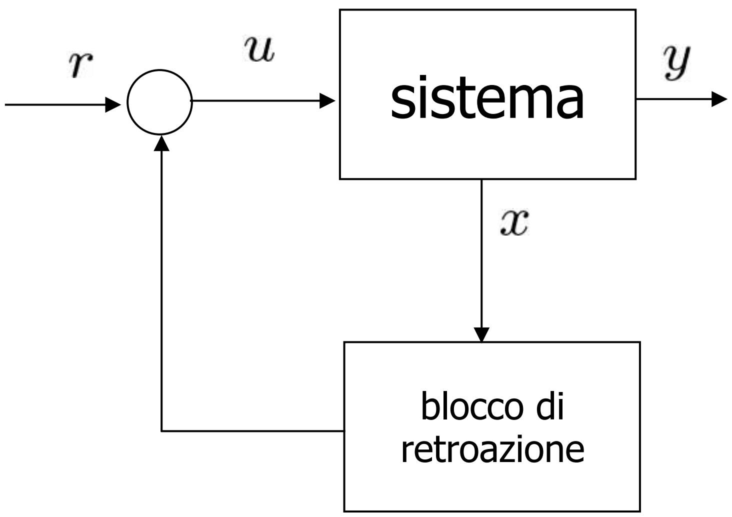
Retroazione dello stato e dello stato stimato

La retroazione (o *feedback*)

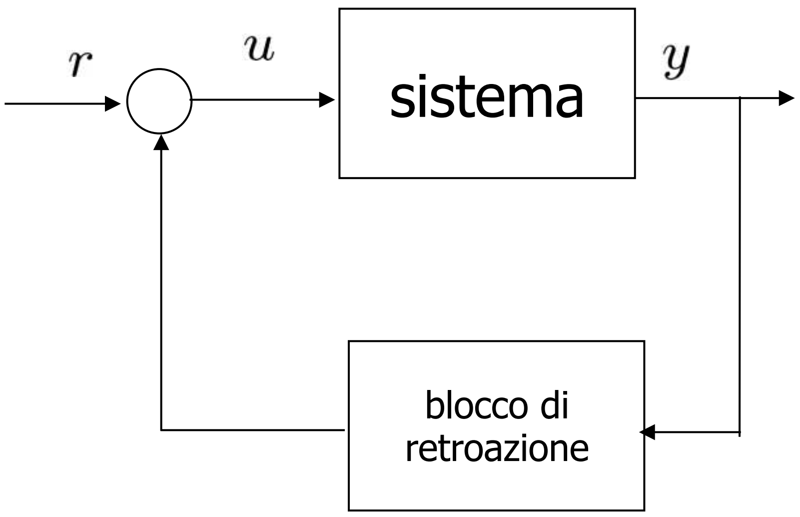
Si parla di retroazione (o feedback) quando una grandezza che ne influenza un'altra è a sua volta da essa influenzata. Si tratta di un meccanismo che può essere osservato in moltissimi fenomeni naturali (ad esempio la pompa sodio-potassio che governa il trasporto di sostanze attraverso la membrana cellulare, la dinamica glucosio-insulina nel sangue, la regolazione dell'apertura della pupilla dell'occhio).

La retroazione è un meccanismo di fondamentale importanza nella regolazione automatica dei sistemi dinamici.

La retroazione dello stato e dell' uscita



Retroazione dello stato



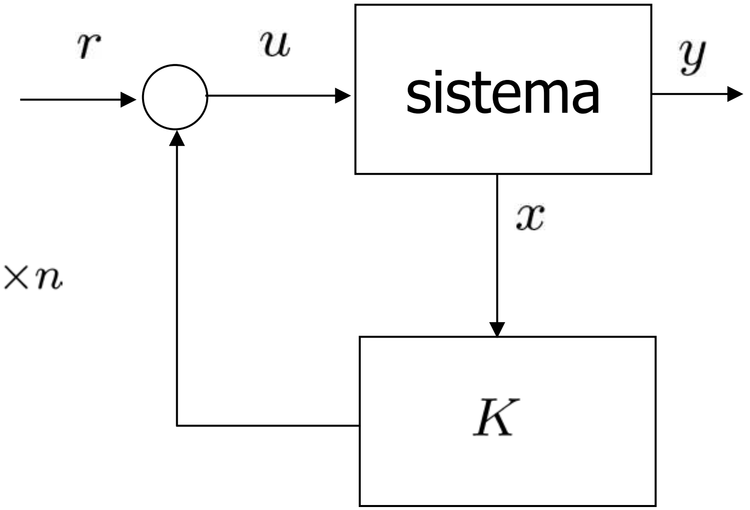
Retroazione dell' uscita

Tipicamente, quando l' intero stato non è accessibile, il blocco di retroazione comprende un sotto-sistema, detto *osservatore dello stato*, il cui obiettivo è stimare lo stato (per poter sfruttare questa informazione ai fini della retroazione)

Retroazione lineare dello stato per sistemi tempo-invarianti (1)

Consideriamo il seguente sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$



Prendiamo $u = Kx + r$, dove $K \in R^{m \times n}$
viene detta *matrice di guadagno.*

legge di controllo lineare, tempo-invariante a retroazione dello stato

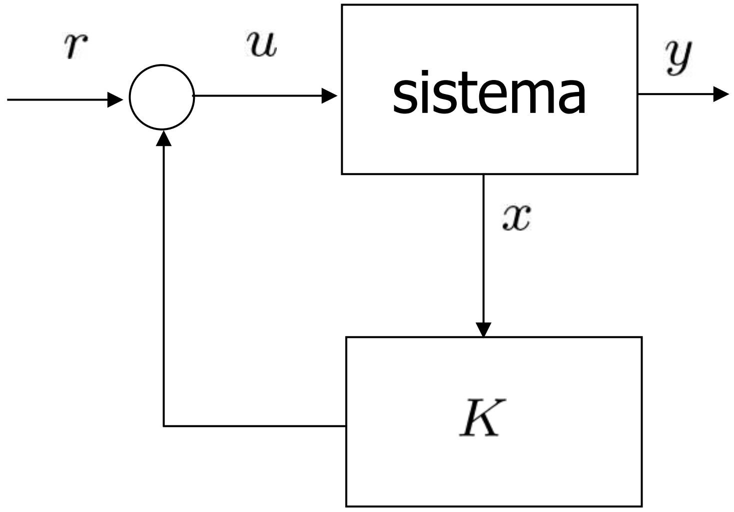
Sostituendo u nella rappresentazione di stato si ottiene la rappresentazione di stato del sistema in anello chiuso:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + B\,r \\ y = (C + DK)x + D\,r \end{cases}$$

matrice di stato di anello chiuso

Retroazione lineare dello stato per sistemi tempo-invarianti (2)

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + BK)x + B\,r \\ y &= (C + DK)x + D\,r \end{cases}$$



Nel progetto del controllore, la matrice K viene scelta in modo che il sistema in anello chiuso abbia il comportamento desiderato.

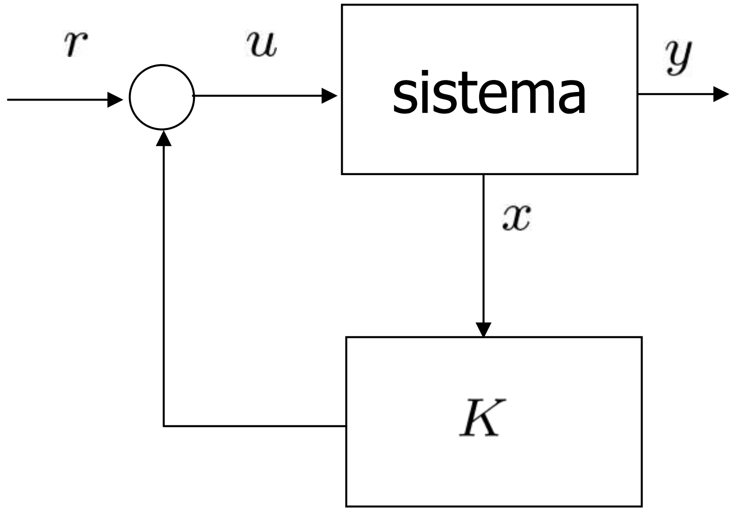
In particolare si vuole garantire:

- Stabilità
- Prestazioni

In questa sede ci occuperemo principalmente del requisito della stabilità e risponderemo alla domanda: “sotto quali condizioni, e in che modo, è possibile scegliere K affinché il sistema in anello chiuso sia stabile?”

Ingresso esterno

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + B\,r \\ y = (C + DK)x + D\,r \end{cases}$$



Nello schema qui a fianco, r si dice *ingresso esterno* (o *ingresso di comando* o *ingresso di riferimento*).

Ha lo stesso numero di componenti di u e funge da ingresso per il sistema in anello chiuso.

N.B. La stabilità del sistema in anello chiuso dipende solo dalla matrice di anello chiuso:

$$A_{cl} \doteq A + BK$$

Quindi, in particolare, non dipende da r che infatti viene solitamente posto a zero quando si è interessati a studiare la stabilità del sistema.

Anello aperto e anello chiuso (1)

La legge di controllo $u = Kx + r$ può essere espressa nei termini dello stato iniziale $x(0) = x_0$ come segue:

$$u(t) = Kx(t) + r(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = KX(s) + R(s)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

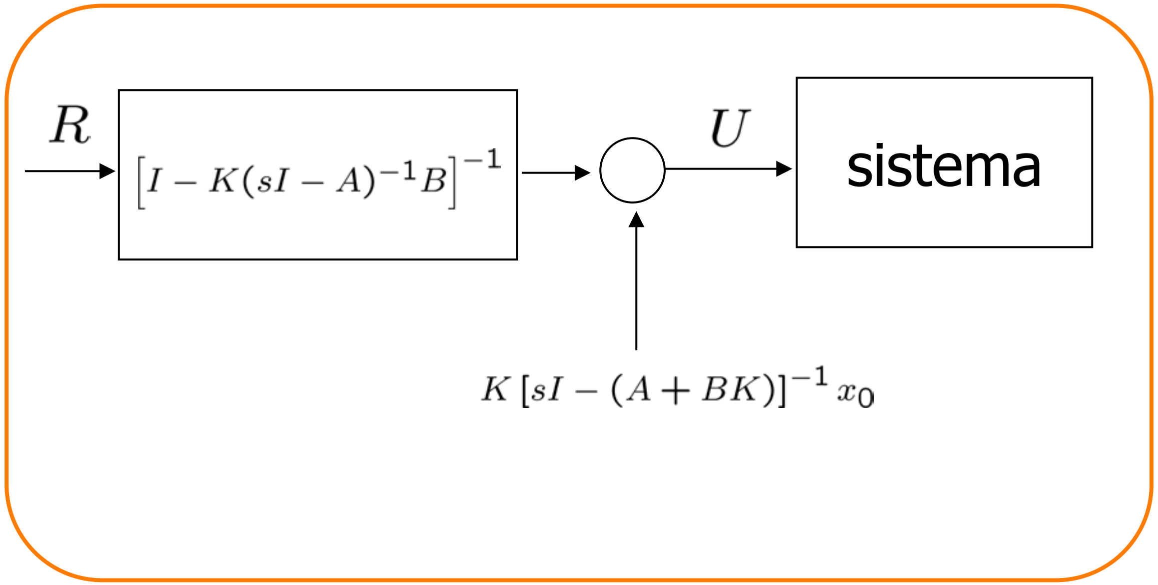
Ricavando $X(s)$ dalla seconda e sostituendo nella prima si ottiene, dopo alcuni passaggi algebrici:

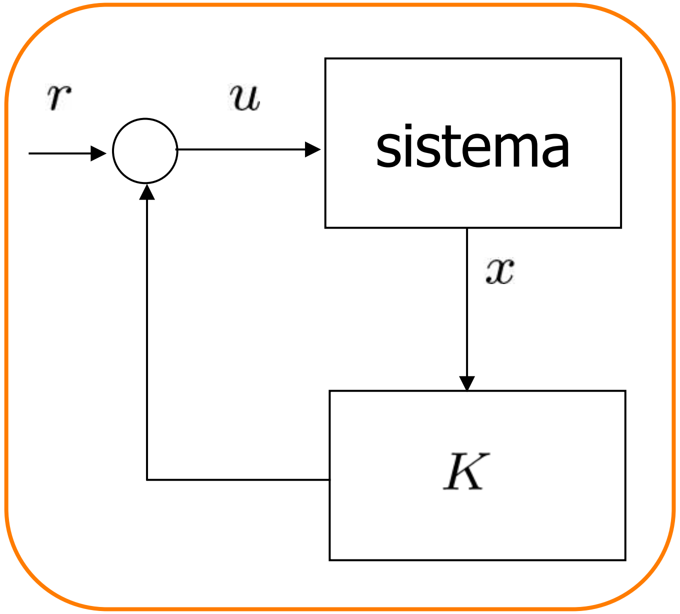
$$U(s) = K\left[sI - (A + BK)\right]^{-1} x_0 + \left[I - K(sI - A)^{-1}B\right]^{-1} R(s)$$

legge di controllo in anello aperto, perché non richiede la conoscenza dello stato corrente, ma solo di quello iniziale.

Anello aperto e anello chiuso (2)

Dunque, a parità di stato iniziale x_0, i due schemi seguenti producono lo stesso ingresso $u(t), \quad t \geq 0$





Anello aperto

Anello chiuso

Anello aperto e anello chiuso (3)

Tuttavia lo schema di controllo in anello aperto ha scarse possibilità di essere efficace in pratica. Infatti:

- lo stato iniziale non è noto *esattamente* nella pratica, ma è affetto da **rumore** di misura
- la dinamica del sistema (e in particolare le matrici A e B) non è nota *esattamente* nella pratica, ma è affetta da **incertezza**

Al contrario, lo schema in anello chiuso non richiede la conoscenza delle condizioni iniziali ed inoltre, attraverso la retroazione, è in grado di regolare l'ingresso sulla base dello stato *corrente* del sistema.

I due schemi pertanto sono equivalenti solo in assenza di rumore e di incertezze di modello (situazione che nella pratica non si verifica MAI).

Assegnazione degli autovalori

Teorema

Date $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ gli autovalori della matrice $A + BK$ possono essere assegnati ad arbitrio, attraverso la scelta di una opportuna matrice $K \in R^{m \times n}$, SE E SOLO SE la coppia (A, B) è controllabile.

Dimostrazione

Sufficienza

La sufficienza verrà dimostrata nel seguito in maniera costruttiva (ossia fornendo degli algoritmi che permettono, a patto che il sistema sia controllabile, di assegnare ad arbitrio gli autovalori).

Necessità

Supponiamo che la coppia (A, B) non sia completamente controllabile. Allora detta T la trasformazione di similitudine che mette la matrice di stato in forma canonica di controllabilità si ha:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} \qquad T^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nulli per la supposta non completa controllabilità

Applicando la stessa trasformazione di similitudine alla matrice di stato del sistema in anello chiuso si ottiene:

$$T^{-1}(A+BK)T = T^{-1}AT + (T^{-1}B)\overbrace{(KT)}^{[\hat{K}_1 \quad \hat{K}_2]} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} + \hat{B}_1\hat{K}_1 & \hat{A}_{1,2} + \hat{B}_1\hat{K}_2 \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix}$$

Questa matrice è simile ad $A+BK$ e quindi ha gli stessi autovalori. Si vede allora che indipendentemente dalla scelta di K gli autovalori della parte non controllabile sono autovalori della matrice di anello chiuso. Ossia non è possibile assegnare arbitrariamente *tutti* gli autovalori di anello chiuso.

In altre parole

$$\sigma(\hat{A}_{2,2}) \subset \sigma(A + BK), \quad \forall K$$

Cioè gli autovalori della parte non controllabile sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice di anello chiuso, per ogni scelta di K

C.V.D.

