Brevi richiami su variabili aleatorie e processi stocastici

Richiami di teoria della probabilita`

- **Esperimento casuale:** analisi degli elementi caratteristici dei fenomeni che portano a risultati imprevedibili.

- **Spazio degli esiti:** indichiamo con S l'insieme di tutti i risultati possibili del fenomeno. Un risultato $s \in S$ e` detto esito.

- **Eventi:** raggruppamenti di esiti di particolare interesse. Quindi un evento e` un sottoinsieme di S .

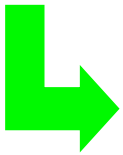
- **Famiglia di eventi:** insieme F di tutti i possibili eventi.

  F deve soddisfare:

  - $F \neq \emptyset$
  - se $A \in F$ allora $S \setminus A \in F$
  - se $A_i \in F\,,\ i = 1, \ldots, N$ allora $\bigcup_i A_i \in F$

    $\Rightarrow \quad \emptyset \in F\,, \quad S \in F$

- **Funzione di probabilita`:** funzione $P(\cdot)$ che associa ad ogni evento un numero reale $\in [0,1]$ tale che:
  - $P(S) = 1$
  - dati $A_i \in F\,,\ i = 1, \ldots, N$ con $A_i \bigcap_i A_j = \emptyset,\ i \neq j$



$$P\left[\bigcup_i A_i\right] = \sum_i P(A_i)$$

Esempio: *lancio del dado*. E` un esperimento casuale in cui:

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ spazio degli esiti dell'esperimento
- $A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6\}$ eventi (pari, dispari)
- $F = \{A, B, \bar{A}, \bar{B}, S, \emptyset\}$ famiglia degli eventi
- $P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2}$ funzione di probabilita`

Variabili aleatorie (casuali, stocastiche)

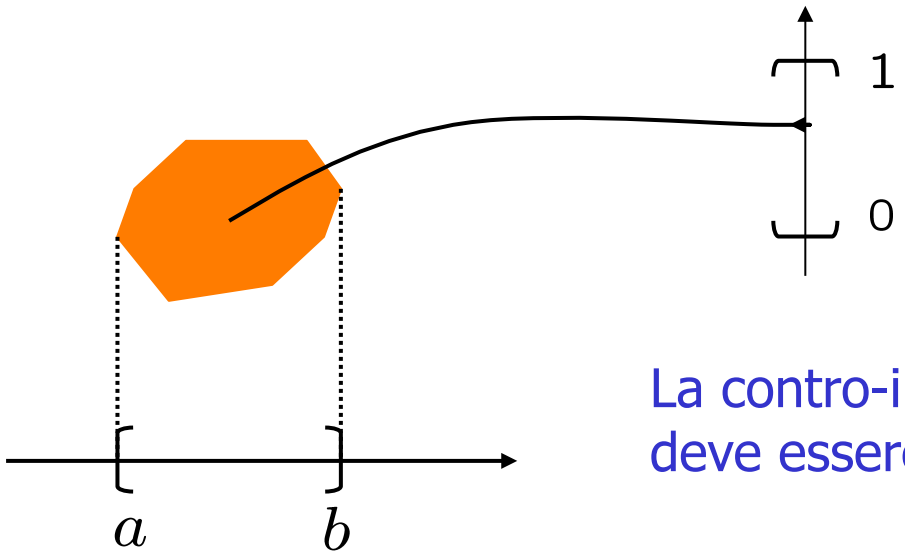
- Dato un esperimento, una variabile aleatoria (v.a.) e` definita come una variabile $v(s)$ i cui valori dipendono dall'esito $s \in S$ dell'esperimento attraverso una funzione $\varphi(\cdot)$.
- Definiamo $V = \{v(s),\, s \in S\}$
- $P(v \in D),\, D \subset V$ → probabilita` dell'insieme di esiti tali che $\varphi(s) \in D$

$$P(v \in D) = P\left[\underbrace{\varphi(D)^{-1}}_{\text{evento}}\right]$$

- Piu` concretamente, avendo a che fare con variabili reali:

$$D = [a, b]$$

$$P(v \in [a, b]) = P\left[\varphi([a, b])^{-1}\right]$$



La contro-immagine di $[a, b]$ deve essere un evento in F

- **Funzione di distribuzione di probabilita`**

Contiene le informazioni che caratterizzano la v.a. v ed e` definita come:

