Richiami su segnali e trasformate

Segnali a tempo continuo e a tempo discreto

Impulsi di Dirac
a tempo continuo ed a tempo discreto

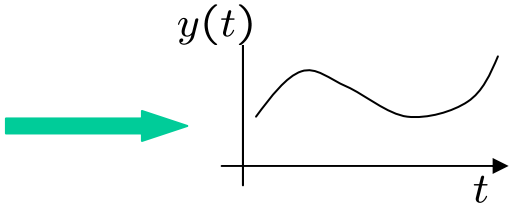
Trasformata di Laplace & Z-trasformata

Segnali a tempo continuo ed a tempo discreto

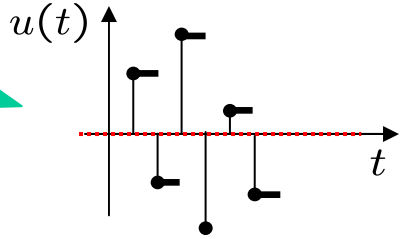
Tassonomia parziale

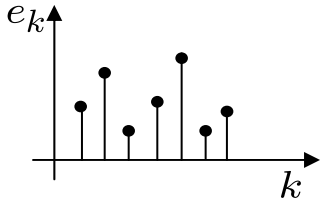
Definizioni

- Una prima classificazione:
  - **segnali continui** nel tempo



  - **segnali costanti a tratti**, cioè costanti in ogni intervallo [i Δ, (i+1) Δ] con Δ periodo di campionamento
  - **segnali discreti** nel tempo





- Ulteriore classificazione:
  - **segnali analogici**: le loro ampiezze possono variare con continuità;
  - **segnali digitali**: le loro ampiezze sono quantizzate (per es. rappresentate con un numero finito di cifre).

Segnali analogici: alcune osservazioni

- Negli esempi di ITSC - Parte 1 i segnali (sia a tempo continuo che a tempo discreto) sono **segnali analogici**:
  - le loro **ampiezze** possono assumere **qualsiasi valore reale**, all'interno di un opportuno intervallo, esplicitamente dichiarato o implicitamente derivabile dalla descrizione stessa del sistema dinamico a cui sono associati;
  - ad es. il livello di liquido nei serbatoi dell'esempio 9 non può fisicamente assumere valori negativi, così come non ha alcun senso fisico il fatto che le numerosità delle 2 specie dell'esempio 11 possano anch'esse assumere valori negativi.
- **NB** durante lo studio dei sistemi dinamici (sia a tempo continuo che discreto) **NON** terremo conto di vincoli del tipo appena descritto!
- Questi vincoli hanno tuttavia importanza in fase di simulazione dei sistemi dinamici (ad es. in Matlab ...)!

Segnali digitali: alcune osservazioni

- Rientrano in questa categoria **segnali**, la cui **ampiezza** può assumere valori soltanto in un **insieme finito di valori possibili**, cioè **quantizzata**.

- Comunemente l'aggettivo "**digitale**" viene associato a **segnali a tempo discreto**, ottenuti per **campionamento** di segnali analogici a tempo continuo e **rappresentati tramite codifica numerica** (di solito binaria), con un numero finito di cifre (si vedano le descrizioni dei convertitori A/D e D/A).

- Ciò porta ad abusare del termine, confondendo così "segnale digitale" con "segnale a tempo discreto ottenuto per campionamento".

Segnali digitali: alcune osservazioni (2)

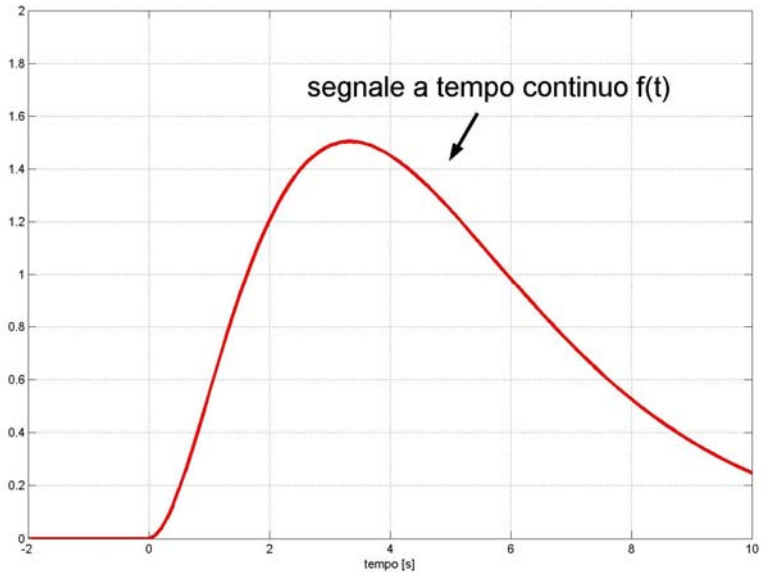
- È riduttivo e scorretto utilizzare “digitale” come sinonimo di “discretizzato per campionamento”.

- In realtà **anche segnali a tempo continuo** possono avere ampiezza quantizzata, quindi essere **segnali digitali**:

  – qualsiasi dispositivo di misura che fornisca in uscita un segnale (a tempo continuo) costante a tratti e con ampiezza quantizzata, fornisce in uscita un segnale digitale [si veda oltre ad esempio la breve descrizione del dispositivo D/A]

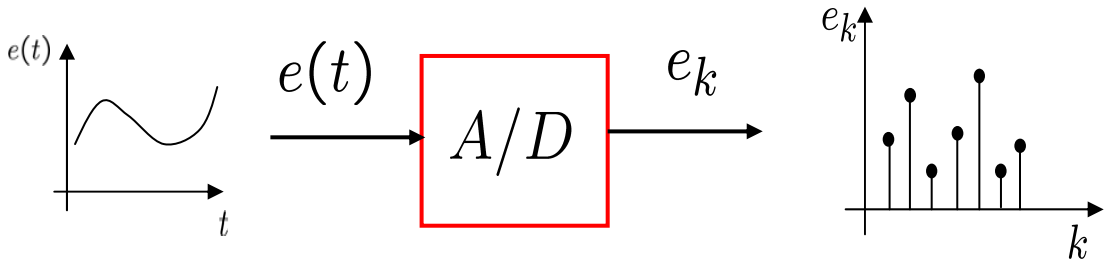
Conversione A/D: cenni

Consideriamo un segnale $f(t)$ a tempo continuo, continuo a tratti, limitato e identicamente nullo per tempi negativi.



Al segnale applichiamo un **campionamento periodico**.

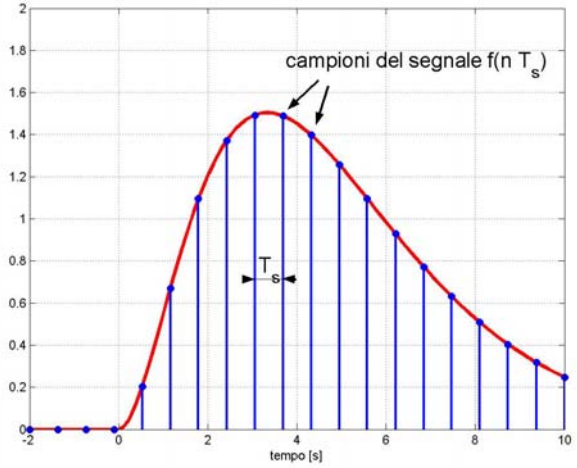
Che cosa significa? La conversione A/D consta di due fasi successive: **campionamento e conversione.**



Si otterrà un **segnale a tempo discreto, digitale**.

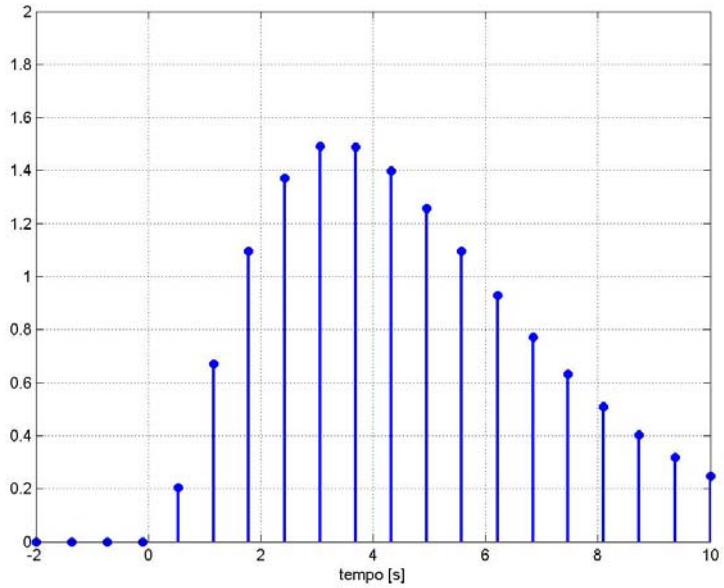
Campionamento: si **estraggono** dal segnale i **valori** assunti in corrispondenza di una **successione di istanti di tempo** multipli interi di un intervallo di tempo fissato, detto **periodo di campionamento**.

$$\{t_k = kT_s : \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$$



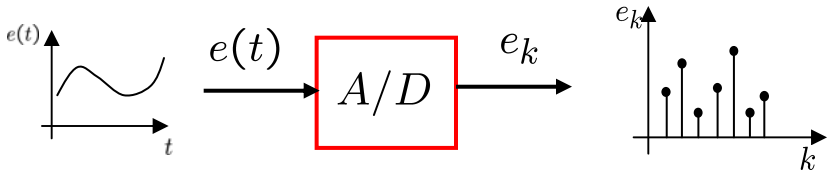
Arrestando l'operazione a questo punto, avremmo un segnale a tempo discreto, analogico.

Conversione: si ottiene una **sequenza di valori numerici** (valori assunti dal segnale a tempo continuo originale in corrispondenza della successione di istanti di tempo $\{kT_s\}_{k=0,1,2,\ldots}$), quindi un segnale digitale.



$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{f(t), \quad t = kT_s \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Osservazioni



Nell'operazione A/D ovviamente si perde qualcosa:

- **Perdita di informazione** (dovuta al processo di campionamento)
- **Codifica digitale** (quantizzazione, distorsioni non lineari)

$$e(t) \rightsquigarrow e_k = e(kT_s) \rightsquigarrow 0\,1\,10\,10\ldots$$

Non affronteremo queste problematiche!

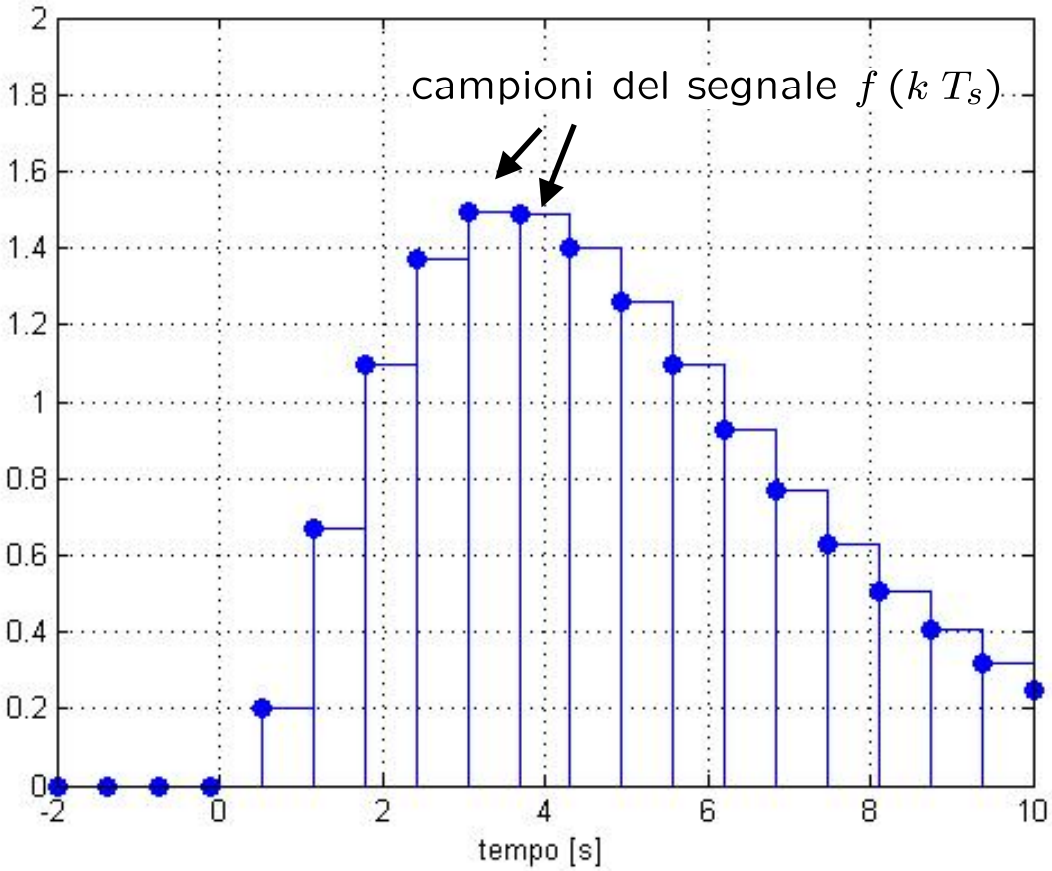
- **Non ci interessa come siano realizzati né i dispositivi di conversione A/D né i D/A!**

Conversione D/A (cenni)

A partire da un segnale a tempo discreto, digitale, si vuole ottenere un **segnale a tempo continuo**, **digitale**.

Tra l'istante $k\,T_s$ di campionamento ed il successivo il segnale $f(t)$ in uscita viene mantenuto costante, con valore pari a quello del campione f_k della sequenza a tempo discreto in ingresso al convertitore.

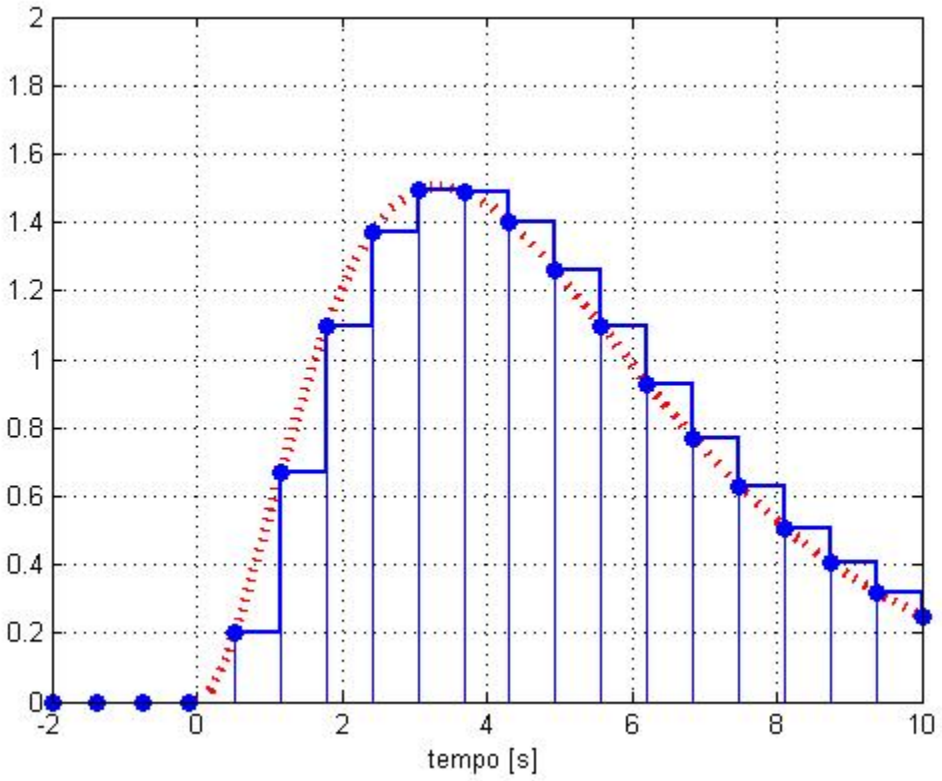
$$f(t) = f_k, \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$$



T_s : **periodo di mantenimento**

Osservazioni finali su A/D e D/A

- Anche considerando assente la distorsione da quantizzazione, le conversioni A/D e D/A non sono una l'inversa dell'altra!
- Applicando l'uscita di un circuito A/D all'ingresso di un dispositivo D/A non si riottene il segnale analogico, a tempo continuo di partenza!



L'uscita del dispositivo D/A è in realtà una "gradinata" che approssima il segnale, in ritardo. Non approfondiremo ulteriormente.

Segnali a tempo continuo

Alcuni richiami:

- **istante iniziale e segnale a gradino unitario**
- **impulso di Dirac a tempo continuo**

Istante iniziale e segnali a tempo continuo

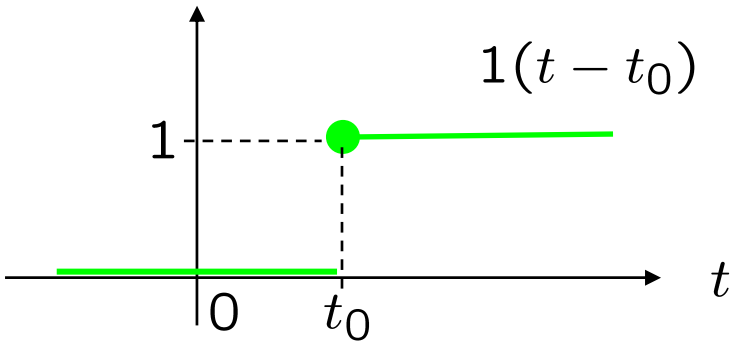
- In tutti gli esempi visti in Parte 1 e Parte 2 i segnali a tempo continuo considerati sono definiti a partire da un istante iniziale, supposto noto t_0.

- Pretendere che qualsiasi segnale a tempo continuo (ma anche a tempo discreto: ne parliamo più avanti) sia definito a partire da un istante iniziale t_0 è necessario per poter definire l'ente "sistema dinamico" come in [ITSC Parte 2 – slide 7 e segg.] e poi per poter applicare strumenti matematici utili allo studio del sistema (ad. es. determinazione del movimento dello stato/dell'uscita).

Istante iniziale a tempo continuo (2)

- Come fare ad evidenziare quale è l'istante iniziale per un segnale a tempo continuo?
- Si definisce funzione "**gradino unitario**" o "**funzione di Heaviside**" il segnale analogico a tempo continuo

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \leftrightarrow \quad t < t_0 \\ 1 & \leftrightarrow \quad t \geq t_0 \end{cases}$$



Istante iniziale a tempo continuo (3)

- Per evidenziare che allora un generico segnale y(t) a tempo continuo ha inizio all'istante t_0 si usa la notazione

$$y(t) = \tilde{y}(t) \cdot 1(t - t_0)$$

che equivale a scrivere

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \leftrightarrow \quad t < t_0 \\ \tilde{y}(t) & \leftrightarrow \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

- Esempi:

$$y_1(t) = e^{-5\,t} \cdot 1(t-3) \qquad y_2(t) = e^{-5\,(t-3)} \cdot 1(t-3)$$

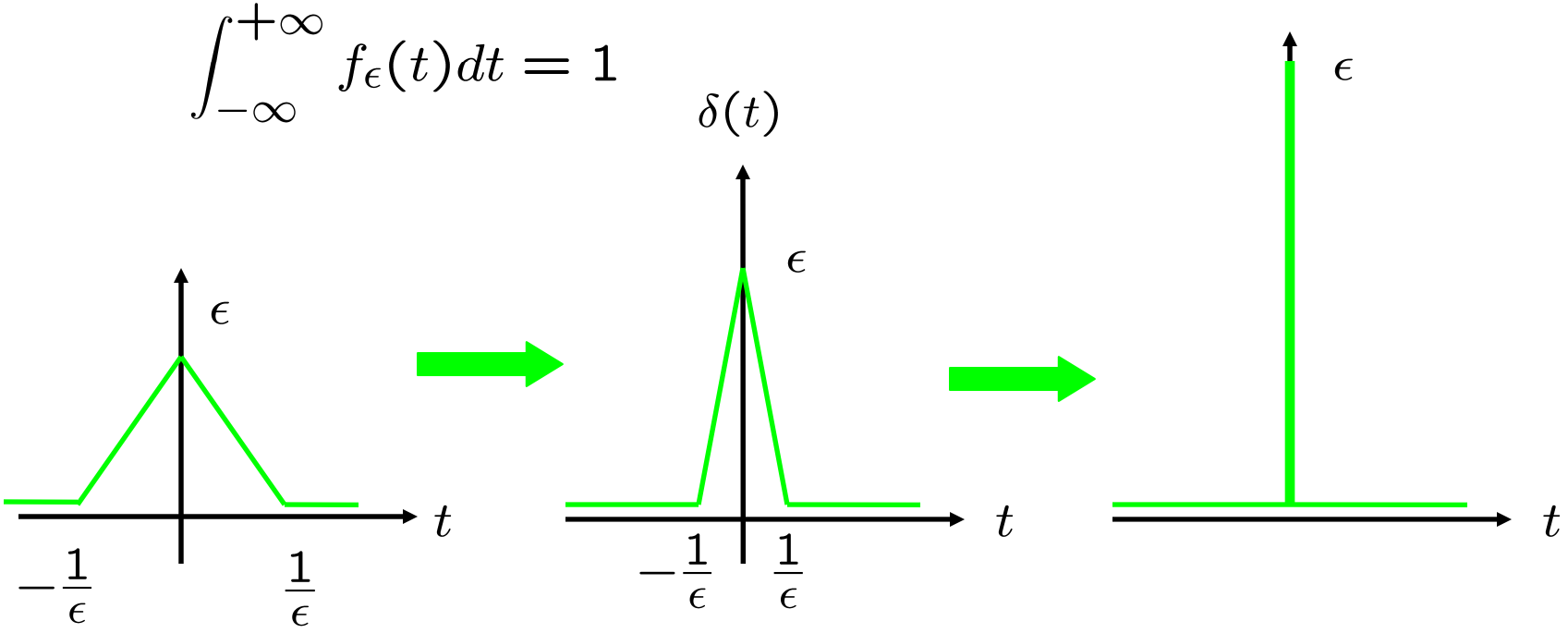
- Che differenza c'è tra i due segnali?

