema semplicemente proprio? SI, vedremo in dettaglio più avanti.

Realizzazione: caso (1)

- Nel caso di condizioni iniziali tutte nulle (per l'uscita y(t)) la FdT T(s) rappresenta completamente il sistema e quindi la soluzione dell'equazione $(\star)$ si può determinare come segue:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \underbrace{\boxed{\frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}}}_{T(s)} \cdot U(s) \right\}$$

- In definitiva, si tratta allora di determinare una rappresentazione in equazioni di stato tale che

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad T(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad T(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$$

- Esistono **infinite realizzazioni** che soddisfano la relazione appena trovata! Basta ricordare il risultato (già noto dal corso di "Fondamenti di Automatica") richiamato nel **Lemma 6.1** (TDSC Parte 6-slide 6):
  - La matrice di trasferimento $T_{y\,u}(s)$ e' invariante rispetto a cambiamenti di base.

- In ciò che segue saranno considerate soltanto **DUE possibili realizzazioni**, definite "**forma compagna controllabile**" e "**forma compagna osservabile**".

Caso (1): forma compagna controllabile

- Supponiamo per iniziare che l'equazione differenziale del sistema dinamico sia

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t) = u(t)$$

- Definiamo allora le variabili:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1(t) & = & y(t) & & & \longrightarrow & y(t) & = & x_1(t) \\ x_2(t) & = & \dot{y}(t) & = & \dot{x}_1(t) & \longrightarrow & \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ x_n(t) & = & y^{(n-1)}(t) & = & \dot{x}_{n-1}(t) & \longrightarrow & \dot{x}_{n-1}(t) & = & x_n(t) \end{array}\right.$$

- Derivando l'ultima variabile ausiliaria appena introdotta si ha

$$\dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = u(t) - \left(a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t)\right)$$

- Ma allora, riordinando in forma matriciale il tutto siamo arrivati ad una descrizione in equazioni di stato per il sistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- La **rappresentazione in equazioni di stato** a cui siamo arrivati e' **equivalente all'equazione differenziale**, nel senso che entrambe le descrizioni forniscono **la stessa FdT** per il sistema.

- Come generalizzare ora, per arrivare a descrivere in equazioni di stato l'equazione differenziale generica

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=$$

$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

ossia la Fdt

$$T_{y\,u}(s)=\frac{b_ms^m+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\qquad m<n$$

- Per generalizzare sfruttiamo la linearità del sistema:

$$y^{(n)}(t) + \cdots = u(t) \quad \longrightarrow \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(n)}(t) + \cdots = b_0 u(t) \quad \longrightarrow \quad C = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Ed inoltre

$$u(t) \Longrightarrow y(t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{u}(t) \Longrightarrow \dot{y}(t) \\ \ddot{u}(t) \Longrightarrow \ddot{y}(t) \\ \cdots \end{cases}$$

- Queste **relazioni** sono **valide** solo per quanto riguarda la parte della risposta relativa all'applicazione dell'ingresso (**risposta forzata**) e perciò **a condizioni iniziali nulle** (caso che stiamo considerando).

- In definitiva la **realizzazione in forma compagna controllabile** ha questa struttura

$$T_{y\,u}(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad m < n$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Lemma 7.1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c\, x(t) + B_c\, u(t) \\ y(t) &= C_c\, x(t) \end{cases}$$

- La **forma compagna controllabile** rappresenta **SEMPRE** un sistema **completamente controllabile**; il sistema risulta anche **completamente osservabile SE E SOLO SE** i **polinomi**

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

NON hanno radici in comune.

- Inoltre vale che

$$\det(sI - A_c) = D(s) \qquad\qquad C_c\,(sI - A_c)^{-1}\, B_c = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- **Dimostrazione**:

- La **completa controllabilità** della realizzazione (A_c, B_c, C_c) si verifica facilmente applicando il test di controllabilità alle matrici (A_c, B_c) [test descritto in TDSC Parte 4 – slide 38, teorema 4.4]. Lo si verifichi per esercizio.

- Dimostriamo ora che $\det(sI - A_c) = s^n + \cdots + a_1 s + a_0$ partendo dall'espressione

$$\det(sI - A_c) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sviluppiamo il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna della matrice.

- Si può scrivere

$$\det(sI - A_c) = s\det(sI - \bar{A}) + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot a_0 =$$
$$= s\det(sI - \bar{A}) + a_0$$

dove

$$(sI - \bar{A}) = \left[\begin{array}{c|ccc} s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{array}\right]$$

$(sI - \bar{\bar{A}})$

Sviluppiamo ancora il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna della matrice.

- Si noti che la matrice $(sI - \bar{A})$ ha struttura analoga a quella della matrice da cui siamo partiti $(sI - A_c)$ quindi e' facile vedere che

$$\det(sI - \bar{A}) = s\det\left(sI - \bar{\bar{A}}\right) + a_1$$

- Per induzione allora si arriva al risultato cercato:

$$\det(sI - A_c) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n \triangleq D(s)$$

- I poli del sistema sono in definitiva le radici del polinomio D(s).