NOTA: in questo contesto, quando si dice "assegnare arbitrariamente gli autovalori" si sottintende sempre che gli autovalori vanno scelti con il *vincolo del coniugio*, ossia col vincolo che <u>eventuali autovalori non reali compaiano con il proprio coniugato</u>. Infatti gli autovalori delle matrici reali, qualora abbiano parte immaginaria non nulla, compaiono sempre a coppie coniugate.

Sistemi stabilizzabili

E' evidente allora che un sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (\star)$$

può essere reso asintoticamente stabile attraverso la legge di controllo

$$u = Kx + r$$

solo se gli eventuali autovalori della parte non controllabile appartengono al semipiano sinistro aperto. Diversamente il sistema in anello chiuso sarà certamente non asintoticamente stabile o addirittura instabile.

Definizione

La coppia (A, B) si dice *stabilizzabile* se i suoi eventuali autovalori non controllabili hanno parte reale strettamente negativa. Con riferimento a $(\star)$ si parla anche di *sistema stabilizzabile*.

Metodi per l'assegnazione degli autovalori

Il problema dell'assegnazione degli autovalori può essere così formulato:

Data la coppia (A, B) controllabile, e l'insieme $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

dove i λ_i sono scelti arbitrariamente (col vincolo del coniugio),

determinare K affinché si abbia

$$\sigma(A + BK) = \Lambda$$

Un primo metodo per risolvere questo problema è il cosiddetto *metodo diretto*, che verrà illustrato attraverso un esempio.

Metodo diretto

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \{-1+j, -1-j\}$$

La matrice K deve avere una riga e due colonne: $K = [k_1 \quad k_2]$

Il polinomio caratteristico di $A + BK$ può essere scritto in funzione di k_1 e k_2 che sono i valori che si vogliono determinare.

$$\det(sI-(A+BK)) = \det\left(\begin{bmatrix} s-\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} s - \frac{1}{2} - k_1 & -1 - k_2 \\ -1 - k_1 & s - 2 - k_2 \end{bmatrix} = s^2 + s\left(-\frac{5}{2} - k_1 - k_2\right) + k_1 - \frac{1}{2}k_2$$

Gli autovalori desiderati sono le radici del polinomio:

$$\alpha_d(s) = (s - (-1 + j))(s - (-1 - j)) = s^2 + 2s + 2$$

Uguagliando i coefficienti di grado corrispondente si ottiene il sistema di equazioni lineari:

$$-\frac{5}{2} - k_1 - k_2 = 2$$
$$k_1 - \frac{1}{2}k_2 = 2$$

risolvendo il quale si trova: $K = [k_1 \quad k_2] = [-\frac{1}{6} \qquad -\frac{13}{3}]$

Osservazioni

1. Il sistema di equazioni è lineare perché la matrice B ha una sola colonna cioè il sistema ha un solo ingresso. Negli altri casi non è, in generale, lineare.
2. A causa soprattutto della laboriosità del calcolo simbolico per esprimere il polinomio caratteristico in funzione delle componenti incognite della K il metodo è di utilità pratica per sistemi di ordine 2 o al massimo 3.

Metodo basato sulla forma canonica di controllo

Sia T (che esiste per l'ipotesi di completa controllabilità)

la trasformazione che mette il sistema in forma canonica di controllo:

$$A_c = T^{-1}AT, \quad B_c = T^{-1}B$$

Le matrici $(A + BK)$ e

$$T^{-1}(A+BK)T = T^{-1}AT+T^{-1}B\underbrace{KT}_{\doteq K_c} = A_c+B_cK_c$$

hanno gli stessi autovalori e il problema diventa quello di assegnare gli autovalori di $(A_c + B_cK_c)$ attraverso la scelta di K_c

Risolto questo problema, che come vedremo è più facile di quello originale in virtù della speciale struttura delle matrici, è sufficiente porre $K = K_cT^{-1}$ per ottenere la matrice che risolve il problema originale.

Caso a singolo ingresso

Consideriamo dapprima il caso $m = 1$

La K_c è dunque una matrice riga:

$$K_c = [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$$

La matrice di anello chiuso è allora:

$$\begin{aligned}
A_{cK} &\doteq A_c + B_c K_c \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}] \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 - k_0) & -(a_1 - k_1) & \cdots & -(a_{n-1} - k_{n-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice appena trovata è, come anche la A_c, in forma compagna.

Pertanto il polinomio caratteristico di A_{cK} è il seguente:

$$\det(sI - A_{cK}) = s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)$$

Se gli autovalori desiderati sono le radici del polinomio:

$$\alpha_d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0$$

uguagliando i coefficienti di grado corrispondente si ottengono le n equazioni

$$k_i = a_i - d_i, \quad i = 0, \ldots, n-1$$

che forniscono gli elementi della matrice K_c cercata.

NOTA: questo risultato mostra l'unicità della soluzione nel caso $m = 1$. Si può dimostrare che nel caso $m > 1$ la soluzione può non essere unica.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \{-1+j, -1-j\}$$

$$P = [\, B \mid AB \,] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione che mette il sistema in forma compagna controllabile è

$$A_c = T^{-1} A T$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underset{-a_0}{0} & \underset{-a_1}{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_d(s) = (s-(-1+j))(s-(-1-j)) = s^2 + \overset{d_1}{2}s + \overset{d_0}{2}$$

$$\begin{aligned} k_0 &= a_0 - d_0 \\ k_1 &= a_1 - d_1 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} k_0 &= -2 \\ k_1 &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

ossia

$$K_c = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

infine

$$K = K_c T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

Formula di Ackermann

Sempre nel caso a singolo ingresso, si possono determinare gli elementi della matrice dei guadagni (che è matrice riga) *direttamente*, cioè senza passare attraverso la forma canonica di controllo. Ciò è reso possibile dalla *formula di Ackermann*

$$\boxed{K = -e_n^T P^{-1} \alpha_d(A)}$$

dove: $e_n = [0, \ldots, 0, 1]^T \in R^n$,

$$P = \left[\ B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B\ \right]$$

e $\alpha_d(A)$ è una matrice ottenuta valutando il polinomio caratteristico desiderato (cioè quello che si vuole assegnare) in corrispondenza della matrice A. Con riferimento all'esempio precedente si avrebbe:

$$\alpha_d(A) = A^2 + 2A + 2I$$

Dimostrazione (1)

Il polinomio caratteristico desiderato, valutato in corrispondenza della matrice di stato in forma canonica di controllabilità è:

$$\alpha_d(A_c) = A_c^n + d_{n-1}A_c^{n-1} + \ldots + d_1 A_c + d_0 I$$

D'altra parte, per il teorema di Cayley-Hamilton:

verificarlo per esercizio!

$$A_c^n = a_{n-1}A_c^{n-1} - \ldots - a_1 A_c - a_0 I$$

Sostituendo nella prima e raccogliendo si trova

$$\alpha_d(A_c) = (d_{n-1} - a_{n-1})A_c^{n-1} + \ldots + (d_1 - a_1)A_c + (d_0 - a_0)I$$

Per la particolare struttura di A_c la prima riga della matrice $\alpha_d(A_c)$ coincide con la matrice di guadagno cercata, cambiata di segno.

$$[\,1 \;\; 0 \ldots 0\,]\alpha_d(A_c) = [(d_{n-1} - a_{n-1}) \;\; \ldots \;\; (d_0 - a_0)] = -K_c$$

Dimostrazione (2)

Pertanto possiamo scrivere:

$$K_c = -[\, 1 \;\; 0 \ldots \; 0 \,]\alpha_d(A_c)$$

Ricordando che $K = K_c T^{-1}$ e osservando che

$$\alpha_d(A_c) = \alpha_d(T^{-1}AT) = T^{-1}\alpha_d(A)T$$

si può scrivere:

$$K = -[\, 1 \;\; 0 \ldots \; 0 \,]T^{-1}\alpha_d(A)TT^{-1} = -[\, 1 \;\; 0 \ldots \; 0 \,]T^{-1}\alpha_d(A)$$

Ora bisogna ricordare (cfr. parte 7) che la matrice di cambiamento di base che mette il sistema in forma canonica di controllo può essere espressa come segue:

$$T^{-1} = P_c P^{-1}$$

dove

$$P_c = \left[\; B_c \,\middle|\, A_c B_c \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A_c^{n-1} B_c \;\right], \quad P = \left[\; B \,\middle|\, AB \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A^{n-1} B \;\right]$$

Dimostrazione (3)

Sostituendo si trova allora:

$$K = - \underbrace{[\,1 \;\; 0 \ldots \; 0\,] P_c}_{\text{la prima riga di } P_c} \; P^{-1} \alpha_d(A)$$

Ma è facile verificare che la prima riga di P_c è tutta nulla eccetto l'ultimo elemento che è unitario.

C.V.D.

Esempio

Applicando la formula di Ackermann allo stesso problema di assegnazione degli autovalori dei precedenti esempi si ottiene:

$$K = -e_2^T P^{-1} \alpha_d(A)$$

$$= -[0 \ \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

Caso multi-ingresso (1)

Nel caso $m > 1$ la soluzione del problema di assegnazione degli autovalori non è in generale unica. Distinguiamo due casi:

Caso A: il sistema è completamente controllabile **da un solo ingresso**, ossia

$$\exists i : \text{rank}\left(\left[\begin{array}{c|c|c|c} b_i & Ab_i & \cdots & A^{n-1}b_i \end{array}\right]\right) = n$$

dove b_i designa la i-ma colonna di B.

In tal caso è possibile assegnare gli autovalori ricorrendo al solo ingresso i-mo, cioè considerare il problema $\sigma(A + b_i K_i) = \Lambda$ anziché $\sigma(A + BK) = \Lambda$

Trovata la matrice riga K_i che risolve il problema da un solo ingresso, si costruisce la matrice di guadagno tutta nulla eccetto la riga i-ma.

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ K_i \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \longleftarrow i - \text{ma riga}$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \underset{b_1}{\boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}} & \underset{b_2}{\boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}}} \end{bmatrix}$$

Il sistema è controllabile da ciascuno dei due ingressi separatamente, poiché, come è facile verificare:

$$\operatorname{rank}\left(\left[\, b_1 \mid Ab_1 \mid \cdots \mid A^{n-1}b_1 \,\right]\right) = 3$$
$$\operatorname{rank}\left(\left[\, b_2 \mid Ab_2 \mid \cdots \mid A^{n-1}b_2 \,\right]\right) = 3$$

Pertanto gli autovalori possono essere assegnati sia con la legge di controllo:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} x + r$$ che con la legge $$u = \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} x + r$$

2 righe e 3 colonne

Nel secondo caso, cioè applicando la legge di controllo $u = \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} x + r$

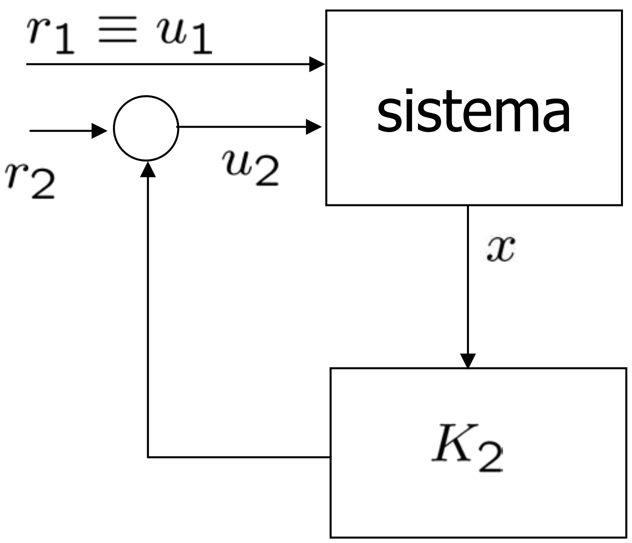
ovvero

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

matrice riga che si trova risolvendo il problema di assegnazione:

$$\sigma(A + b_2 K_2) = \Lambda$$

lo schema del sistema retroazionato risulta il seguente:



Il primo canale di ingresso viene impiegato solo per il riferimento, perché la retroazione che assegna gli autovalori interessa solamente il secondo canale.

Caso multi-ingresso (2)

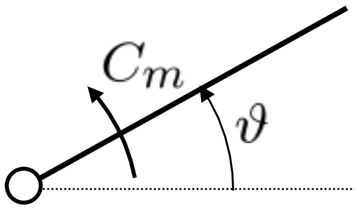
Caso B: pur essendo il sistema completamente controllabile, **non lo è da un solo ingresso**, ossia

$$\nexists i : \mathrm{rank}\left(\left[\ b_i \mid Ab_i \mid \cdots \mid A^{n-1}b_i\ \right]\right) = n$$

In tal caso è possibile (*Lemma di Heymann*) individuare una prima retroazione dello stato che renda il sistema controllabile da un solo ingresso, in modo da ricondursi al caso A. Fatto ciò sarà possibile individuare, come già visto, una seconda retroazione dello stato per effettuare l'assegnazione degli autovalori.

Esempio: servoposizionamento (1)

Asta incernierata, con momento di inerzia J, che si muove sul piano orizzontale, soggetta ad una coppia C_m (si trascura l' attrito)



$$x_1 = \vartheta \qquad x_2 = \dot{\vartheta} \qquad u = C_m \qquad \beta = \frac{1}{J}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u$$

A meno del fattore β il sistema è già in forma canonica di controllo. Si trova:

$$A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} [k_1 \;\; k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta k_1 & \beta k_2 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $s^2 - \beta k_2 s - \beta k_1$

Esempio: servoposizionamento (2)

Scelto lo spettro $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ è sufficiente calcolare il polinomio caratteristico corrispondente

$$\alpha_d(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2) = s^2 - (\lambda_1+\lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

e scegliere le componenti di K uguagliando i coefficienti di pari grado:

$$-\beta k_1 = \lambda_1\lambda_2$$

$$-\beta k_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Pertanto si avrà:

$$k_1 = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\beta}$$

$$k_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\beta}$$

Esempio: servoposizionamento (3)

Con che criterio si scelgono gli autovalori?

1. Ovviamente nel semipiano sinistro aperto, per garantire la stabilità asintotica.

2. Con o senza parte complessa a seconda che si vogliano o meno modi pseudoperiodici (transitori con oscillazioni).

3. Con una costante di tempo ragionevole (cioè sufficientemente grande da non richiedere prestazioni impossibili e sufficientemente piccola da garantire transitori soddisfacenti)

Esempio: servoposizionamento (4)

Se si scelgono ad esempio due poli reali aventi entrambi costante di tempo di mezzo secondo:

$$\tau = 0.5s$$

ossia $\lambda_1, \lambda_2 = -2$

si ottiene

$$k_1 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\beta} = -\frac{4}{\beta}$$
$$k_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\beta} = -\frac{4}{\beta}$$

cioè $K = [k_1 \quad k_2] = [-\frac{4}{\beta} \quad -\frac{4}{\beta}]$

NOTA: poiché $\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{\tau}$ le precedenti si possono riscrivere:

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{\tau\beta}$$

Più piccola è la costante di tempo (cioè più brevi sono i transitori richiesti) più grandi sono le componenti della matrice di guadagno e quindi **più forte è l'azione di controllo**

Sistemi non completamente controllabili (1)

Applicando al sistema retroazionato con una generica matrice di guadagno K la trasformazione T che mette il sistema (non retroazionato) in forma canonica di controllabilità si ottiene:

$$T^{-1}(A+BK)T = T^{-1}AT + (T^{-1}B)\overbrace{(KT)}^{[\hat{K}_1 \quad \hat{K}_2]} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} & \hat{A}_{1,2} \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{1,1} + \hat{B}_1\hat{K}_1 & \hat{A}_{1,2} + \hat{B}_1\hat{K}_2 \\ 0 & \hat{A}_{2,2} \end{bmatrix}$$

Dunque è possibile assegnare gli autovalori della parte controllabile risolvendo il problema:

$$\sigma(\hat{A}_{1,1} + \hat{B}_1\hat{K}_1) = \Lambda$$

Sistemi non completamente controllabili (2)

Una volta determinata la matrice $\widehat{K}_1$ che risolve il problema di assegnazione per la sola parte controllabile, è sufficiente prendere

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} \widehat{K}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, osservando che $\widehat{K} = KT$, si calcola la matrice di guadagno

$$K = \widehat{K}T^{-1}$$

NOTA: è evidente che il sistema complessivo in anello chiuso risulterà asintoticamente stabile solo se gli autovalori della parte non controllabile (oltre che quelli assegnati) hanno parte reale strettamente negativa.