Richiami: la "funzione" $\delta(t)$ di Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Si può vedere come il $\lim_{\epsilon \to \infty} f_\epsilon(t)$ di una successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)dt = 1$$



Proprietà ed utilizzo

- **integrale unitario** (per definizione) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
- proprietà di “estrazione” (***sifting property***)

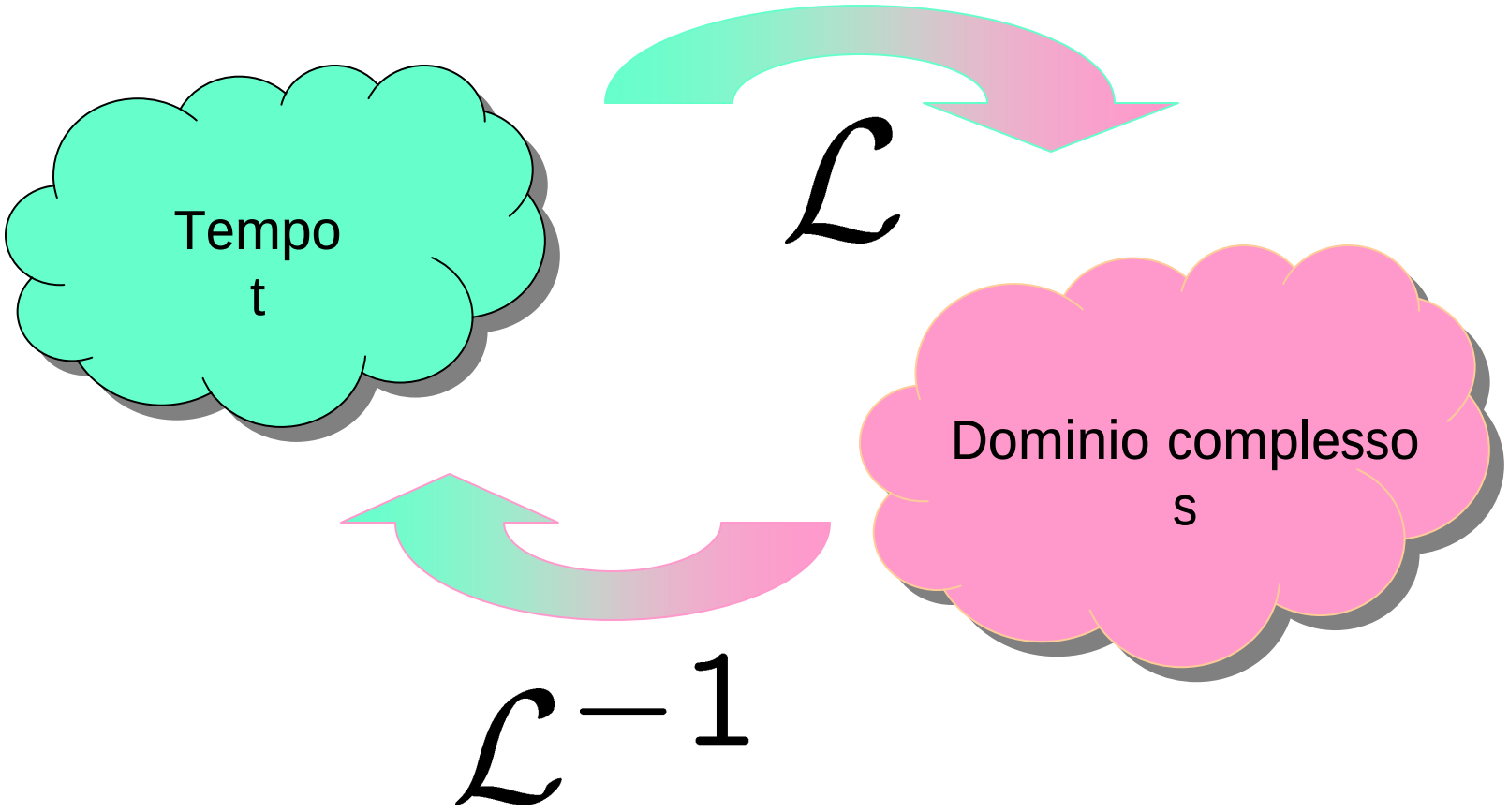
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \delta(t-T)dt\ =\ f(T)$$

- **Utilizzo** nello studio dei sistemi dinamici a tempo continuo:
  - agevola la gestione delle condizioni iniziali nello studio del movimento dello stato e dell’uscita;
  - permette la caratterizzazione del comportamento ingresso/uscita del sistema (risposta all’impulso e FdT)

Richiami alla Trasformata di Laplace

Trasformata di Laplace unilatera

La trasformata di Laplace è un OPERATORE funzionale



Definizione :

Si considerano sempre funzioni $f(t)$ non nulle solo per $t \geq 0$, limitate, continue a tratti ed, al più, con comportamento impulsivo per $t = 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

Funzioni del tempo

$$s = \sigma + j\,\omega$$

Funzioni complesse

Definizione (2)

- Condizioni **sufficienti** perché una funzione f(t) sia $\mathcal{L}$—trasformabile:
  1. f(t) identicamente nulla per t<0
  2. f(t) limitata al finito:
     $$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists M_1 \in \mathbb{R} : |f(t)| < M_1, \, 0 \leq t \leq t_0$$
  3. f(t) continua a tratti per $t \geq 0$
  4. f(t) di ordine esponenziale per $t \to \infty$

$$\exists t_0, \, M_2, \, \sigma_0 \in \mathbb{R} : |f(t)| < M_2 \, e^{\sigma_0 \, t}, \, t \geq t_0$$

Definizione (3)

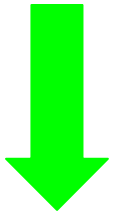
- **Ascissa di convergenza:**

$$\alpha = inf \left\{ \Re\{s\}, s \in \mathbb{C} : \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = K < \infty \right\}$$

- **Semipiano di convergenza:**

$$\{ s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} > \alpha \}$$

Perché queste trasformate sono utili?



1. Hanno molte proprietà che aiutano a risolvere le equazioni differenziali

2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate "notevoli"

Proprietà

1. Linearità :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale:

$$f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \qquad f(t) \text{integrabile}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

Proprietà

3. Trasformata della derivata: $f(t),\ f'(t)$ $\mathcal{L}$-trasformabili

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\,F(s) - f(0^-)$$

Derivate di ordine ***n***

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n\,F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0^-)$$

- **cenni di dimostrazione**:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f'(t)\, e^{-s\,t}\, dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-s\,t}\, f'(t)\, dt$$

$$\int f\, g'\, dt = f\, g - \int f'\, g\, dt$$

$$= e^{-s\,t}\, f(t)\Big|_{t\to 0^-}^{t\to +\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} e^{-s\,t}\, f(t)\, dt$$

$$-\, f\left(0^-\right) \qquad s\, F(s)$$

Proprietà

4. Traslazione in frequenza: se $k \in C$

$$\mathcal{L}[e^{kt} f(t)] = F(s-k)$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

Proprietà

6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ a \in \mathbb{R}^+$$

7. Moltiplicazione per t^n :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

Proprietà

Def: integrale di convoluzione – f, g non nulle per $t \geq 0$

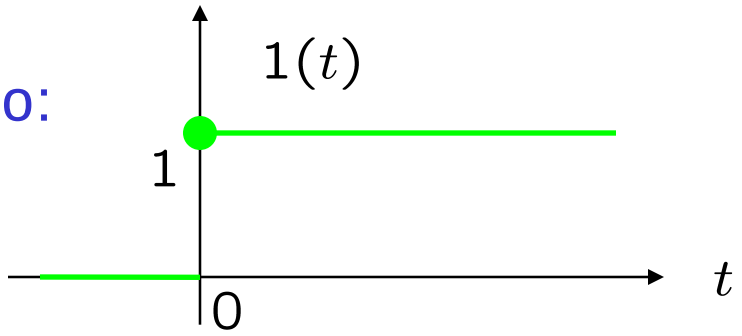
$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

Trasformate notevoli

1. Trasformata del gradino unitario:



$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s}[e^{-st}]\Big|_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

Trasformate notevoli

2. Trasformata della $\delta(t)$ di Dirac

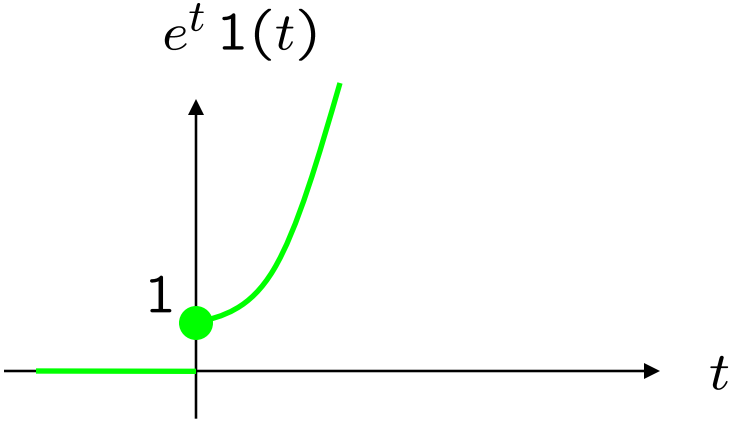
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

la funzione $\delta(t)$ di Dirac si può vedere come la “derivata” del gradino...

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1(t) - 1(t-\tau)}{\tau} = \frac{d}{dt}[1(t)] \longrightarrow \mathcal{L}[\delta(t)] = s\frac{1}{s} = 1$$

Trasformate notevoli

3. Trasformata del segnale $e^t\,1(t)$

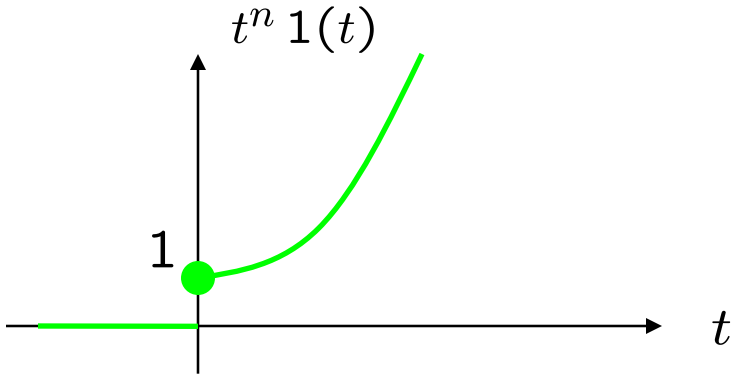


$$\mathcal{L}[e^{kt}1(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{(k-s)t}dt = \frac{1}{k-s}[e^{(k-s)t}]\Big|_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

Trasformate notevoli

4. Trasformata di $t^n\,1(t)$:



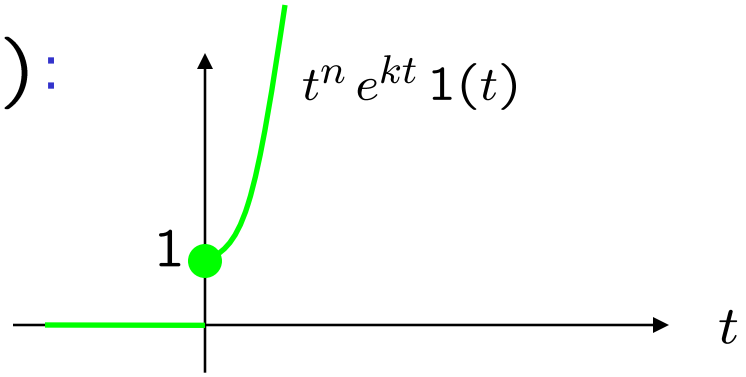
$$\mathcal{L}[t^n 1(t)] = (-1)^n \left\{ (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

...basta applicare la proprietà di moltiplicazione per t^n ...

Trasformate notevoli

5. Trasformata di $t^n\, e^{kt}\, 1(t)$:



$$\mathcal{L}[t^n\, e^{kt}\, 1(t)] = \frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprietà di moltiplicazione per t^n e di traslazione in frequenza...

Trasformate notevoli

Trasformata di $\sin(\omega t)$ e di $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\,\sin\phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\,\sin\phi$$

Trasformate notevoli

6. Trasformata di $\sin(\omega t)\,1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\cdot 1(t)\right]=\frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Trasformate notevoli

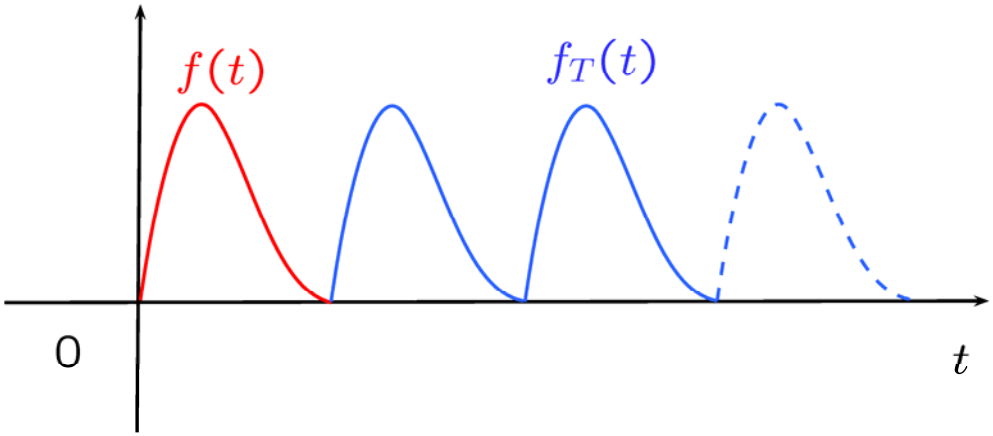
7. Trasformata di $\cos(\omega t)\,1(t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\cdot 1(t)\right]=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Trasformate notevoli

8. Funzioni periodiche



$$f_T(t): \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f_T(t + nT) = f_T(t) & t \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f(t): \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t) = f_T(t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Treno di impulsi

$$f_T(t) = f(t) * \delta_T(t) = \int_0^t f(\tau)\delta_T(t-\tau)d\tau$$

Verificarlo per esercizio!

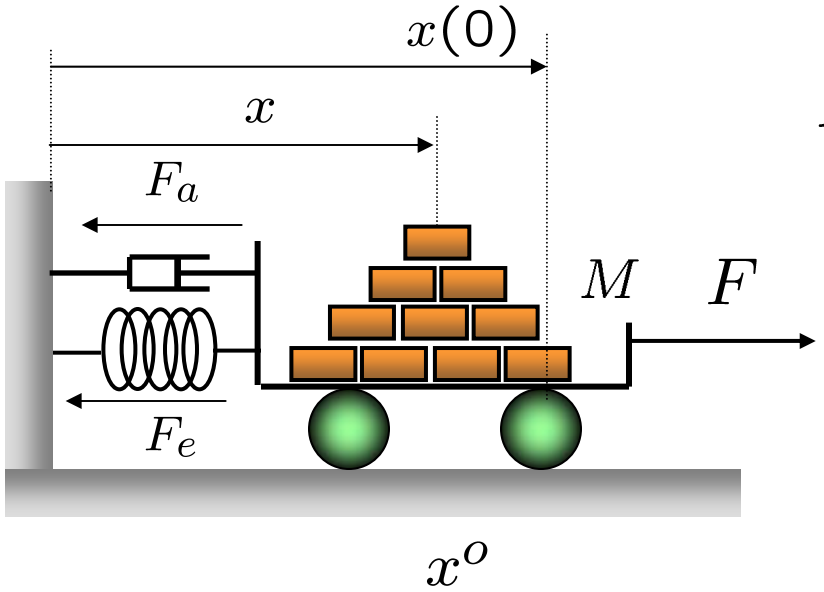
$$\mathcal{L}\{\delta_T(t)\} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}\{f_T(t)\} = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}}$$

Applicazione:

sistema massa-molla (parte2, 5)



$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F(t)$$

$$x(0^-) = r_0 \qquad \dot{x}(0^-) = v_0$$

$$M\{s^2 X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)\} + \ldots$$

$$\ldots + h\{sX(s) - x(0^-)\} + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)\{Ms^2+hs+k\}-\{Msr_0+hr_0+Mv_0\}=F(s)$$

$$X(s)=\frac{Msr_0+hr_0+Mv_0}{Ms^2+hs+k}+\frac{F(s)}{Ms^2+hs+k}$$

"Risposta" libera

"Risposta" forzata

dipende dalle condizioni iniziali

dipende dall'ingresso

Cfr. "Fondamenti di Automatica"!

Antitrasformate

A partire da $F(s)$ si risale - sotto opportune ipotesi - ad $f(t)$ calcolando (formula di Riemann) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\, j} \int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

Vale al solito per $f(t)$ non nulla solo per $t > 0^-$

$\bar{\sigma} > \alpha$, l'ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di F(s) sono a sinistra della retta individuata da $\bar{\sigma}$. **... non ne faremo uso ...**

Antitrasformate

Nel caso in cui il segnale $f(t)$ sia nullo per t <0, limitato, continuo a tratti, allora vale che:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

$$n > m$$

Per trasformate di Laplace espresse da rapporti di polinomi in ***s*** (**n>m**: funzioni razionali **strettamente proprie**), per l'operazione di antitrasformazione risulta più agevole operare come descritto in seguito, piuttosto che adoperare la formula di antitrasformazione vista in precedenza!

Cfr. "Fondamenti di Automatica"!

Antitrasformate

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

Come si opera nei casi in cui fosse $m \geq n$?

Nel caso in cui $m = n$, (funzioni razionali **non strettamente proprie**) nel segnale ottenuto come antitrasformata compare un impulso di Dirac.

$$F(s) = a_n + \frac{\hat{N}(s)}{D(s)}$$

$$deg(D) = n,\ deg(\hat{N}) < n$$

Nel caso più generale si deve ricorrere alla teoria delle “funzioni generalizzate”

“Funzioni” generalizzate: cenni

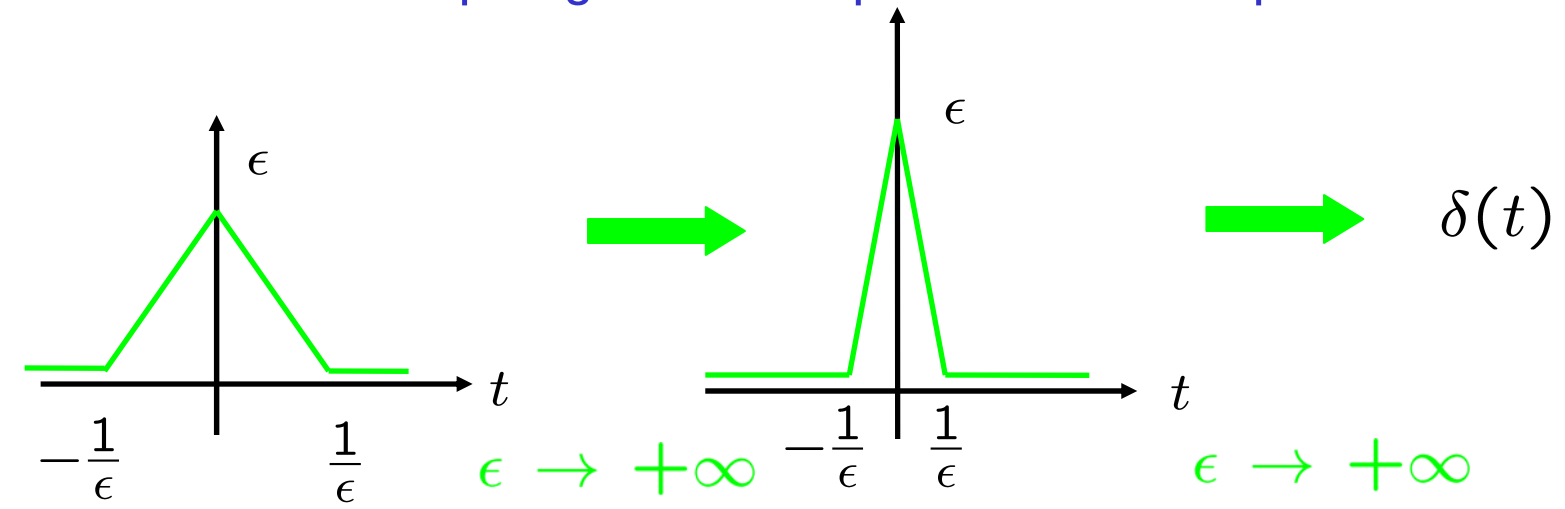
- Come già mostrato, l’impulso di Dirac può essere interpretato come “derivata” del segnale a scalino unitario

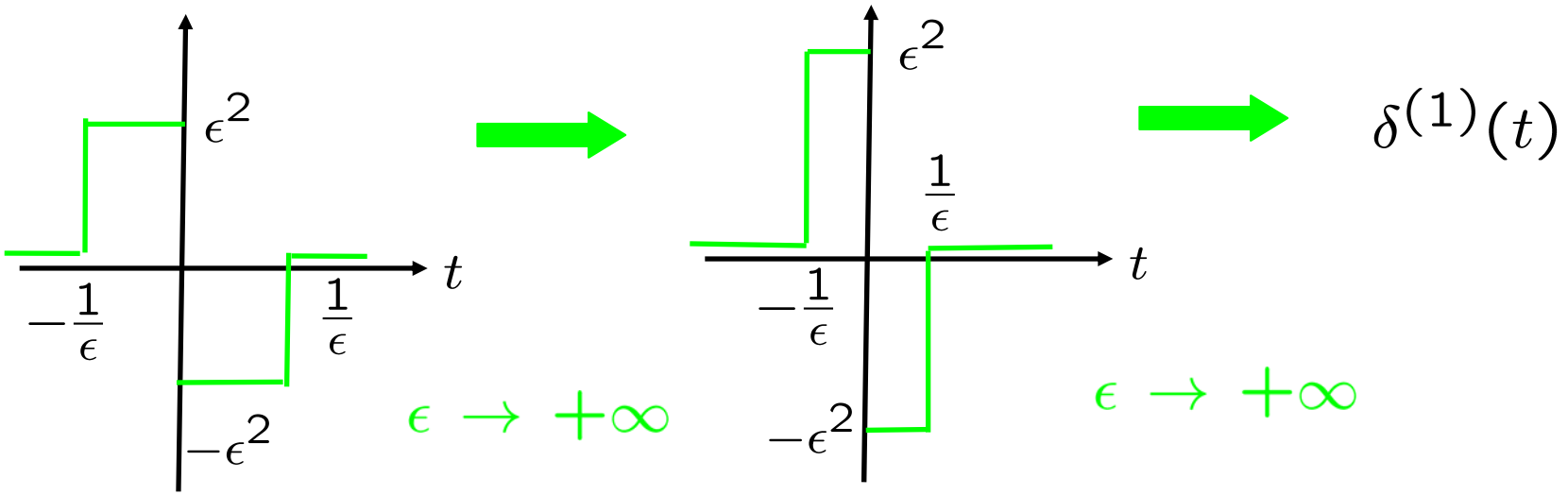
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1(t) - 1(t-\tau)}{\tau} = \frac{d}{dt}[1(t)] \longrightarrow \mathcal{L}[\delta(t)] = s\frac{1}{s} = 1$$

- Portando avanti questo approccio, si possono definire anche le “derivate” successive dell’impulso di Dirac, scrivendo ad esempio per la “derivata prima” dell’impulso

$$\delta^{(1)}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\delta(t) - \delta(t-\tau)}{\tau} = \frac{d}{dt}[\delta(t)] \longrightarrow \mathcal{L}[\delta^{(1)}(t)] = s$$

- Graficamente si può giustificare quanto scritto in questo modo:





Utilizzo delle “funzioni generalizzate” nell’operazione di antitrasformata di Laplace

- Nel caso più generale in definitiva

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad deg(D) = n,\ deg(N) = m$$

$$m > n$$



$$F(s) = \underbrace{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_p s^p}_{\text{Impulsi generalizzati}} + \frac{N_p(s)}{D(s)}$$

Strettamente propria

Espansione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s-z_1)^{m_1}(s-z_2)^{m_2}\cdots(s-z_r)^{m_r}}{(s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}\cdots(s-p_q)^{n_q}}$$

$$m_1+m_2+...+m_r = m \qquad n_1+n_2+...+n_q = n \qquad n > m$$

- avremo r zeri: $z_1, z_2, ..., z_r \in \mathbb{C}$

  di molteplicità $m_j \qquad j = 1, ..., r$

- avremo q poli: $p_1, p_2, ..., p_q \in \mathbb{C}$

  di molteplicità $n_i \qquad i = 1, ..., q$

Espansione in fratti semplici

Vogliamo scrivere $F(s)$ come:

$$F(s) = \frac{C_{1,1}}{(s-p_1)} + \ldots + \frac{C_{1,n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{2,1}}{(s-p_2)} + \ldots + \frac{C_{2,n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{q,1}}{(s-p_q)} + \ldots + \frac{C_{q,n_q}}{(s-p_q)^{n_q}}$$

Espansione in fratti semplici

Per la proprietà di linearità la sua antitrasformata si potrà calcolare così:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right]$$

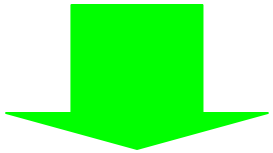
Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

Espansione in fratti semplici

Infatti si ha che:

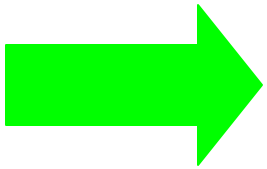
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}}{(s-p_i)^j}\right] = \frac{C_{i,j}}{(j-1)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

Ancora per le proprietà di linearità, traslazione in frequenza e moltiplicazione per t^n .



$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j-1)!}\, t^{(j-1)}\, e^{p_i t}\, 1(t)$$

Espansione in fratti semplici



Se sappiamo calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ abbiamo automaticamente la $f(t)$

- Metodo 1: basato sul principio di **identità** dei polinomi -→ va bene per poli a molteplicità unitaria

- Metodo 2: basato sul **calcolo dei residui** -→ va bene per poli multipli

Espansione in fratti semplici: metodo 1

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \qquad \begin{matrix} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad Y(s) = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+2)}$$

può essere applicato con profitto perché ci sono poli a molteplicità unitaria

$$Y = \frac{s(C_1+C_2) + 2C_1 + C_2}{(s^2+3s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases} \qquad Y_l(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y] \rightarrow y(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right) \cdot 1(t)$$

Espansione in fratti semplici: metodo 2

formula dei residui

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3\,s + 2}\left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}\right)$$

$$\begin{cases} p_1 = -1,\ n_1 = 1 \\ p_2 = -2,\ n_2 = 1 \\ p_3 = \ 0,\ n_3 = 2 \end{cases}$$



$$Y = \frac{C_{1,1}}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s^2} + \frac{C_{3,2}}{s}$$

Espansione in fratti semplici: la formula

Per calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ si applica questa formula:

$$C_{i,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{d\, s^{(n_i - j)}} F(s) \, (s - p_i)^{n_i} \right\}$$

Per poli di molteplicità unitaria:

$$C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

Nota come formula di Heaviside

Derivata prima del denominatore!