- Rimane da dimostrare che $\quad C_c\,(sI - A_c)^{-1}\,B_c = \dfrac{N(s)}{D(s)}$

$$\left.\begin{array}{l} (sI - A_c)^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(sI - A_c)^T}{\det(sI - A_c)} \\[2em] B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow (sI - A_c)^{-1} \cdot B_c = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{D(s)} \\ \dfrac{s}{D(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{s^{n-1}}{D(s)} \end{bmatrix}$$

- A questo punto, ricordando la struttura della matrice C_c

$$\left.\begin{array}{r} C_c = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \\ (sI - A_c)^{-1} \cdot B_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{D(s)} \\ \frac{s}{D(s)} \\ \vdots \\ \frac{s^{n-1}}{D(s)} \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

$$C_c \, (sI - A_c)^{-1} \, B_c = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

- Per **l'osservabilità'**, si osservi che se i due polinomi N(s) e D(s) hanno radici comuni, si può scrivere

$$N(s) = \hat{N}(s) \cdot P(s) \qquad\qquad D(s) = \hat{D}(s) \cdot P(s)$$

con P(s) polinomio che contiene le radici in comune.

- In tal caso risulterà

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\hat{N}(s)}{\hat{D}(s)}$$

Non compaiono TUTTI i poli

- Allora si può affermare che
  - dato che in T(s) possono comparire solamente i **poli** del sistema contemporaneamente **controllabili ed osservabili**
  - poiché per costruzione la **forma (A_c, B_c, C_c)** risulta **completamente controllabile**
  - se in T(s) non compaiono tutti i poli del sistema, in particolare perché i **due polinomi N(s) e D(s) hanno fattori in comune**, allora il **sistema** e' **certamente non completamente osservabile**.

▲

Caso (1): forma compagna osservabile

- Partiamo sempre dall'equazione differenziale

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

- Stavolta si definiscono le seguenti variabili

$$\begin{cases} x_n(t) & = & y(t) \\ x_{n-1}(t) & = & \dot{y}(t)+a_{n-1}y(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m(t) & = & y^{(n-m)}(t)+a_{n-1}y^{(n-m-1)}+\cdots+a_my(t)-b_mu(t) \\ \vdots & \vdots & \\ x_2(t) & = & y^{(n-2)}(t)+a_{n-1}y^{(n-3)}(t)+\cdots+a_2y(t)-b_mu^{(m-2)}-\cdots-b_2u(t) \\ x_1(t) & = & y^{(n-1)}(t)+a_{n-1}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_1y(t)-b_mu^{(m-1)}-\cdots-b_1u(t) \end{cases}$$

- Si noti che le variabili $x_i(t)$ sono legate tra loro dalle relazioni seguenti:

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=$$
$$=b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0u(t)$$

$$\dot{x}_1(t)=\underbrace{y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)-b_mu^{(m)}-\cdots-b_1\dot{u}(t)}_{-a_0y(t)+b_0u(t)}$$

$$x_n(t)=y(t)$$

$$\dot{x}_1(t)=-a_0x_n(t)+b_0u(t)$$

- Il procedimento utilizzato si può ripetere per le altre variabili $x_i(t)$, in maniera ricorsiva.

$$\dot{x}_2(t) = y^{(n-1)}(t)+a_{n-1}y^{(n-2)}(t)+\cdots+a_2\dot{y}(t)-b_m u^{(m-1)}-\cdots-b_2\dot{u}(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)-a_1 y(t)+b_1 u(t) = x_1(t) - a_1 x_n(t) + b_1 u(t)$$

- In generale vale che $\dot{x}_i(t) = x_{i-1}(t) - a_{i-1}x_n(t) + b_i u(t)$

- In forma matriciale in definitiva

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dualità

- Se si confrontano le espressioni appena trovate per le forme compagna controllabile e compagna osservabile si nota che si sarebbe potuta ottenere la forma compagna osservabile da quella compagna controllabile per **dualità**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c\,x(t) + B_c\,u(t) \\ y(t) = C_c\,x(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_o\,x(t) + B_o\,u(t) \\ y(t) = C_o\,x(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_o &= A_c^T \\ B_o &= C_c^T \\ C_o &= B_c^T \end{aligned}$$

Lemma 7.2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_o\, x(t) + B_o\, u(t) \\ y(t) &= C_o\, x(t) \end{cases}$$

- La **forma compagna osservabile** rappresenta **SEMPRE** un **sistema completamente osservabile**. Essa risulta anche **completamente controllabile SE E SOLO SE i polinomi**

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

NON hanno radici in comune.

- Valgono inoltre

$$\det(sI - A_o) = D(s) \qquad\qquad C_o\,(sI - A_o)^{-1}\,B_o = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- **Dimostrazione**

  – Per dimostrare questo lemma si segue lo stesso schema di ragionamento del lemma 7.1;

  – Viene perciò lasciata per esercizio.

  – **Suggerimento**: la matrice di stato della forma compagna osservabile e' la matrice trasposta della matrice di stato della forma compagna controllabile. Tenendo conto allora che

$$(sI - A_o)^{-1} = \left[(sI - A_c)^{-1}\right]^T$$

  allora l'ultima riga della matrice $(sI - A_o)^{-1}$ e' uguale all'ultima colonna della matrice $(sI - A_c)^{-1}$

Osservazioni conclusive per il caso (1)

- Abbiamo risolto il problema di rappresentare attraverso equazioni di stato il comportamento ingresso/uscita di un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = \qquad (m < n)$$

$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

nel caso di condizioni iniziali nulle, ossia solo per quanto riguarda l'applicazione dell'ingresso. Il comportamento I/O e' descritto allora dalla FdT

$$T_{y\,u}(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad m < n$$

Caso (1): sistema non strettamente proprio

- Che cosa si può dire nel caso in cui il sistema sia descritto (sempre relativamente al comportamento I/O) dall'equazione differenziale