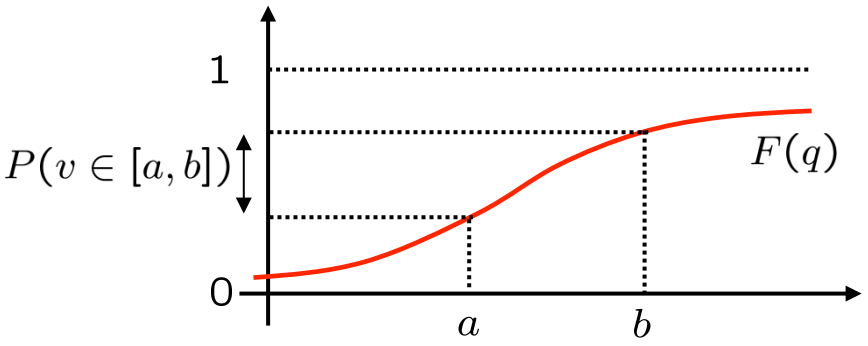
$$F(q) = P(v \leq q)$$

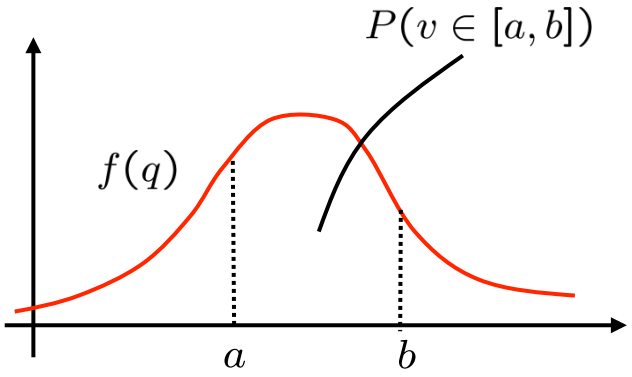
$$P(v \in [a,b]) = F(b) - F(a)$$

- **Densita` di probabilita`**

$$f(q) = \frac{dF}{dq}$$

Evidentemente $P(v \in [a,b])$ e` l'area sottesa dal grafico di $f(q)$ nell'intervallo $[a,b]$





- **Valore atteso (valor medio, media):** $E(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} q f(q) dq$

- **Varianza:** $\text{var}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [q - E(v)]^2 f(q) dq$

- **Deviazione standard:** $\sigma(v) = \sqrt{\text{var}(v)}$

- **Disug. di Tchebicev:**

$$P(|v - E(v)| > \varepsilon) \leq \frac{\text{var}(v)}{\varepsilon^2}, \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

- Attenzione! Date due v.a. $v_1(s), v_2(s)$:

$$v(s) = v_1(s) + v_2(s) \Rightarrow \begin{cases} E(v) = E(v_1) + E(v_2) \\ \text{var}(v) \neq \text{var}(v_1) + \text{var}(v_2) \end{cases}$$

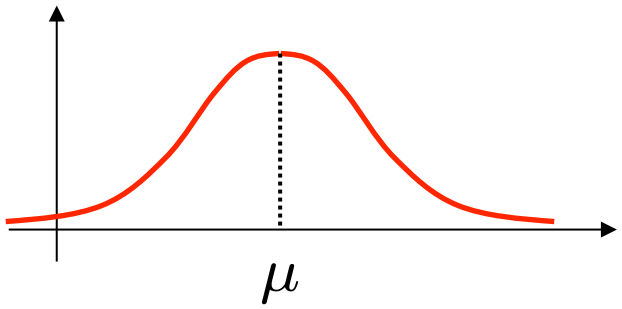
- **Caso particolare importante:**

Una v.a. si dice Gaussiana se:

$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ media

σ^2 varianza



Variabili aleatorie vettoriali

- Ad esempio, date due v.a. v_1, v_2 si puo` costruire un vettore aleatorio nel modo ovvio:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$E(v) = \begin{bmatrix} E(v_1) \\ E(v_2) \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(v) = E\left\{[v - E(v)][v - E(v)]^\top\right\}$$

e` una matrice!