Espansione in fratti semplici: metodo 2 (continua...)

$$Y = \frac{C_{1,1}}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s^2} + \frac{C_{3,2}}{s}$$

$$C_{1,1} = \left.\frac{(s+3)}{(s^2)(s+2)}\right|_{s=-1} = 2 \quad \longrightarrow \quad p_1$$

$$C_{2,1} = \left.\frac{(s+3)}{(s^2)(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad p_2$$

$$C_{3,1} = \left.\frac{d}{ds}\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = -\frac{7}{4}$$

$$C_{3,2} = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

p_3 $\longrightarrow$ (s), (s^2)

Espansione in fratti semplici: metodo 2 (continua...)

Espressione finale di $Y(s)$:

$$Y = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2\,e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right) \cdot 1(t)$$

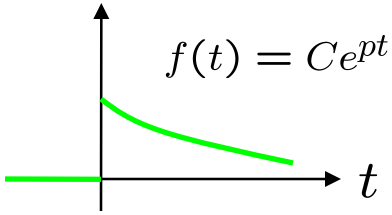
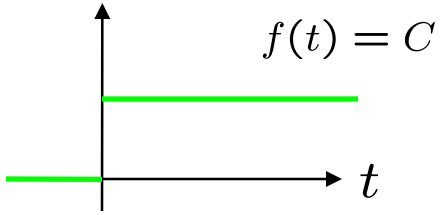
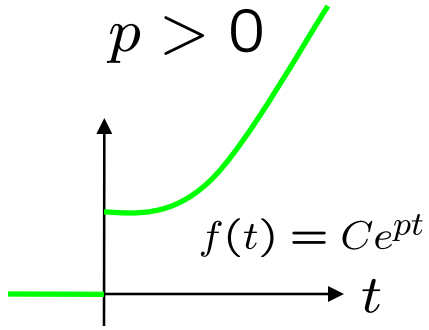
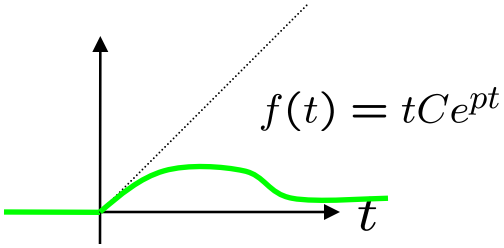
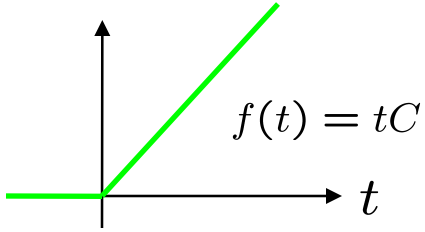
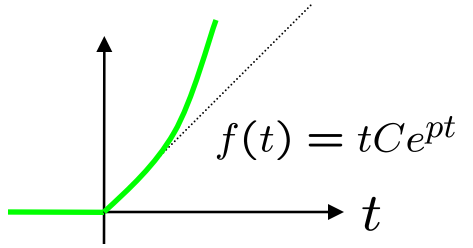
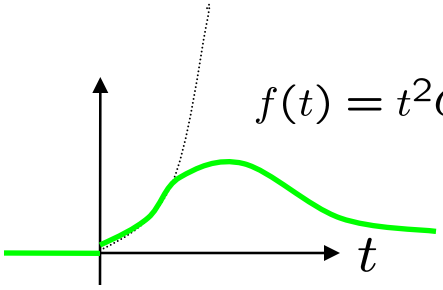
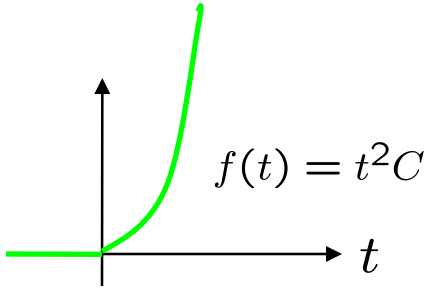
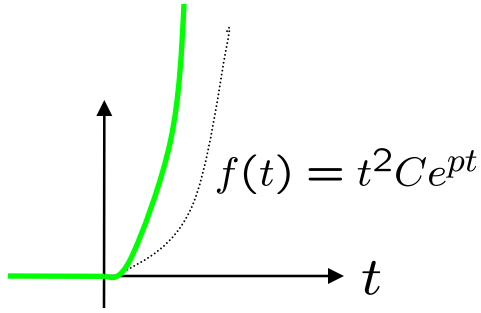
Studio qualitativo delle L-trasformate

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{C}{(s-p)^n}] \Longrightarrow f(t) = \frac{C}{(n-1)!} t^{n-1}\, e^{pt}\, 1(t)$$

CASI :

$$\begin{cases} p \in \mathbb{R} \begin{cases} p < 0 \\ p = 0 \\ p > 0 \end{cases} & n = 1,\ 2,\ 3 \\ p \in \mathbb{C} \begin{cases} \mathcal{R}e\{p\} < 0 \\ \mathcal{R}e\{p\} = 0 \\ \mathcal{R}e\{p\} > 0 \end{cases} & n = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

$p \in \mathbb{R}$

	$p < 0$	$p = 0$	$p > 0$
$n = 1$			
$n = 2$			
$n = 3$			

Studio qualitativo delle L-trasformate

Osservazioni nel caso di poli reali:

- Per $p < 0$ l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero

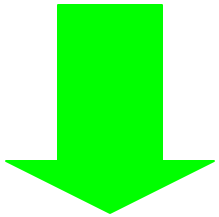
- Per $p = 0$ l'andamento è divergente, con velocità crescente con la molteplicità del polo; è limitata sse la molteplicità del polo è unitaria

- Per $p > 0$ l'andamento è SEMPRE divergente

$$p \in \mathbb{C}$$

se $p = \sigma + j\,\omega$ è una radice del denominatore di $F(s)$

allora lo sarà anche il suo complesso—coniugato $p^* = \sigma - j\,\omega$



Nella scomposizione troveremo come coefficienti legati a $(p,\, p^*)$ i coefficienti $(C,\, C^*)$: dunque dovremo antitrasformare

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-p)^n} + \frac{C^*}{(s-p^*)^n}\right]$$



Sviluppando si ottiene:

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1} \left\{ C\, e^{(\sigma + j\,\omega)t} + C^*\, e^{(\sigma - j\,\omega)t} \right\} 1(t) =$$

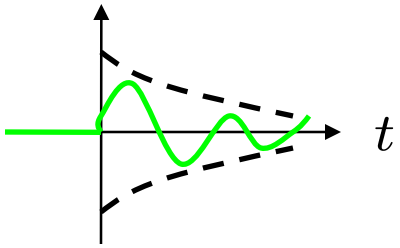
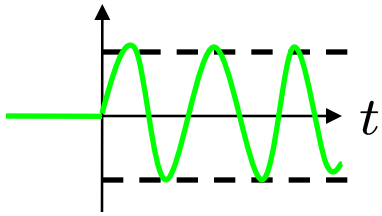
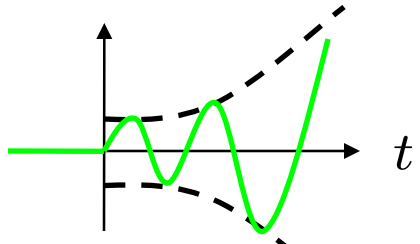
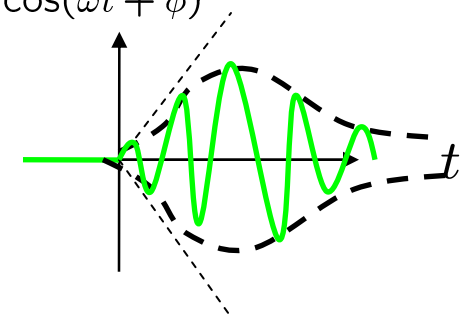
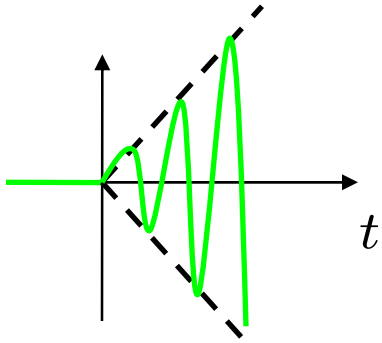
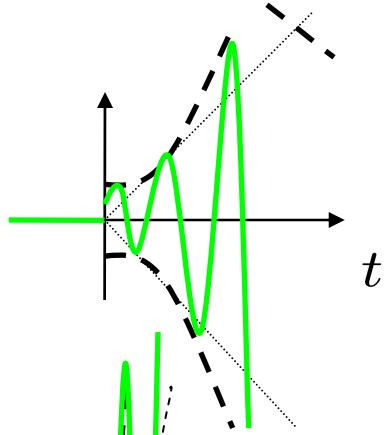
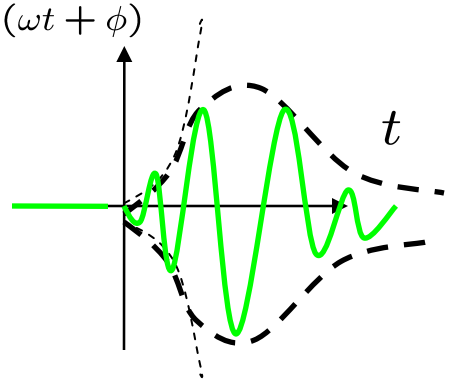
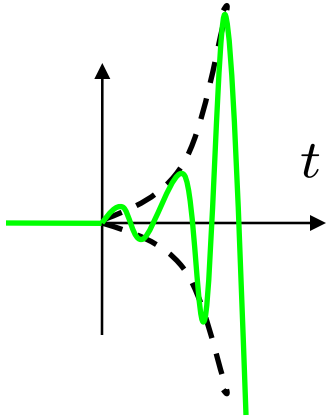
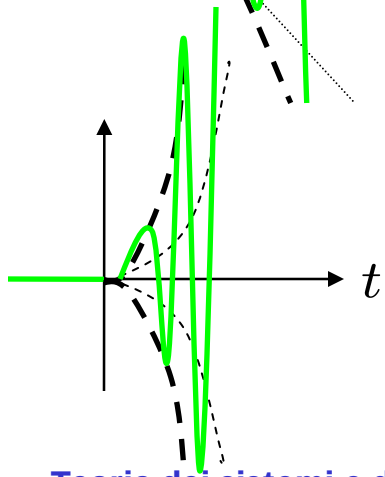
$$= \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \left\{ C\, e^{j\,\omega t} + C^*\, e^{-j\,\omega t} \right\} 1(t)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \left\{ (C + C^*) \cos(\omega t) + (C - C^*) \sin(\omega t) \right\} 1(t)$$

$$= \frac{2}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \left\{ \mathcal{R}e(C) \cos(\omega t) - \mathcal{I}m(C) \sin(\omega t) \right\} 1(t)$$

$$= K\, t^{n-1}\, e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)\, 1(t) \qquad K = 2\frac{|C|}{(n-1)!}, \qquad \phi = artan\frac{\mathcal{I}m(C)}{\mathcal{R}e(C)}$$

$$p \in \mathbb{C}$$

$\sigma = \mathcal{R}e\{p\} < 0$	$\sigma = 0$	$\sigma > 0$
$f(t) = Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$		
$n = 1$ 		
$f(t) = Kte^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$		
$n = 2$ 		
$f(t) = Kt^2e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$		
$n = 3$ 		

Studio qualitativo delle L-trasformate

Osservazioni nel caso di poli complessi coniugati:

- Per $\mathcal{R}e\{p\} < 0$ l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero

- Per $\mathcal{R}e\{p\} = 0$ la funzione è limitata sse la molteplicità di p è unitaria

- Per $\mathcal{R}e\{p\} > 0$ l'andamento è SEMPRE divergente

Proprietà delle L-trasformate

Vediamo ancora due proprietà molto importanti:

Teorema del valore iniziale

IPOTESI: F(s) strettamente propria, cioè n>m (quindi f(t) NON impulsiva all'istante t=0)

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)$$

solo per chi è curioso:

se $f(t)$ ha impulsi "generalizzati"- $\delta(t), \delta^{(1)}(t), \cdots$ - nell'origine il teorema non vale ...
riflettere sul perché!

Teorema del valor finale

IPOTESI: Tutti poli sono nel semipiano sinistro, con al più un polo di molteplicità unitaria nell'origine.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)$$

È un teorema molto utile: si trova subito il valore regime della $f(t)$ senza fare troppi calcoli!

Teorema del valor finale: esempi

Applicazione corretta:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = s\lim_{s\to 0} F(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s+1} = 0$$

C'e' un solo polo a parte reale negativa



Applicazione scorretta:

$$\lim_{t\to+\infty} \sin(\omega t) \stackrel{?}{=} \lim_{s\to 0} s\,\frac{\omega}{s^2+1}$$



Ci sono due poli immaginari puri!



Un esempio

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Innanzitutto troviamo i poli:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + (1 - j2))(s + (1 + j2))}$$

Poi espandiamo in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s + (1 - j2))} + \frac{C_2^*}{(s + (1 + j2))}$$

Applichiamo la formula dei residui :

$$C_1 = \lim_{s \longrightarrow 0} F(s)\, s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \longrightarrow (-1+j2)} F(s)\,(s + (1 - j2)) = 3 + j4$$

$$C_2^* = \lim_{s \longrightarrow (-1-j2)} F(s)\,(s + (1 + j2)) = 3 - j4$$



$$f(t) = \left(1 + (3 + j4)e^{-(1-j2)t} + (3 - j4)e^{-(1+j2)t}\right) \cdot 1(t)$$

Non è molto agevole perché presenta coefficienti complessi...

Semplifichiamola sfruttando le formule di Eulero:

$$f(t) = \left(1 + 10e^{-t}(\cos(2t + \phi))\right) \cdot 1(t) \qquad \phi = artan(\frac{4}{3})$$

Ma si potevano anche accoppiare i poli complessi e coniugati:

$$\frac{3 + j4}{(s + 1 - j2)} + \frac{3 - j4}{(s + 1 + j2)} = \ldots = \frac{6(s + 1) - 16}{(s + 1)^2 + (2)^2}$$

$$\ldots = 6\,\frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + (2)^2} - 8\,\frac{2}{(s + 1)^2 + (2)^2}$$

Antitrasformando –> ricordare la proprietà di traslazione in frequenza:

$$f(t) = \left(1 + 6e^{-t}\cos 2t - 8e^{-t}\sin 2t\right) \cdot 1(t)$$

Quello appena visto si dice metodo del **COMPLETAMENTO DEI QUADRATI**:

a. Si accoppiano i poli complessi e coniugati:

$$\frac{C_2}{(s+p)} + \frac{C_2^*}{(s+p^*)} \Longrightarrow \frac{a\,s+b}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

$\mathcal{R}e\{p\}$ $\mathcal{I}m\{p\}$

b. Si "aggiustano" le costanti al numeratore per avere:

$$\frac{K_1(s+\sigma)+K_2\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}^{-1}$$

$$\left(K_1 e^{-\sigma t}\cos(\omega t) + K_2 e^{-\sigma t}\sin(\omega t)\right)\, 1(t)$$

Segnali a tempo discreto

Alcuni segnali canonici a tempo discreto

- Sia data una sequenza di istanti di tempo

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$$

- Si definisce segnale a tempo discreto una successione di valori associati alla successione temporale considerata

$$w_k \stackrel{\triangle}{=} w(t_k)$$

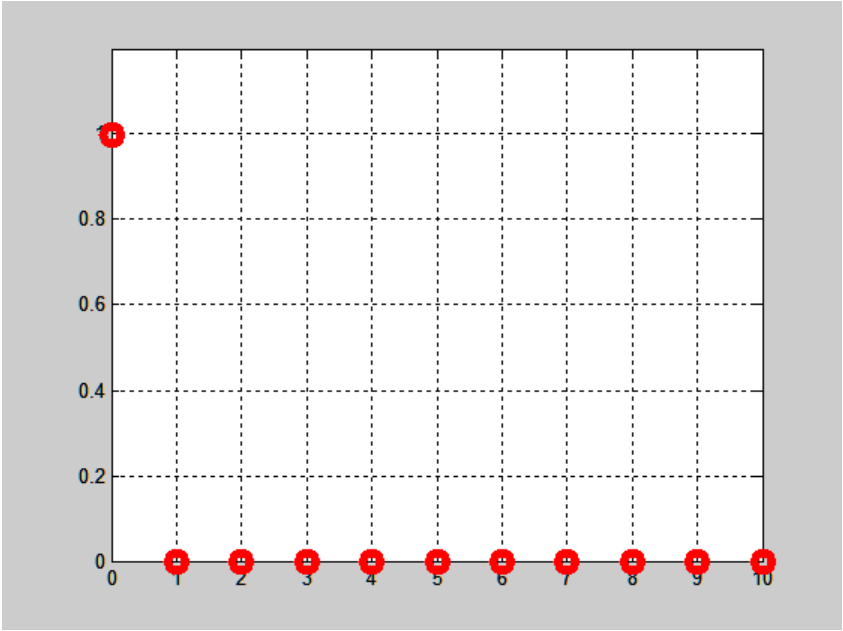
- Se vale che $t_k - t_{k-1} = T_s, \forall k$ allora

$$w_k = w(kT_s)$$

Per semplicità in ciò che segue trascuriamo di indicare esplicitamente l'intervallo T_s

Impulso unitario

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = 0 \\ 0 & \text{per} \quad k \neq 0 \end{cases}$$



Per i curiosi: ha proprietà analoghe all'impulso a tempo continuo (integrale e sifting property).
Basta scriverle adattandole al dominio a tempo discreto.

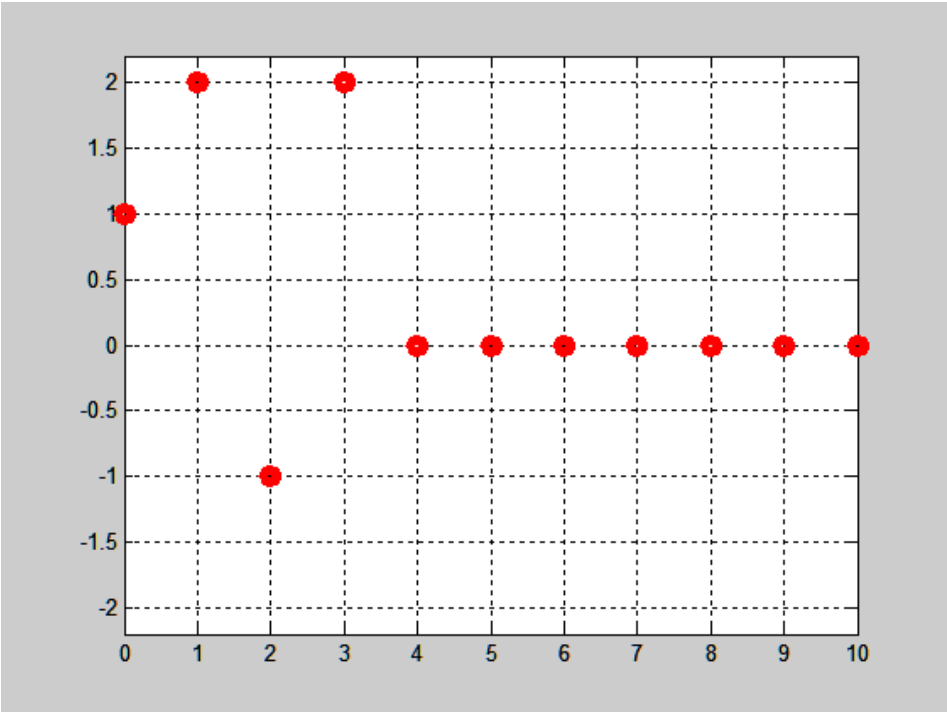
Impulso traslato

$$\delta(k-h) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = h \\ 0 & \text{per} \quad k \neq h \end{cases}$$

- Una sequenza qualsiasi a tempo discreto può venir sempre espressa come sommatoria di segnali δ opportunamente traslati

$$w(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1) +$$

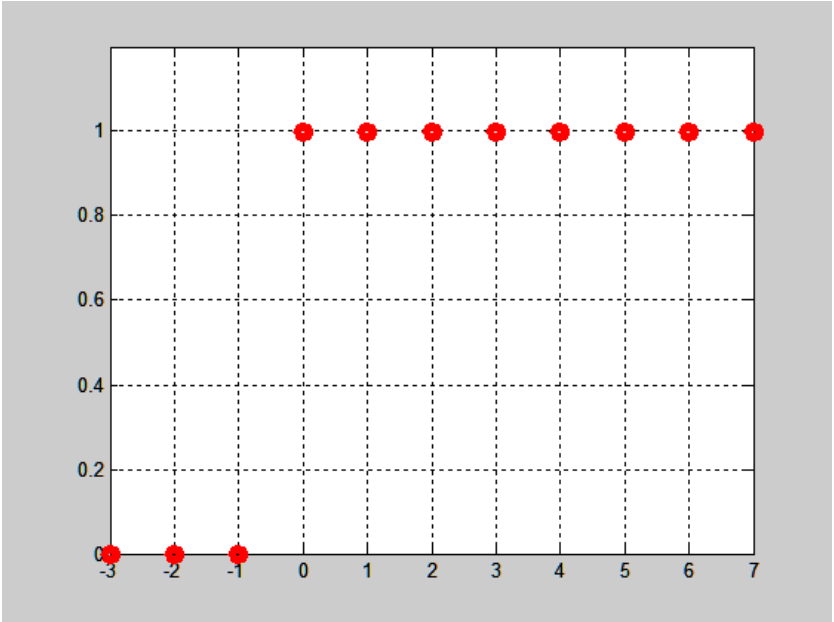
$$-\delta(k-2) + 2\,\delta(k-3)$$



Gradino unitario

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

- La sequenza 1(k) è utile per evidenziare l'istante iniziale di una sequenza generica (ne parliamo più avanti!)



Segnale esponenziale

$$w(k) = \begin{cases} a^k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = a^k \cdot 1(k) \qquad a \in C$$

Nel caso di campionamento $w(kT_s) = a^{kT_s} \cdot 1(kT_s)$

Rampa unitaria

$$w(k) = \begin{cases} k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = k \cdot 1(k)$$

Nel caso di campionamento $w(kT_s) = k \cdot T_s \cdot 1(kT_s)$

Polinomio fattoriale di ordine h

$$w(k) = k^{(h)} \cdot 1(k-h+1)$$

- Si definisce **ricorsivamente**

$$k^{(0)} = 1(k)$$

$$k^{(h)} \triangleq \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-h+1) & \text{per} \quad k \geq h-1 \\ 0 & \text{per} \quad k < h-1 \end{cases}$$

- Si vede facilmente che

$$k^{(1)} = k \cdot 1(k)$$

$$k^{(2)} = k\,(k-1) \cdot 1(k-1)$$

$$\cdots$$

- la sequenza $$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} 1(k-h+1)$$

sarà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto!