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$

$$= b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

sempre nel caso di condizioni iniziali tutte nulle, cioè sia descritto dalla **FdT non strettamente propria**

$$T_{yu}(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Si può esprimere la FdT nella forma seguente

$$T_{yu}(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} =$$

$$(\star\star) \quad = b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1)s + (b_0 - b_n a_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Le due realizzazioni stavolta possiedono anche la matrice D del legame algebrico ingresso/uscita, pari a

$$D_c = D_o = b_n$$

- Considerando allora la FdT strettamente propria evidenziata nell'espressione $(\star\star)$ si arriva facilmente alle espressioni più generali per le forme compagna controllabile e compagna osservabile.

Forma compagna controllabile

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} (b_0 - b_n a_0) & (b_1 - b_n a_1) & \cdots & (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_n u(t) \end{cases}$$

- Caso generale: sistema non strettamente proprio.

Forma compagna osservabile

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_0 - b_n a_0) \\ (b_1 - b_n a_1) \\ \vdots \\ (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_n u(t)
\end{cases}
$$

- Caso generale: sistema non strettamente proprio

Un esempio

- Consideriamo il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(3)}(t)+a_2\,\ddot{y}(t)+a_1\,\dot{y}(t)+a_0\,y(t) \;=\; b_2\,\ddot{u}(t)+b_1\,\dot{u}(t)+b_0\,u(t)$$

- Sulla base di quanto visto finora, determiniamo per il sistema la realizzazione in forma compagna controllabile e quella in forma compagna osservabile.

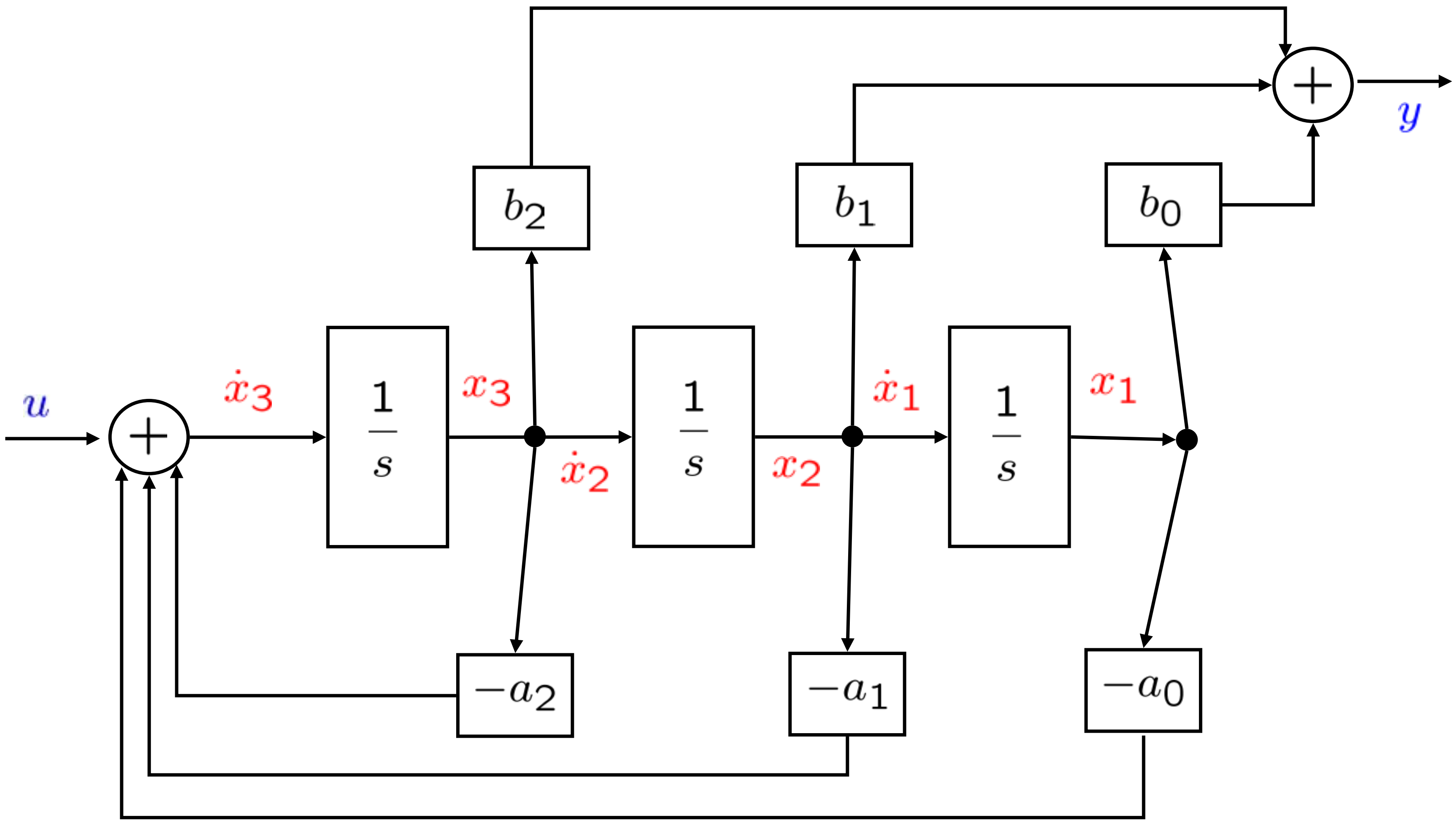
- Poi, per evidenziare le differenze tra le due realizzazioni, le rappresentiamo con uno schema a blocchi.