- Nel caso vettoriale $\text{var}(v)$. Ad esempio, nel caso bi-dimensionale abbiamo:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = E(v_1), \quad \mu_2 = E(v_2)$$

$$\text{var}(v) = E\left\{[v - E(v)][v - E(v)]^\top\right\}$$

$$= E\left\{\begin{bmatrix} v_1 - \mu_1 \\ v_2 - \mu_2 \end{bmatrix}[v_1 - \mu_1 \quad v_2 - \mu_2]\right\}$$

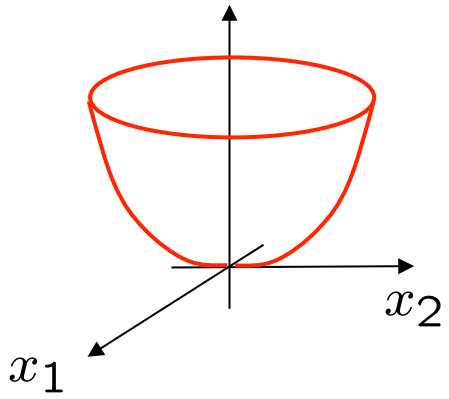
$$= E\begin{bmatrix} (v_1 - \mu_1)^2 & (v_1 - \mu_1)(v_2 - \mu_2) \\ (v_2 - \mu_2)(v_1 - \mu_1) & (v_2 - \mu_2)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \sum$$

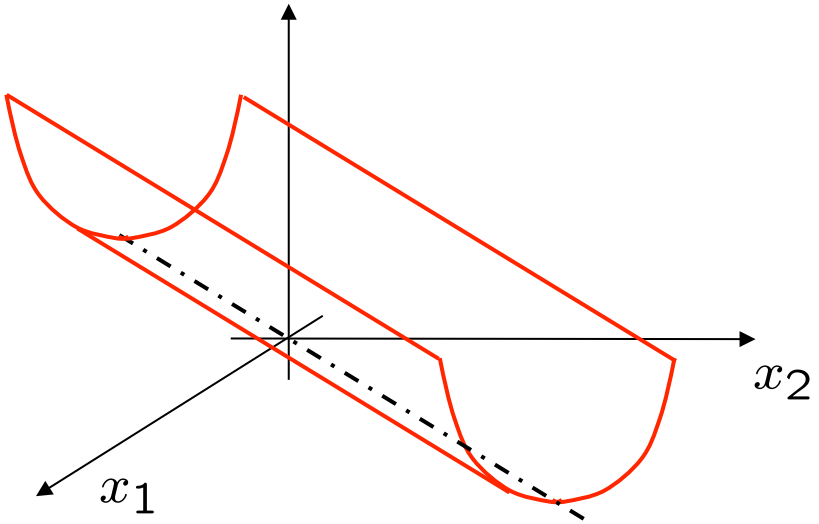
matrice varianza

covarianza

- La matrice $\sum = \mathrm{var}(v)$ e` in generale simmetrica e semi-definita positiva:



$x^\top \sum x\,, \quad \sum > 0$



$x^\top \sum x\,, \quad \sum \geq 0$

Correlazione ed indipendenza

- Due v.a. v_1, v_2 si dicono scorrelate se

$$E\{[v_1 - E(v_1)][v_2 - E(v_2)]\} = 0$$

ovvero se $$E(v_1 v_2) = E(v_1)E(v_2)$$

- Due v.a. v_1, v_2 si dicono indipendenti se

$$p(v_1, v_2) = p(v_1)p(v_2)$$

- v.a. indipendenti  v.a scorrelate

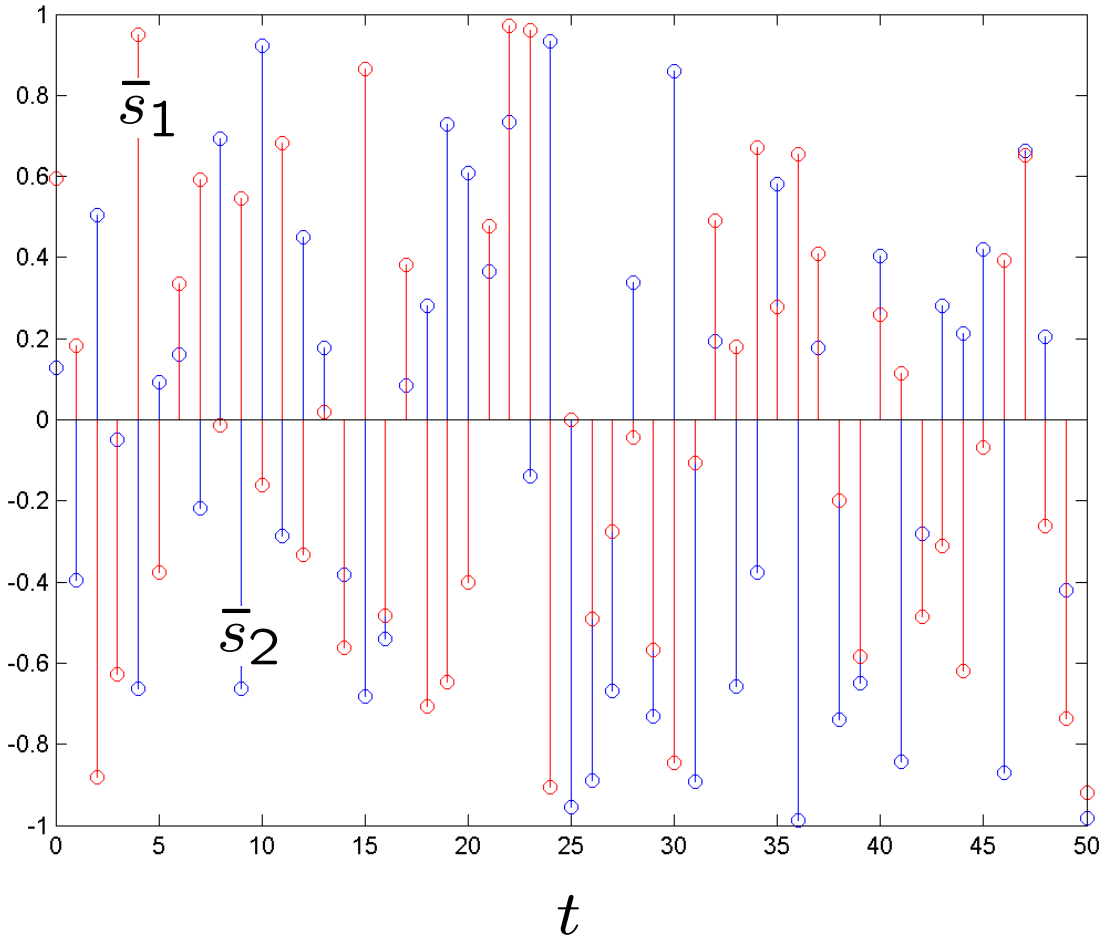
Processi stocastici (casuali, aleatori)

- Un processo stocastico e` un fenomeno aleatorio che evolve nel tempo secondo una legge probabilistica.

- In pratica un processo stocastico puo` essere visto (un po' impropriamente) come una funzione di due variabili $v(t,s)$ , dove $t$ e` il tempo ed s e` l'esito dell'esperimento casuale associato al processo stocastico stesso.

- Quindi:
  - Fissato $t = \bar{t}$ ⟹ $v(\bar{t},s)$ e` una v.a. con una certa distribuzione di probabilita`.
  - Fissato $\bar{s}$ ⟹ $v(t,\bar{s})$ e` una funzione del tempo che prende il nome di realizzazione del processo stocastico.

- Quindi in pratica un processo stocastico e` un insieme di infinite v.a. ordinate nel tempo



Descrizione di un processo stocastico

- A rigore per descrivere un processo stocastico sarebbe necessaria la conoscenza della sua funzione di distribuzione:

$$P[x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2, \ldots, x(t_k) \leq x_k]$$