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} 1(k-h+1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t^h}{h!} 1(t)$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$k^{(h)} = \binom{k}{h} 1(k-h+1)$$

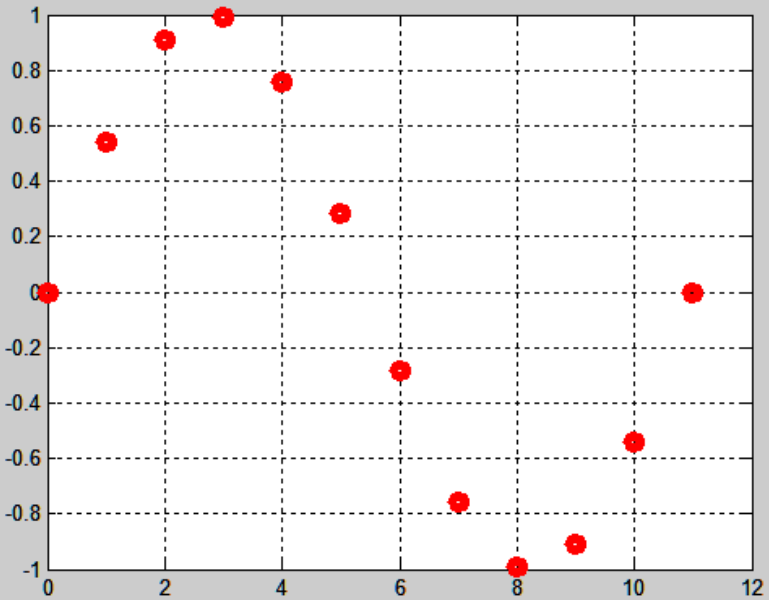
con

$$\binom{k}{h} = \begin{cases} \dfrac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\cdots\,(k-h+1)}{h!} & \left[\begin{array}{l}\text{per } h > 0 \\ k \geq h-1\end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } h = 0] \end{cases}$$

Segnale sinusoidale

$$w(k) = \begin{cases} \sin(\omega k) & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = \sin(\omega k) \cdot 1(k)$$



Nel caso di campionamento

$$w(k\,T_s) = \sin(\Omega\, k\, T_s) \cdot 1(k\,T_s)$$

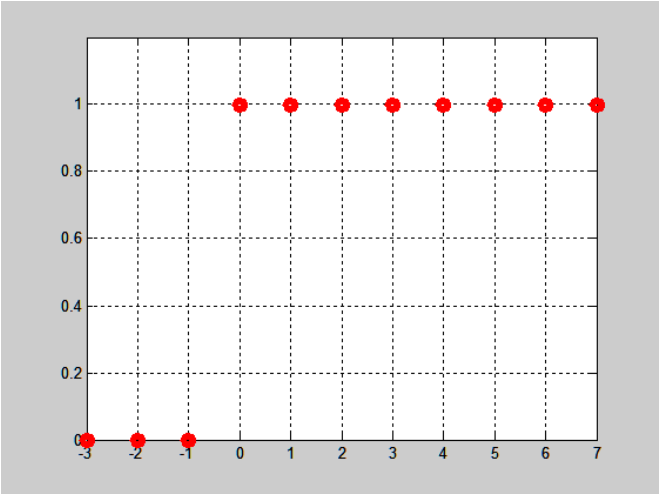
$$\Omega\, T_s = \hat{\omega}$$

Istante iniziale a tempo discreto

- Come fare ad evidenziare quale è l'istante iniziale per un segnale a tempo discreto?

- Si utilizza (in modo analogo al caso del tempo continuo) il segnale "**gradino unitario**" (definito prima)

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$



Istante iniziale a tempo discreto (2)

- Per evidenziare che allora un generico segnale y(k) a tempo discreto ha inizio all'istante k_0 si usa la notazione

$$y(t) = \tilde{y}(k) \cdot 1(k - k_0)$$

che equivale a scrivere $$y(t) = \begin{cases} 0 & \leftrightarrow \quad k < k_0, \; k \in \mathbb{Z} \\ \tilde{y}(k) & \leftrightarrow \quad k \geq k_0, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Esempi:

$$y_1(k) = e^{-5\,k} \cdot 1(k - 3)$$

$$y_2(k) = e^{-5\,(k-3)} \cdot 1(k - 3)$$

- Che differenza c'è tra i due segnali?

Equazioni alle differenze

Definizione

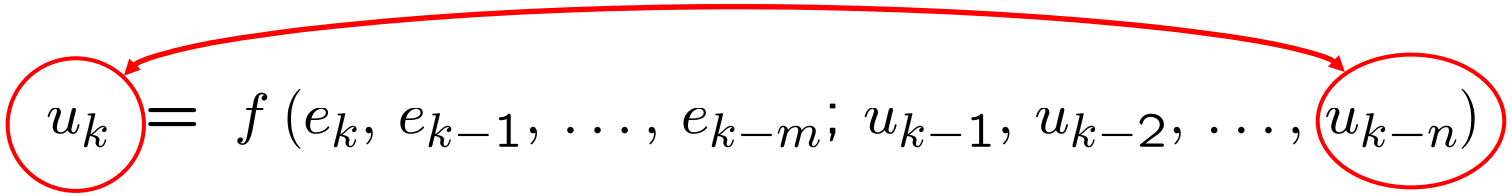
- A partire dalla sequenza $\{e_k = e(kT_s),\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ si vuole elaborare una seconda sequenza discreta $\{u_k\}$
- Il campione generico della sequenza $\{u_k\}$ viene calcolato nel medesimo istante in cui viene acquisito un nuovo campione di $\{e_k\}$
- La legge di calcolo del nuovo valore di u_k è ricorsiva.

$$u_k = f\left(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}\right)$$

- Supponiamo ora che il termine generico u_k dipenda soltanto da un numero finito di valori passati sia della sequenza $\{e_k\}$ che della sequenza $\{u_k\}$

$$u_k = f(e_k, e_{k-1}, \ldots, e_{k-m}; u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-n})$$

- In tal caso l'equazione si dice **equazione alle differenze di ordine *n***, dove ***n*** è la "*distanza temporale* " massima tra gli elementi della sequenza incognita, che compaiono nell'equazione.



- Rappresenta l'analogo a tempo discreto delle equazioni differenziali nel caso a tempo continuo.

- Ricapitolando, un'**equazione alle differenze finite** è un'equazione che ha come **incognita** una **funzione a tempo discreto**.

- L'equazione alle differenze esprime il legame tra la successione incognita ed altre successioni note, eventualmente assegnando anche opportune condizioni iniziali. Il legame viene espresso tramite una relazione che lega tra loro e/o alle successioni note i valori della successione incognita ad istanti discreti di tempo diversi:

$$u_k = f\left(e_k, e_{k-1}, \ldots, e_{k-m}; u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-n}\right)$$

- Il termine **equazione alle differenze** deriva dal fatto che è possibile definire le **differenze finite**

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1}$$ Differenza di ordine *1*

$$\nabla^2 u_k = \nabla u_k - \nabla u_{k-1}$$ Differenza di ordine *2*

$$\nabla^3 u_k = \nabla^2 u_k - \nabla^2 u_{k-1}$$ Differenza di ordine *3*

$$\dots$$

$$\nabla^n u_k = \nabla^{n-1} u_k - \nabla^{n-1} u_{k-1}$$ Differenza di ordine *n*

- I termini u_k, u_{k-1} ecc. si possono allora esprimere in funzione delle differenze finite appena definite $\nabla^h u_k$ [una sorta di rapporti incrementali]

$$
\begin{aligned}
u_k &= u_k \\
u_{k-1} &= u_k - \nabla u_k \\
u_{k-2} &= u_k - 2\nabla u_k + \nabla^2 u_k \\
&\dots
\end{aligned}
$$

- Sostituendo nell'equazione

$$u_k = f\left(e_k, e_{k-1}, \ldots, e_{k-m}; u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_{k-n}\right)$$

si ottiene

$$\hat{f}\left(u_k, \nabla u_k, \nabla^2 u_k, \ldots, \nabla^n u_k, e_k, \nabla e_k, \ldots, \nabla^m e_k\right) = 0$$

- Le due espressioni sono equivalenti, ma quella ricorsiva è più conveniente  maggiore facilità d'implementazione

Un semplice esempio

- Partiamo dall'equazione alle differenze di ordine 2

$$u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k$$

- Sostituiamo ai termini u_{k-1}, u_{k-2} le espressioni

$$u_{k-1} = u_k - \nabla u_k \qquad u_{k-2} = u_k - 2\nabla u_k + \nabla^2 u_k$$

- Si ottiene l'equazione equivalente

$$a_2 \nabla^2 u_k - (a_1 + 2a_2) \nabla u_k + (a_2 + a_1 + 1) u_k = b_0 e_k$$

Osservazioni e definizioni

- Nel caso in cui la funzione $f(\cdots)$ sia lineare si ottiene una **equazione lineare alle differenze di ordine n**:

$$u_k = b_0(k)e_k + b_1(k)e_{k-1} + \ldots + b_m(k)e_{k-m} + \\ -a_1(k)u_{k-1} - a_2(k)u_{k-2} - \ldots - a_n(k)u_{k-n}$$

- Le equazioni lineari alle differenze rappresentano l'analogo delle equazioni differenziali lineari del caso a tempo continuo, studiato nel corso di "Fondamenti di Automatica".

- In generale i coefficienti dell'equazione possono variare, al variare dell'istante di tempo considerato:

$$b_j = b_j(k),\ a_i = a_i(k)$$

Ancora definizioni

- Consideriamo un'equazione lineare alle differenze:

$$u_k = b_0(k)e_k + b_1(k)e_{k-1} + \ldots + b_m(k)e_{k-m} + \\ -a_1(k)u_{k-1} - a_2(k)u_{k-2} - \ldots - a_n(k)u_{k-n}$$

- Se i valori dei coefficienti a_i, b_j sono costanti, si ha un'**equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti**.

$$u_k = b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + \ldots + b_m e_{k-m} + \\ -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} - \ldots - a_n u_{k-n}$$

- Questa particolare classe di equazioni alle differenze sarà quella di maggior interesse nel corso.

Come si risolve un'equazione alle differenze, lineare, a coeff. costanti?

- Si può dimostrare che la **soluzione è unica** qualora siano noti i **valori iniziali** della sequenza incognita (le altre sequenze che compaiono nell'equazione devono essere note) e l'**istante iniziale** [cioè le condizioni iniziali].

- Per ottenere campione per campione la sequenza incognita è possibile risolvere ricorsivamente l'equazione.

- Non è una tecnica efficiente! Esistono metodi più efficaci! Se ne riparlerà nel prosieguo del corso ...

Esempio

- Si vuole risolvere l'equazione $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ a partire dall'istante $k = 2$, con condizioni iniziali

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 1$$

- La sequenza risulta essere allora ("sequenza di Fibonacci")

$$\{u_k\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$$

$$u_2 = u_1 + u_0$$

$$u_3 = u_2 + u_1$$

$$\ldots$$

Esempio (continua...)

- Script in Matlab® per determinare i primi 10 campioni

```
N = 10; % i primi N valori della sequenza
u0 = 1; u1 = 1; % valori iniziali

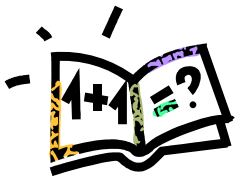
u_km2 = u0; u_km1 = u1; % inizializzazione
for k = 2 : N
    uk = u_km1 + u_km2; % valore attuale della sequenza
    u_km2 = u_km1; % aggiorna valore "a 2 passi prima"
    u_km1 = uk; % aggiorna valore "al passo prima"
    messaggio = sprintf('al passo %d valore di u_k
  %.2f',k,uk);
    disp(messaggio); % visualizza risultato
end % for
```

Esempio (continua ...)

- Risultato visualizzato in Matlab®

```
************************************************
Soluzione di u(k) = u(k-1) + u(k-2), u(0) = u(1) = 1
************************************************
al passo 2 valore di u_k 2.00
al passo 3 valore di u_k 3.00
al passo 4 valore di u_k 5.00
al passo 5 valore di u_k 8.00
al passo 6 valore di u_k 13.00
al passo 7 valore di u_k 21.00
al passo 8 valore di u_k 34.00
al passo 9 valore di u_k 55.00
al passo 10 valore di u_k 89.00
>>
```

Esercizio “per casa”



- Data l’equazione alle differenze di ordine 1

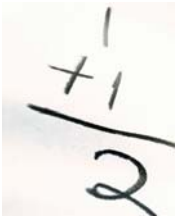
$$u_k = e_k - e_{k-1} - u_{k-1} \qquad k \geq 0$$

dove

$$u_{-1} = 1 \qquad e_k = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

scrivere uno **script Matlab** (oppure un programma utilizzando un qualsiasi linguaggio di programmazione) che permetta di calcolare i **primi 20 campioni** della sequenza incognita, a partire **dall’istante k=0**

Soluzione dell'esercizio "per casa"



- I primi 20 campioni della sequenza incognita, nelle condizioni descritte, sono

```
al passo 0 valore di u_k 0.00
al passo 1 valore di u_k -1.00
al passo 2 valore di u_k 2.00
al passo 3 valore di u_k -3.00
al passo 4 valore di u_k 4.00
al passo 5 valore di u_k -5.00
al passo 6 valore di u_k 6.00
al passo 7 valore di u_k -7.00
al passo 8 valore di u_k 8.00
al passo 9 valore di u_k -9.00
al passo 10 valore di u_k 10.00
al passo 11 valore di u_k -11.00
al passo 12 valore di u_k 12.00
al passo 13 valore di u_k -13.00
al passo 14 valore di u_k 14.00
al passo 15 valore di u_k -15.00
al passo 16 valore di u_k 16.00
al passo 17 valore di u_k -17.00
al passo 18 valore di u_k 18.00
al passo 19 valore di u_k -19.00
al passo 20 valore di u_k 20.00
```

Osservazioni

- La formulazione presentata finora per le equazioni alle differenze non è l'unica possibile.

- L'espressione $u_k = f\left(e_k, \ldots, e_{k-m}; u_{k-1}, \ldots, u_{k-n}\right)$ esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**, che fornisce il valore all'istante attuale della successione incognita $\{u_k\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{u_k\}$ e di quella assegnata $\{e_k\}$.
- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Esiste anche la possibilità di esprimere le equazioni alle differenze tramite una **relazione ricorsiva in avanti**

$$u_{k+n} = f\left(e_{k+m}, e_{k+m-1}, \ldots, e_k; u_{k+n-1}, u_{k+n-2}, \ldots, u_k\right)$$

- Questa relazione fornisce allora un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{u_k\}$ [in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{u_k\}$ che di quella assegnata $\{e_k\}$.

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

Equazioni alle differenze e condizioni iniziali

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “all’indietro”, in cui la sequenza incognita $\{u_k\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$u_k = f(e_k, \ldots, e_{k-m}; u_{k-1}, \ldots, u_{k-n})$$

$\{e_k\}$ nota $\forall\, k \geq 0$ incognita $\{u_k\}$, $k \geq 0$

c.i. $\Longleftrightarrow$ $u_{-n}, u_{-n+1}, \ldots, u_{-1}$

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “in avanti”, in cui la sequenza incognita $\{u_k\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$u_{k+n} = f\left(e_{k+m}, e_{k+m-1}, \ldots, e_k; u_{k+n-1}, u_{k+n-2}, \ldots, u_k\right)$$

$\{e_k\}$ nota $\forall\, k \geq 0$ incognita $\{u_k\}$, $k \geq 0$

c.i. $\Longleftrightarrow$ $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$

Trasformata Zeta

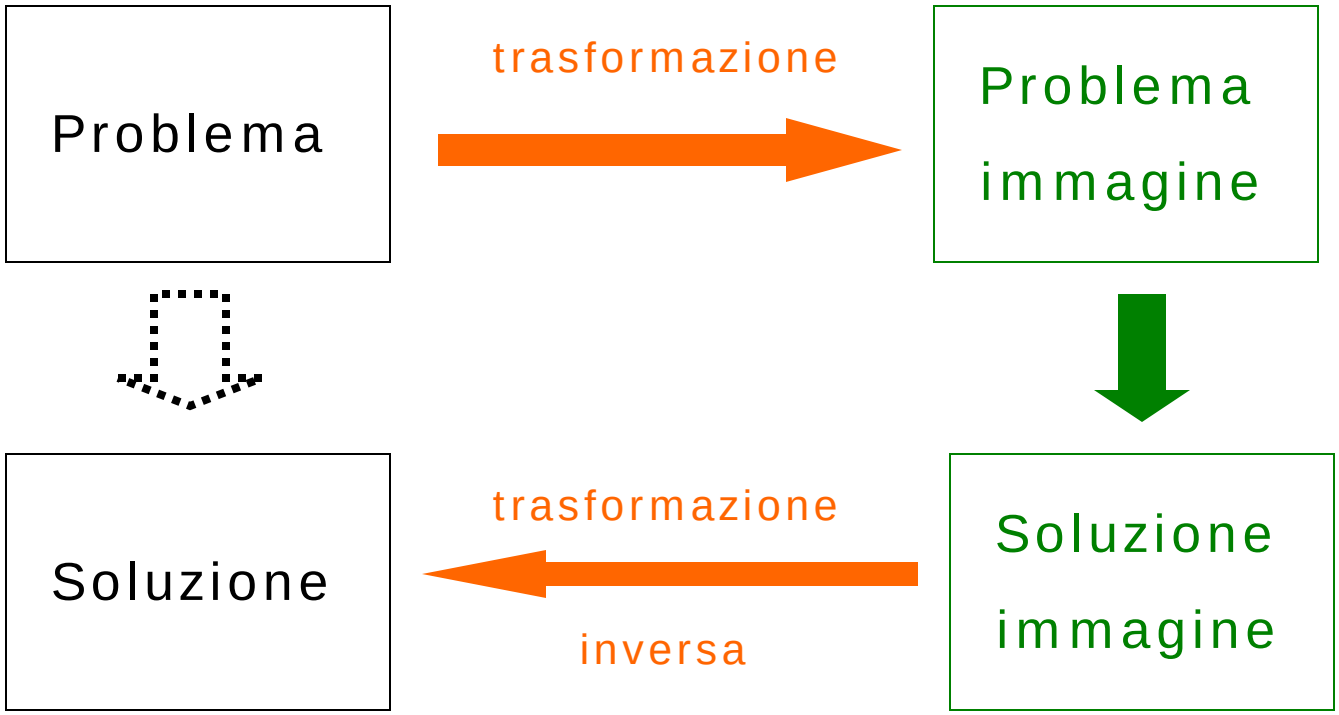
Trasformata unilatera
Definizione e proprietà
Trasformate elementari
Antitrasformazione
Esempi

Motivazioni

- La teoria dei sistemi dinamici a tempo discreto è basata sulle equazioni alle differenze finite, così come per i sistemi dinamici a tempo continuo si ricorre alle equazioni differenziali.

- In maniera analoga alla Trasformata di Laplace, si vorrebbe avere a disposizione uno strumento matematico che trasformi queste equazioni alle differenze in equazioni puramente algebriche (sotto opportune condizioni), molto più agevoli da trattare.

Schema di risoluzione di equazioni alle differenze, lineari ed a coefficienti costanti



La Z-trasformata: definizione

La Z-trasformata della successione $\{x(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$

è la funzione di variabile complessa $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$

Raggio di convergenza: tipicamente la serie che definisce la trasformata converge al di fuori di un cerchio nel piano della variabile complessa z :

$$|z| > R, \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Nel caso di segnali campionati:

- Se il segnale a tempo discreto è stato generato per campionamento, si definisce la Z-trasformata della successione in maniera analoga :

$$\{x(k\,T_s), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$$



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k\,T_s) z^{-k}$$

Notazioni ed osservazioni

- In generale non viene esplicitamente indicato l'intervallo di campionamento T_s con il quale è stata eventualmente ottenuta la sequenza $x(kT_s)$, ma semplicemente la si indica con $x(k)$

- Nella maggioranza dei casi, le Z-trasformate che considereremo saranno funzioni polinomiali fratte.

- L'espressione di una Z-trasformata (nei casi di nostro interesse) può essere espressa tramite potenze di z^{-1} oppure di z

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{4 + 6z^{-1} + 8z^{-2}} \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^2 - 2z}{4z^2 + 6z + 8}$$

- Dal punto di vista algebrico sono equivalenti. L'unica difficoltà sta nel definire zeri e poli di $X(z)$, perché nelle due notazioni sono differenti [zeri e poli sono le radici dei polinomi a numeratore ed a denominatore]. Per poli e zeri useremo sempre la notazione con potenze di z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \Longrightarrow \begin{cases} \textbf{Zeri}: \text{ radici di } N(z) \\ \textbf{Poli}: \text{ radici di } D(z) \end{cases}$$

- Per ammettere Z-trasformata nel modo in cui è stata definita, le sequenze che consideriamo devono essere **causali**, ovvero

$$x(k) \equiv 0, \quad \forall k < 0$$

Esempio

- Consideriamo la Z-trasformata

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5\,z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)\,(z + 2)}$$

- È immediato determinare zeri e poli dell'espressione analizzata.

- Se la Z-trasformata fosse espressa tramite potenze di z^{-1} , lo zero in $z = 0$ non sarebbe più così facilmente individuabile

$$X(z) = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{1 + 3\,z^{-1} + 2\,z^{-2}} = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{(1 + z^{-1})\,(1 + 2\,z^{-1})}$$

Proprietà della Z-trasformata

- **Linearità**

$$\mathcal{Z}\left[c_1\, f(k) + c_2\, g(k)\right] \;=\; c_1\, \mathcal{Z}\left[f(k)\right] + c_2 \mathcal{Z}\left[g(k)\right]$$

Dimostrazione

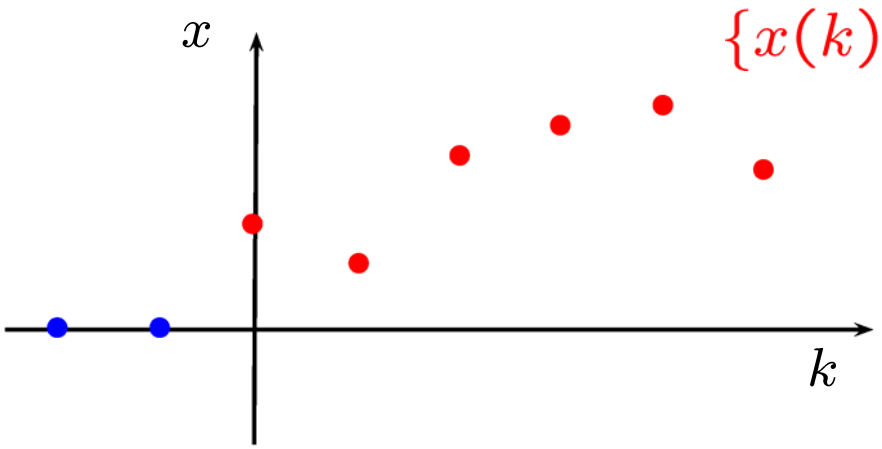
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{c_1 f + c_2 g\right\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[c_1 f(k) + c_2 g(k)\right]\, z^{-k} \\
&= c_1 \sum_{k} f(k) z^{-k} \;+\; c_2 \sum_{k} g(k) z^{-k} \\
&= c_1 F(z) + c_2 G(z)
\end{aligned}$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k+1)\right] = z\left[X(z) - x(0)\right]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di m campioni**

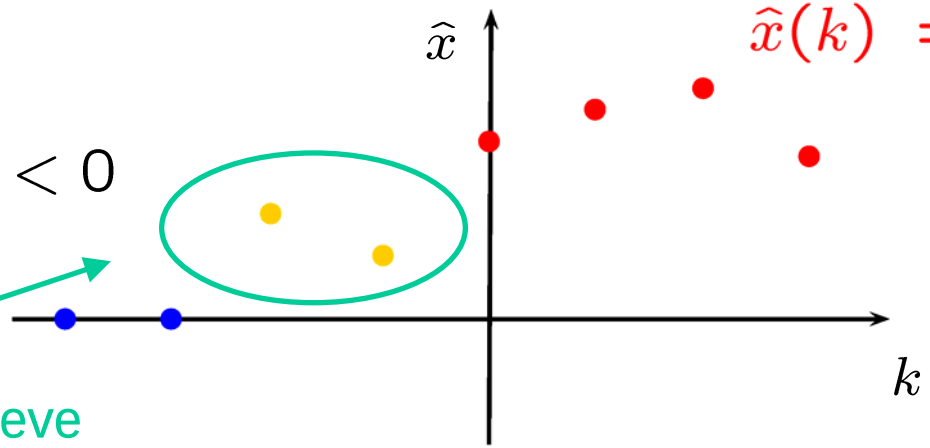
$$\mathcal{Z}\left[x(k+m)\right] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)\, z^{-k}\right]$$



anticipo di 2 passi

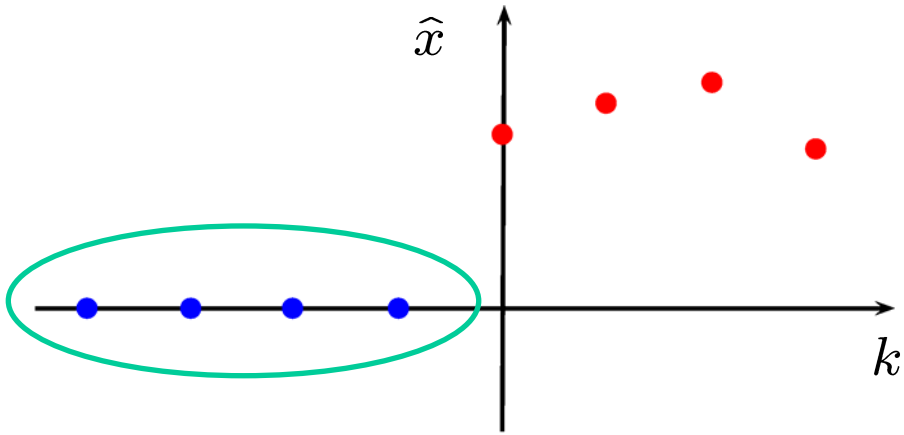
$$\hat{x}(k) = x(k+2)$$

$$\hat{x}(k) \equiv 0 \; \forall \, k < 0$$



il nuovo segnale deve essere anch'esso causale!