- Forma compagna controllabile:

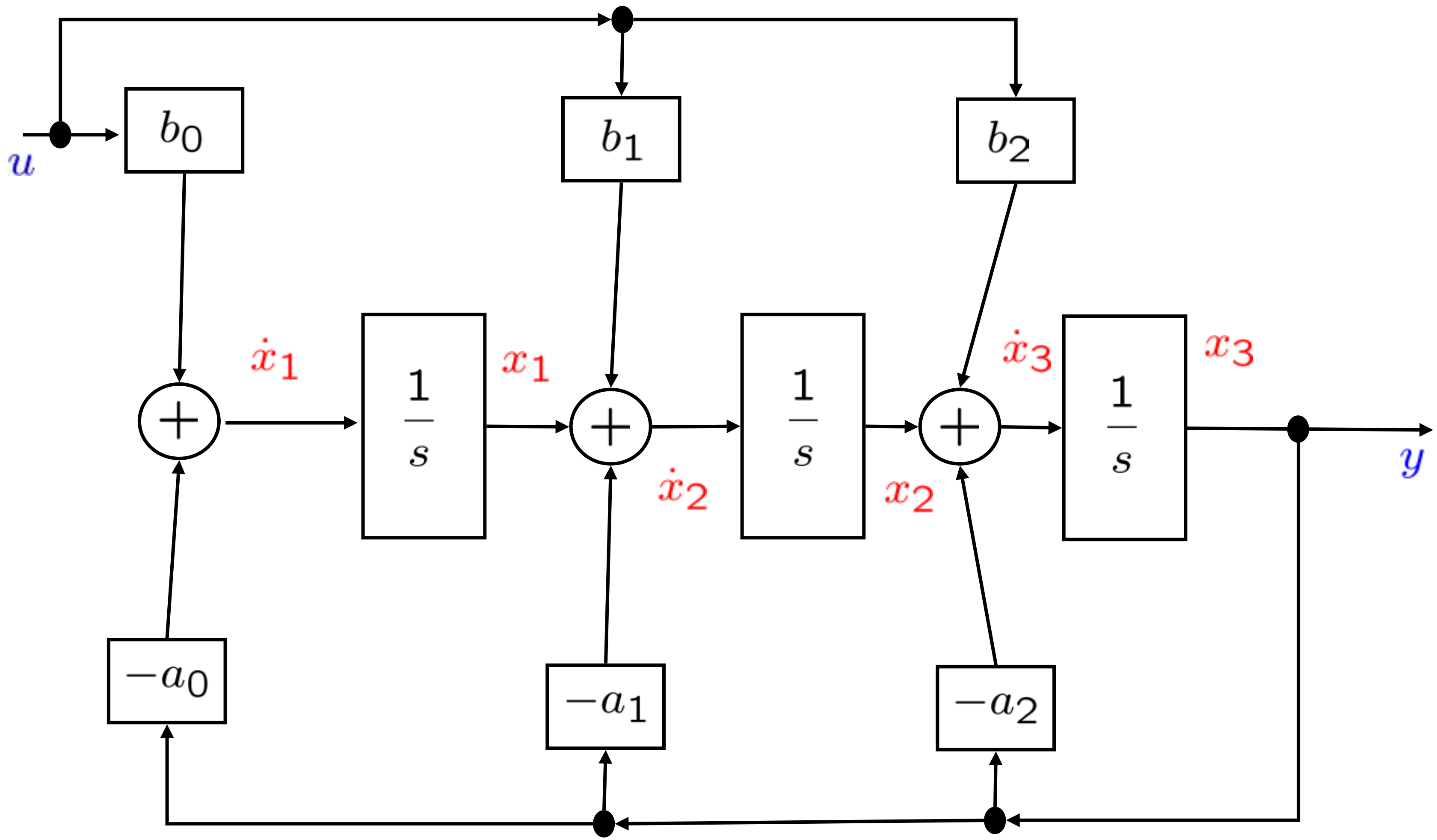
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

- Forma compagna osservabile:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$



Forma compagna controllabile



Forma compagna osservabile

Osservazioni

- Significato delle **variabili di stato**:
  - In generale le **variabili di stato** che compongono il vettore di stato delle **due realizzazioni** finora descritte **NON** hanno alcun **significato fisico**.
  - Sono **variabili fittizie**, servono solo a spiegare il legame esistente tra ingresso ed uscita del sistema (legame assegnato per ipotesi attraverso una equazione differenziale o, in modo equivalente [avendo supposta condizioni iniziali tutte nulle per ora] tramite una FdT.

Realizzazione: caso (2)

- Il caso di **condizioni iniziali non tutte nulle** e’ più complicato del precedente, dato che adesso **si vogliono mantenere anche le caratteristiche della risposta libera**.

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$

$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$\left[y\left(0^-\right)\ \dot{y}\left(0^-\right)\ \ddot{y}\left(0^-\right)\ \cdots\ y^{(n-1)}\left(0^-\right)\right]^T \neq [0\cdots 0]^T$$

- La soluzione espressa tramite trasformata di Laplace e’ in questo caso

$$Y(s) = \frac{I(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s)$$

- Il polinomio I(s) dipende dalle condizioni iniziali.