Osservazione

I metodi finora visti permettono, qualora il sistema sia completamente controllabile, di assegnare a piacimento (tramite una retroazione dello stato) gli autovalori del sistema retroazionato.

Tuttavia, da un punto di vista pratico, è opportuno osservare che:

1. Se è vero che gli autovalori possono essere scelti ad arbitrio, è anche vero che certe scelte non sono nella pratica possibili (ad esempio, autovalori di modulo molto grande, comportando forti azioni di controllo, potrebbero produrre sollecitazioni troppo forti per gli attuatori o che il sistema non può sopportare)

2. In molti casi non è chiaro quale sia la scelta migliore degli autovalori.

Un approccio alternativo all'assegnazione degli autovalori consiste nel fissare un **indice di prestazioni** del sistema e trovare quella retroazione dello stato che garantisce, oltre alla stabilità, l'ottimizzazione di tale indice. ➡ ***"CONTROLLO OTTIMO"***

Regolatore lineare quadratico

La scelta di un indice di prestazioni **quadratico** permette di ottimizzare tale indice (oltre che di stabilizzare il sistema) attraverso una retroazione **lineare** dello stato.
Si tratta del *regolatore lineare quadratico* (Linear Quadratic Regulator LQR) o *controllo LQ*.

Consideriamo il sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ z &= Mx \end{aligned}$$

Il vettore $z(t)$ è una "uscita fittizia" che rappresenta le variabili significative ai fini delle prestazioni.

Vogliamo trovare l'azione di controllo $u(t), \quad t \geq 0$ che minimizza il *costo*

$$J(u) = \int_0^{\infty} \left[z^T(t) Q z(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt$$

per ogni stato iniziale $x(0)$.

$$J(u) = \int_0^\infty \left[z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)\right] dt$$

Le matrici Q, R sono reali, simmetriche e definite positive.

Quindi $u^T Ru > 0 \ \forall u \neq 0$. Minimizzare l' integrale di tale termine serve a penalizzare azioni di controllo troppo intense.

Anche $z^T Qz > 0 \ \forall z \neq 0$. Minimizzare l' integrale di tale termine serve a forzare $z(t)$ ad assumere valori piccoli e a convergere a zero quando t va ad infinito.

Si noti che $z^T Qz = x^T(M^T QM)x \geq 0 \ \forall x$

cioè possono esserci degli stati non nulli che danno un contributo nullo all' integrale di costo. Questi possono essere pensati come degli stati che non sono di interesse ai fini delle prestazioni. Ovviamente se M ha rango n allora vale la disuguaglianza stretta.

$$J(u) = \int_0^\infty \left[z^T(t) Q z(t) + u^T(t) R u(t) \right] dt$$

Le matrici Q, R sono dei *parametri di progetto* (cioè parametri scelti da chi progetta il controllore)

La “grandezza” relativa di Q ed R determina l’importanza relativa, nell’indice di prestazioni, delle due opposte esigenze:

1. Ottenere azioni di controllo piccole (per far questo bisogna scegliere R “grande”)
2. Ottenere transitori rapidi (per far questo bisogna scegliere Q “grande”)

Teorema

Dati il sistema lineare tempo-invariante:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$z = Mx$$

e il costo $$J(u) = \int_0^{\infty} \left[z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t) \right] dt$$

dove le matrici Q, R sono reali, simmetriche e definite positive.

Se la coppia (A, B) è controllabile e la coppia (A, M) è osservabile allora l'ingresso $u^*(t)$ che minimizza il costo è una **retroazione lineare dello stato** ed è indipendente dallo stato iniziale $x(0)$. In particolare:

$$u^*(t) = K^* x(t) = -R^{-1} B^T P_c^* x(t)$$

dove P_c^* è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'equazione seguente, detta *equazione algebrica di Riccati*.

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0$$

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0$$

L'equazione algebrica di Riccati può avere più di una soluzione, ma si può dimostrare che <u>solo una è definita positiva</u>.

Inoltre, fatto fondamentale, **la legge di controllo così trovata** , ossia

$$u^*(t) = K^* x(t)$$

è stabilizzante.

NOTA: a cosa serve la condizione (A, M) osservabile?

Serve per garantire che l'uscita fittizia $z(t)$ contenga informazioni su tutto lo stato e quindi per evitare che, per effetto della mancata osservabilità, vi siano componenti dello stato il cui divergere non si riflette in un aumento del costo.

Il costo ottimo

Si può dimostrare che, assegnato lo stato iniziale $x(0)$, il costo ottimo del transitorio corrispondente è dato da:

$$J(u^*) = x^T(0) P_c^* x(0)$$

Operativamente…

Per progettare un regolatore LQ si procede come segue:

1. Si individuano le variabili di stato il cui andamento è di interesse ai fini delle prestazioni e si sceglie M di conseguenza (Ad esempio, se *tutte* le variabili di stato sono di interesse, si può scegliere $M = I$).
2. Si scelgono le matrici Q, R simmetriche e definite positive. Una forma tipica per queste matrici è quella diagonale.
3. Si verifica che la coppia (A, B) sia controllabile e la coppia (A, M) sia osservabile.
4. In caso affermativo, si trova la soluzione simmetrica e definita positiva P_c^* dell'equazione di Riccati (esistono algoritmi numericamente efficienti per fare ciò).
5. La legge di controllo ottima è $u^*(t) = -R^{-1}B^T P_c^* x(t)$

Osservazioni

1. Si noti la semplicità di questa procedura, che non richiede di scegliere tutti gli autovalori da assegnare ma solo di stabilire la funzione di costo attraverso le matrici Q, R il cui peso relativo permette di gestire il compromesso fra intensità dell'azione di controllo e durata dei transitori

2. La procedura è la stessa qualunque sia il numero di ingressi del sistema ovvero qualunque sia il numero di colonne di B

Matrice Hamiltoniana

Un metodo per risolvere l'equazione di Riccati è fare ricorso alla *matrice Hamiltoniana*

$$H \doteq \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -M^TQM & -A^T \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che sotto le ipotesi del teorema del controllo LQ tale matrice ha n autovalori a parte reale strettamente negativa ed altrettanti a parte reale strettamente positiva. Detta

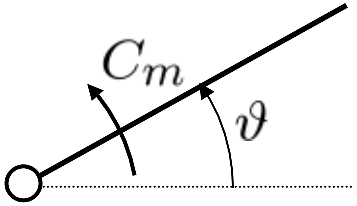
$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad V_1 \in R^{n \times n}, \quad V_2 \in R^{n \times n}$$

una matrice le cui colonne sono gli autovettori associati agli autovalori stabili, la soluzione dell'equazione di Riccati è:

$$P_c^* = V_2 V_1^{-1}$$

Esempio: servoposizionamento (1)

Asta incernierata, con momento di inerzia J , che si muove sul piano orizzontale, soggetta ad una coppia C_m (si trascura l'attrito)



$$x_1 = \vartheta \qquad x_2 = \dot{\vartheta} \qquad u = C_m \qquad \beta = \frac{1}{J}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u$$

Assumiamo per semplicità di notazione che sia $\beta = 1$

E definiamo il costo nel modo seguente:

$$J(u) = \int_0^\infty \left(x_1^2(t) + \rho u^2(t) \right) dt$$

il che corrisponde alle scelte: $M = [1 \quad 0],\ Q = 1,\ R = \rho\ (> 0)$

significa che ai fini delle prestazioni interessa la prima variabile di stato, ossia l'angolo

Esempio: servoposizionamento (2)

Le coppie (A,B) e (A,M) sono rispettivamente controllabile e osservabile, infatti:

$$\text{rank}(P) = \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{rank}(O) = \text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

L'equazione algebrica di Riccati è la seguente:

le incognite sono 3 perché la soluzione cercata è simmetrica

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_c + P_c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho} P_c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \;\; 1] P_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \;\; 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: servoposizionamento (3)

Tale equazione fornisce tre equazioni nelle incognite p_1, p_2, p_3

$$-\frac{1}{\rho}p_2^2+1=0, \quad p_1-\frac{1}{\rho}p_2p_3=0, \quad 2p_2-\frac{1}{\rho}p_3^2=0 \qquad (\star)$$

Si noti che per la regola di Cartesio P_c è definita positiva se e solo se $p_1 > 0$ e $p_1p_3 - p_2^2 > 0$ quindi la terna cercata deve soddisfare anche queste due condizioni.

Dalla prima delle $(\star)$ segue $p_2 = \pm\sqrt{\rho}$ ma la soluzione negativa non è accettabile per la terza delle $(\star)$. Quindi $p_2 = \sqrt{\rho}$. Sostituendo nella terza si trova

$$p_3 = \pm\sqrt{2\rho\sqrt{\rho}}$$

ma la soluzione negativa è da escludersi in virtù della seconda delle $(\star)$ e della condizione $p_1 > 0$

Esempio: servoposizionamento (3)

Quindi è $p_3 = \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}}$

Infine dalla seconda delle $(\star)$ si trova $p_1 = \frac{1}{\rho}\sqrt{2\rho\sqrt{\rho}}\sqrt{\rho} = \sqrt{2\sqrt{\rho}}$

e quindi la soluzione definita positiva dell'equazione algebrica di Riccati è:

$$P_c^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$$

Pertanto la matrice di guadagno ottima è

$$\begin{aligned} K^* &= -R^{-1}B^T P_c^* \\ &= -\frac{1}{\rho}[0 \;\; 1] \begin{bmatrix} \sqrt{2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{\rho}}{\rho} & -\frac{\sqrt{2\rho\sqrt{\rho}}}{\rho} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per casa:

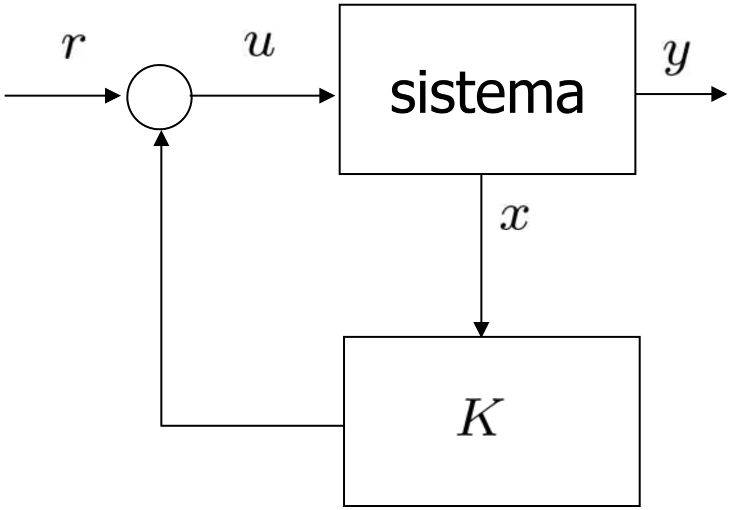
Calcolare gli autovalori di anello chiuso (cioè quelli di $A + BK^*$) e rappresentarli sul piano complesso, nei seguenti casi:

$$\rho = 1, \quad \rho = 10, \quad \rho = 100$$

Sistemi a tempo discreto

Analogamente al caso continuo, consideriamo il sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{cases} x(t+1) & = & A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) & = & C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$



La retroazione lineare dello stato

$$u(t) = Kx(t) + r(t)$$

fa sì che in anello chiuso il sistema sia descritto dalla seguente:

$$\begin{cases} x(t+1) & = & (A+BK)x(t) + B\,r(t) \\ y(t) & = & (C+DK)x(t) + D\,r(t) \end{cases}$$

matrice di stato di
anello chiuso

Assegnazione degli autovalori

Il teorema già dimostrato nel caso continuo (e riportato qui sotto per comodità) vale anche nel caso discreto, perché l'assegnazione degli autovalori è in effetti un problema puramente algebrico "trovare la matrice K tale che $A+BK$ abbia autovalori assegnati", indipendentemente dal significato delle matrici A e B

Teorema

Date $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ gli autovalori della matrice $A+BK$ possono essere assegnati ad arbitrio, attraverso la scelta di una opportuna matrice $K \in R^{m\times n}$, SE E SOLO SE la coppia (A, B) è controllabile.

Anche i metodi per l'assegnazione già visti valgono senza cambiamenti.

Ovviamente, se si vuole ottenere un sistema in anello chiuso asintoticamente stabile, bisognerà questa volta scegliere degli autovalori all'interno della circonferenza unitaria.

Sistemi a tempo discreto: controllo LQ

La formulazione del problema di controllo ottimo lineare quadratico è analoga.

Consideriamo il sistema lineare tempo-invariante:

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\
z(t) &= Mx(t)
\end{aligned}
$$

Il vettore $z(t)$ è una "uscita fittizia" che rappresenta le variabili significative ai fini delle prestazioni.

Vogliamo trovare l'azione di controllo $u(t), \quad t \geq 0$ che minimizza il *costo*

$$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \left[z^T(t) Q z(t) + u^T(t) R u(t) \right]$$

per ogni stato iniziale $x(0)$.

Le matrici Q, R sono reali, simmetriche e definite positive.

Teorema

Dati il sistema lineare tempo-invariante:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$z(t) = Mx(t)$$

e il costo $$J(u) = \sum_{t=0}^{\infty} \left[z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t) \right]$$

dove le matrici Q, R sono reali, simmetriche e definite positive.