$$\{\hat{x}(k) = x(k+2)\}$$



Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1)\, z^{-k}$$

$$= z \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1) z^{-(k+1)} = z \sum_{n=1}^{+\infty} x(n) z^{-(n)}$$

$$n \triangleq k+1$$

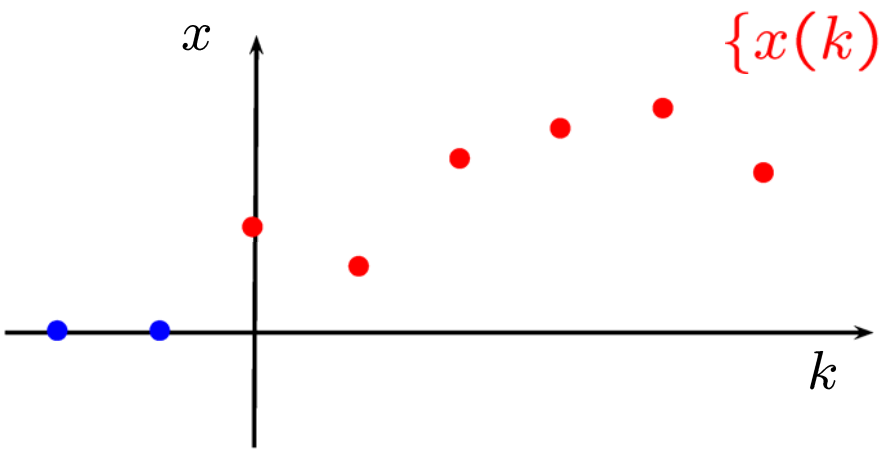
$$= z \left[\sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-(n)} - x(0) \right] = z\,[X(z) - x(0)]$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

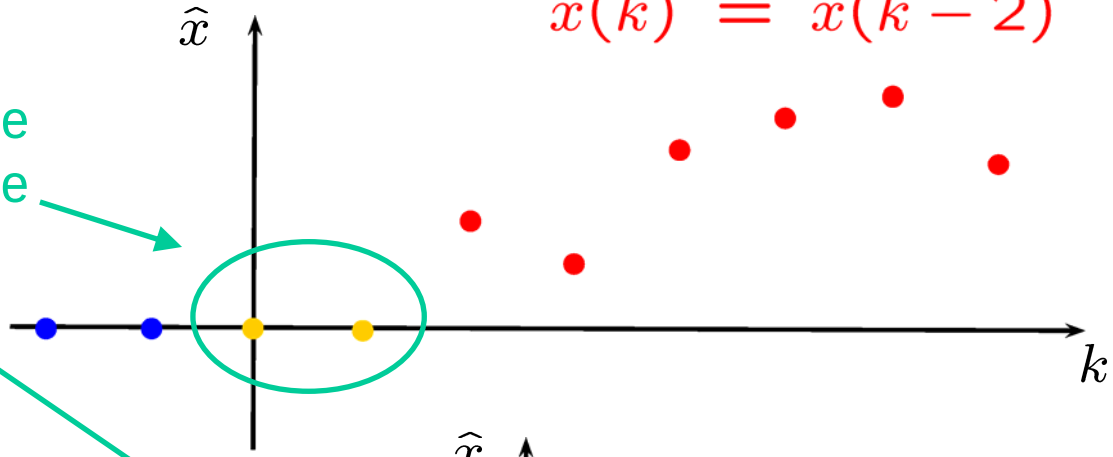
$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$

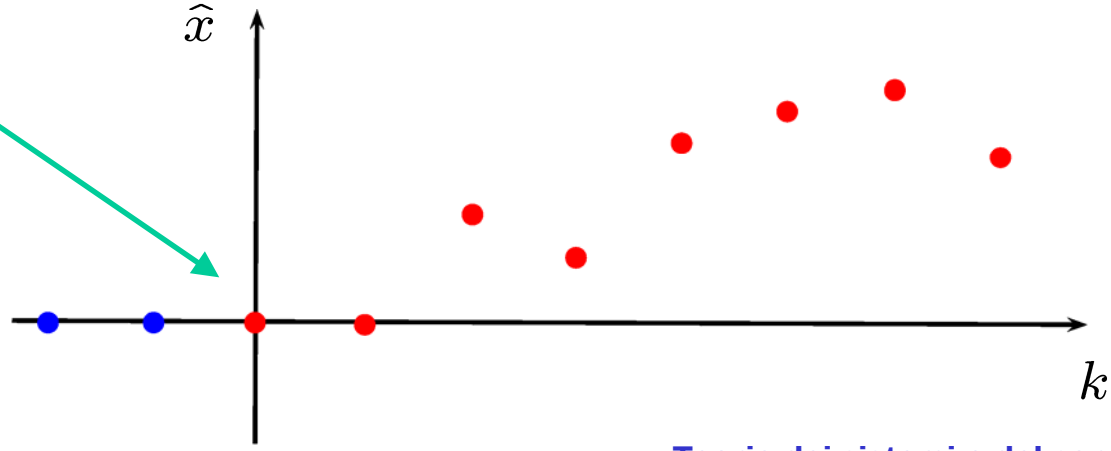


ritardo di 2 passi

$$\hat{x}(k) = x(k-2)$$

il nuovo segnale inizia con due campioni nulli!





$$\{\hat{x}(k) = x(k-2)\}$$

Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-1)\, z^{-k}$$

$$= z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-1) z^{-(k-1)} = z^{-1} \sum_{n=-1}^{+\infty} x(n) z^{-(n)}$$

$$n \stackrel{\triangle}{=} k-1$$

$$x(n) \equiv 0 \text{ per } n < 0$$

$$= z^{-1} X(z)$$

Traslazione in frequenza

$$\mathcal{Z}\left\{a^k\, x(k)\right\} \;=\; X\left(a^{-1}\, z\right)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{a^k\, x(k)\right\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k\, x(k)\, z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)\eta^{-k} \\
\frac{z}{a} \triangleq \eta \qquad &= X\left(\eta\right) \;=\; X\left(a^{-1}\, z\right)
\end{aligned}$$

Differenziazione complessa

$$\mathcal{Z}\{k\,x(k)\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{k\,x(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} kx(k)z^{-k} \\
&= -z\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\left(-k\,z^{-k-1}\right) \\
&= -z\sum_{k=0}^{\infty} x(k)\frac{d}{dz}z^{-k} \\
&= -z\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\right] \\
&= -z\frac{d}{dz}X(z)
\end{aligned}$$

Prodotto di convoluzione

$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$

I segnali sono causali.

$$h(n) := \sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, g(n-k)$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)\, g(k)$$

$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = F(z)\, G(z)$$

- Cenni di dimostrazione

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, g(n-k) \right] z^{-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f(k)\, g(n-k)\, z^{-n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left[\sum_{n=0}^{\infty} g(n-k)\, z^{-n} \right]$$

$$h \stackrel{\triangle}{=} n - k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left[\sum_{h=-k}^{\infty} g(h)\, z^{-(h+k)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \left[\sum_{h=-k}^{\infty} g(h)\, z^{-h}\, z^{-k} \right]$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k} \right] \left[\sum_{h=-k}^{\infty} g(h)\, z^{-h} \right] = F(z)\, G(z)$$

Teorema del valore iniziale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata,

se esiste **finito** $\lim_{z\to\infty} X(z)$ allora

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{k\to 0} x(k) = x(0)$$

- Cenni di dimostrazione

Dalla definizione di Z-trasformata

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)\, z^{-1} + x(2)\, z^{-2} + \dots$$

$$= x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots$$

È facile verificare allora che

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x(0)$$

Teorema del valore finale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata,

se **tutti i poli** di $X(z)$ **hanno modulo minore di 1**, **escluso al più un polo di modulo unitario**, allora esiste finito $\lim_{k\to\infty} x(k)$ e

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left[\left(1 - z^{-1}\right) X(z)\right]$$

- Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)-x(k-1)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k)-x(k-1)\right] z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

$$\left(1-z^{-1}\right)X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k)-x(k-1)\right] z^{-k}$$

$$\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k)-x(k-1)\right] z^{-k}\right\}$$

Nelle ipotesi fatte di **sequenza causale** e **poli** della Z-trasformata di **modulo inferiore all'unità** (od al più uno semplice pari ad 1) si può scrivere che [giustificheremo più avanti le condizioni sui poli]

$$\lim_{z\to 1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k)-x(k-1)\right]\,z^{-k}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[x(k)-x(k-1)\right]$$

$$=\left[x(0)-0\right]+\left[x(1)-x(0)\right]+\left[x(2)-x(1)\right]+\ldots$$

$$=\lim_{k\to\infty}x(k)$$

Le ipotesi di causalità e sui poli di $X(z)$ permettono di affermare che il **limite esiste finito**.

In definitiva

$$\lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right]=\lim_{k\to\infty}x(k)$$

Esempio: applicazione dei teoremi

- Si consideri la Z-trasformata $$Y(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)}$$

- Sfruttando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, determinare:

$$y(0) = ? \quad y(1) = ? \quad \lim_{k\to\infty} y(k) = ?$$

- Per il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)} = 0$$

- Applicando la regola dell'anticipo ed ancora il teorema del valore iniziale si ottiene poi:

$$y(1) = \lim_{z\to\infty} z\,[Y(z) - y(0)] = \lim_{z\to\infty} \frac{z(2z+1)}{(z-1)(3z+1)} = \frac{2}{3}$$

- Applicando infine il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)} = \frac{3}{4}$$

Esempio: soluzione di una equazione alle differenze

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k+1) = 3y(k)+y(k-1)+u(k) \quad y(k) \equiv 0 \forall k < 0$$

Operando la Z-trasformata ad ambo i membri, utilizzando le proprietà ora viste si ottiene

$$Y(z) = \underbrace{\frac{z^2\, y(0)}{z^2 - 3z - 1}}_{\text{dipende dalle condizioni iniziali (soluzione libera)}} + \underbrace{\frac{z}{z^2 - 3z - 1} U(z)}_{\text{dipende dalla sequenza d'ingresso (soluzione forzata)}}$$

Trasformate notevoli

- **Impulso unitario**

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

- **Scalino unitario**

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

Dimostrazione

Serie geometrica

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

- **Rampa**

$$x(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, z^{-k} = -z \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Segnale polinomiale

$$x(k) = \begin{cases} k^n & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa *n* volte

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n z^{-k} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{z-1}\right]$$

Potenza con esponente intero

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-a)}$$

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left\{a^k\, 1(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \frac{\eta}{(\eta-1)} = \frac{z}{(z-a)} \qquad \frac{z}{a} \triangleq \eta$$

Esponenziale

$$x(k) = \begin{cases} e^{ak} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-e^a)}$$

Segnali sinusoidali

$$x(k) = \sin(\omega k)\ 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z \sin\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

$$\sin(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} \qquad \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

$$x(k) = \cos(\omega k)\ 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

Segnali “composti”

$$x(k) = a^k \sin(\omega k)\ 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{az \sin\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

$$x(k) = a^k \cos(\omega k)\ 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - az \cos\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

Polinomio fattoriale di ordine *n*

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} 1(k)$$

con

$$k^{(0)} = 1(k)$$

$$k^{(n)} \triangleq \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1) & \text{per} \quad k \geq n-1 \\ 0 & \text{per} \quad k < n-1 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$x(k) = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \cdot 1(k-n+1)$$

con

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\cdots\,(k-n+1)}{n!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } n > 0 \\ k \geq n-1 \end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } n = 0] \end{cases}$$

Cenni di dimostrazione

Lo si vuole dimostrare per induzione:

$$\text{per } n = 0 \quad \Rightarrow \quad x(k) = 1(k) \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\text{per } n = 1 \quad \Rightarrow \quad x(k) = k\,1(k) \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Supponiamo che sia vero per *n* generico e vediamo se da ciò si riesce a dimostrare che valga anche per (*n+1*)

$$\frac{k^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,(k-n)}{(n+1)!} = \frac{k^{(n)}\,(k-n)}{n!\,(n+1)}$$

Si può scrivere allora

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n+1)}}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{n+1}\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!}k\right] - \frac{n}{n+1}\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!}\right]$$

Per n=1 l'espressione è vera. L'abbiamo supposta valere per n generico:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Per n+1 allora:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n+1)}}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{n+1}\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!}k\right] - \frac{n}{n+1}\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!}\right]$$

Differenziazione complessa

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n+1)}}{(n+1)!}\right] = \frac{z\,(nz+1)}{(n+1)\,(z-1)^{n+2}} - \frac{n}{n+1}\,\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Allora vale anche per *n*+1 :

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n+1)}}{(n+1)!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+2}}$$

Per il principio d'induzione in definitiva

$$\mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Polinomio fattoriale di ordine *n* pesato da potenza con esponente intero

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k}\right]$$

Traslazione in frequenza

Polinomio fattoriale

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \frac{z\, a^{-1}}{\left(z\, a^{-1} - 1\right)^{n+1}} = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

La Z-antitrasformata

La Z-antitrasformata della funzione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

è definita come la sequenza

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z)\, dz$$

in cui Γ è una curva chiusa contenuta nella regione di convergenza.

Si consideri una classe particolare di funzioni $X(z)$, ovvero le funzioni razionali fratte della forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}$$

dove assumiamo $m \leq n$ ovvero

$$X(z) = K \frac{(z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_r)^{m_r}}{(z - p_1)^{n_1} (z - p_2)^{n_2} \ldots (z - p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$$

$z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ zeri ,

$p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}$ poli

Tecniche di Z anti-trasformazione

- Tecniche numeriche:
  - “long-division”
  - metodo “computazionale”
- Tecniche analitiche
  - espansione in fratti semplici

Tecnica della “Long-division” o divisione ripetuta

- Si tratta di una tecnica semplice che permette di determinare **termine a termine** gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

- È opportuno esprimere $X(z)$ in funzione di potenze negative $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

Si esegue la divisione ripetuta del polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore:

$$\begin{array}{r|l} 10z^{-1}+5z^{-2} & 1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2} \\ \hline -10z^{-1}+12z^{-2}-2z^{-3} & 10z^{-1}+17z^{-2}+\ldots \\ \hline 17z^{-2}-2z^{-3} & \end{array}$$

- Il risultato è una combinazione lineare di potenze negative $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$ ovvero

$$10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots$$

- Ricordando che, per definizione, si ha

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

per semplice confronto si ottiene la sequenza

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 10 \\ x(2) &= 17 \\ &\ldots \end{aligned}$$

“Long division”: riassumendo

- Metodo numerico e ricorsivo: fornisce i **valori** numerici della successione **termine a termine**, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa su operazioni di divisione di polinomi: è una tecnica **semplice** dal punto di vista **computazionale** (**vantaggio**).

Metodo “computazionale”

Si tratta di un’altra tecnica semplice che permette di determinare termine a termine gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

Idea: metto in evidenza il termine “1”, che è la Z-trasformata di ...

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot 1 = \frac{N(z)}{D(z)} U(z)$$

$$D(z)\, X(z) = N(z)\, U(z)$$

Utilizzando le proprietà viste per la Z-trasformata si perviene all'equazione alle differenze:

$$a_n\, x_{k+n} + a_{n-1}\, x_{k+n-1} + \ldots + a_0\, x_k = b_m\, u_{k+m} + b_{m-1}\, u_{k+m-1} + \ldots + b_0\, u_k$$

Non rimane che determinare le condizioni iniziali per risolvere termine a termine l'equazione alle differenze.

I campioni così determinati sono i valori della successione che è la Z-antitrasformata cercata.

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}$$

$$\left(z^2 - 1.2z + 0.2\right) X(z) = (10z + 5)\, U(z)$$

$$x(k+2)-1.2x(k+1)+0.2x(k) = 10u(k+1)+5u(k)$$

- $U(z) = 1 \Rightarrow u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$
- $x(k) = 0, \forall\, k < 0$

$$k = -2 \Rightarrow x(0) = 0$$
$$k = -1 \Rightarrow x(1) = 10$$
$$\vdots$$

Metodo “computazionale”: riassumendo

- Metodo **numerico** e **ricorsivo**: fornisce i valori della successione termine a termine, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa sulla supposizione che la Z-trasformata oggetto di studio rappresenti un’equazione alle differenze con come ingresso un segnale ad impulso discreto, centrato nell’origine: è una tecnica **semplice** dal punto di vista computazionale (**vantaggio**).

Espansione in fratti semplici

- Si tratta di una **tecnica analitica** per determinare la sequenza

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

- Si esprime $X(z)$ come somma di un numero finito di termini elementari di cui si sa determinare la Z-antitrasformata

- Il primo passo consiste nell'aggiungere un termine z al denominatore (ciò si può sempre fare):

$$X(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \cdots \frac{C_n}{z-p_n}$$

In generale:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1\,1}}{(z-p_1)} + \cdots \frac{C_{1\,n_1}}{(z-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{C_{2\,1}}{(z-p_2)} + \cdots \frac{C_{2\,n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \cdots$$

$$\frac{C_{q\,1}}{(z-p_q)} + \cdots \frac{C_{q\,n_q}}{(z-p_q)^{n_q}}$$

$$C_{i\,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i-j)}}{d\,z^{(n_i-j)}} \frac{X(z)}{z} \, (z-p_i)^{n_i} \right\}$$

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i\,j}\,z}{(z-p_i)^j}\right]$$

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}\,z}{(z-p_i)^j}\right] = C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\;1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\;1(k)$$

Caso in cui tutti i poli sono distinti:

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right] = C_i\, p_i^k\; 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i\, p_i^k\, 1(k)$$

$$C_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{X(z)}{z}\,(z-p_i) \right\}$$

Esempio: poli tutti distinti

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$$

$$C_1 = \lim_{z \to 1} \frac{10}{z - 0.2} = 12.5$$

$$C_2 = \lim_{z \to 0.2} \frac{10}{z - 1} = -12.5$$

$$X(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2}$$

$$x(k) = 12.5 \cdot 1(k) - 12.5 \cdot 0.2^k 1(k)$$

Esempio: poli multipli

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 2.7\,z^2 + 2.4\,z - 0.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - 0.7} + \frac{c_{2,1}}{z - 1} + \frac{c_{2,2}}{(z-1)^2}$$

$$c_1 = \left[(z - 0.7)\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.7} = 11,\bar{1}$$

$$c_{2,2} = \left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = 3,\bar{3}$$

$$c_{2\,1} = \left\{\frac{d}{d\,z}\left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]\right\}_{z=1} = -11,\bar{1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{11.\bar{1}}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}}{z-1} + \frac{3.\bar{3}}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{11.\bar{1}\,z}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}\,z}{z-1} + \frac{3.\bar{3}\,z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \left[11.\bar{1}\ (0.7)^k + 3.\bar{3}\,k - 11.\bar{1}\right]\ 1(k)$$

Espansione in fratti semplici: riassumendo

- Metodo **analitico**: fornisce direttamente la **forma chiusa** della soluzione (**vantaggio**)

$$X(z) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x(k)\}$$

- Si basa su tecniche d'analisi e proprietà di funzioni di variabile complessa: è una **tecnica "pesante"** dal punto di vista computazionale (**svantaggio**).

Analisi qualitativa di una Z-Trasformata

- Assegnata una trasformata $X(z)$ che cosa si può affermare, in maniera qualitativa, in merito all'andamento del segnale $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$?

- Ad esempio: in quali condizioni $x(k)$ sarà un segnale costante, oppure divergente, oppure tenderà a 0?

- L'evoluzione temporale del segnale $x(k)$ può essere ricavata, in modo qualitativo, analizzando i poli della corrispondente trasformata $X(z)$.

Analisi qualitativa: poli semplici

Verranno considerate le trasformate elementari:

- $X(z) = \dfrac{z}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}$

- $X(z) = \dfrac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \qquad a, \omega \in \mathbb{R}$

Poli reali semplici:

- Il termine elementare è

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}$$

al quale corrisponde la sequenza elementare

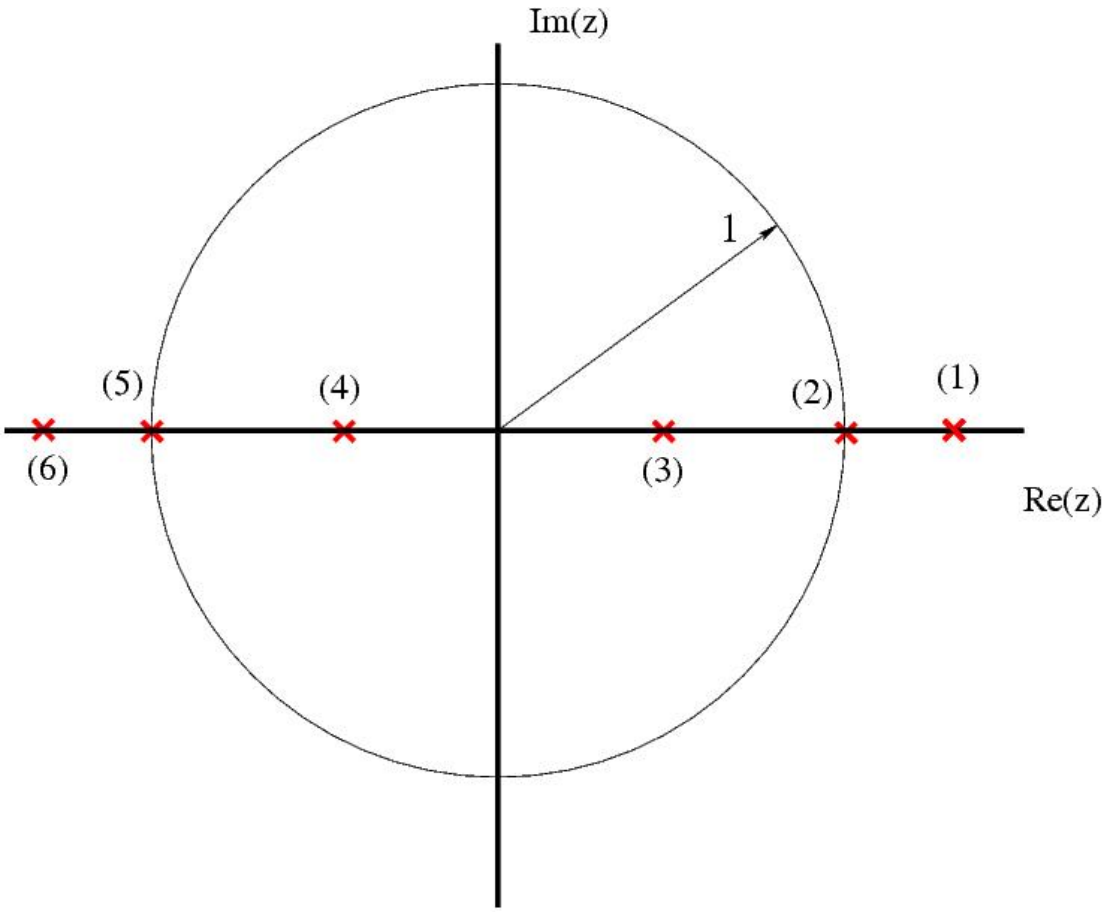
$$x(k) = a^k \, 1(k), \qquad k \geq 0$$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

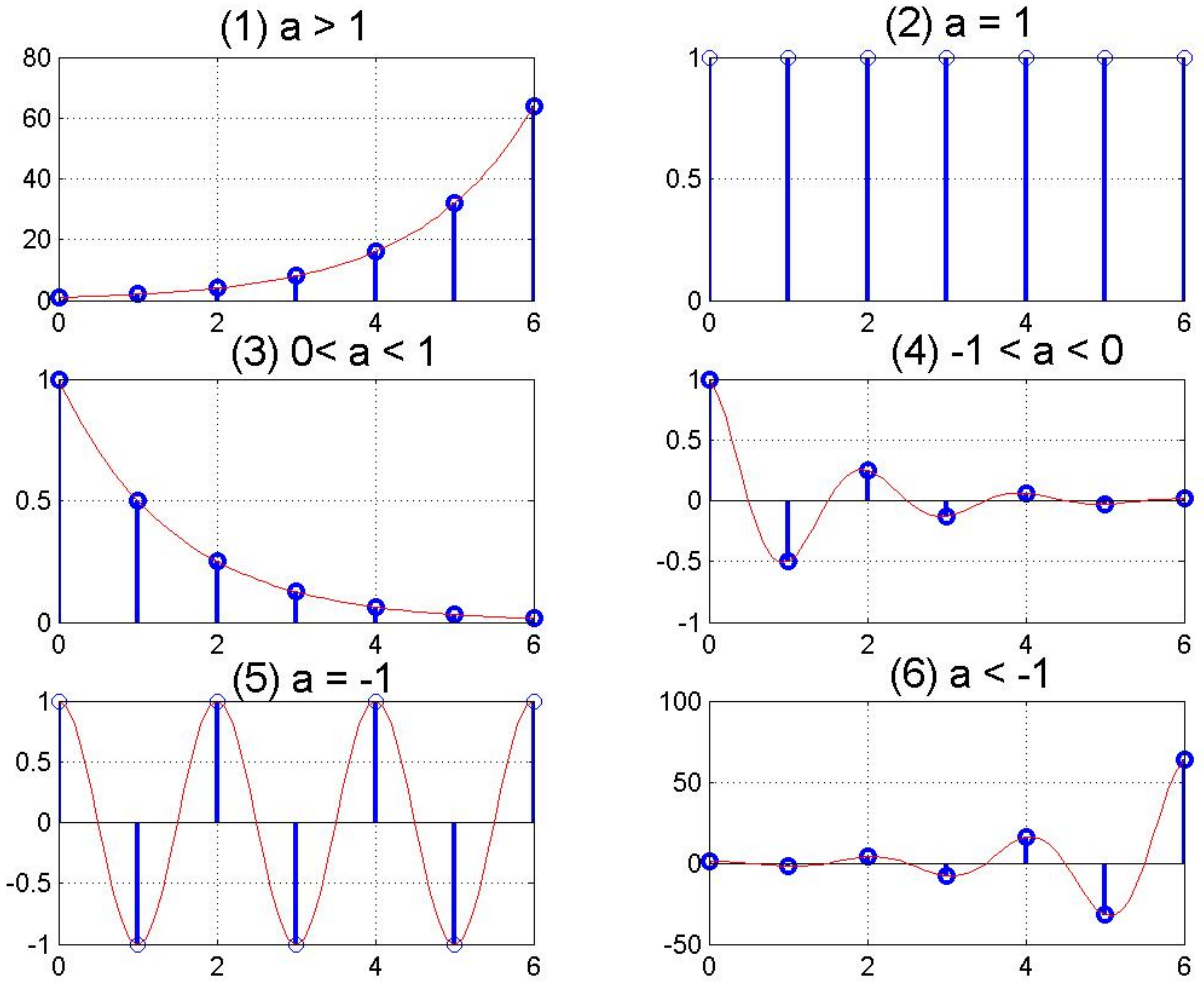
Poli reali semplici:

Consideriamo sei possibili posizioni per il polo p.