- In termini di equazioni di stato l'espressione del movimento dell'uscita che tenga conto anche delle condizioni iniziali e' data da

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x\left(0^-\right) + \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] U(s)$$

- Si tratta allora di determinare matrici (A, B, C, D) tali che

$$\left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\forall \begin{bmatrix} y\left(0^-\right) \\ \dot{y}\left(0^-\right) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(0^-\right) \end{bmatrix} \quad \exists x\left(0^-\right) : \; C(sI - A)^{-1} x\left(0^-\right) = \frac{I(s)}{D(s)}$$

- La prima condizione e' verificata sia dalla forma compagna controllabile che dalla forma compagna osservabile.

- La seconda condizione va analizzata in dettaglio: nella risposta libera espressa da

$$Y_l(s) = \frac{I(s)}{D(s)}$$

in generale compaiono **TUTTI i poli** del sistema. Il polinomio I(s) infatti non ha radici comuni col polinomio D(s), a parte casi di condizioni iniziali particolari.

- Questo implica che anche nella risposta libera espressa tramite le equazioni di stato devono comparire tutti i poli

$$C\,(sI - A)^{-1}\,x\left(0^-\right)$$

- Richiedere che nella

$$C\left(sI-A\right)^{-1}x\left(0^{-}\right)$$

compaiano tutti i poli del sistema e' la condizione alla base del teorema 5.7 (TDSC Parte 5 – slide 66), che fornisce condizioni necessarie e sufficienti alla **completa osservabilità** di un sistema LTI.

- In sostanza il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t)+Du(t) \end{cases}$$

che si sta cercando di determinare deve essere **completamente osservabile**

- Ma allora si può concludere che

1. La **forma compagna osservabile** rappresenta **SEMPRE esattamente** il comportamento di un sistema descritto dalla (*) come in slide #3 (anche se la FdT presentasse cancellazioni).

2. La **forma compagna controllabile** invece **rappresenta correttamente il sistema** anche in presenza di condizioni iniziali non nulle **se risulta completamente osservabile**, cioè se la FdT non presenta cancellazioni.

3. Nel caso la FdT non presenti cancellazioni, entrambe le forme compagne danno origine a sistemi completamente controllabili ed osservabili.

- Come si può determinare la corrispondenza tra condizioni iniziali (nell’equazione differenziale $(\star)$) e stato iniziale?

$$\begin{bmatrix} y\left(0^-\right) \\ \dot{y}\left(0^-\right) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(0^-\right) \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} x_1\left(0^-\right) \\ x_2\left(0^-\right) \\ \vdots \\ x_n\left(0^-\right) \end{bmatrix}$$

- Per la forma compagna osservabile la corrispondenza e’ immediata, se ci si rifà alla definizione delle variabili di stato (slide #19).

- Per la **forma compagna controllabile** il **problema ammette soluzione** solamente se la **FdT non** ha **cancellazioni** e quindi il sistema risulta anche completamente osservabile. In tal caso infatti si può risolvere il problema

$$x\left(0^-\right) = Q^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y\left(0^-\right) \\ \dot{y}\left(0^-\right) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(0^-\right) \end{bmatrix}$$

dove Q e' la matrice di osservabilità della forma compagna controllabile.

Alcuni esempi

- Come affermato nella slide #2, i risultati a cui siamo arrivati valgono sia per sistemi LTI a tempo continuo che a tempo discreto, pur di sostituire "controllabilità " con "raggiungibilità ".

- Prendiamo allora in considerazione due sistemi dinamici LTI descritti rispettivamente da un'equazione differenziale e da una equazione alle differenze:

(a) $$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) = 2\,y(t) = u(t)$$

(b) $$y(k+2) + 3\,y(k+1) + 2\,y(k) = u(k)$$

- Si considerino **condizioni iniziali nulle** in entrambi i casi.

- Nel **caso (a)** la FdT vale

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

- Non ci sono cancellazioni: le due forme compagne forniscono entrambe descrizioni **completamente controllabili ed osservabili**.

- La forma compagna controllabile fornisce le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

- Nel **caso (b)** la FdT vale

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$$

- Anche stavolta non ci sono (ovviamente) cancellazioni, quindi entrambe le realizzazioni forniscono descrizioni **completamente raggiungibili ed osservabili**.

- Le variabili di stato per la forma compagna osservabile sono date dalle relazioni

$$\begin{cases} x_2(k) &= y(k) \\ x_1(k) &= y(k+1) + 3y(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= -2x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) - 3x_2(k) \end{cases}$$

- In definitiva la forma compagna osservabile e' data da

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k) \\ \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(k) \end{cases}$$

Trasformazioni di stato verso le forme compagne

- Come detto all'inizio (slide #7), data un'equazione differenziale (o alle differenze) esistono **infinite rappresentazioni in equazioni di stato** che ne implementano correttamente il funzionamento.

- Ad esempio, data la realizzazione in forma compagna osservabile per un sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & A_o\, x(t) + B_o\, u(t) \\ y(t) & = & C_o\, x(t) + D\, u(t) \end{cases}$$

(già sappiamo che e' una rappresentazione sempre corretta del sistema) anche ogni rappresentazione del tipo

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= T^{-1} A_o T\, z(t) + T^{-1} B_o\, u(t) \\ y(t) &= C_o T\, z(t) + D\, u(t) \end{cases}$$

e' una rappresentazione perfettamente equivalente e corretta per il sistema.