Se la coppia (A, B) è controllabile e la coppia (A, M) è osservabile allora l' ingresso $u^*(t)$ che minimizza il costo è una **retroazione lineare dello stato** ed è indipendente dallo stato iniziale $x(0)$. In particolare:

$$u^*(t) = K^* x(t) = -\left[R + B^T P_c^* B \right]^{-1} B^T P_c^* A x(t)$$

dove P_c^* è l' unica soluzione simmetrica e definita positiva dell' equazione seguente, detta *equazione algebrica di Riccati a tempo discreto*.

$$P_c = A^T \left[P_c - P_c B \left[R + B^T P_c B \right]^{-1} B^T P_c \right] A + M^T Q M$$

Il costo ottimo

Si può dimostrare che, assegnato lo stato iniziale $x(0)$, il costo ottimo del transitorio corrispondente è dato da:

$$J(u^*) = x^T(0) P_c^* x(0)$$

Matrice Hamiltoniana

La matrice Hamiltoniana è, nel caso discreto:

$$H \doteq \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^TA^{-T}M^TQM & -BR^{-1}B^TA^{-T} \\ -A^{-T}M^TQM & A^{-T} \end{bmatrix}$$

Dove si assume che A sia invertibile (esistono delle varianti valide anche se questa condizione non è verificata). Detta

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad V_1 \in R^{n\times n}, \quad V_2 \in R^{n\times n}$$

una matrice le cui colonne sono gli n autovettori associati agli autovalori che stanno all'interno del cerchio unitario, la soluzione dell'equazione di Riccati è:

$$P_c^* = V_2V_1^{-1}$$

Stima dello stato

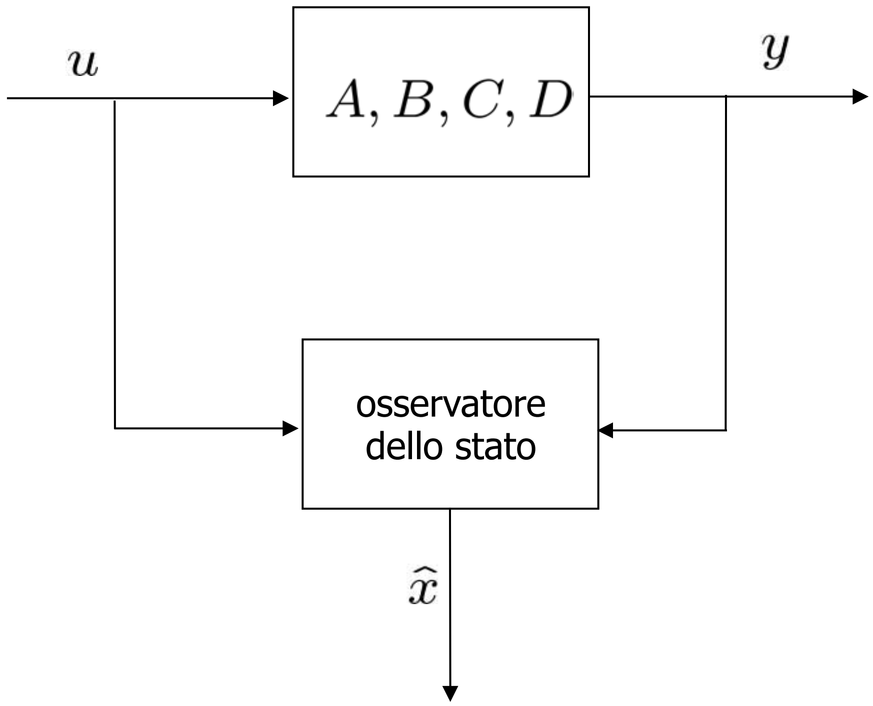
Quanto visto finora sulla retroazione dello stato assume che ciascuna componente dello stato del sistema sia nota in ciascun istante di tempo. In numerosi casi, tuttavia, lo stato del sistema non è interamente accessibile per varie ragioni:

1. Alcune variabili di stato possono non essere misurabili (ad esempio la temperatura in una parte non accessibile di un motore a reazione);
2. il sensore che servirebbe per la misura è troppo costoso;
3. l'ambiente è troppo rumoroso, sicché ogni eventuale misura sarebbe inservibile perché affetta da errore troppo grande;
4. …

Allora **si rende necessario *stimare* lo stato del sistema** sulla base delle informazioni disponibili (tipicamente ingressi e uscite in un certo intervallo di tempo)

L'osservatore

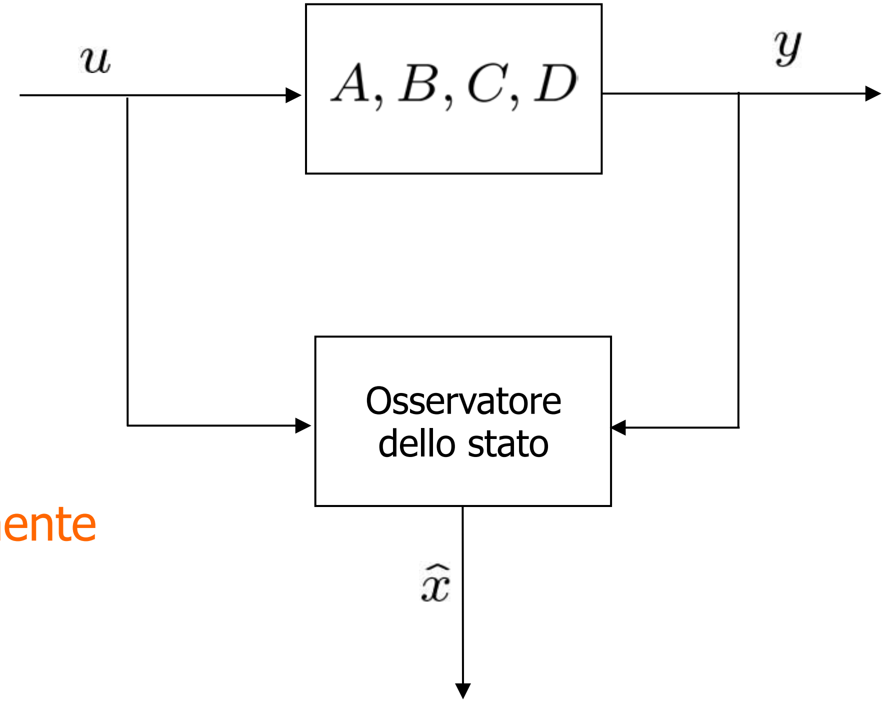
Il dispositivo che, sulla base della conoscenza di ingresso u e uscita y in un certo intervallo di tempo, fornisce una stima $\widehat{x}$ dello stato x del sistema prende il nome di *osservatore dello stato*.



L'osservatore di Luenberger

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x + D\,u \end{cases}$$



un particolare osservatore, detto *osservatore di Luenberger* è quello così definito:

matrice opportunamente scelta

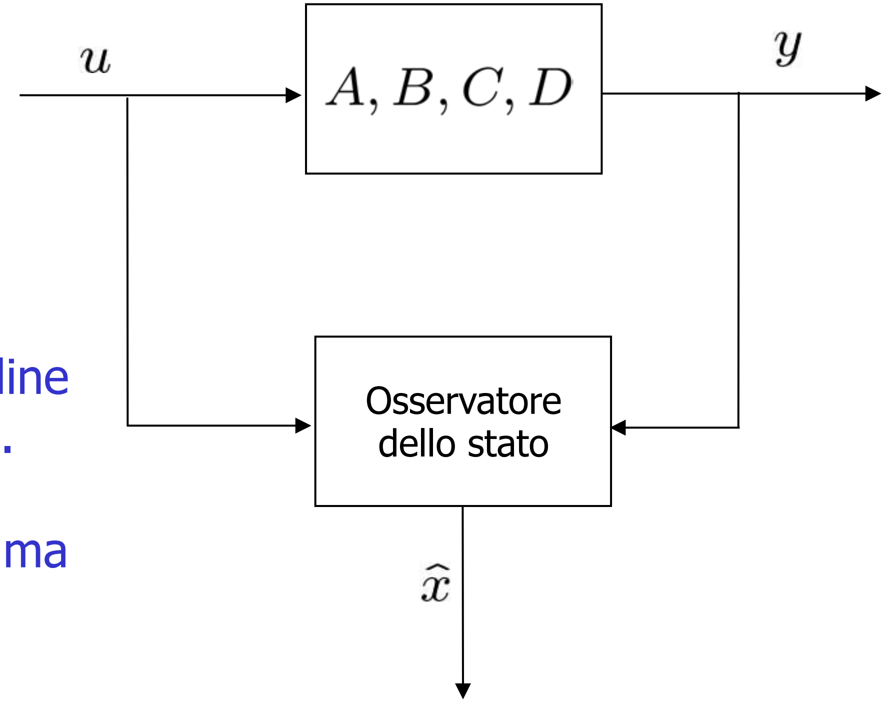
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + B\,u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\,\hat{x} + D\,u \end{cases}$$

uscita stimata (calcolata cioè sulla base dello stato stimato)

la matrice della dinamica è la stessa

uscita effettiva (misurata)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + B\,u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\,\hat{x} + D\,u \end{cases}$$



- L'osservatore di Luenberger è un sistema dinamico lineare.
- L'ordine di queste sistema è lo stesso ordine del sistema di cui si vuole stimare lo stato.
- Lo stato dell'osservatore è $\hat{x}$, cioè la stima dello stato "vero " del sistema.
- L'osservatore di Luenberger ha in ingresso, oltre all'ingresso del sistema osservato, anche un termine "correttivo" $L(y - \hat{y})$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} & = & A\,\hat{x} + B\,u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} & = & C\,\hat{x} + D\,u \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima e ricordando che $y = C\,x + D\,u$
si può scrivere:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + (B - LD)u + Ly$$

ossia, in forma compatta:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + [B - LD \quad L]\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

Dunque:

1. la dinamica dello stato stimato è governata dalla matrice $A - LC$

2. il vettore di ingresso dell'osservatore è composto dall'ingresso e dall'uscita del sistema da osservare.

La dinamica dell'errore (1)

L'errore di stima a un dato istante di tempo è la differenza fra lo stato effettivo del sistema e lo stato stimato dall'osservatore:

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$$

Come evolve nel tempo l'errore di stima? Derivando la precedente si trova

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\widehat{x}}(t) = A\,x + B\,u - [A\,\widehat{x} + B\,u + L(\underbrace{y - \widehat{y}}_{Cx + \cancel{Du} - C\widehat{x} - \cancel{Du}})]$$

$$= A\,x + B\,u - [A\,\widehat{x} + B\,u + LC(x - \widehat{x})] = (A - LC)(x - \widehat{x})$$

ossia

$$\boxed{\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)}$$

sistema lineare autonomo governato dalla matrice $A - LC$

La dinamica dell'errore (2)

Integrando si trova

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0)$$

Se gli autovalori di $A - LC$ sono nel semipiano sinistro aperto, allora si avrà che $e(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$ indipendentemente dallo stato iniziale $e(0) = x(0) - \widehat{x}(0)$

In altre parole, quale che sia il valore iniziale dell'errore di stima, esso tende asintoticamente a zero.

valore al quale viene inizializzato lo stato dell'osservatore

Lemma

E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori della matrice $A - LC$ tramite la scelta di una opportuna $L \in R^{n \times p}$ SE E SOLO SE se la coppia (A, C) è osservabile.

Dimostrazione

Le matrici $A - LC$ e $A^T - C^T L^T$ hanno gli stessi autovalori essendo una la trasposta dell'altra. Ma per il teorema di assegnazione degli autovalori (cfr parte 8, slide 10) è possibile assegnare ad arbitrio gli autovalori alla $A^T - C^T L^T$ attraverso la scelta di una opportuna L^T se e solo se la coppia (A^T, C^T) è controllabile. Il che, per dualità, è equivalente a dire che (A, C) è osservabile.

C.V.D.

Sistemi rilevabili

Quindi se il sistema è osservabile, la dinamica dell'errore di stima

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

può essere arbitrariamente fissata attraverso la scelta del guadagno L dell'osservatore di Luenberger. Naturalmente, se si vuole che l'errore vada a zero almeno asintoticamente, la dinamica dovrà essere scelta *stabile*.

Se invece il sistema (ovvero la coppia (A, C)) non è osservabile, allora è ancora possibile costruire un osservatore stabile a patto che i modi non osservabili (quelli che non si possono alterare attraverso la scelta di L) siano stabili.

Un sistema (o una coppia (A, C)) tale che gli eventuali modi non osservabili siano asintoticamente stabili si dice *rilevabile* (detectable)

Scelta del guadagno dell'osservatore

E' ovviamente auspicabile non solo che l'errore di stima vada a zero asintoticamente, ma anche che vada a zero "in maniera sufficientemente veloce". Questo significa che gli autovalori dell'osservatore devono essere sufficientemente lontani dall'asse immaginario (cioè avere parte reale sufficientemente negativa). Ma d'altra parte un guadagno troppo grande rende l'osservatore troppo sensibile al rumore di misura, riducendo l'accuratezza della stima.

Riassumendo, gli autovalori da assegnare all'osservatore vanno scelti tenendo conto due opposte esigenze:

- rapidità di convergenza della stima
- insensibilità al rumore di misura

Osservazione

E' importante rilevare che nel caso dell'osservatore, la presenza del rumore di misura **è l'unica** ragione che impedisce l'impiego di guadagni arbitrariamente alti (e quindi di stime arbitrariamente veloci). Questo perché l'osservatore è tipicamente implementato in un calcolatore digitale, ove non vi è alcuna limitazione all'impiego di guadagni elevati.

Nel caso della scelta del guadagno K della retroazione dello stato invece, oltre al rumore di misura dello stato stesso, vi è anche il limite fisico dovuto alle sollecitazioni massime che gli attuatori possono sopportare.

Un osservatore "banale"

E' possibile scegliere $L = 0$?

Ciò significherebbe eliminare l' informazione fornita dal termine $y - \hat{y}$ e ottenere l' osservatore:

$$\dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + B\,u$$

cioè un osservatore che è una copia del sistema da osservare. Tuttavia:

- Se $e(0) \neq 0$ allora $e(t)$ va a zero solo se A è stabile.
- Non c' è modo di modificare la rapidità di convergenza a zero dell' errore.
- Non potendo modificare la rapidità di convergenza, diventa essenziale inizializzare l' osservatore nella maniera più precisa possibile, cioè avere $\hat{x}(0) \approx x(0)$ e questo raramente è possibile.

Esempio

Consideriamo la coppia osservabile:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vogliamo assegnare gli autovalori ad $A - LC$. Il polinomio caratteristico desiderato è $\alpha_d(s) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$

E' possibile ricondursi al problema *duale* di assegnazione degli auto$A_D + B_D K_D$ ponendo:

$$A_D = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_D = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_D = -L^T$$

La trasformazione che mette il sistema duale in forma canonica di controllo è

$$A_{D_c} = T^{-1} A_D T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad -a_i$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Applicando le $\quad k_i = a_i - d_i, \quad i = 0, \ldots, n-1 \quad$ si trova subito

$$K_{D_c} = \begin{bmatrix} -d_0 & -d_1 - 2 & -d_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto la soluzione del problema di assegnazione duale è

$$K_D = K_{D_c} T^{-1} = \begin{bmatrix} -d_0 & -d_1 - 2 & -d_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -d_2 + 1 & d_2 - d_1 - 3 & -d_0 + d_1 - 3d_2 + 5 \end{bmatrix}$$

Infine:

$$L = -K_D^T = \begin{bmatrix} d_2 - 1 \\ -d_2 + d_1 + 3 \\ d_0 - d_1 + 3d_2 - 5 \end{bmatrix}$$

Formula di Ackermann

Si sarebbe pervenuti direttamente allo stesso risultato applicando la Formula di Ackermann, nella sua versione per l'osservabilità:

$$L = \alpha_d(A)Q^{-1}e_n$$

Dove Q è la matrice di osservabilità della coppia (A, C)

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

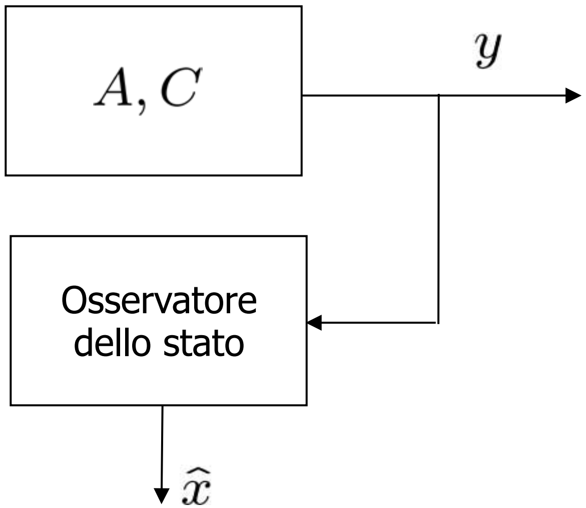
Esempio

Consideriamo il sistema autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x \\ y = C\,x \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E costruiamo l'osservatore di Luenberger:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\,\hat{x} + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\,\hat{x} \end{cases}$$



E' facile verificare che ponendo

$$L = \begin{bmatrix} d_0 - 2 \\ d_1 - 2 \end{bmatrix}$$

gli autovalori di $A - LC$ vengono assegnati in corrispondenza delle radici del polinomio $\alpha_d(s) = s^2 + d_1 s + d_0$

Infatti

$$det(sI-(A-LC)) = det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -d_0 \\ 1 & -d_1 \end{bmatrix}\right) = s^2+d_1 s+d_0$$

L'errore $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ è governato dall'equazione

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

Consideriamo ora tra diversi polinomi (ossia tre diverse coppie di autovalori) e rappresentiamo graficamente il movimento dell'errore quando

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

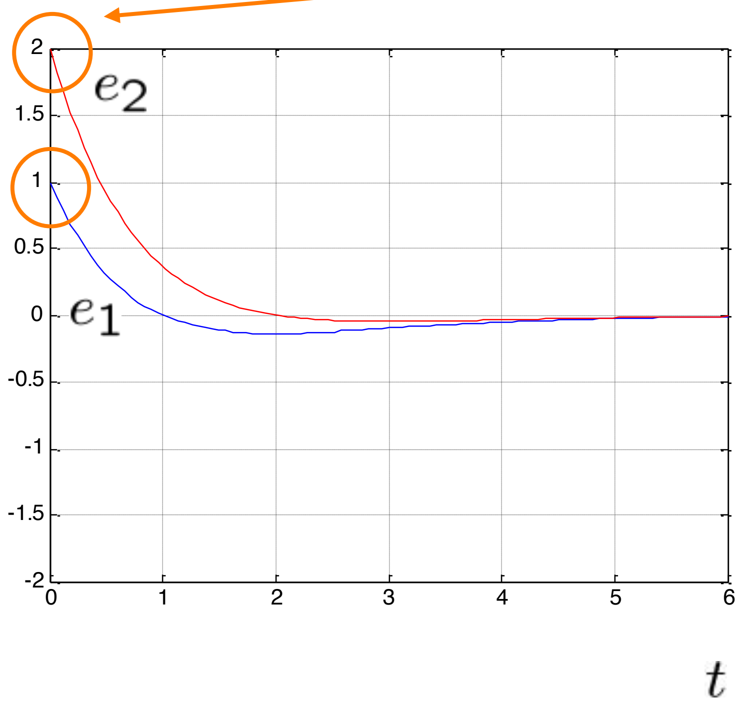
In molti casi, in assenza di informazioni su quale sia lo stato iniziale del sistema, l'osservatore viene inizializzato a zero.