per qualunque valore arbitrariamente scelto di

$$k, x_1, x_2, \ldots, x_k, t_1, \ldots, t_k$$

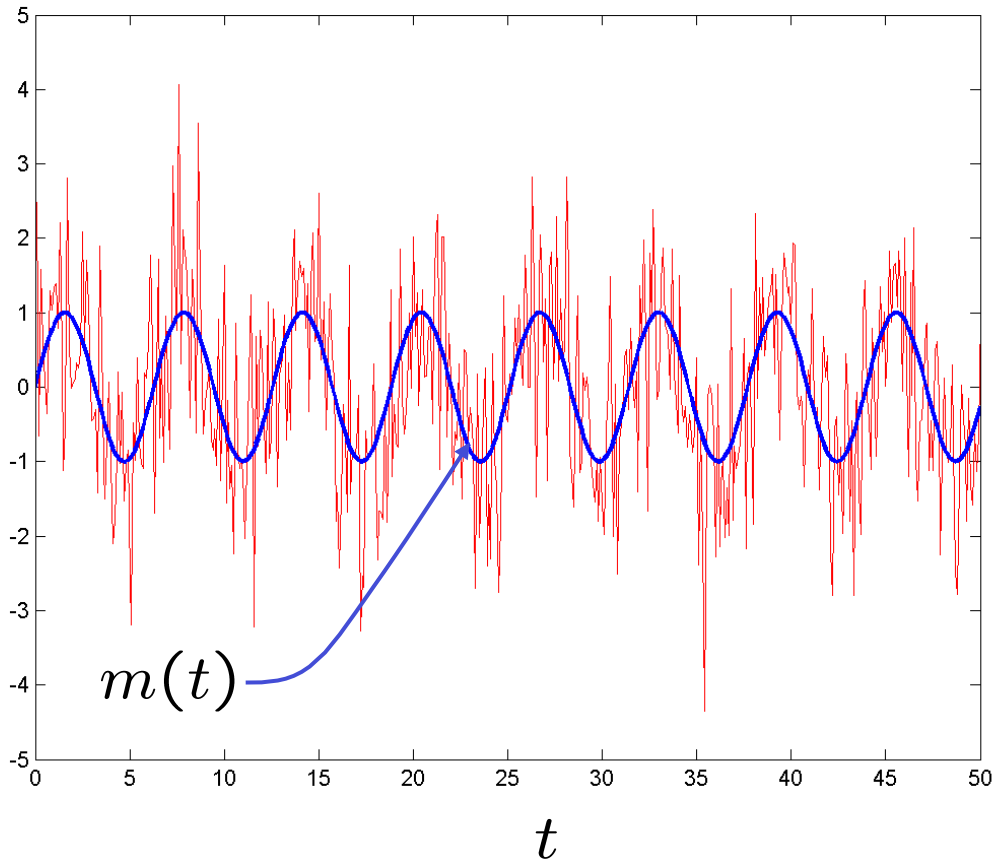
- Tale descrizione e` pero` impraticabile. Ci si accontenta di descrivere il processo tramite i cosiddetti momenti del primo e del secondo ordine.

- Momento del primo ordine (valor medio):

funzione di t

$$\overbrace{m(t)} = E[\underbrace{v_t(s)}]$$

funzione di s fissato t



- Momento del secondo ordine (funzione di covarianza):

$$\gamma(t_1, t_2) = E\left\{[v_{t_1}(s) - m(t_1)][v_{t_2}(s) - m(t_2)]\right\}$$

funzione di t_1 — funzione di t_2

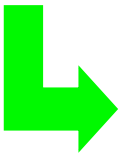
funzione di s fissato t_1 — funzione di s fissato t_2

- Si definisce funzione di correlazione:

$$E\left[v_{t_1}(s)\, v_{t_2}(s)\right]$$

che coincide con la funzione di covarianza quando $m(t) = 0$

Quindi, per la nostra trattazione, un processo stocastico si assumera` completamente descritto tramite i momenti del primo e del secondo ordine: $m(t)$, $\gamma(t_1, t_2)$



Due processi stocastici caratterizzati dagli stessi momenti del primo e del secondo ordine saranno assunti indistinguibili

- Processi stocastici stazionari: un processo stocastico si dice stazionario (in senso debole) se:
  - $m(t) = m = \text{cost}$
  - $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(\tau)\,, \quad \tau = t_2 - t_1$

La stazionarieta` di un processo stocastico permette molte semplificazioni importanti e soprattutto rende ininfluente l'istante temporale per analizzare come sono distribuite le v.a.

- Processi Gaussiani: un processo stocastico si dice Gaussiano se comunque si scelgono gli istanti temporali $t_1, t_2, \ldots, t_N$ si ha che le v.a. $v_{t_1}(s),\, v_{t_2}(s), \ldots, v_{t_N}(s)$ sono congiuntamente Gaussiane, ovvero:

$$p(v_1, v_2, \ldots, v_N) = \alpha \exp\left\{-\frac{1}{2}(v-\mu)^\top \Sigma^{-1}(v-\mu)\right\}$$

dove $\quad v = [v_1, \ldots, v_N]^\top, \qquad \mu = E(v)$

- Consideriamo un processo stocastico stazionario per il quale:
  - $m(t) = m = \text{cost}$
  - $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(\tau)\,, \quad \tau = t_2 - t_1$

Evidentemente al varianza del processo sara` $\gamma(0)$ e si definisce covarianza normalizzata:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$$

- Un processo stocastico $\varepsilon(t)$ di dice bianco se
  - $E[\varepsilon(t)] = 0$
  - $\gamma(\tau) = \begin{cases} \lambda^2, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$

e si indica: $\varepsilon \sim WN(0, \lambda^2)$

In un processo bianco il legame tra cosa succede in istanti diversi e` inesistente cioe` conoscere $\varepsilon(t)$ non e` di alcun aiuto nel conoscere $\varepsilon(t+1)$