- Allora ha senso porsi il seguente problema: data una qualsiasi descrizione in equazioni di stato di un sistema LTI SISO, quando si può portare il sistema in forma compagna (di controllo oppure di osservazione)?

- E come fare a determinare la trasformazione di variabile necessaria?

Lemma 7.3

- Se un **sistema LTI** di tipo **SISO**, descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \qquad u(t) \in \mathbb{R}\,;\, y(t) \in \mathbb{R}$$

risulta essere **completamente controllabile** (**osservabile**) allora **esiste** una **trasformazione di variabile** T_c (T_o) tale da portare il sistema in una nuova rappresentazione

$$\begin{matrix} x(t) = T_c\,z(t) \\ (x(t) = T_o\,z(t)) \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}\,z(t) + \tilde{B}\,u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\,z(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

con $\left(\tilde{A},\, \tilde{B},\, \tilde{C}\right)$ nella **forma compagna controllabile** (**osservabile**).

Trasformazioni verso le forme compagne: algoritmi

- Il lemma fornisce un risultato importante, tuttavia non fornisce una metodologia che permetta di determinare le trasformazioni che ci servono per portare il sistema in forma compagna (di controllo o di osservazione). Come fare allora?
- Il problema si risolve facilmente se si sfruttano
  - la completa controllabilità (osservabilità) della forma compagna di controllo (di osservazione) ;
  - la legge di trasformazione delle matrici di controllabilità P e di osservabilità' Q quando si applica una trasformazione di stato;
  - la particolare struttura della matrice di controllabilità della forma compagna di controllo e della matrice di osservabilità della forma compagna di osservazione.

- Ricordiamo che, assegnata una trasformazione T a rango pieno

$$x(t) = Tz(t)$$

le equazioni di stato si trasformano come segue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}AT\,z(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CTz(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Si vede facilmente che per le matrici di controllabilità P e di osservabilità Q nelle due descrizioni valgono le relazioni

$$P_z = T^{-1}P_x \quad \Longleftrightarrow \quad \text{TDSC Parte 4, Lemma 4.6}$$

$$Q_z = Q_xT \quad \Longleftrightarrow \quad \text{TDSC Parte 5, Teorema 5.4}$$

- Nel caso di **sistema completamente controllabile** allora la **trasformazione** di stato per ottenere la **forma compagna di controllo** e'

$$T_c : \quad P_c = T_c^{-1} P_x \quad \Rightarrow \quad T_c = P_x P_c^{-1}$$

- Nel caso di **sistema completamente osservabile** allora la **trasformazione** di stato per ottenere la **forma compagna di osservazione** e'

$$T_o : \quad Q_o = Q_x T_o \quad \Rightarrow \quad T_o = Q_x^{-1} Q_o$$

Ordine minimo di un sistema dinamico lineare

Definizione di ordine minimo

Parametri di Markov ed ordine minimo di un sistema dinamico lineare

Ordine minimo di un sistema

- Per introdurre il concetto di ordine minimo consideriamo il caso di un sistema LTI di tipo SISO, a tempo continuo, descritto dalla FdT

$$T_{yu}(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- In realtà il concetto di **ordine minimo** ha **validità** più **generale**: come al solito analizziamo per comodità il caso dei **sistemi LTI a tempo continuo**, ma i risultati che troveremo valgono anche per **sistemi LTI a tempo discreto**.

- Inoltre i risultati a cui arriveremo valgono anche per **sistemi LTI MIMO**.

Introduzione

- Consideriamo allora il sistema descritto dalla

Per generalità sistema non strettamente proprio

$$T_{yu}(s) = \frac{\boxed{b_n s^n} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Per quanto visto in precedenza, sappiamo che e' possibile per il sistema in questione determinare delle realizzazioni in equazioni di stato di ordine n (in particolare la **forma compagna di controllo** e quella di **osservazione**)

$$T_{yu}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} (A_c,\, B_c,\, C_c,\, D_c) \\ (A_o,\, B_o,\, C_o,\, D_o) \end{array} \qquad A_c,\, A_o \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

- Sappiamo anche che una volta determinata una qualsiasi realizzazione in equazioni di stato di ordine n e' possibile ottenerne infinite altre (tutte dello stesso ordine), facendo uso di una opportuna **trasformazione di variabile**

$$x(t) = T w(t) \qquad \text{rank}\, T = n$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_o\, x(t) + B_o\, u(t) \\ y(t) = C_o\, x(t) + D_o\, u(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{w}(t) = T^{-1} A_o T\, w(t) + T^{-1} B_o u(t) \\ y(t) = C_o T w(t) + D_o u(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A\, w(t) + B\, u(t) \\ y(t) = C\, w(t) + D_o\, u(t) \end{cases}$$

- In realtà e' possibile ottenere anche **realizzazioni di ordine maggiore**, aumentando la dimensione del vettore di stato.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_o\, x(t) + B_o\, u(t) \\ y(t) &= C_o\, x(t) + D_o\, u(t) \end{cases}$$

$$(A_c,\, B_c,\, C_c,\, D_c)$$

$$T_{y\,u}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad (A_o,\, B_o,\, C_o,\, D_o)$$

$$x(t) = T w(t)$$

$$(A,\, B,\, C,\, D)$$

$$\mathrm{rank}\, T = n$$

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= A\, w(t) + B\, u(t) \\ y(t) &= C\, w(t) + D\, u(t) \end{cases}$$