Caso A

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_d(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$



All'istante iniziale l'errore è pari allo stato, poiché l'osservatore è inizializzato a zero:

$$e(0) = x(0) - \hat{x}(0) = x(0)$$

Poi decresce, governato dalla dinamica stabile:

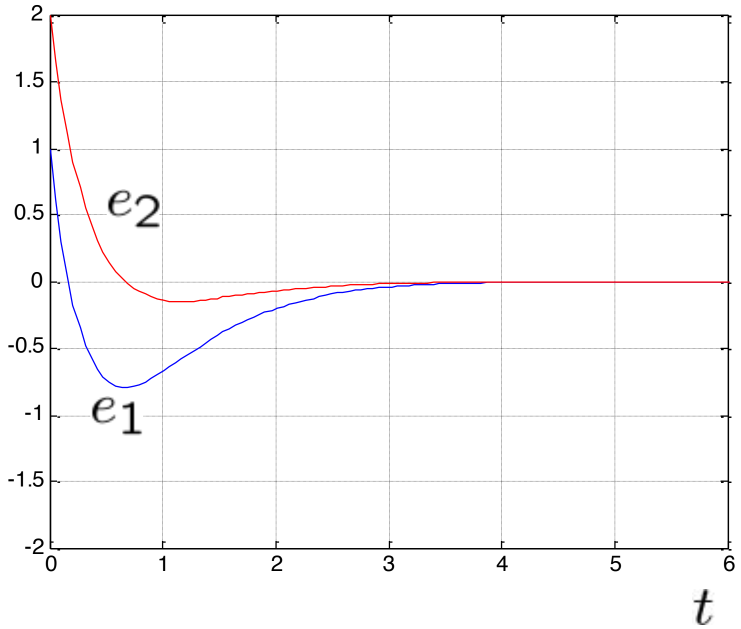
$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

Caso B

$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -2$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_d(s) = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$$



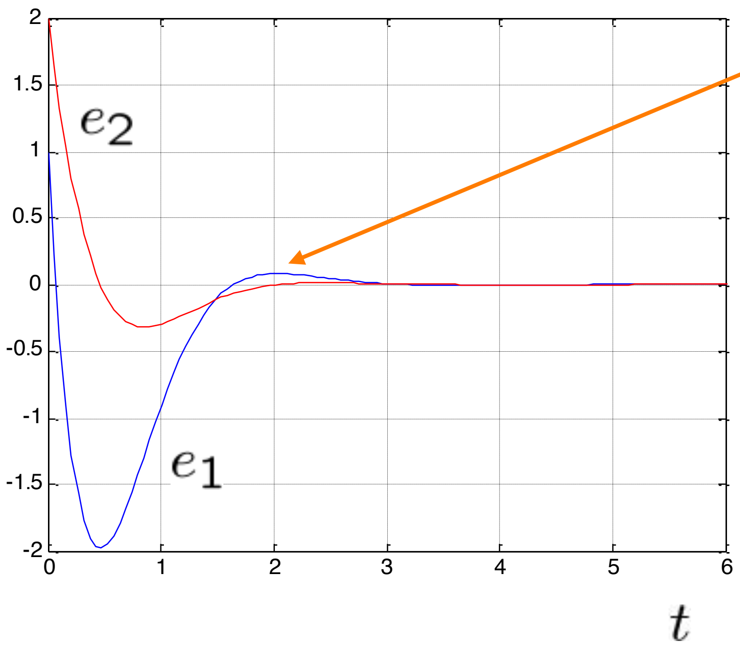
N.B. il transitorio dell'errore è molto più breve (circa la metà) di quello del caso A. Infatti gli autovalori assegnati sono più lontano dall'asse immaginario rispetto al caso precedente.

Caso C

$$\lambda_1 = -2 - 2j, \quad \lambda_2 = -2 + 2j$$

$$L = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_d(s) = (s - 2 - 2j)(s - 2 + 2j) = s^2 + 4s + 8$$



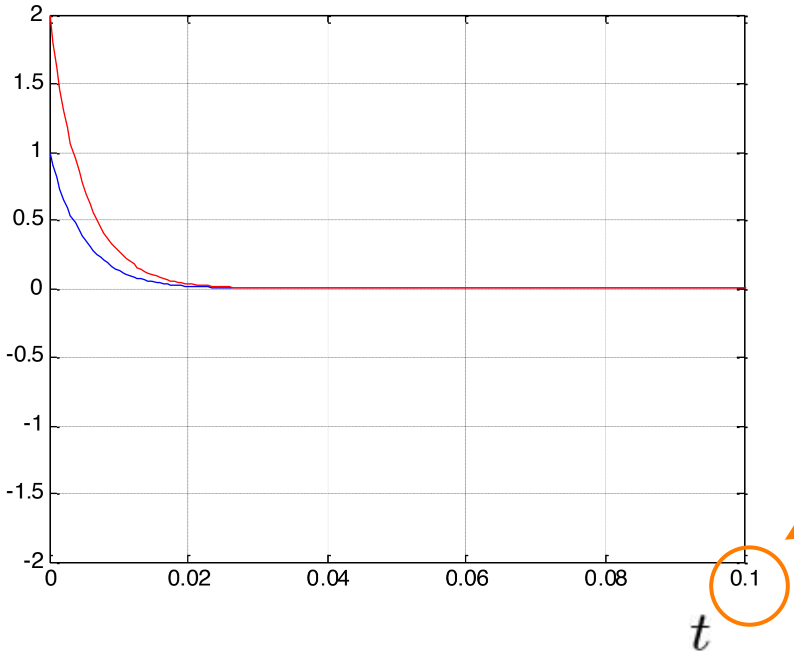
La durata del transitorio è circa la stessa del caso B, ma compaiono modi pseudoperiodici perché gli autovalori hanno parte complessa non nulla

Caso D (una scelta estrema)

$$\lambda_1 = -200, \qquad \lambda_2 = -.5$$

$$\alpha_d(s) = (s+200)(s+0.5) = s^2 + 200.5s + 100$$

$$L = \begin{bmatrix} 98 \\ 198.5 \end{bmatrix}$$

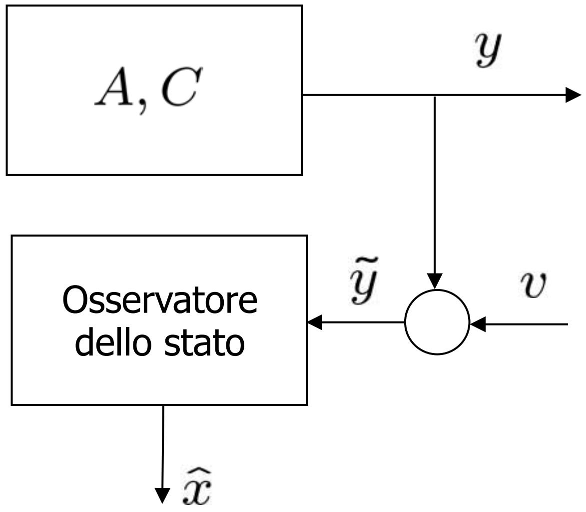


Il guadagno è molto elevato

Il transitorio è **brevissimo**.

Tuttavia…

… vediamo cosa succede in presenza di rumore di misura:



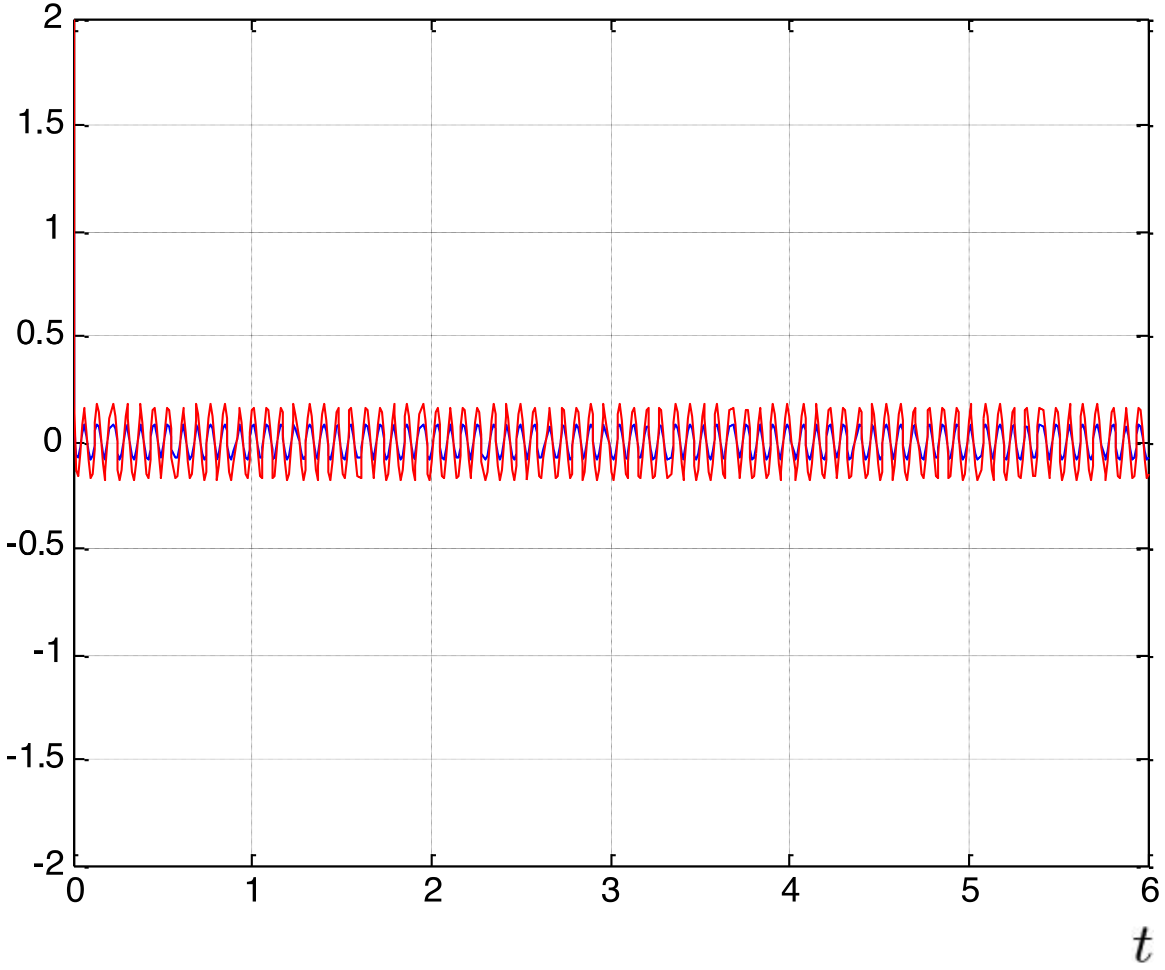
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\,\hat{x} + L(y + v - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\,\hat{x} \end{cases}$$

È facile verificare che l’errore ora è governato dalla:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - Lv(t)$$

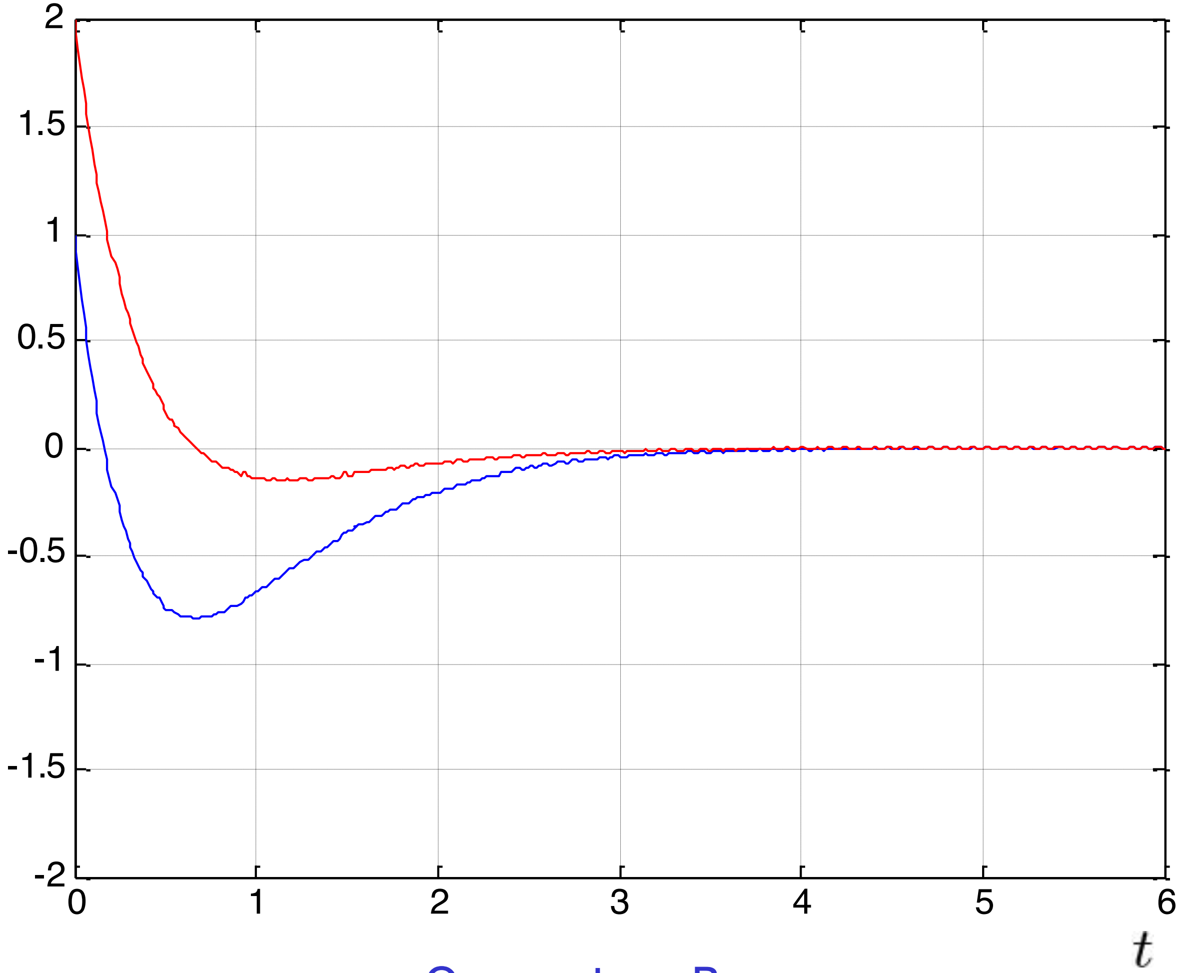
Supponiamo che sia $v(t) = 0.2 \sin 80t$

A partire dalle stesse condizioni iniziali, il movimento dell'errore è il seguente:

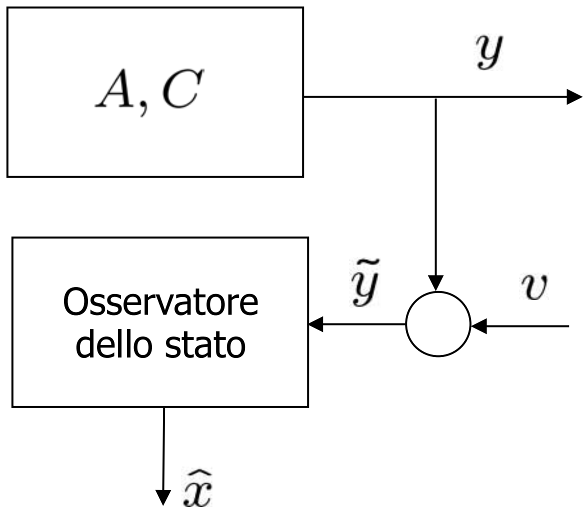


Osservatore D

L'osservatore B invece si comporta molto meglio, attenuando il rumore di misura:



Osservatore B



$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) - Lv(t)$$

PER CASA: calcolare le funzioni di trasferimento fra l'ingresso v ed e_1 ed e_2 nei casi B e D, tracciarne il diagramma di Bode asintotico e confrontare i diagrammi ottenuti.