A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(k)$



Poli reali semplici:



Poli reali semplici:

In definitiva:

- $|a| < 1$ ⇒ $x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$

- $|a| = 1$ ⇒ $|x(k)| = 1, \forall, k$

- $|a| > 1$ ⇒ $x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Vale anche per poli multipli!

Nel caso di poli multipli, la successione diverge!

Vale anche per poli multipli!

Poli complessi coniugati (semplici):

- Il termine elementare è

$$X(z) = \frac{az \sin \omega}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2} \qquad a, \omega \in \mathbb{R}$$

al quale corrisponde la sequenza elementare

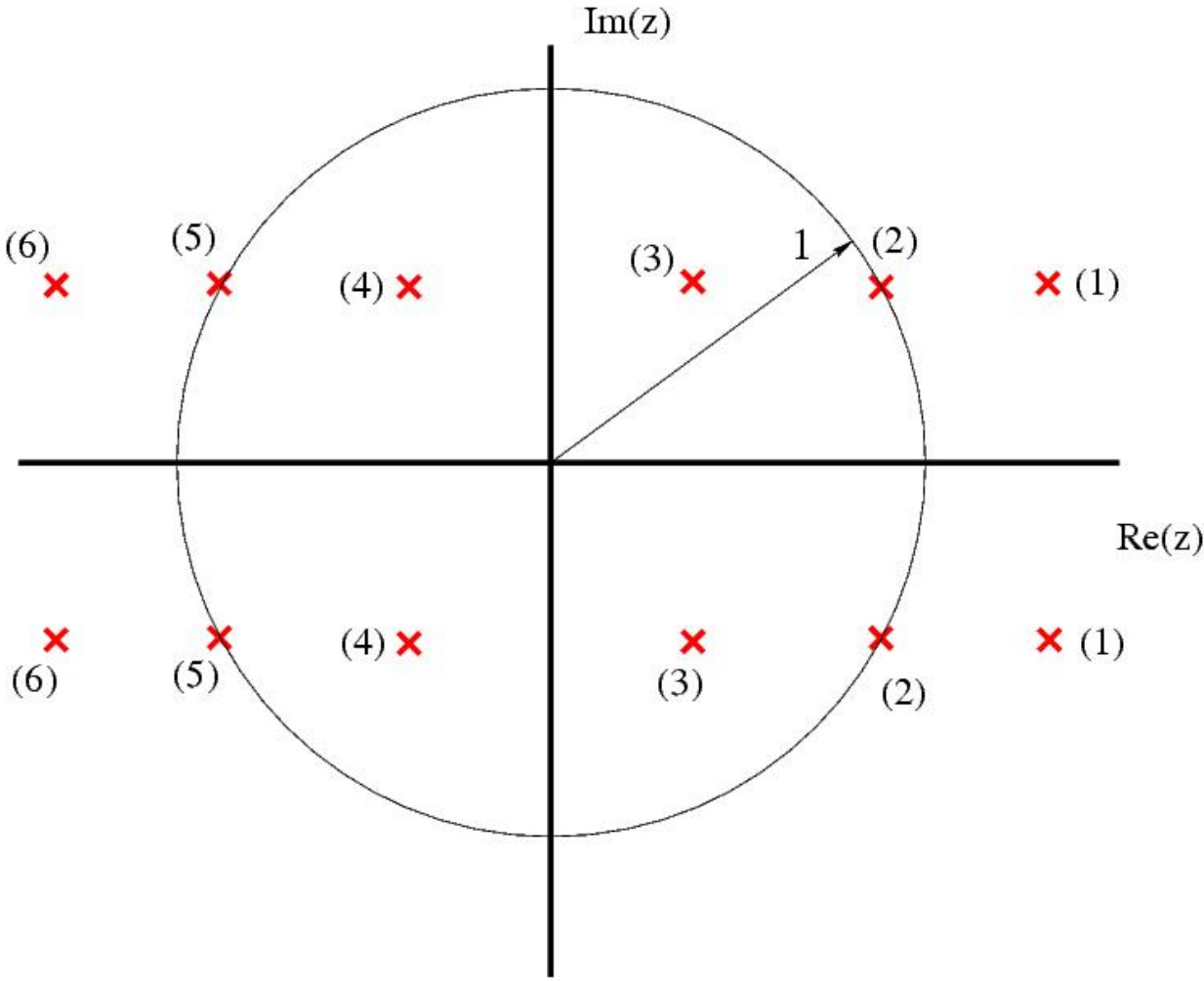
$$x(k) = a^k \sin(\omega k)\, 1(k), \qquad k \geq 0$$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione dei poli $p_{1,2} = a\, e^{\pm j\omega}$ nel piano complesso?

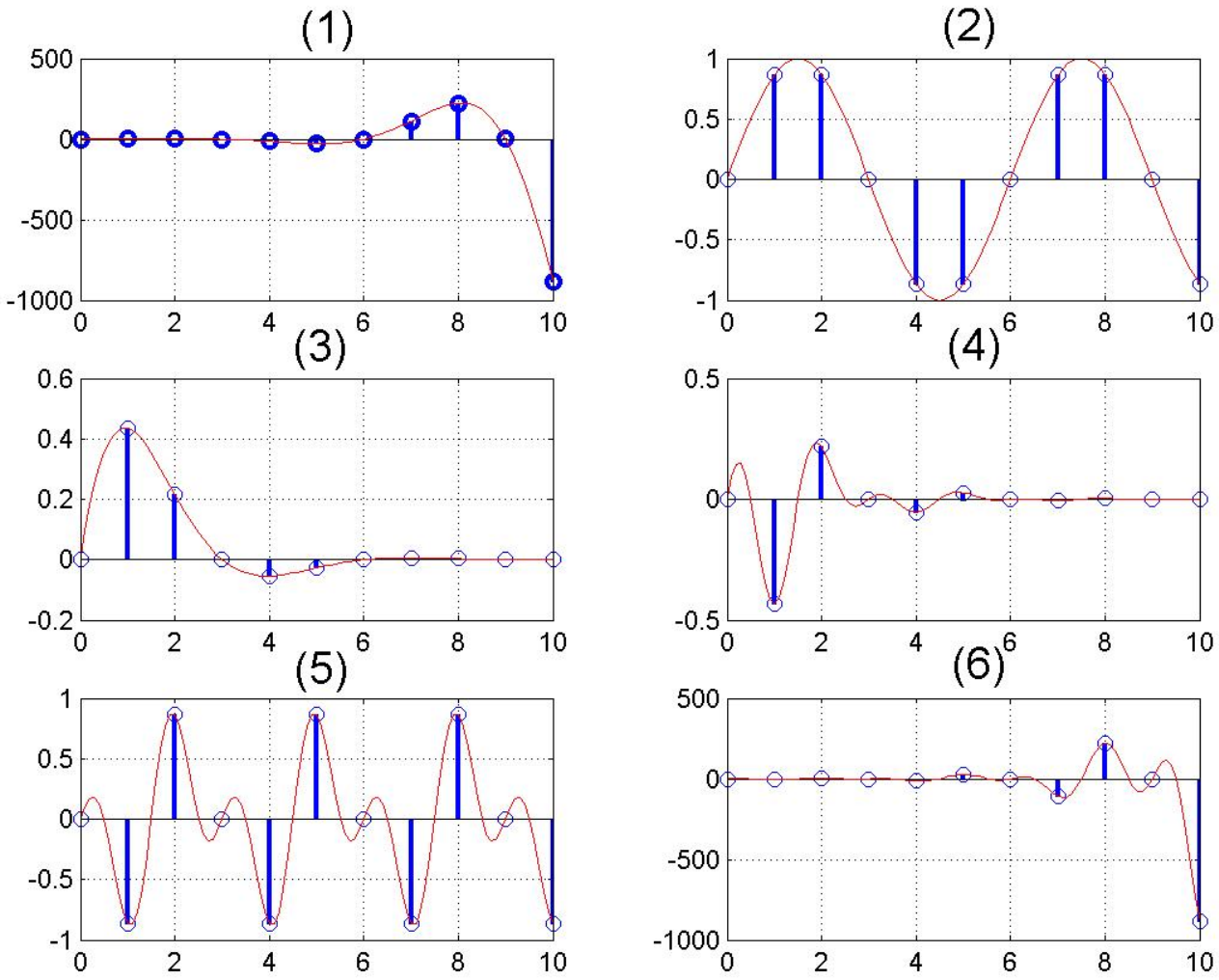
Poli complessi coniugati (semplici):

Consideriamo **sei possibili posizioni** per la coppia di poli.

A ciascuna di esse corrisponde un diverso comportamento della successione $x(k)$



Poli complessi coniugati (semplici):



Poli complessi coniugati (semplici):

In definitiva:

Vale anche per poli multipli!

- $|p_{1,2}| < 1$ ⇒ $x(k) \to 0$, per $k \to \infty$
- $|p_{1,2}| = 1$ ⇒ $|x(k)|$ limitato , $\forall k$ ← Nel caso di poli multipli, la successione diverge!
- $|p_{1,2}| > 1$ ⇒ $x(k) \to \infty$, per $k \to \infty$

Vale anche per poli multipli!

Poli multipli: poli reali

- Il termine elementare è

$$X(z) = C\frac{z}{(z-a)^n} \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad n > 1$$

- al quale corrisponde la sequenza elementare

$$x(k) = C\begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} a^{k-n+1}\, 1(k)$$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

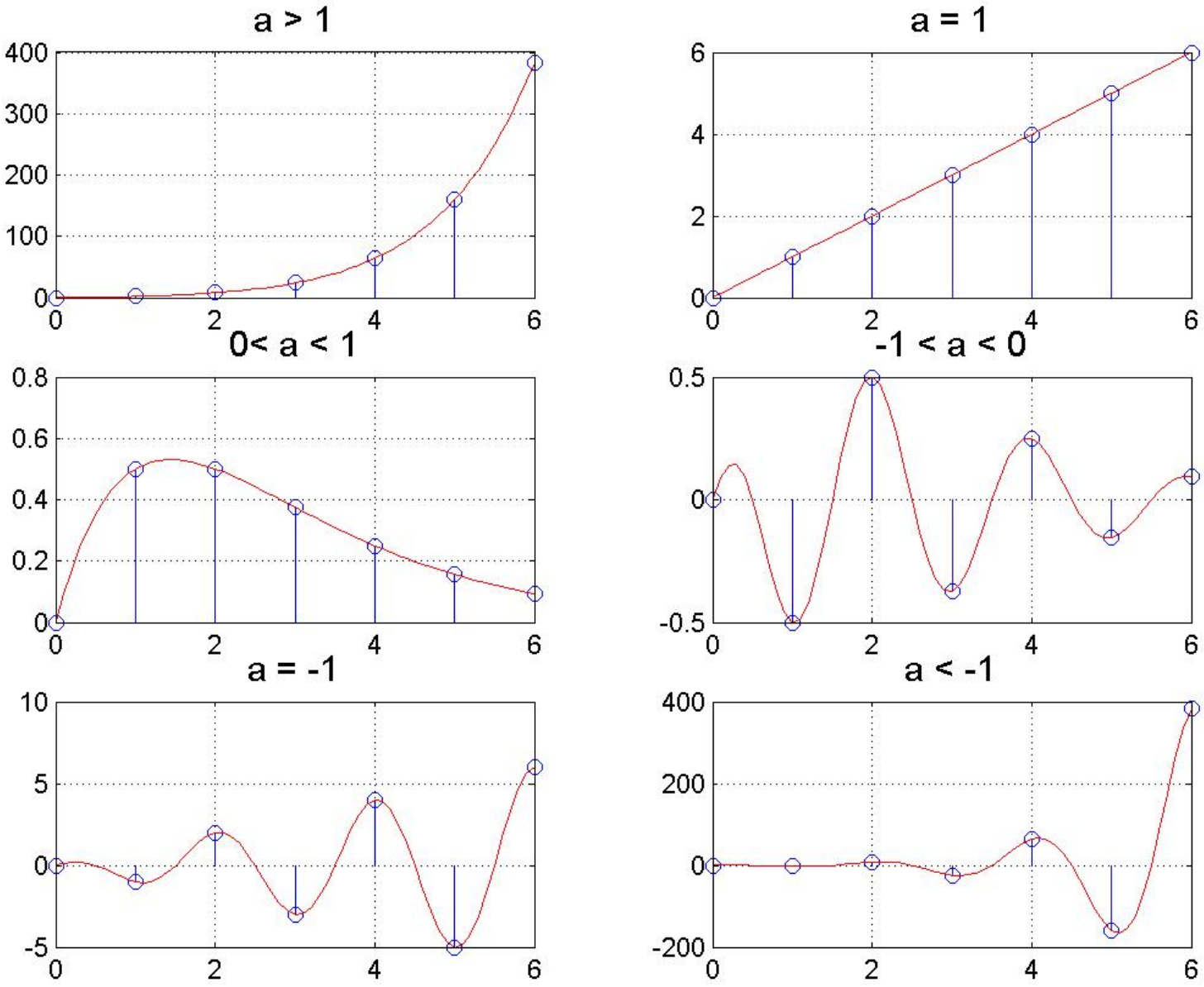
- Ricordando l'espressione del polinomio fattoriale è possibile scrivere

$$x(k) = C \frac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\ldots\,(k-n+2)}{(n-1)!}\, a^{k-n+1}\, 1(k)$$

- ovvero

$$x(k) = \frac{C}{(n-1)!} \overbrace{\left[k^{n-1} + \alpha_1\, k^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2}\, k\right]}^{p(k)} a^{k-n+1}\, 1(k)$$

Polinomio di grado (n-1) in k


a > 1
a = 1
0< a < 1
-1 < a < 0
a = -1
a < -1

Poli reali multipli:

In definitiva:

$$x(k) = \frac{C}{(n-1)!}\,[p(k)]\;a^{k-n+1}\,1(k)$$

- $|a| < 1$ ⇒ $x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$
- $|a| = 1$ ⇒ $x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$
- $|a| > 1$ ⇒ $x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Poli multipli: poli complessi coniugati

- Il termine elementare è

$$X(z) = C\frac{z}{(z-a)^n} + C^*\frac{z}{(z-a^*)^n} \qquad a, C \in \mathbb{C}, \qquad n > 1$$

con $a = \rho\, e^{j\,\theta}$

- Come varia il comportamento della sequenza elementare $x(k)$ al variare della posizione del polo $p = a$?

$$x(k) = C \binom{k}{n-1} a^{k-n+1} 1(k) +$$

$$+C^* \binom{k}{n-1} a^{*k-n+1} 1(k)$$

$$= \binom{k}{n-1} \rho^{k-n+1} \left[\Re(C) \left(e^{j(k-n+1)\theta} + e^{-j(k-n+1)\theta} \right) + \right.$$

$$\left. + j\, \Im(C) \left(e^{j(k-n+1)\theta} - e^{-j(k-n+1)\theta} \right) \right] 1(k)$$

$$x(k) = 2\binom{k}{n-1}\rho^{k-n+1}\{\Re(C)\cos[(k-n+1)\theta] + - \Im(C)\sin[(k-n+1)\theta]\}\,1(k)$$

Ponendo

$$H = \frac{2|C|}{(n-1)!} \qquad \Phi = \arctan\left(\frac{\Im(C)}{\Re(C)}\right)$$

si ottiene infine

$$x(k) = H\binom{k}{n-1}\rho^{k-n+1}\cos[(k-n+1)\theta + \Phi]\,1(k)$$

Poli complessi multipli:

In definitiva: $$x(k) = H \begin{pmatrix} k \\ n-1 \end{pmatrix} \rho^{k-n+1} \cos\left[(k-n+1)\,\theta + \Phi\right] 1(k)$$

- $|a| < 1$ ⇒ $x(k) \to 0, \text{per } k \to \infty$
- $|a| = 1$ ⇒ $x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$
- $|a| > 1$ ⇒ $x(k) \to \infty, \text{per } k \to \infty$

Analisi qualitativa: conclusioni

- Per **poli** con **modulo inferiore ad 1**: la successione elementare corrispondente **converge** sempre a **0**.
- Per **poli** di **modulo unitario**: se poli **semplici**, la successione elementare si mantiene **limitata**, altrimenti **diverge**.
- Per **poli** di **modulo maggiore di 1**: la successione elementare corrispondente **diverge sempre**.

Interpretazione operatoriale di $\mathcal{Z}\{\cdot\}$

- Sia data la sequenza $v(t)$ con trasformata $V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t-1)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di un passo) ha trasformata $z^{-1}V(z)$
- Infatti:

$$v(t) = 0,\ t < 0$$

$$\hookrightarrow\ w(0) = 0, w(1) = v(0) = 0, w(2) = v(1), \ldots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= 0 + v(0)z^{-1} + v(1)z^{-2} + \cdots + v(t-1)z^{-t} + \cdots \\ &= z^{-1}[v(0) + v(1)z^{-1} + \cdots + v(t-1)z^{-t+1} + \cdots] \\ &= z^{-1}V(z) \end{aligned}$$

- Analogamente $w(t) = v(t-2)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di due passi) ha trasformata $z^{-2}V(z)$

- La sequenza $w(t) = v(t+1)$ (sequenza $v(t)$ anticipata di un passo) ha trasformata $z[V(z) - v(0)]$

- Infatti:

$$w(0) = v(1), w(1) = v(2), \ldots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= v(1) + v(2)z^{-1} + \cdots + v(t+1)z^{-t} + \cdots \\ &= z[v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] \\ &= z[v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] - zv(0) \\ &= z[V(z) - v(0)] \end{aligned}$$

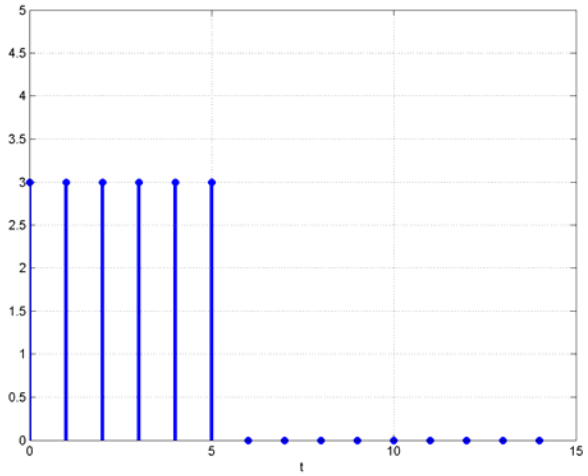
Quindi:

- Gli operatori z e z^{-1} possono essere visti come operatori di **anticipo** e **ritardo** rispettivamente
- In generale z^k e z^{-k} possono essere visti come operatori di anticipo e ritardo rispettivamente di k passi

Esempio

Si consideri il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 3 & 0 \le t < 6 \\ 0 & t \ge 6 \end{cases}$$



$$v(t) = 3 \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t-6)$$

Ma $\mathcal{Z}\{1(k)\} = \dfrac{z}{z-1}$

$$V(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{3z^{-6}z}{z-1} = \frac{3(z^6-1)}{z^5(z-1)}$$

Ulteriori considerazioni $X\left(z^{-1}\right)$ $X(z)$

- Torniamo alle possibili notazioni per una Z-Trasformata: a potenze di z^{-1} oppure a potenze di z .

$$X\left(z^{-1}\right) = \frac{1 - 2z^{-1}}{4 + 6z^{-1} + 8z^{-2}} \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^2 - 2z}{4z^2 + 6z + 8}$$

- Applichiamo il "metodo computazionale" per ottenere un'equazione alle differenze che ci permetta di ricavare ricorsivamente, campione dopo campione, il segnale $\{x(k)\}$

- Otterremo due equazioni alle differenti scritte in maniera diversa a seconda della Z-trasformata da cui partiamo ...

- Partendo dall'**espressione in potenze di z^{-1}** si ottiene

$$\left(4+6z^{-1}+8z^{-2}\right) X(z) = \left(1-2z^{-1}\right) U(z)$$

$$4\,x(k)+6\,x(k-1)+8\,x(k-2) = u(k)-2\,u(k-1)$$

$$u(k) = \delta(k)$$

- Il **valore all'istante corrente** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione** di **valori passati del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di valori all'istante presente e nel passato dell'ingresso (che è un impulso unitario nell'origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z^{-1} può venire ricondotta ad un'equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**

- $X\left(z^{-1}\right)$ è antitrasformabile calcolando il valore all'istante attuale della successione incognita $\{x_k\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{x_k\}$ e di quella assegnata $\{u_k = \delta_k\}$

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Partendo dall'**espressione in potenze di** z si ottiene

$$\left(4\,z^2+6\,z+8\right)\,X(z)\;=\;\left(z^2-2\,z\right)\,U(z)$$



$$4\,x(k+2)+6\,x(k+1)+8\,x(k)\;=\;u(k+1)-2\,u(k)$$

$$u(k)\;=\;\delta(k)$$

- Il **valore nel futuro** del segnale $\{x(k)\}$ è **funzione** di **valori futuri ed all'istante corrente del segnale** stesso $\{x(k)\}$, di valori all'istante presente e nel futuro dell'ingresso (che è un impulso unitario nell'origine).