- E' realizzazione della medesima FdT (del medesimo sistema LTI) anche questa:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ G \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + D\, u(t) \end{cases}$$

- Questo nuovo sistema possiede la medesima FdT del precedente, quindi e' anch'esso una realizzazione di $T_{y\,u}(s)$

- Stavolta però lo stato ha dimensione maggiore di n:

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} n\times 1 \\ q\times 1 \end{bmatrix} \; q > 0, \quad n + q > n$$

- Possiamo concludere allora che:
  - **NON** esiste **limite superiore** all'ordine di una realizzazione!
  - Esiste invece limite inferiore! Esiste un valore dell'ordine al di sotto del quale non si può trovare una realizzazione in equazioni di stato per un sistema descritto sulla base di una FdT assegnata (in generale di una matrice di FdT).
  - Questo valore minimo dell'ordine viene detto **ordine minimo**.

Definizione: ordine minimo

- Una realizzazione
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

  di ordine il più piccolo possibile si dice **realizzazione di ordine minimo** oppure **realizzazione minima**.

- Il problema della **determinazione dell'ordine minimo** ha interesse in generale per **sistemi dinamici lineari** (anche tempo-varianti), sia a tempo continuo che a tempo discreto.

- Al solito per semplicità nel seguito consideriamo soltanto sistemi LTI a tempo continuo.

Determinazione dell'ordine minimo

- Come si determina l'ordine minimo di un sistema?
- Mostreremo che l'**ordine minimo** e' una **proprietà del sistema**, strettamente legata alle proprietà di controllabilità (raggiungibilità a tempo discreto) ed osservabilità.
- Intanto ricordiamo che (TDSC parte 6 slide # 19, teorema 6.2) nella rappresentazione I/O di un sistema LTI (pensiamo per semplicità sistema SISO a tempo continuo) compaiono solamente i poli contemporaneamente controllabili ed osservabili. Non c'e' traccia degli altri poli.

Teorema 7.4

- Una **realizzazione di ordine n** (A, B, C, D) di una FdT T(s) e' **realizzazione minima SE E SOLO SE** essa risulta **completamente controllabile ed osservabile**.
- Per semplicità dimostreremo il teorema nel caso SISO.

- **Dimostrazione: necessità (per assurdo)**

- Supponiamo che la **realizzazione** (A, B, C, D) sia **minima** ma **NON completamente controllabile ed osservabile**.
- Ma allora utilizzando la **decomposizione canonica di Kalman** (TDSC parte 6) e' possibile determinare una realizzazione di ordine inferiore! E ciò e' chiaramente un **assurdo**.

- **Dimostrazione: sufficienza (per assurdo)**
- Supponiamo ora che la **realizzazione** (A, B, C, D) sia **completamente controllabile ed osservabile** e sia di ordine n.
- Supponiamo inoltre che esista **un'altra realizzazione di ordine inferiore**:

$(A,\, B,\, C,\, D)$ ordine n $\qquad$ $(\bar{A},\, \bar{B},\, \bar{C},\, \bar{D})$ ordine $\bar{n},\ \bar{n} < n$

- Sono entrambe realizzazioni del medesimo sistema, quindi deve essere che

$$C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \bar{C}\,(sI - \bar{A})^{-1}\,\bar{B} + \bar{D}$$

cioè, nel dominio del tempo

$$C\,e^{A\,t}\,B \cdot 1(t) + D\delta(t) = \bar{C}\,e^{\bar{A}\,t}\,\bar{B} \cdot 1(t) + \bar{D}\delta(t)$$

Sviluppo in serie

$$D = \bar{D}$$

- Ricordiamo che $$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \cdots$$

- Nel caso considerato si può scrivere allora

$$C\, e^{At} B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} C\, A^k B = CB + CAB\, t + CA^2 B \frac{t^2}{2} + \cdots$$

- **Definizione**: i coefficienti matriciali $C\, A^k B$ si dicono **parametri di Markov** della FdT $C\,(sI - A)^{-1}\, B$

- I parametri di Markov si ottengono per sviluppo in serie "asintotico" (in un intorno del punto improprio $s \to \infty$) della FdT e sono una rappresentazione equivalente della FdT stessa.
- Inoltre li si definisce allo stesso modo anche per sistemi LTI di tipo MIMO.

- A questo punto, se le due realizzazioni sono realizzazioni del medesimo sistema, allora i parametri di Markov associati a ciascuna delle due realizzazioni devono coincidere a coppie:

$$C\,A^k\,B = \bar{C}\;\bar{A}^k\,\bar{B} \qquad \forall k \geq 0$$

- Sfruttiamo questa proprietà, costruendo una opportuna matrice i cui elementi siano proprio i parametri di Markov del sistema in esame.