Stima ottima dello stato

Si è appena visto che il rumore pone un vincolo alla durata del transitorio dell'osservatore.

DOMANDA: assumendo di avere delle informazioni circa il rumore (di processo e di misura), è possibile scegliere la matrice L in maniera ottima, rispetto ad un ragionevole criterio?

RISPOSTA: SI', ciò è possibile ricorrendo al *filtro di Kalman-Bucy* (comunemente noto come *filtro di Kalman*)

Washington DC, 7 ottobre 2009. Il presidente Obama conferisce a Rudolf Kalman la *National Medal of Technology and Innovation*.

Il filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è un osservatore ottimo (sotto certe ipotesi sul rumore e rispetto ad un certo criterio di ottimalità)

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

rumore *di processo* (dovuto ad esempio a disturbi in ingresso)

rumore *di misura* (dovuto ad esempio a imperfezioni del sensore di misura)

In questo caso con y si indica l'uscita misurata (cioè l'uscita effettiva del sistema più il rumore di misura)

N.B. la scrittura qui sopra è equivalente a quella qui a fianco, nella familiare forma (A,B,C,D)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + [B \quad \Gamma \quad 0]\begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix} \\ y = Cx + [0 \quad 0 \quad I]\begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ipotesi (1)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

Si assume che sia w che v siano processi stocastici Gaussiani, stazionari, bianchi e a media nulla.

$w(t)$ e $v(t)$ sono, $\forall t$, variabili casuali a distribuzione Gaussiana.

$$E(w(t)) = 0, \ \forall t \qquad E(v(t)) = 0, \ \forall t$$

$$E(w(t)w^T(t)) = W, \ \forall t \qquad E(v(t)v^T(t)) = V, \ \forall t$$

$$E(w(t_1)w^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2 \qquad E(v(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2$$

Matrici simmetriche e definite positive (per definizione di covarianza)

Ipotesi (2)

Inoltre i rumori di processo e di misura sono fra loro indipendenti, ossia

$$E(w(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1, t_2$$

Si assume poi che lo stato iniziale sia una variabile casuale, indipendente dalle precedenti, Gaussiana di media e covarianza note:

(sotto queste ipotesi, quale è la migliore inizializzazione dell'osservatore?)

$$E(x(0)) = x_0$$

$$E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] = P_{e0}$$

Teorema (filtro di Kalman)

Nelle ipotesi appena enunciate, se le coppie (A, Γ) e (A, C) sono rispettivamente controllabile e osservabile, allora l' osservatore

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

è stabile ed ottimo (nel senso che minimizza la covarianza $E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$ dell' errore di stima *a regime*) se il guadagno viene scelto come segue

$$L^* = P_e^* C^T V^{-1}$$

dove P_e^* è l' unica soluzione simmetrica e definita positiva dell' *equazione algebrica di Riccati duale:*

$$P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + \Gamma W \Gamma^T = 0$$

Osservazione

L'equazione di Riccati appena vista si può ottenere dall'equazione di Riccati per il controllo LQ:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0$$

effettuando le sostituzioni seguenti:

$$A \rightarrow A^T$$

$$B \rightarrow C^T$$

$$M \rightarrow \Gamma^T$$

$$Q \rightarrow W$$

$$R \rightarrow V$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se i rumori di processo e misura sono descritti da

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; V = \rho > 0, \; W = 1$$

il filtro ottimo è dato da

$$L^* = P_e^* C^T V^{-1}$$

dove P_e^* è la soluzione simmetrica e definita positiva di

$$P_e A^T + A P_e - P_e C^T V^{-1} C P_e + \Gamma W \Gamma^T = 0$$

Sostituendo si perviene all'equazione:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_e + P_e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\rho} P_e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ \ 1] P_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ \ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Che è la stessa equazione trovata nell'esempio sul controllo LQ (perché?).

La soluzione definita positiva è $P_e^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix}$

da cui $L^* = P_e^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho}$

Osservazione

$$L^* = P_e^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{2\rho\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \frac{1}{\rho}$$

Entrambe le componenti della matrice di guadagno dell'osservatore sono funzioni monotone decrescenti di ρ .

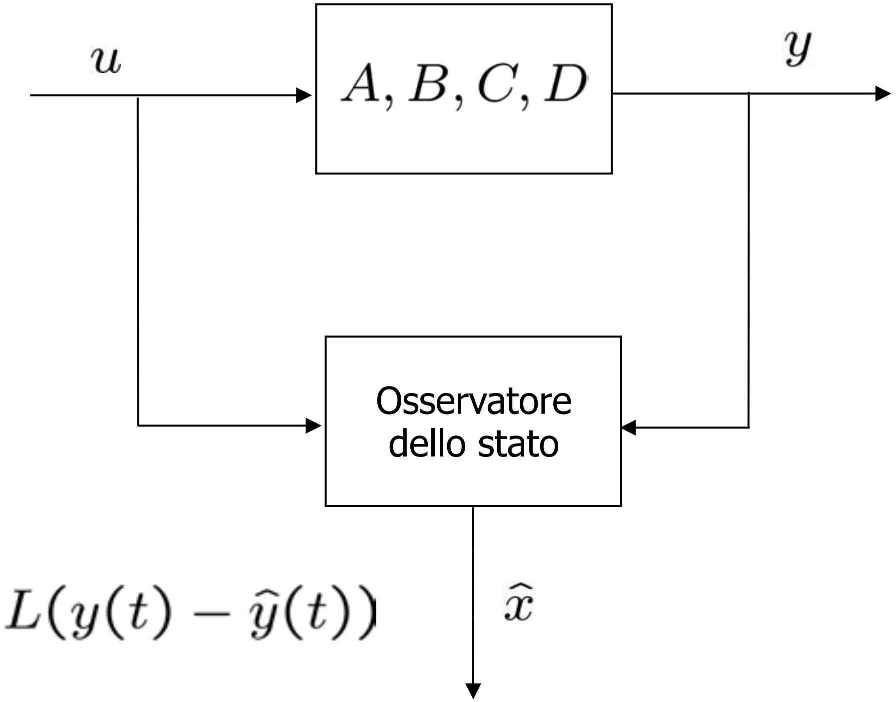
Quindi se la covarianza dell'errore di misura aumenta, il guadagno dell'osservatore ottimo diminuisce.

Questo è del tutto ragionevole, perché se le misure sono molto rumorose è opportuno che l'osservatore dia loro meno credito nell'aggiornare il proprio stato.

Sistemi a tempo discreto: osservatore

Consideriamo il sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{cases} x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$



In maniera analoga al caso a tempo continuo, si definisce l'osservatore di Luenberger:

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

Ovvero, in forma più compatta

$$\hat{x}(t+1) = (A - LC)\hat{x}(t) + [B - LD \quad L]\begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

La dinamica dell'errore

L'errore di stima:

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$$

evolve nel tempo secondo l'equazione:

$$e(t+1) = (A - LC)e(t)$$

E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori della matrice $A - LC$ tramite la scelta di una opportuna $L \in R^{n \times p}$ SE E SOLO SE se la coppia (A, C) è osservabile.

Se invece il sistema (ovvero la coppia (A, C)) non è osservabile, allora è ancora possibile costruire un osservatore stabile a patto che i modi non osservabili siano stabili. Si parla in questo caso di sistema *rilevabile*.

Scelta degli autovalori

Gli autovalori assegnati devono evidentemente appartenere al **cerchio unitario** se si vuole garantire la convergenza a zero dell'errore a partire da qualsiasi condizione iniziale.

Inoltre, come nel caso a tempo continuo, gli autovalori da assegnare all'osservatore vanno scelti tenendo conto due opposte esigenze:

- rapidità di convergenza della stima
- insensibilità al rumore di misura

L'osservatore *deadbeat*

Una peculiarità dell'osservatore a tempo discreto è la possibilità di assegnare gli autovalori in modo che l'errore di stima vada a zero **in tempo finito**. Si parla in questo caso di *osservatore deadbeat*.

Infatti se si sceglie la matrice L in modo che gli autovalori di $A - LC$ siano **tutti nulli**, allora si ha che per un qualche $k \leq n$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = (A - LC)^k e(0) = 0$$

Ossia, in al più n passi l'errore di stima va a zero.

Infatti la matrice $(A - LC)^k$ è certamente nulla per un qualche $k \leq n$, in particolare per k pari alla dimensione del più grande miniblocco di Jordan associato all'autovalore nullo.

Infatti $\quad (A-LC)^k = (TJT^{-1})^k = TJ^kT^{-1}$

Dove J è la forma di Jordan di $A-LC$ e quindi è una matrice diagonale a blocchi

$$J = \text{diag}\{J_1, \ldots, J_m\}$$

i cui blocchi sono tutti della forma

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Come è noto per le proprietà delle matrici diagonali a blocchi:

$$J^k = \text{diag}\{J_1^k, \ldots, J_m^k\}$$

Ma il generico blocco J_i^k è nullo per tutti e soli i $k \geq n_i$ dove n_i è la dimensione del blocco.

Pertanto, indicando con

$$\bar{k} = \max_{i=1,\ldots,m} \{n_i\}$$

la dimensione del più grande miniblocco di Jordan, si ha che $(A - LC)^k$ si annulla per tutti e soli i $k \geq \bar{k}$

Esempio

Consideriamo la coppia osservabile:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vogliamo assegnare autovalori tutti nulli ad $A - LC$. Il polinomio caratteristico desiderato è dunque $\alpha_d(z) = z^3$

Applicando la formula di Ackermann duale si trova:

$$L = \alpha_d(A)Q^{-1}e_n = A^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Da cui

$$A-LC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} [1 \;\; 0 \;\; 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-LC)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A-LC)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque l'errore va certamente a zero in tre passi, qualunque sia l'errore all'istante iniziale.

ESERCIZIO PER CASA: trovare, se esistono, gli errori all'istante iniziale per i quali l'errore va a zero in due passi e in un passo.

Sistemi a tempo discreto: il filtro di Kalman

La formulazione del problema del filtro di Kalman per i sistemi a tempo discreto è analoga al caso continuo:

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x(t+1) & = & A\,x(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \\ y(t) & = & C\,x(t) + v(t) \end{cases}$$

rumore *di processo* (dovuto ad esempio a disturbi in ingresso)

rumore *di misura* (dovuto ad esempio a imperfezioni del sensore di misura)

In questo caso con y si indica l'uscita misurata (cioè l'uscita effettiva del sistema più il rumore di misura)

Ipotesi (1)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

Si assume che sia w che v siano processi stocastici Gaussiani, stazionari, bianchi e a media nulla.

$w(t)$ e $v(t)$ sono, $\forall t$, variabili casuali a distribuzione Gaussiana.

$$E(w(t)) = 0, \ \forall t \qquad E(v(t)) = 0, \ \forall t$$

$$E(w(t)w^T(t)) = W, \ \forall t \qquad E(v(t)v^T(t)) = V, \ \forall t$$

$$E(w(t_1)w^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2 \qquad E(v(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1 \neq t_2$$

Ipotesi (2)

Inoltre i rumori di processo e di misura sono fra loro indipendenti, ossia

$$E(w(t_1)v^T(t_2)) = 0, \ \forall t_1, t_2$$

Si assume poi che lo stato iniziale sia una variabile casuale, indipendente dalle precedenti, Gaussiana di media e covarianza note:

$$E(x(0)) = x_0$$

$$E[(x(0) - x_0)(x(0) - x_0)^T] = P_{e0}$$

Teorema (filtro di Kalman a tempo discreto)

Nelle ipotesi appena enunciate, se le coppie (A, Γ) e (A, C) sono rispettivamente controllabile e osservabile, allora l'osservatore

$$\hat{x}(t+1) = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

è stabile ed ottimo (nel senso che minimizza la covarianza $E[(x-\hat{x})(x-\hat{x})^T]$ dell'errore di stima *a regime*) se il guadagno viene scelto come segue

$$L^* = P_e^* C^T (C P_e^* C^T + V)^{-1}$$

dove P_e^* è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva dell'*equazione algebrica di Riccati duale:*

$$P_e = A\left[P_e - P_c C^T \left[V + C P_e C^T\right]^{-1} C P_e\right] A^T + \Gamma W \Gamma^T$$