- Una Z-trasformata in potenze di z può venire ricondotta ad un'equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva in avanti**

- $X(z)$ è antitrasformabile calcolando un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{x_k\}$ [in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{x_k\}$ che di quella assegnata $\{u_k = \delta_k\}$

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di previsione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

$X\left(z^{-1}\right)$ vs $X(z)$: concludendo (per ora ...)

- Si noti che le due Z-trasformate, così come le due equazioni alle differenze a cui si arriva col metodo computazionale, descrivono il medesimo segnale.

Teorema del valore iniziale: applicazione e proprietà della Z-Trasformata

Data la Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

con $m \leq n$, vale la proprietà

$$\begin{cases} m = n & f(0) = \dfrac{b_m}{a_n} \\ m < n & \begin{cases} f(0) = f(1) = \cdots = f(n-m-1) = 0 \\ f(n-m) = \dfrac{b_m}{a_n} \end{cases} \end{cases}$$

Per dimostrare la proprietà, si utilizza il teorema del valore iniziale:

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{k\to 0} f(k) = f(0)$$

1º caso: $m = n$

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$= \frac{b_m}{a_n}$$

2º caso: $m < n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = 0$$

$$m = O(N(z)) < O(D(z)) = n$$

Per determinare il secondo campione della sequenza utilizziamo il teorema del valore iniziale e la proprietà di anticipo nel tempo

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z\,[F(z) - f(0)]$$

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n-1 \longrightarrow m+1 = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Si continua in maniera analoga:

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \left[F(z) - f(0) - f(1)\, z^{-1} \right]$$

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n-2 \longrightarrow m+2 = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Fino a quando? Sia $m = n - h$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{h-2} f(k)\, z^{-k} \right]$$

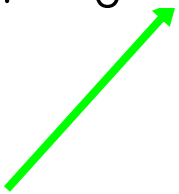
$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m + (n-m-1) = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Finalmente:

$$f(n-m) \;=\; \lim_{z \to \infty} z^{n-m} \left[F(z) \;-\; \sum_{k=0}^{n-m-1} f(k)\, z^{-k} \right]$$

$$f(n-m) \;=\; \lim_{z \to \infty} z^{n-m} \frac{b_m\, z^m \;+\; \cdots \;+\; b_0}{a_n\, z^n \;+\; \cdots \;+\; a_0} \;=\; \frac{b_m}{a_n}$$



$$m + (n-m) \;=\; O\left(z\, N(z)\right) \;=\; O\left(D(z)\right) \;=\; n$$

Ancora considerazioni e proprietà: sequenza ritardata e condizioni iniziali

- Abbiamo già visto che, data una sequenza

$$\{x(k)\}\ , \quad k \in \mathbb{Z} \quad x(k) \equiv 0\ \forall k < 0$$

la Z-trasformata della sequenza $\{y(k)\}$, ritardata di *m* istanti di tempo rispetto alla sequenza originaria, è data da

$$y(k) = x(k-m) \quad k \in \mathbb{Z}$$



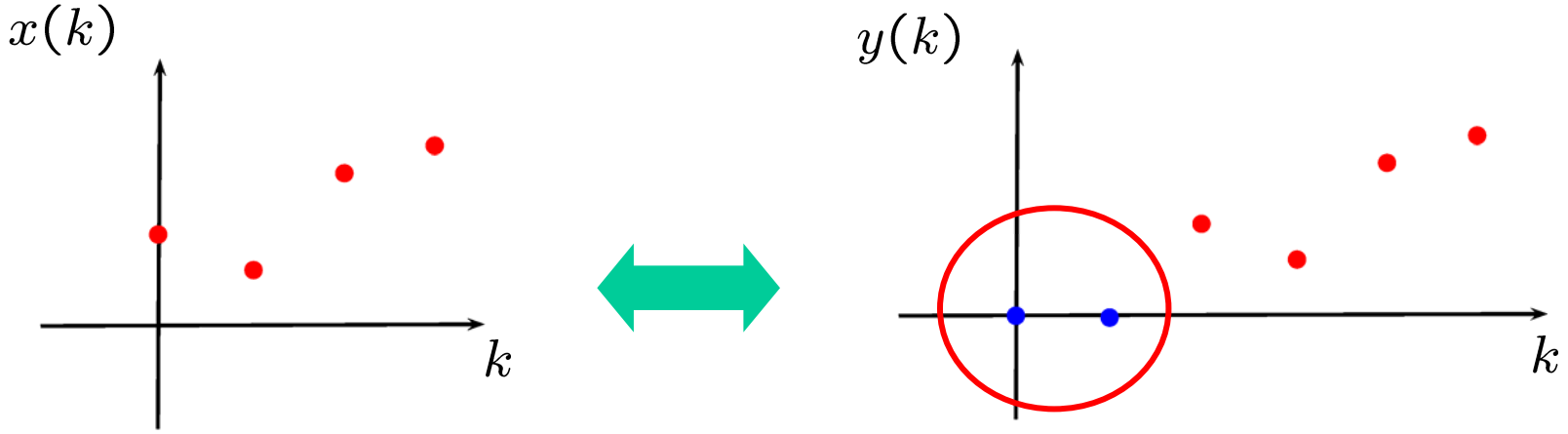
$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}\,X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

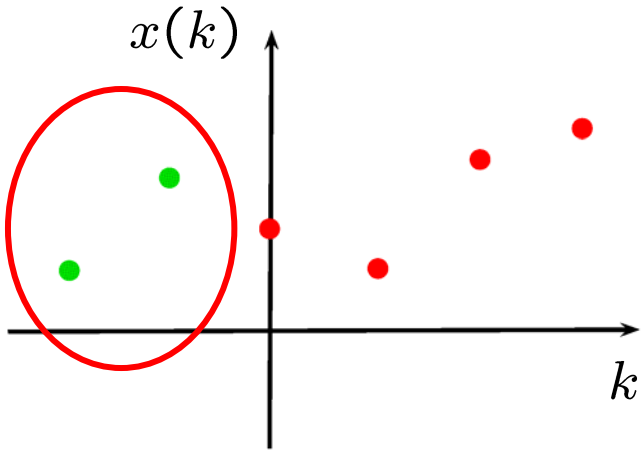
- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$



$\{x(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ $x(k) \equiv 0 \; \forall k < 0$ $y(k) = x(k-2)$

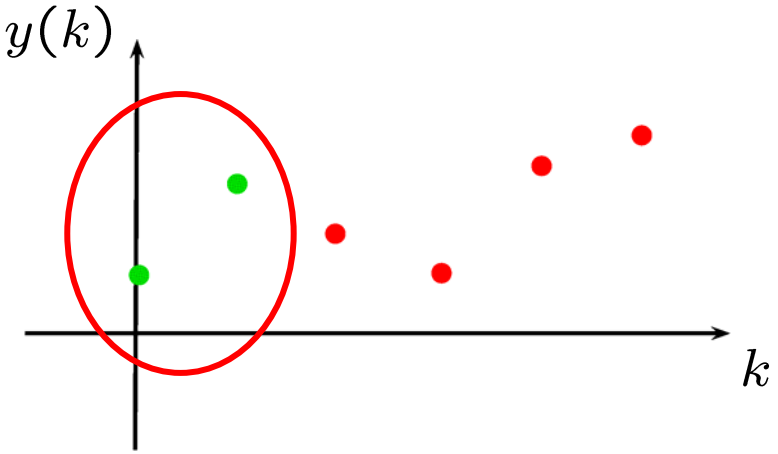
Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale



$$\{x(k)\}\ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x(k) \equiv 0\ \forall k < -2$$

$$y(k) = x(k-2)$$



Come si tiene conto di quei campioni “aggiuntivi”?

Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale

Data la sequenza

$$\{x(k)\} \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

che ammette **campioni non nulli (IN NUMERO FINITO)** anche per istanti di tempo negativi, si costruisce la sequenza ritardata

$$y(k) \ = \ x(k-m) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tra le z-trasformate delle sequenze vale la relazione

$$Y(z) \ = \ z^{-m} \, X(z) \ + \ z^{-m} \left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p) \, z^{-p} \right]$$

$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-k} =$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-(k-m)} \right\} =$$

$$k - m \stackrel{\triangle}{=} p$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)} \right\} =$$

$$z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)} \right\} =$$

$$z^{-m}\, X(z) + z^{-m} \left\{ \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)} \right\} = Y(z)$$

La relazione appena trovata è utile per trasformare le equazioni alle differenze “all’indietro”

$$u_k = f\left(e_k, \ldots, e_{k-m}; u_{k-1}, \ldots, u_{k-n}\right)$$

$\{e_k\}$ nota $\forall\, k \geq 0$ incognita $\{u_k\}$, $k \geq 0$

c.i. $\Longleftrightarrow$ $u_{-n}, u_{-n+1}, \ldots, u_{-1}$

Un esempio

- Consideriamo l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = u(k)$$

con condizioni iniziali date da

$$x(-2) = 3 \quad x(-1) = 12$$

e con ingresso (sequenza forzante nota) pari a

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

- Vogliamo risolvere l'equazione facendo uso della Z-trasformata.

- La sequenza forzante può essere riscritta nel modo seguente:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$



$$u(k) = 0.5 \cdot \left[(-1)^k + 1\right] \cdot 1(k)$$

- La sua Z-trasformata è allora

$$U(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}\right] = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

- In base alla regola descritta nella slide #199 e segg., applicando la Z-trasformata all'equazione alle differenze si ottiene

$$X(z) - 3\left[z^{-1}X(z) + x(-1)\right] + \\ + 2\left[z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)\right] = U(z)$$

$$X(z) = \frac{z\left[(3z-2)\,x(-1) - 2z\,x(-2)\right]}{z^2 - 3z + 2} + \\ + \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Esercizi sulla Z-Trasformata

Z-antitrasformata

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $F(z)$.

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.4\,z + 1.08}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Sviluppo in fratti semplici

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to -0.5} (z+0.5) \frac{F(z)}{z}$$

$$C_{1,1} = \left. \frac{-0.4\,z + 1.08}{(z-0.3)^2} \right|_{z=-0.5} = 2$$

Analogamente

$$C_{2,2} = \left. \frac{-0.4\,z + 1.08}{z+0.5} \right|_{z=+0.3} = 1.2$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.3} \frac{d}{dz} \left[\frac{F(z)}{z} (z-0.3)^2 \right]$$

$$C_{2,1} = \frac{d}{dz} \left[\frac{F(z)}{z} (z-0.3)^2 \right] \Bigg|_{z=0.3} = -2$$

In definitiva

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z+0.5} + \frac{-2}{z-0.3} + \frac{1.2}{(z-0.3)^2}$$

$$F(z) = 2\frac{z}{z+0.5} - 2\frac{z}{z-0.3} + 4\frac{0.3\,z}{(z-0.3)^2}$$

$(-0.5)^k$ $\quad$ $(0.3)^k$ $\quad$ $k\,(0.3)^k$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right]\cdot 1(k)$$

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right]\cdot 1(k)$$

Osservazioni:

- la differenza di grado tra il polinomio a denominatore di $F(z)$ e quello al numeratore è pari ad 1
  - il primo campione della successione $f(k)$ è nullo!
- I primi campioni della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \left\{0, -\frac{2}{5}, \frac{26}{25}, \frac{1}{50}, \frac{149}{625}\ldots\right\}$$

Proposta: ritrovare i primi 5 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Esercizio 2

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$X(z) = \frac{0.1\,(z+1)\,z}{(z-1)^2\,(z-0.6)}$$

Vale la medesima considerazione fatta per l'esercizio precedente:

poiché la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{X(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $X(z)$.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z-1} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{2,1}}{(z-0.6)^2}$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = 0.5$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} (z-1)^2 \right] = -1.0$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.6} (z-0.6) \frac{X(z)}{z} = 1.0$$

$$X(z) = -\frac{z}{z-1} + 0.5 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.6}$$

$$x(k) = \left[-1 + 0.5\,k + (0.6)^k \right] 1(k)$$

$$\{x(k)\} = \{0,\ 0.1,\ 0.36,\ 0.716,\ 1.1296,\ \ldots\}$$

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 2z + 1}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ non possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede, oltre agli stessi poli di $F(z)$, un polo nell'origine.

Sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z\,(z+1)^2} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z+1} + \frac{C_{2,2}}{(z+1)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{(z+1)^2} = 1 \qquad C_{2,2} = \lim_{z\to -1} \frac{z^2+1}{z} = -2$$

$$C_{2,1} = \lim_{z\to -1} \left\{ \frac{d}{d\,z} \left[\frac{z^2+1}{z} \right] \right\} = 0$$

$$F(z) = 1 - 2\frac{z}{(z+1)^2}$$

$$\delta(k) \qquad (-1)^{k-1}\, k\, 1(k)$$

$$f(k) = \delta(k) - 2\underbrace{(-1)^{k-1} \cdot k \cdot 1(k)}$$

La successione diverge!

Che fosse una successione divergente lo si poteva dedurre anche dalla Z-Trasformata iniziale, che presenta un polo doppio di modulo unitario!

I primi valori della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \{1, -2, 4, -6 \ldots\}$$

Proposta: ritrovare i primi 4 valori della sequenza con un metodo numerico (long division oppure metodo computazionale).

Esercizio 4

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2-4z+3}$$

Fattorizzando:

$$F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$$

si nota che esiste un polo a modulo maggiore dell'unità: la successione diverge!

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z-1} + \frac{C_{3,1}}{z-3}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} z \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{1}{3}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{F(z)}{z} = \cdots = -1$$

$$C_{3,1} = \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$F(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

$$f(k) = \frac{1}{3}\delta(k) + \underbrace{\left[\frac{2}{3}3^k}\right. - 1\Big] \cdot 1(k)$$

Il termine divergente

Esercizio 5

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{0.625\, z \left(z^2 + 0.8z - 0.6\right)}{(z-1)^4}$$

Osservazione

La trasformata presenta un polo di modulo unitario, con molteplicità maggiore dell'unità (molteplicità 4): il **segnale** corrispondente è certamente **divergente**.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{(z-1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{1,3}}{(z-1)^3} + \frac{C_{1,4}}{(z-1)^4}$$

$$C_{1,4} = \lim_{z \to 1} (z-1)^4 \frac{F(z)}{z} = 0.75$$

$$C_{1,3} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{d\,z} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 1.75$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\,z^2} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0.625$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\,z^3} \left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z} \right] = 0$$

$$F(z) = 0.625 \frac{z}{(z-1)^2} + 1.75 \frac{z}{(z-1)^3} + 0.75 \frac{z}{(z-1)^4}$$

$$F(z) = 0.625\,\frac{z}{(z-1)^2} + 1.75\,\frac{z}{(z-1)^3} + 0.75\,\frac{z}{(z-1)^4}$$

$$f(k) = \left\{0.625\,k + 1.75\left[\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k\right] + \right.$$

$$\left. + 0.75\left[\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right]\right\} 1(k)$$

In definitiva

$$f(k) = \left[0.5\,k^2 + 0.125\,k^3\right] 1(k)$$

Esercizio 6

Analizzare qualitativamente il segnale a cui corrisponde la Z-Trasformata

$$Y(z) = -\frac{(2z + p - 1)}{(z + 1 + 2p)(z - 1)}$$

al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$

Valore iniziale $\lim_{z \to \infty} Y(z) = 0 = y(0) \quad \forall p$

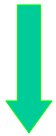
- $p < -1$

due modi distinti; un modo è associato ad un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi l'uscita del sistema diviene illimitata al crescere di *k*

- $p = -1$

in questo caso si ottiene

$$Y(z) = -\frac{2}{z-1}$$



$$y(k) = -2 \cdot 1(k-1)$$

- $-1 < p < 0$

$$Y(z) = -\frac{2z+p-1}{(z+2p+1)(z-1)}$$

la sequenza si mantiene limitata e tende a zero asintoticamente, dato che i modi della risposta sono associati a poli entrambi minori dell'unità (in modulo).

- $p = 0$ $\qquad Y(z) = -\dfrac{2z-1}{(z+1)(z-1)}$

$$y(k) = (-1)\cdot\delta(k) - \frac{1}{2}\cdot 1(k) + \frac{3}{2}\cdot(-1)^k\cdot 1(k)$$

comportamento oscillante permanente: poli di modulo unitario, semplici

- $p > 0$

C'è un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi il segnale diviene illimitato al crescere di *k*.

Esercizio 7

- Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = e(k)$$

dove $x(k) = 0 \quad \forall\, k < -2, \quad x(-2) = x(-1) = 1$

$$e(k) = \begin{cases} 1 & k = 0,\ 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Determinare **per via numerica** i primi 4 campioni non noti della successione:

$x(0)$ ➡ $x(0) - 3x(-1) + 2x(-2) = e(0)$

$$x(0) = 2$$

$x(1) \rightarrow x(1) - 3\,x(0) + 2\,x(-1) = e(1)$

$x(1) = 4$

$x(2) \rightarrow x(2) - 3\,x(1) + 2\,x(0) = e(2)$

$x(2) = 9$

$x(3) \rightarrow x(3) - 3\,x(2) + 2\,x(1) = e(3)$

$x(3) = 19$

- Scrivendo un semplice script in ambiente Matlab si possono rapidamente calcolare i primi 25 campioni della sequenza

```
al passo 0 valore di x_k 2.00
al passo 1 valore di x_k 4.00
al passo 2 valore di x_k 9.00
al passo 3 valore di x_k 19.00
al passo 4 valore di x_k 39.00
al passo 5 valore di x_k 79.00
al passo 6 valore di x_k 159.00
al passo 7 valore di x_k 319.00
al passo 8 valore di x_k 639.00
al passo 9 valore di x_k 1279.00
al passo 10 valore di x_k 2559.00
al passo 11 valore di x_k 5119.00
al passo 12 valore di x_k 10239.00
al passo 13 valore di x_k 20479.00
```

```
al passo 14 valore di x_k 40959.00
al passo 15 valore di x_k 81919.00
al passo 16 valore di x_k 163839.00
al passo 17 valore di x_k 327679.00
al passo 18 valore di x_k 655359.00
al passo 19 valore di x_k 1310719.00
al passo 20 valore di x_k 2621439.00
al passo 21 valore di x_k 5242879.00
al passo 22 valore di x_k 10485759.00
al passo 23 valore di x_k 20971519.00
al passo 24 valore di x_k 41943039.00
al passo 25 valore di x_k 83886079.00
```

- Proviamo ora a **risolvere l'equazione** alle differenze facendo uso della **Z-trasformata**:

$$\mathcal{Z}\{x(k-m)\} = z^{-m}X(z) + z^{-m}\left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\,z^{-p}\right]$$

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = e(k)$$

$$X(z) = \frac{z\,[x(-1)\,(3z-2) - 2x(-2)\,z]}{z^2 - 3z + 2} +$$

$$+ \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{z^2+1}{z^2}$$

- In definitiva la sequenza cercata possiede Z-trasformata data da:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$$

- Lo sviluppo in fratti semplici porta a

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{(-2)z}{z-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-2}$$

- Antitrasformando si ottiene quindi

$$x(k) = \frac{1}{2} \cdot \delta(k) + \left[\frac{5}{2} \cdot 2^k - 1\right] \cdot 1(k)$$

Algoritmi utili

Versione efficiente dell'algoritmo di "Long division"

Tecniche di Z—antitrasformata ed algoritmo di “Long Division”: alcuni richiami

- Si tratta di una tecnica semplice che permette di determinare **termine a termine** gli elementi della sequenza

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

- È opportuno esprimere $X(z)$ in funzione di potenze negative della variabile $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

- Partendo dall'espressione di $X(z)$ in potenze negative, si esegue la divisione ripetuta del polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore.

- Il risultato è una combinazione lineare di potenze negative, ovvero

$$
\begin{array}{r|l}
10z^{-1}+5z^{-2} & 1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2} \\
\hline
-10z^{-1}+12z^{-2}-2z^{-3} & 10z^{-1}+17z^{-2}+\dots \\
\hline
17z^{-2}-2z^{-3} & \\
\vdots &
\end{array}
$$



$$10z^{-1}+17z^{-2}+\dots$$

- Ricordando che, per definizione, si ha

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \cdots$$

per semplice confronto si ottiene la sequenza

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 10 \\ x(2) &= 17 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Riassumendo ...

- Metodo numerico e ricorsivo: fornisce i **valori** numerici della successione **termine a termine**, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa su operazioni di divisione di polinomi: è una tecnica **semplice** dal punto di vista **computazionale** (**vantaggio**).

- Esiste un **algoritmo di calcolo**, che permette di ottenere in **maniera efficiente** e **ricorsiva** i valori della sequenza numerica cercata.

“Long Division” efficiente : spiegazione e descrizione dell’algoritmo

Ciò che segue è solo una giustificazione dell’algoritmo, non una dimostrazione rigorosa!

- È assegnata una Z—trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

- Supponiamo per ora che sia $m = n$ e quindi, riscrivendo $F(z)$ in potenze negative

$$F(z) = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-(n-1)} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n}}$$

$$F(z) = \frac{b_n + b_{n-1}\,z^{-1} + \cdots + b_1\,z^{-(n-1)} + b_0\,z^{-n}}{a_n + a_{n-1}\,z^{-1} + \cdots + a_1\,z^{-(n-1)} + a_0\,z^{-n}} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, z^{-k}$$

Cerchiamo proprio questi termini!

- Per trovare i valori della sequenza $\{f_k\,, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots\}$ eguagliamo il polinomio a numeratore della $F(z)$ al prodotto del polinomio a denominatore per la serie:

$$b_n + \cdots + b_1\,z^{-(n-1)} + b_0\,z^{-n} = \left[a_n + \cdots + a_1\,z^{-(n-1)} + a_0\,z^{-n}\right] \cdot \left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_k\, z^{-k}\right\}$$

- Per il principio di identità dei polinomi è possibile scrivere

$$\begin{cases} b_n & = & f_0 \cdot a_n \\ b_{n-1} & = & f_0 \cdot a_{n-1} + f_1 \cdot a_n \\ b_{n-2} & = & f_0 \cdot a_{n-2} + f_1 \cdot a_{n-1} + f_2 \cdot a_n \\ & \cdots & \end{cases}$$

- Si ottiene così un sistema di equazioni lineari, triangolare, con "infinite" equazioni in "infinite" incognite (i valori della sequenza f_k). Infatti

$$\begin{cases} \cdots & & & & & & & & \\ b_0 & = & f_0 \cdot a_0 & + & f_1 \cdot a_1 & + & f_2 a_2 & + \cdots + & f_n \cdot a_n \\ 0 & = & f_1 \cdot a_0 & + & f_2 \cdot a_1 & + & f_3 a_2 & + \cdots + & f_{n+1} \cdot a_n \\ \cdots & & & & & & & & \end{cases}$$

Per il termine z^{-n}

Per i termini successivi z^{-i}, $i > n$

Per il termine $z^{-(n+1)}$

Un semplice esempio

- Consideriamo una semplice Z—trasformata come $F(z) = \dfrac{b_1 z + b_0}{a_1 z + a_0}$

- Espressa in potenze negative di z ed operando nel modo appena descritto si arriva al sistema di equazioni

$$\begin{cases} f_0 \cdot a_1 = b_1 \\ f_0 \cdot a_0 + f_1 \cdot a_1 = b_0 \\ f_2 \cdot a_1 + f_1 \cdot a_0 = 0 \\ f_3 \cdot a_1 + f_4 \cdot a_0 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Z—trasformata e“Long Division” efficiente : spiegazione e descrizione dell’algoritmo

- Come si risolve il sistema di equazioni appena trovato?

$$
\begin{cases}
b_n = f_0 \cdot a_n \\
b_{n-1} = f_0 \cdot a_{n-1} + f_1 \cdot a_n \\
b_{n-2} = f_0 \cdot a_{n-2} + f_1 \cdot a_{n-1} + f_2 \cdot a_n \\
\cdots \\
b_0 = f_0 \cdot a_0 + f_1 \cdot a_1 + f_2 a_2 + \cdots + f_n \cdot a_n \\
0 = f_1 \cdot a_0 + f_2 \cdot a_1 + f_3 a_2 + \cdots + f_{n+1} \cdot a_n \\
\cdots
\end{cases}
$$

- Conviene sfruttare la sua **struttura “triangolare”** e procedere in **modo ricorsivo**!

- **Risoluzione ricorsiva**: ad ogni passo si aggiunge un'equazione al sistema e si risolve il sistema trovando un nuovo valore della sequenza

1° passo

$$a_n \cdot f_0 = b_n \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{b_n}{a_n}$$

2° passo

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 \\ a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Risolvo per f_1 con la regola di Cramer.