- Per farlo, partiamo dalle matrici di controllabilità e di osservabilità della realizzazione controllabile ed osservabile

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Ora costruiamo la matrice

$$
Q\,P = \begin{bmatrix} C\,B & C\,A\,B & C\,A^2\,B & \cdots & C\,A^{n-1}\,B \\ C\,A\,B & & \iddots & & C\,A^n\,B \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ C\,A^{n-1}\,B & C\,A^n\,B & \cdots & & C\,A^{2n-2}\,B \end{bmatrix}
$$

- Come si vede, gli elementi della matrice sono i parametri di Markov della realizzazione $(A,\,B,\,C)$.
- Poiché i parametri di Markov delle due realizzazioni sono identici (per ogni indice considerato) e' possibile costruire una matrice analoga a partire dall'altra realizzazione.

$$Q_n\,P_n = \begin{bmatrix} C\,B & C\,A\,B & C\,A^2\,B & \cdots & C\,A^{n-1}\,B \\ C\,A\,B & & \iddots & & C\,A^n\,B \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ C\,A^{n-1}\,B & C\,A^n\,B & \cdots & & C\,A^{2n-2}\,B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}\,\bar{B} & \bar{C}\,\bar{A}\,\bar{B} & \bar{C}\,\bar{A}^2\,\bar{B} & \cdots & \bar{C}\,\bar{A}^{n-1}\,\bar{B} \\ \bar{C}\,\bar{A}\,\bar{B} & & \iddots & & \bar{C}\,\bar{A}^n\,\bar{B} \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ \bar{C}\,\bar{A}^{n-1}\,\bar{B} & \bar{C}\,\bar{A}^n\,\bar{B} & \cdots & & \bar{C}\,\bar{A}^{2n-2}\,\bar{B} \end{bmatrix} = \bar{Q}_n\,\bar{P}_n$$

Supponiamo di aver ottenuto la matrice come prodotto di matrici di osservabilità e controllabilità entrambe di dimensione (n X n) [quindi dimensioni maggiori della minima dimensione necessaria].

- Poiché i parametri di Markov sono uguali, vale che

$$Q_n \, P_n \; = \; \bar{Q}_n \, \bar{P}_n$$

- Che cosa si può dire allora a proposito del rango delle varie matrici coinvolte?

- **Diseguaglianza di Sylvester**:
  - consideriamo due matrici numeriche A, B tali che

$$A \in \mathsf{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \dim A = m \times n$$

$$B \in \mathsf{L}\left(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \dim B = n \times k$$

  - vale allora la relazione

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(A\,B)$$

- Applicando la diseguaglianza di Sylvester alle matrici QP di entrambe le realizzazioni si ottiene che

$$\underbrace{\text{rank}\,(Q_n) + \text{rank}\,(P_n) - n}_{n} \leq \text{rank}\,(\bar{Q}_n\,\bar{P}_n)$$

$$\boxed{\text{rank}\,(A\,B) \leq \min\,(\text{rank}\,A,\ \text{rank}\,B)}$$

$$\text{rank}\,(\bar{Q}_n\bar{P}_n) \leq \min\,(\text{rank}\,Q_n,\ \text{rank}\,P_n) = n$$

$$\text{rank}\,(\bar{Q}_n\bar{P}_n) = n \leq \min\,(\text{rank}\,\bar{Q}_n,\ \text{rank}\,\bar{P}_n) = \bar{n}$$

$\boxed{\text{Assurdo!}}$ $\quad n \leq \bar{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{n > \bar{n}}$

▲

Osservazioni

- Questo teorema fornisce anche un metodo per determinare l'ordine minimo di un sistema, partendo da una sua realizzazione in equazioni di stato:

$$\text{ordine minimo} = \text{rank}\ (QP)$$

- In alternativa e' sempre possibile utilizzare la decomposizione canonica di Kalman per determinare la dimensione della parte completamente controllabile ed osservabile del sistema (sempre partendo dalla realizzazione in equazioni di stato).

- Il teorema vale anche per sistemi LTI di tipo MIMO.

- Quante realizzazioni di ordine minimo esistono per un sistema dinamico? **Infinite!**

- Per passare da una realizzazione di ordine minimo ad un'altra e' sufficiente determinare una trasformazione di variabile opportuna:
  - assegnate

$$(A,\, B,\, C,\, D) \text{ realizz. minima}$$

$$(\bar{A},\, \bar{B},\, \bar{C},\, \bar{D}) \text{ realizz. minima}$$

  - esiste certamente una trasformazione T tale che

$$\operatorname{rank} T = n \qquad \begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1} A T \\ \bar{B} &= B T^{-1} \\ \bar{C} &= C T \\ \bar{D} &= D \end{aligned}$$

- Determiniamo la trasformazione nel caso di sistemi SISO:

$$\left.\begin{array}{l}(A,\,B,\,C,\,D)\ \text{realizz. minima}\\ (\bar{A},\,\bar{B},\,\bar{C},\,\bar{D})\ \text{realizz. minima}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad Q\,P = \bar{Q}\,\bar{P}$$

- Ma allora la matrice di trasformazione T deve essere tale da garantire che:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\bar{P} & = & T^{-1}\,P\\ \bar{Q} & = & Q\,T\end{array}\right. \Rightarrow \quad T = \bar{Q}\,Q^{-1} = P\,\bar{P}^{-1}$$

Un esempio

- Consideriamo il sistema LTI a tempo continuo descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Come si vede, si tratta di una realizzazione di ordine 3 per il sistema.
- Quale e' l'**ordine minimo del sistema**?

- 1° modo: determinare la decomposizione canonica di Kalman del sistema: lo si esegua per esercizio.

- 2° modo: determinare le matrici di controllabilità' P e di osservabilità Q per poi valutare il rango della matrice QP
  - si verifichi per esercizio che in tal caso si ottiene la matrice

$$QP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Di conseguenza, dato che il rango di QP e' pari a zero, l'ordine minimo del sistema e' zero.