Osservazione

L'equazione di Riccati appena vista si può ottenere dall'equazione di Riccati per il controllo LQ:

$$P_c = A^T \left[P_c - P_c B \left[R + B^T P_c B \right]^{-1} B^T P_c \right] A + M^T Q M$$

effettuando le sostituzioni seguenti:

$$A \rightarrow A^T$$

$$B \rightarrow C^T$$

$$M \rightarrow \Gamma^T$$

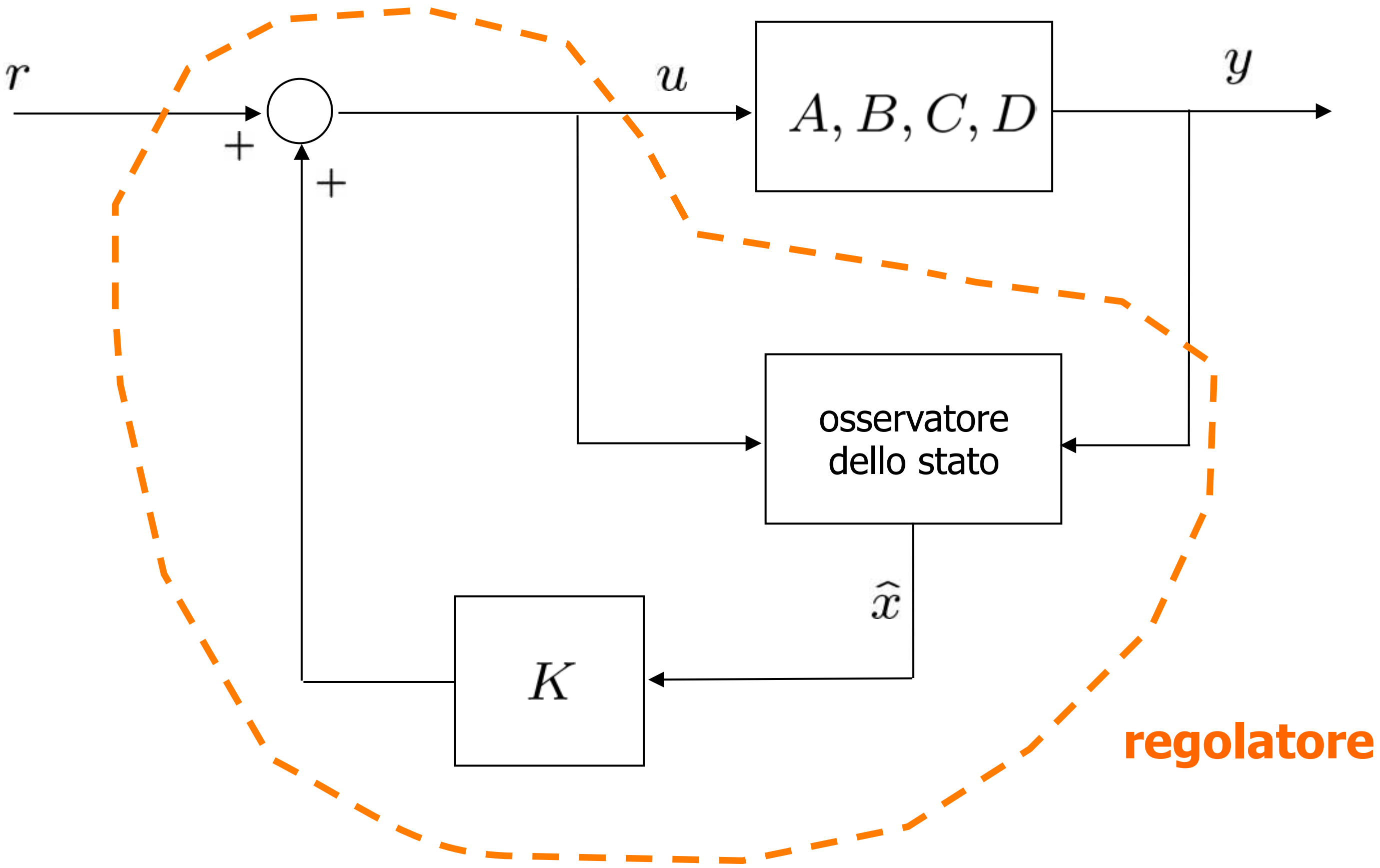
$$Q \rightarrow W$$

$$R \rightarrow V$$

Retroazione dello stato stimato

Quando lo stato del sistema non è accessibile, la stima dello stato ottenuta attraverso un osservatore può essere impiegata per la retroazione. In questo caso si parla di **retroazione dello stato stimato**.

Nel seguito tratteremo i sistemi a tempo continuo. La trattazione per quelli a tempo discreto è analoga e viene omessa.



Il regolatore è costituito da una parte dinamica (l'osservatore, che è appunto un sistema dinamico) e una parte statica (il guadagno K della retroazione lineare). La legge di controllo è:

$$u = K\hat{x} + r$$

Analisi nel dominio del tempo

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

e l'osservatore dello stato

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ z &= \hat{x} \end{cases}$$

dove $\hat{y} = C\hat{x} + Du$.

Applichiamo al sistema la retroazione dello stato stimato $u = K\hat{x} + r$ e analizziamo il comportamento sistema in anello chiuso.

Anzitutto, sfruttando la $\hat{y} = C\,\hat{x} + D\,u$ l'equazione di stato dell'osservatore può essere scritta come segue:

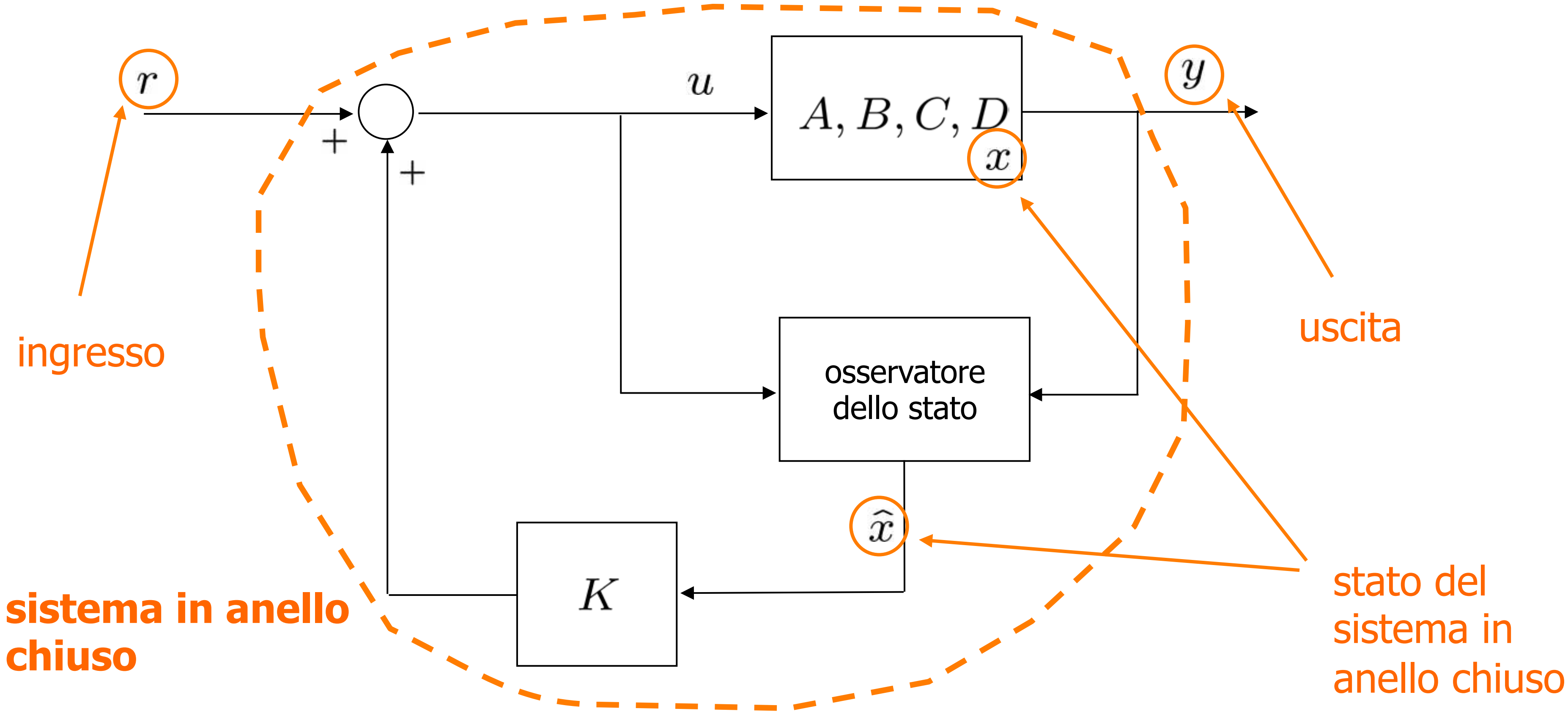
$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + [B - LD \quad L]\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

Da cui, attraverso la $y = C\,x + D\,u$ si trova:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + LCx + Bu \\ &= (A - LC)\hat{x} + LCx + BK\hat{x} + Br \\ &= (A - LC + BK)\hat{x} + LCx + Br\end{aligned}$$

D'altra parte, considerando il sistema sottoposto a retroazione si ha:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ &= Ax + BK\hat{x} + Br\end{aligned}$$



Pertanto, il sistema complessivo è retto dalle equazioni di stato:

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Br$$

$$\dot{\hat{x}} = LCx + (A - LC + BK)\hat{x} + Br$$

e la trasformazione di uscita è $\quad y = Cx + DK\hat{x} + Dr$

Si tratta dunque di un sistema dinamico di ordine $2n$ (infatti sono presenti sia la dinamica del sistema che quella dell'osservatore).

In forma compatta lo si può rappresentare come segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A - LC + BK \end{bmatrix}}^{A_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}}^{B_{cl}} r$$

$$y = \overbrace{[C \quad DK]}^{C_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + Dr$$

Attraverso un cambiamento di base è possibile ottenere una rappresentazione equivalente ma più significativa. Consideriamo un nuovo vettore di stato costituito dallo stato del sistema e dall'errore di stima:

$$\begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Ciò è ottenibile attraverso la trasformazione di coordinate:

$$P \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

E' immediato osservare che

$$P = P^{-1}$$

segue dunque che:

$$P^{-1}A_{cl}P = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix},$$

$$P^{-1}B_{cl} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C_{cl}P = [C+DK \quad -DK]$$

La nuova rappresentazione del sistema in anello chiuso è allora:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [C+DK \quad -DK] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dr$$

Fatto fondamentale

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [C+DK \quad -DK] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dr$$

Per le proprietà delle matrici triangolari a blocchi, gli autovalori di anello chiuso sono l'unione degli autovalori di $A+BK$ e $A-LC$

$$\sigma(A_{cl}) = \{\sigma(A+BK) \cup \sigma(A-LC)\}$$

i quali, nelle ipotesi di controllabilità e osservabilità possono essere arbitrariamente ed **indipendentemente** assegnati attraverso la scelta di K e L.

Proprietà di separazione

E' dunque possibile condurre il progetto in due passi separati:

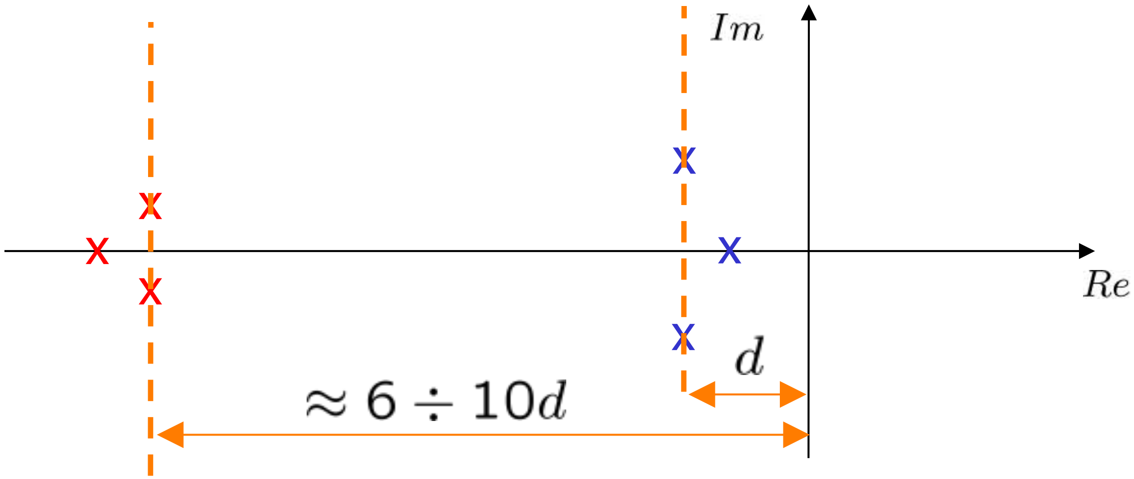
1. Progettare il regolatore a retroazione lineare dello stato COME SE lo stato fosse accessibile. Questo porta alla scelta di una opportuna matrice K che assegna gli autovalori di $A + BK$ dove è desiderabile stiano. In alternativa la matrice può essere individuata risolvendo un problema LQ.
2. Se lo stato non è accessibile, progettare un osservatore dello stato attraverso la scelta di una opportuna matrice L che assegna gli autovalori di $A - LC$. In alternativa la matrice può essere trovata risolvendo un problema di stima ottima (filtro di Kalman).

Nessuna delle due scelte influenza l'altra e quindi lo stato e l'errore di stima evolveranno secondo le rispettive dinamiche assegnate. Ciò prende il nome di **Proprietà di separazione** e non vale, in generale, per sistemi più complessi.

Una regola empirica

Come già visto, gli autovalori di $A - LC$ vanno scelti in modo da garantire che l'errore di stima converga a zero in maniera sufficientemente veloce. Ovviamente la "velocità" di convergenza va valutata rispetto alla "velocità" della grandezza da stimare (ossia lo stato del sistema retroazionato).

Una regola empirica consiste nell'assegnare gli autovalori dell'osservatore in modo che risultino fra 6 e 10 volte più lontani dall'asse immaginario rispetto agli autovalori di $A + BK$.



Osservazione

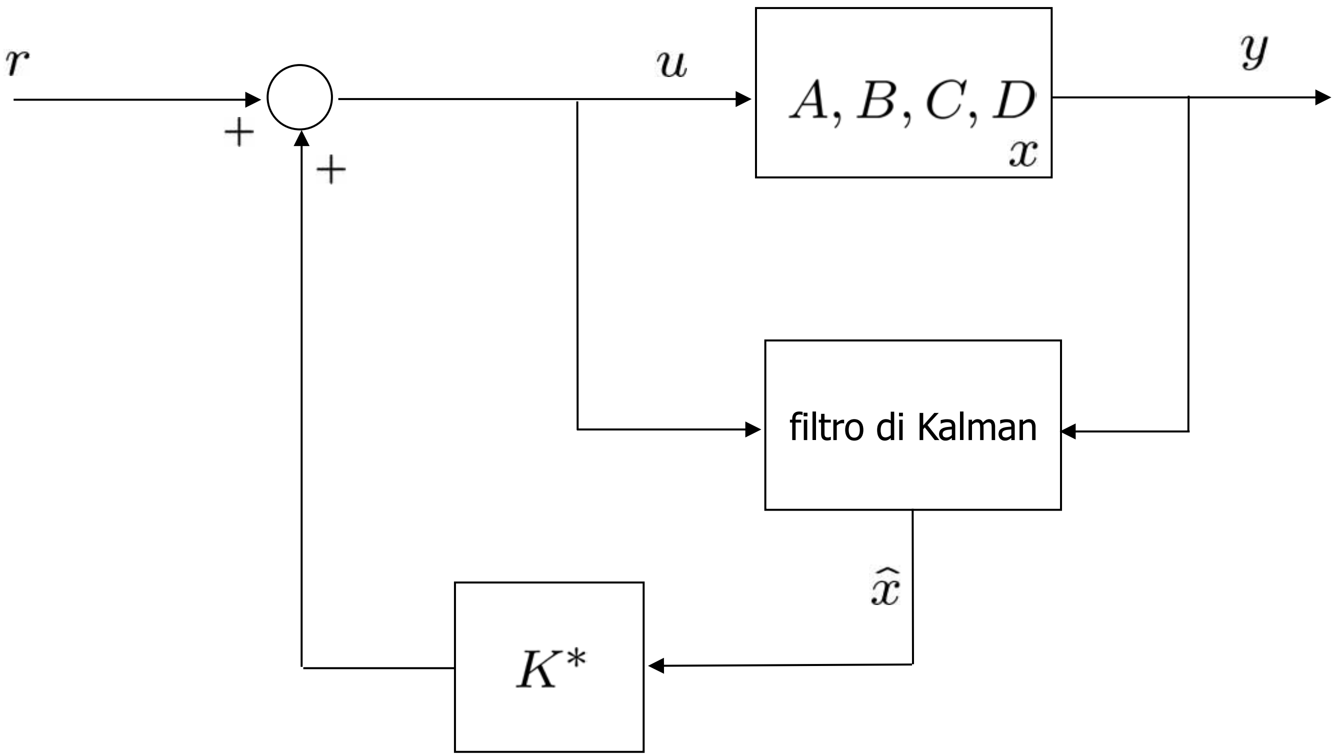
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Come si vede, il sistema in anello chiuso è **non completamente controllabile** rispetto ad r. In particolare, l'errore $e(t)$ è del tutto indipendente da r. Questo fatto è desiderabile, poiché l'errore

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

deve convergere a zero indipendentemente dall'ingresso esterno r.