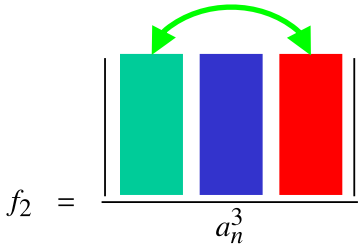
$$f_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & 0 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}} \quad \Rightarrow \quad f_1 = -\frac{b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1}}{a_n^2}$$

3° passo

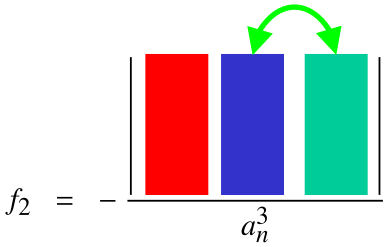
$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{bmatrix}$$

Risolvo per f_2 con la regola di Cramer.

$$f_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & 0 & b_n \\ a_{n-1} & a_n & b_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}}$$

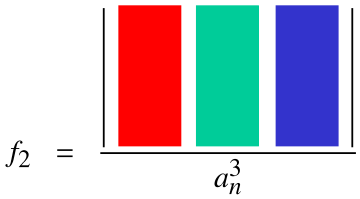


Scambio di posto 2 colonne!



Ancora uno scambio di colonne!

Con 2 scambi il segno del determinante resta immutato.



$$f_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_n & a_n & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & a_n \\ b_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}}{a_n^3}$$

Sviluppo il determinante secondo questa colonna.

$$f_2 = \frac{(b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n) a_{n-1} - (b_n a_{n-2} - b_{n-2} a_n) a_n}{a_n^3}$$

Questo termine lo si è già calcolato per determinare il termine precedente f_1 !

Continuando a calcolare i termini f_k si nota la ricorsività dei calcoli necessari a determinarli.

Schema dell'algoritmo

- Cerchiamo di **generalizzare** i risultati ottenuti per i primi 3 campioni della sequenza, così da trovare uno schema adatto a determinarne quanti vogliamo:

- Nelle espressioni trovate per $f_0,\ f_1,\ f_2$ si nota che
  - Il valore del termine f_k viene determinato da una **frazione** che ha a **denominatore potenze** (con esponente crescente) del **coefficiente** a_n

  - Il valore del termine f_k viene determinato da una **frazione** che ha a **numeratore** un'espressione che e' **funzione** sia dei coefficienti $b_j,\ j = 1, \ldots n$ che $a_i,\ i = 1, \ldots n$

Tabella dell'algoritmo di "Long Division"

- Per ottenere in maniera efficiente i valori dei termini f_k conviene costruire la tabella costituita da due colonne contenenti i coefficienti rispettivamente del numeratore e del denominatore della Z—trasformata, ordinati da grado massimo a grado minimo in potenze positive di z e completi:

$$F(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$



b_n	a_n
b_{n-1}	a_{n-1}
b_{n-2}	a_{n-2}
$\vdots$	$\vdots$
b_0	a_0

Costruzione della tabella

- La tabella va ampliata nel modo seguente

$$
\begin{array}{ll|lll|lll|l}
b_n & a_n & (b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n) = b_n^{(2)} & a_n & & (b_n^{(2)} a_{n-1} - b_{n-1}^{(2)} a_n) = b_n^{(3)} & a_n & \\
b_{n-1} & a_{n-1} & (b_n a_{n-2} - b_{n-2} a_n) = b_{n-1}^{(2)} & a_{n-1} & & (b_n^{(2)} a_{n-2} - b_{n-2}^{(2)} a_n) = b_{n-1}^{(3)} & a_{n-1} & \\
b_{n-2} & a_{n-2} & (b_n a_{n-3} - b_{n-3} a_n) = b_{n-2}^{(2)} & a_{n-2} & & (b_n^{(2)} a_{n-3} - b_{n-3}^{(2)} a_n) = b_{n-2}^{(3)} & a_{n-2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
b_1 & a_1 & (b_n a_0 - b_0 a_n) = b_1^{(2)} & a_1 & & b_n^{(2)} a_0 = b_1^{(3)} & a_1 & \\
b_0 & a_0 & & a_0 & & & a_0 &
\end{array}
$$

- Ad ogni iterazione si aggiungono 2 colonne allo schema.

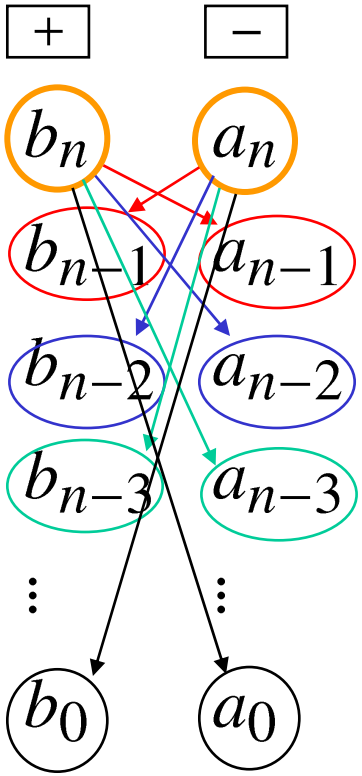
Costruzione della tabella

- Le “repliche” della prima coppia di colonne vanno riempite nel modo seguente

  – La seconda colonna di ogni “replica” contiene, in colonna, ordinati dal coefficiente di grado massimo a quello minimo in potenze positive di z i coefficienti $a_i,\ i = 1, 2 \ldots n$ del denominatore della Z—trasformata $F(z)$

$$
\begin{array}{cc|ll|cc|ll|}
b_n & a_n & (b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n) = b_n^{(2)} & a_n & (b_n^{(2)} a_{n-1} - b_{n-1}^{(2)} a_n) = b_n^{(3)} & a_n & \cdots \\
b_{n-1} & a_{n-1} & (b_n a_{n-2} - b_{n-2} a_n) = b_{n-1}^{(2)} & a_{n-1} & (b_n^{(2)} a_{n-2} - b_{n-2}^{(2)} a_n) = b_{n-1}^{(3)} & a_{n-1} & \\
b_{n-2} & a_{n-2} & (b_n a_{n-3} - b_{n-3} a_n) = b_{n-2}^{(2)} & a_{n-2} & (b_n^{(2)} a_{n-3} - b_{n-3}^{(2)} a_n) = b_{n-2}^{(3)} & a_{n-2} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
b_1 & a_1 & (b_n a_0 - b_0 a_n) = b_1^{(2)} & a_1 & b_n^{(2)} a_0 = b_1^{(3)} & a_1 & \\
b_0 & a_0 & & a_0 & & a_0 &
\end{array}
$$

– I coefficienti della prima colonna di ogni “replica” sono il risultato di operazioni di moltiplicazione ed addizione tra elementi della 1ª e 2ª colonna della “replica” precedente



$$(b_n a_{n-1} - b_{n-1} a_n) = b_n^{(2)}$$

$$(b_n a_{n-2} - b_{n-2} a_n) = b_{n-1}^{(2)}$$

$$(b_n a_{n-3} - b_{n-3} a_n) = b_{n-2}^{(2)}$$

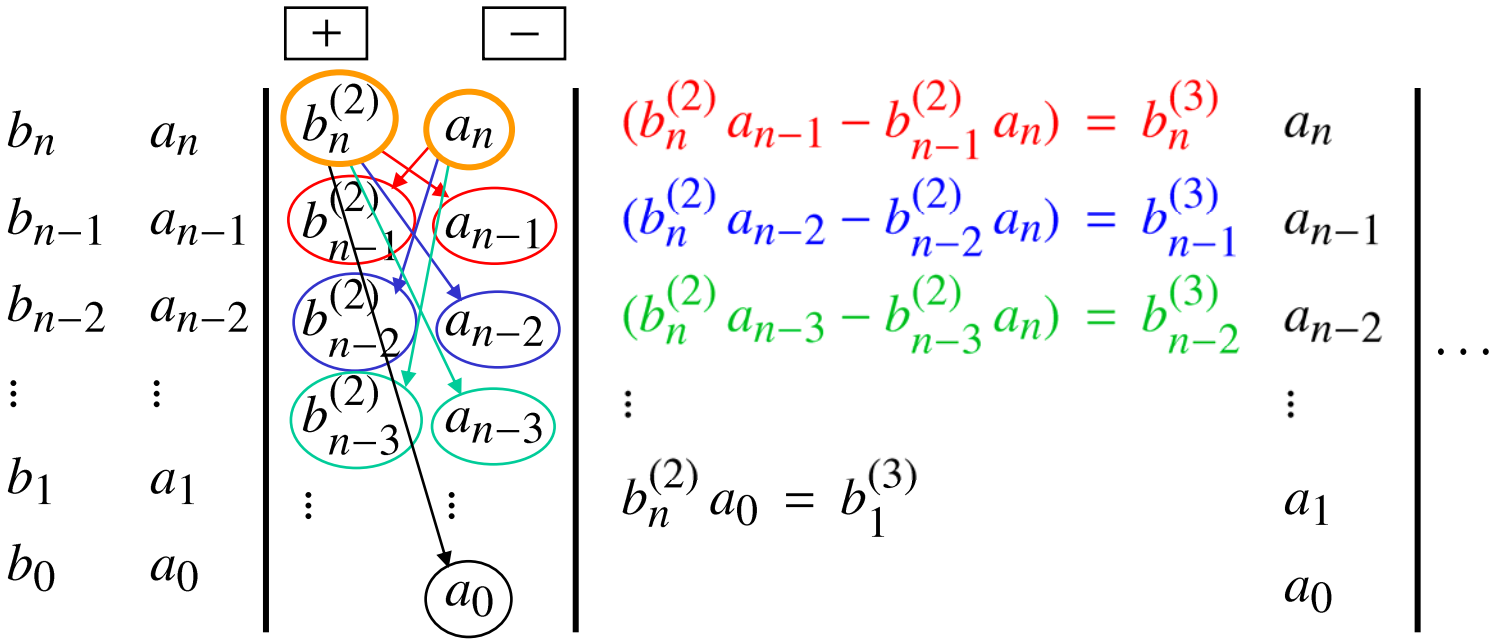
$$\vdots$$

$$(b_n a_0 - b_0 a_n) = b_1^{(2)}$$

– Questa è la prima “replica”: in 1ª colonna ci sono solo $n-1$ elementi! **Perché?**



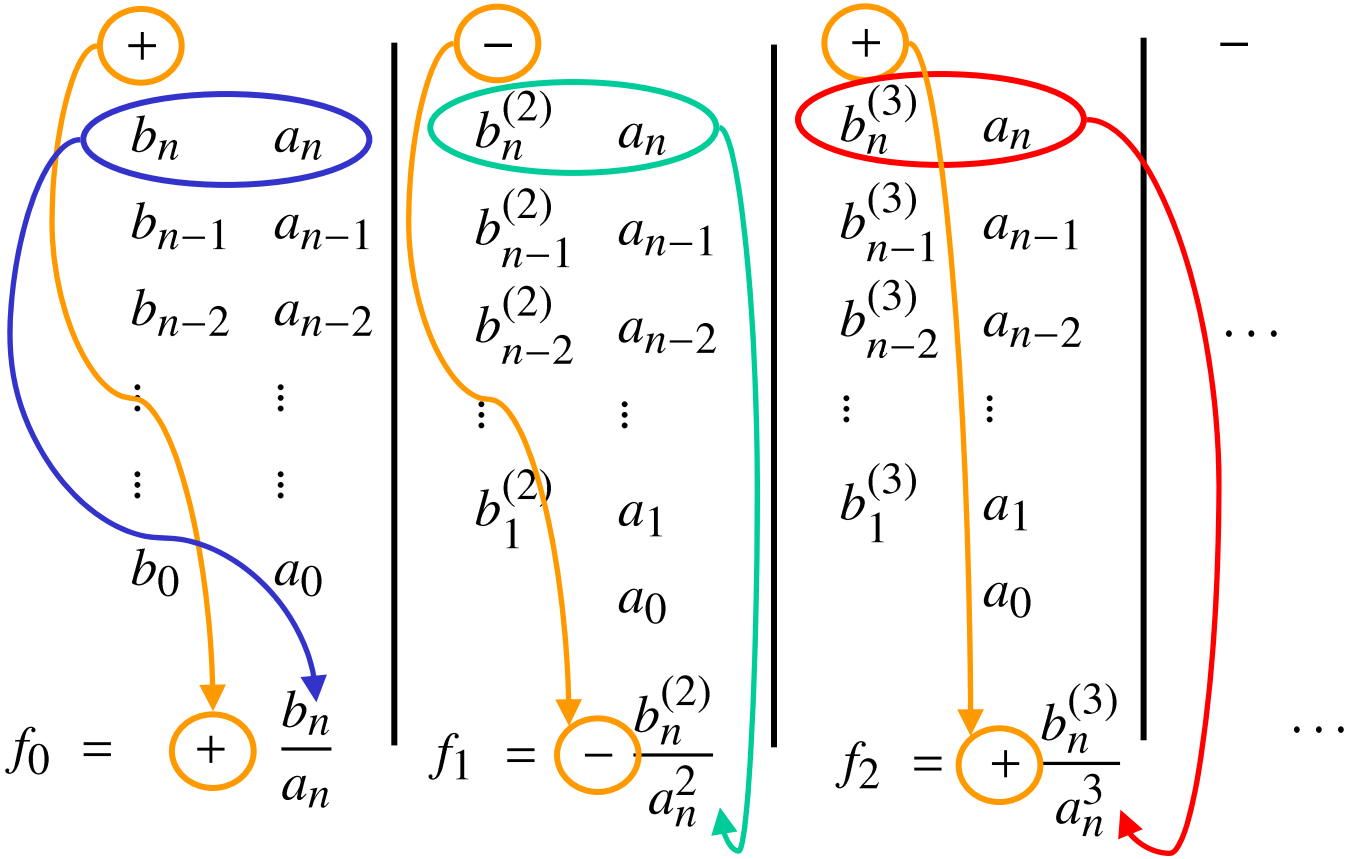
– In maniera analoga si procede per le “repliche” successive



– I prodotti parziali che coinvolgono il 1° termine in 1ª colonna (di ogni “replica”) vanno sommati, mantenendo il proprio segno, ai prodotti parziali che coinvolgono il 1° elemento in 2ª colonna di ogni “replica”. Questi ultimi vanno sommati solo dopo averne invertito il segno.

Utilizzo della tabella

- I termini della sequenza f_k (cioè la Z—antitrasformata cercata) si determinano così



- I termini f_k della sequenza cercata sono determinati allora dalla regola:

  – il termine k-esimo della sequenza è il rapporto tra il coefficiente di 1ª colonna della replica (k+1)-esima dello schema e la potenza (k+1)-esima del coefficiente della 2ª colonna, con segno alterno a seconda che k sia pari o dispari

$$f_k = (-1)^k \cdot \frac{b_n^{(k+1)}}{a_n^{k+1}}$$

Un primo semplice esempio

Determinare i primi campioni della successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 2z + 1}$$

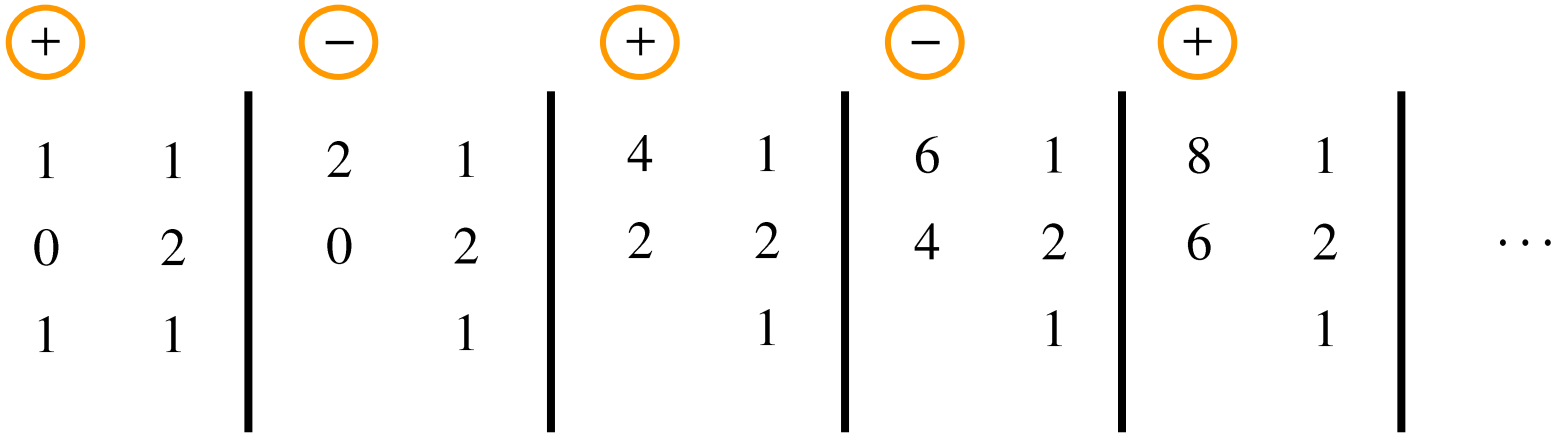
Avevamo trovato che ("Esercizi sulla Z—Trasformata") la successione cercata è

$$f(k) = \delta(k) - 2\,(-1)^{k-1} \cdot k \cdot 1(k)$$

e quindi i primi campioni della sequenza sono

$$\{f(k)\} = \{1, -2, 4, -6 \ldots\}$$

Applicando l'algoritmo si ottiene la tabella



$$f_0 = +\frac{1}{1} \quad f_1 = -\frac{2}{1^2} \quad f_2 = +\frac{4}{1^3} \quad f_3 = -\frac{6}{1^4} \quad f_4 = +\frac{8}{1^5}$$

In definitiva:

$$\{f(k)\} = \{1, -2, 4, -6, 8, \ldots\}$$

Z—trasformata e “Long Division”: l’algoritmo nel caso generale

- È assegnata una Z—trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

- Supponiamo adesso che sia $m < n$ e quindi, riscrivendo il tutto in potenze negative

$$F(z) = z^{-(n-m)} \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-(n-m-1)} + b_0 z^{-(n-m)}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

$$F(z) = z^{-(n-m)} \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \cdots + b_1 z^{-(n-m-1)} + b_0 z^{-(n-m)}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

- A questo punto si dovrebbe procedere così
  - se si applicasse l'algoritmo descritto in precedenza, utilizzando per il numeratore il polinomio completo in potenze di z^{-1} (cioè con (n-m) coefficienti nulli, in corrispondenza dei primi (n-m) termini), si otterrebbe che i primi (n-m) valori della sequenza f_k sono nulli.
  - Sappiamo già che la sequenza dei campioni f_k inizia con (n-m) campioni nulli!
  - Questo modo di procedere è inefficiente!

- Si procede allora in questo modo:

  – Sfruttiamo il fatto che sappiamo che

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{n-m-1} = 0$$

e cominciamo a calcolare i coefficienti a partire dal primo non nullo

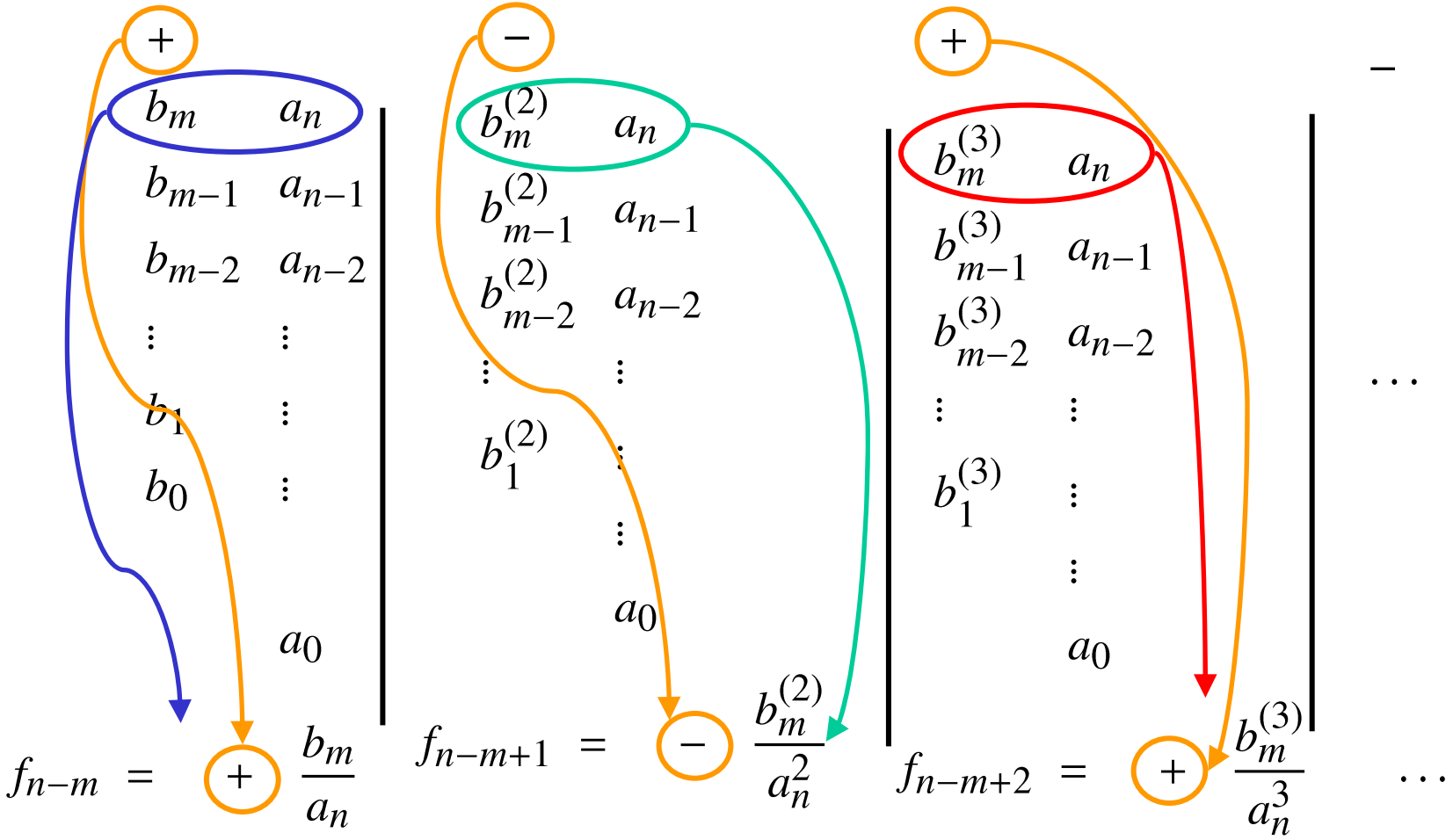
$$f_{n-m} \neq 0$$

- La tabella va riempita allora ancora una volta con i coefficienti dei polinomi rispettivamente del numeratore e del denominatore della Z—trasformata, ordinati da grado massimo a grado minimo in potenze positive di z e completi.

- La tabella va completata nel modo solito, facendo attenzione che la sequenza deve iniziare con (n-m) campioni nulli e quindi ...

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = f_{n-m-1} = 0$$



Un esempio ...

- Determinare i primi campioni della sequenza che ha dato origine alla Z—trasformata

$$F(z) = \frac{z - 0.4}{(z + 0.5)^2}$$

- Il primo campione della risposta impulsiva (all'istante $k = 0$) è certamente nullo. L'algoritmo di divisione ripetuta fornirà allora i campioni della risposta impulsiva a partire dal secondo campione della stessa (cioè dall'istante $k = 1$).

La tabella fornisce per i campioni da $k = 1$ a $k = 10$

(1)	(+)		(2)	(−)		(3)	(+)		(4)	(−)		(5)	(+)		
	1	1		1.4	1		1.15	1		0.8	1		0.5125	1	...
	−0.4	1		0.25	1		0.35	1		0.2875	1		0.2	1	
		0.25			0.25			0.25			0.25			0.25	

(6)	(−)		(7)	(+)		(8)	(−)		(9)	(+)		(10)	(−)		
	0.3125	1		0.1844	1		0.1063	1		0.0602	1		0.0336	1	...
	0.1281	1		0.0781	1		0.0461	1		0.0266	1		0.0150	1	
		0.25			0.25			0.25			0.25			0.25	

In definitiva

$$\{f_k\} = \{0,\ 1,\ -1.4,\ 1.15,\ -8.0,\ 0.5125,$$
$$-0.3125,\ 0.1844,\ -0.1063,\ 0.0602,\ -0.0336,\ \ldots\}$$