Il controllo LQG



Quando la matrice di retroazione dello stato stimato viene scelta risolvendo un problema **LQ** e il guadagno dell'osservatore risolvendo un problema di stima ottima sotto ipotesi di rumori di processo e misura **G**aussiani si parla di **controllo LQG**.

Teorema di separazione

Si può dimostrare (si faccia riferimento a un qualsiasi testo sul controllo ottimo) che vale il cosiddetto *Teorema di separazione*. Questo teorema garantisce che **il regolatore LQG è ottimo rispetto al valore atteso della funzione di costo**, cioè minimizza

$$E\left[\int_0^\infty \left[z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)\right] dt\right]$$

nelle ipotesi già introdotte quando si è trattato il filtro di Kalman.

Robustezza

Mentre il controllo LQ garantisce ottimi margini di robustezza, il controllo LQG può dare luogo a sistemi di controllo fragili.

Pertanto l'impiego del controllo LQG è consigliabile solo se il modello del sistema è noto con accuratezza.

Esiste tuttavia una tecnica per ottenere controllori robusti, detta *Loop Transfer Recovery*, che consiste in una scelta iterativa dei parametri di progetto per recuperare la robustezza del controllo LQ (si faccia riferimento alla letteratura specializzata).

Esempio

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponendo

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

gli autovalori di $A + BK$ vengono assegnati in corrispondenza delle radici del polinomio $\alpha_d(s) = (s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$

Esempio (2)

Considerando ora l'osservatore:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} & = & A\,\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} & = & C\,\hat{x} \end{cases}$$

è facile verificare che ponendo

$$L = \begin{bmatrix} d_0 - 2 \\ d_1 - 2 \end{bmatrix}$$

gli autovalori di $A - LC$ vengono assegnati in corrispondenza delle radici del polinomio $\alpha_d(s) = s^2 + d_1 s + d_0$

Esempio (3)

Prendiamo in esame tre distinti osservatori:

$$\alpha_d^{(1)}(s) = (s + \frac{1}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad L^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_d^{(2)}(s) = (s + 5)^2 \quad \Rightarrow \quad L^{(2)} = \begin{bmatrix} 23 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_d^{(3)}(s) = (s + 10)^2 \quad \Rightarrow \quad L^{(3)} = \begin{bmatrix} 98 \\ 18 \end{bmatrix}$$

E confrontiamo la risposta libera del sistema di controllo a retroazione dello stato stimato con quella a retroazione dello stato nei tre casi.

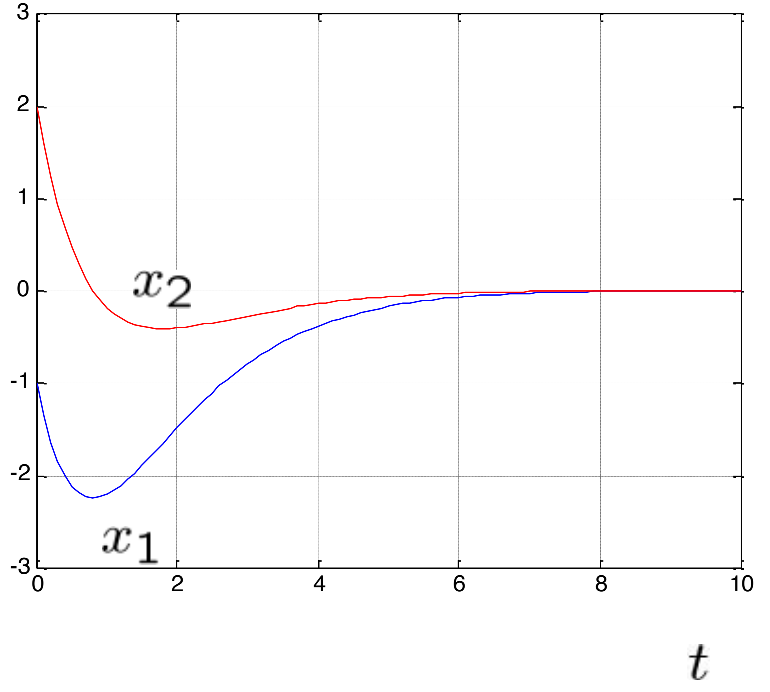
Esempio (4)

Retroazione dello stato

Stato iniziale: $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Qui a fianco il transitorio nel caso di retroazione dello stato (si assume che lo stato sia accessibile, nessun osservatore viene impiegato). La legge di controllo è:

$$u(t) = Kx(t)$$



Esempio (5)

Retroazione dello stato stimato

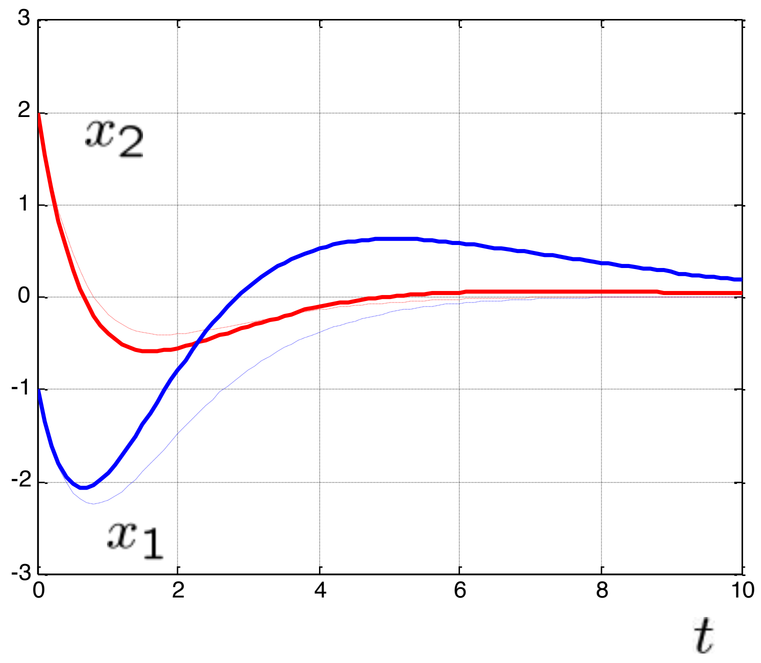
CASO 1: autovalori dell'osservatore entrambi in $-\frac{1}{2}$

Inizializzazione dell'osservatore: $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Qui a fianco il transitorio nel caso di retroazione dello stato stimato.

La legge di controllo è:

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$



Il guadagno dell'osservatore è $L^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ -1 \end{bmatrix}$

Esempio (6)

Retroazione dello stato stimato

CASO 2: autovalori dell'osservatore entrambi in -5

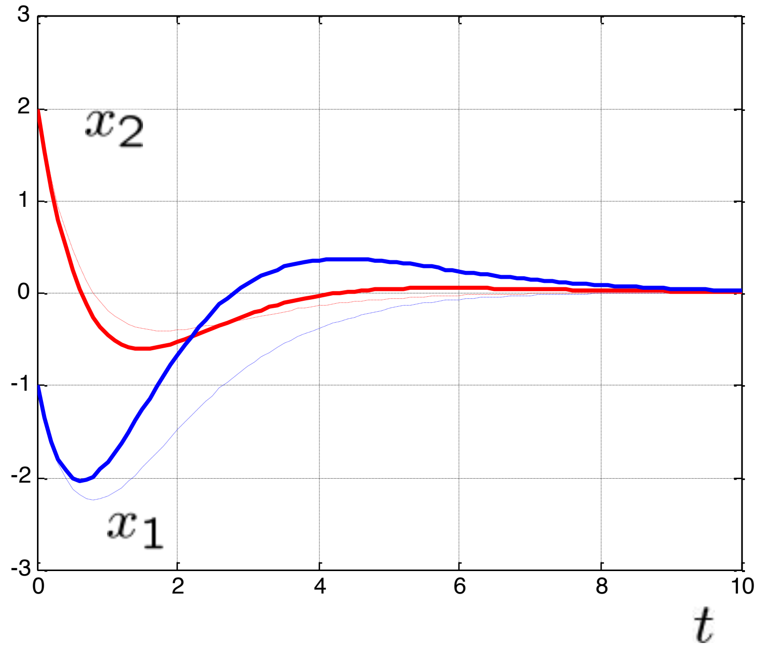
Inizializzazione dell'osservatore: $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Qui a fianco il transitorio nel caso di retroazione dello stato stimato.

La legge di controllo è:

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$

Il guadagno dell'osservatore è $L^{(2)} = \begin{bmatrix} 23 \\ 8 \end{bmatrix}$



Esempio (7)

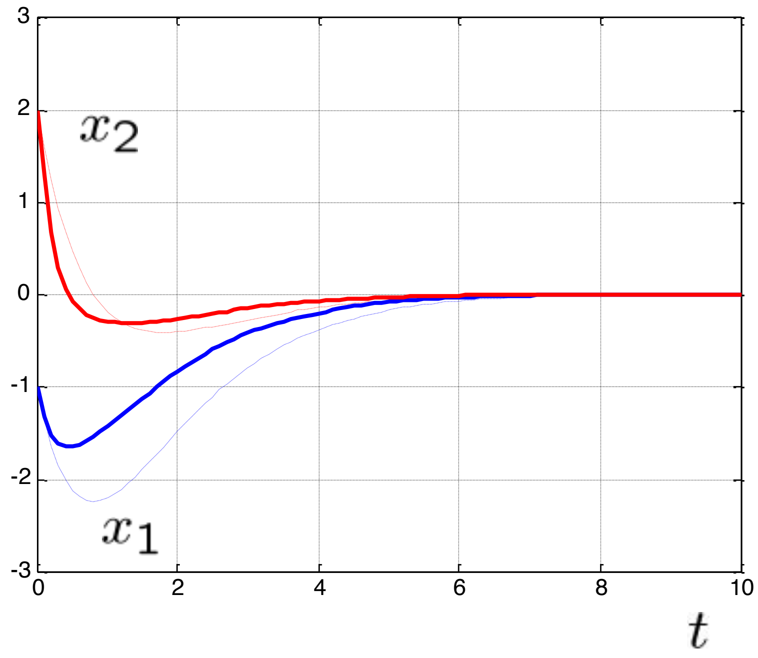
Retroazione dello stato stimato

CASO 3: autovalori dell'osservatore entrambi in -10

Inizializzazione dell'osservatore: $$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qui a fianco il transitorio nel caso di retroazione dello stato stimato. La legge di controllo è:

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$



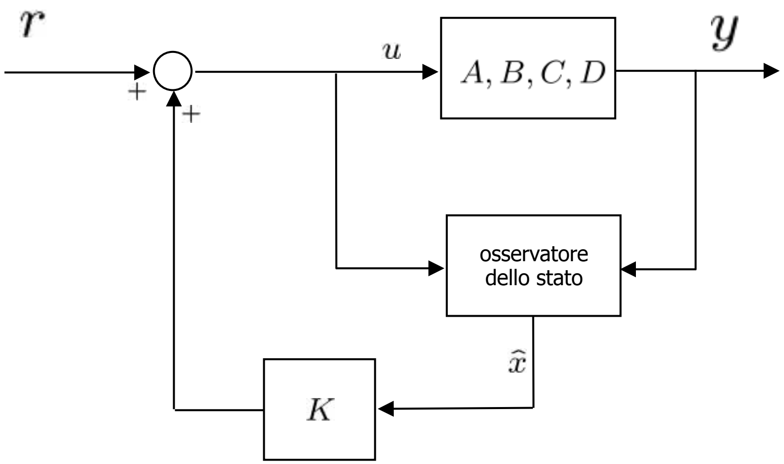
Il guadagno dell'osservatore è $L^{(3)} = \begin{bmatrix} 98 \\ 18 \end{bmatrix}$

Osservazione

Apparentemente il sistema di controllo del CASO 3 (basato sulla retroazione dello stato stimato) si comporta "meglio" del sistema retroazionato con lo stato effettivo. Tuttavia:

1) Il fatto che un particolare transitorio risulti più breve non significa che ciò si verifichi sempre. Dipende dall'inizializzazione dell'osservatore (ovvero, se l'osservatore è sempre inizializzato a zero, dallo stato iniziale del sistema).
2) Le prestazioni si valutano considerando anche la moderazione dell'azione di controllo (controlli troppo forti potrebbero non essere ammissibili).
3) Bisogna sempre tenere presente che guadagni elevati dell'osservatore espongono al rischio di amplificare il rumore di misura.

Analisi nel dominio delle trasformate



Consideriamo il sistema di controllo con retroazione dello stato stimato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [C + DK \quad - DK] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dr$$

Anzitutto calcoliamo la funzione di trasferimento fra l'ingresso r e l'uscita y .

Funzione di trasferimento

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [C+DK \quad -DK] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dr \qquad (\star)$$

$$Y(s) = T(s)R(s)$$

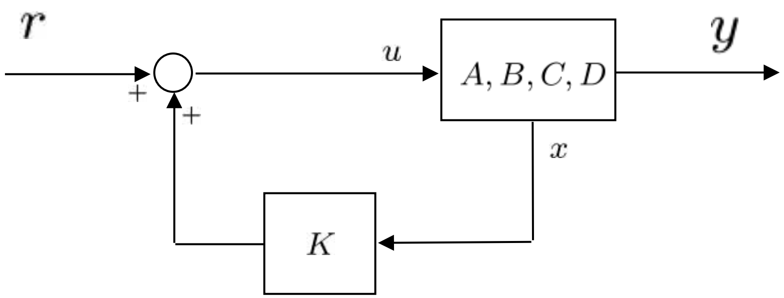
La funzione di trasferimento cercata è (basta calcolarla sulla base della parte controllabile del sistema, poiché i modi non controllabili non compaiono nella funzione di trasferimento):

$$T(s) = [(C+DK)[sI-(A+BK)]^{-1}B+D]$$

Osservazione

$$T(s) = [(C + DK)[sI - (A + BK)]^{-1}B + D]$$

La funzione di trasferimento trovata coincide con la funzione di trasferimento del sistema in figura (cioè del sistema in cui si effettua la retroazione dello stato e NON dello stato stimato). **Cioè dal punto di vista ingresso-uscita il sistema retroazionato si comporta come se non ci fosse alcun osservatore**.



Tuttavia questo è vero SOLO A TRANSITORI ESAURITI O A CONDIZIONI INIZIALI NULLE (si ricordi il significato della funzione di trasferimento di un sistema dinamico)

Tenendo conto delle condizioni iniziali…

Se si trasformano secondo Laplace le equazioni $(\star)$ senza assumere che le condizioni iniziali siano nulle, allora con semplici passaggi algebrici si ottiene (verificarlo per esercizio):

$$
\begin{aligned}
Y(s) = (C + DK)[sI - (A + BK)]^{-1}x(0) \\
-[(C+DK)[sI-(A+BK)]^{-1}BK[sI-(A-LC)]^{-1} \\
+DK[sI - (A + BK)]^{-1}]e(0) + T(s)R(s)
\end{aligned}
$$

Il che mostra, in termini di trasformate, gli effetti dell'osservatore sul comportamento ingresso-uscita del sistema retroazionato. Si noti che la rapidità con cui il "disturbo" dovuto ad un errore $e(0)$ non nullo va a zero dipende sia dagli autovalori di $A - LC$ che da quelli di $A + BK$.