

# Algoritmi utili

**Versione efficiente  
dell'algoritmo di “trasformazione bilineare”**

# Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz: richiami

$$p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$

Lo studio della stabilità di un sistema LTI a tempo discreto analizzando il polinomio caratteristico  $p(z)$  non è agevole!

Con una opportuna **trasformazione di variabile**, si può ottenere un polinomio differente, da analizzare in modo molto più agevole, tramite il **criterio di Routh-Hurwitz**.

La trasformazione è tale da garantire che i **risultati sulla stabilità** ottenuti analizzando il polinomio trasformato **valgono** anche per il polinomio caratteristico **originario**.

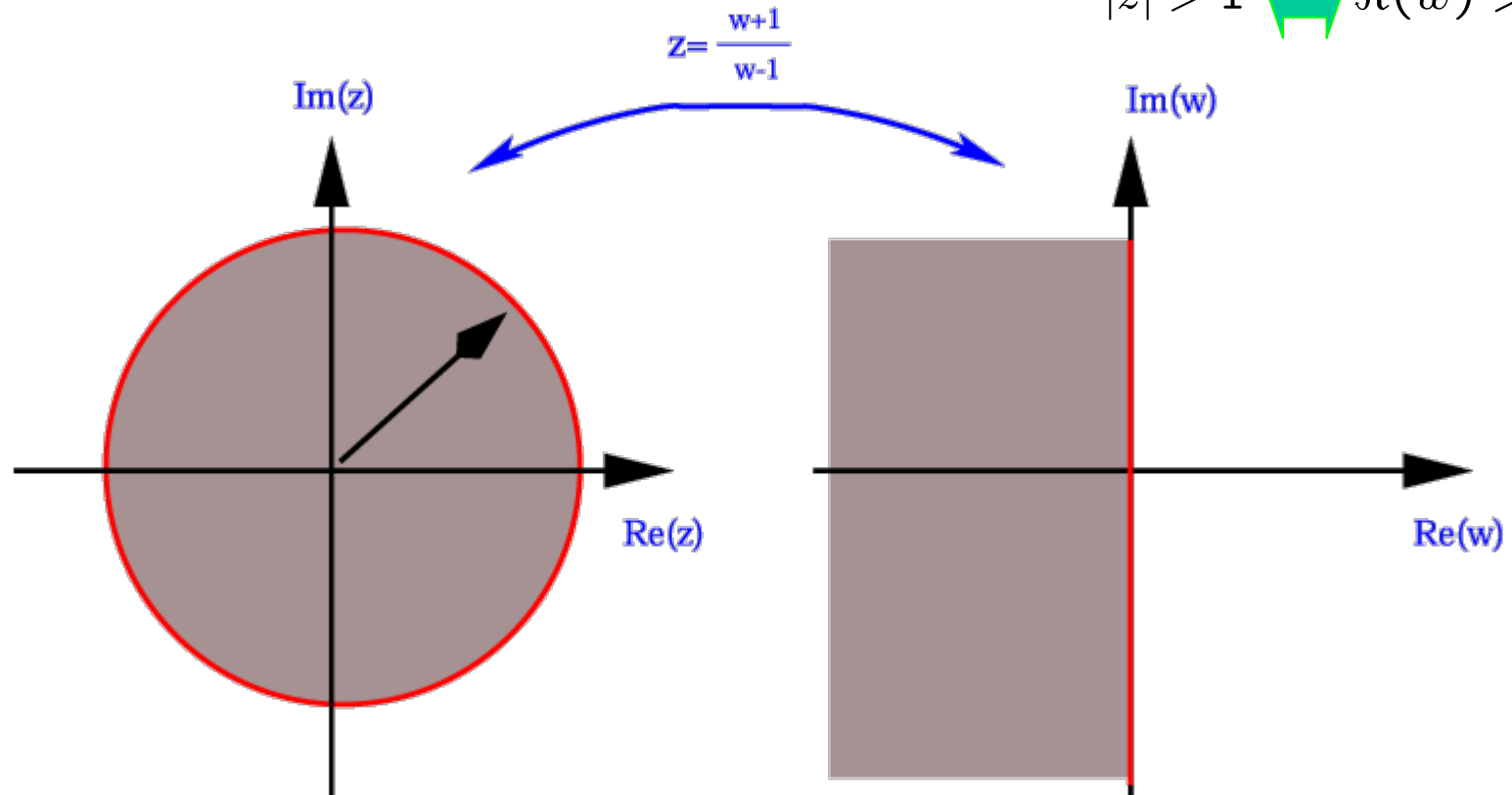
# Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$|z| < 1 \iff \Re(w) < 0$$

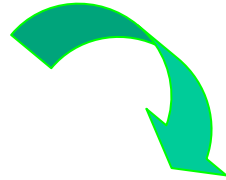
$$|z| = 1 \iff \Re(w) = 0$$

$$|z| > 1 \iff \Re(w) > 0$$



# Trasformazione bilineare

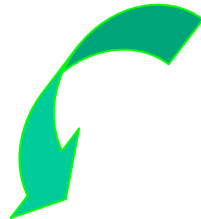
$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$



$$p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$$



$$q(w) = (w-1)^n \left[ \varphi_0 \frac{(w+1)^n}{(w-1)^n} + \varphi_1 \frac{(w+1)^{n-1}}{(w-1)^{n-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \varphi_{n-1} \frac{(w+1)}{(w-1)} + \varphi_n \right]$$



$$q(w) = q_0 w^n + q_1 w^{n-1} + \dots + q_{n-1} w + q_n$$

# Trasformazione bilineare: algoritmo

La **sostituzione diretta non** è un metodo **efficiente** per ottenere il polinomio trasformato!

## Algoritmi efficienti:



M. Policastro “*A simple algorithm to perform the bilinear transformation*”, Int. Journal of Control, vol. 30, n. 4, 1979

A. E. Yagle “*Number Theoretic Fast Algorithms for Bilinear and Other Generalized Transformations*”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 35, n. 11, 1990

# Descrizione dell'algoritmo di M. Policastro

A partire dal polinomio  $p(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} z + \varphi_n$

1. Si eseguono  $n$  passi di divisione (con il metodo di Ruffini) di  $p(z)$  per il binomio  $(z - 1)$ .
2. I resti delle varie divisioni ed il quoziente dell'ultima divisione vanno pesati per potenze crescenti di 2 (da  $2^0$  a  $2^n$ ).
3. Si costruisce un nuovo polinomio  $\hat{p}(\hat{z})$  con i coefficienti ottenuti al passo (2), in ordine opportuno.
4. Si eseguono altre  $n$  divisioni ripetute (col metodo di Ruffini) di  $\hat{p}(\hat{z})$  per il binomio  $(\hat{z} + 1)$
5. I resti ed il quoziente dell'ultima divisione, in ordine opportuno, sono i coefficienti del polinomio trasformato  $q(w)$

## Un primo esempio

- Trovare il polinomio trasformato di

$$p(z) = z^2 + z + 1$$

- Per sostituzione diretta si trova

$$q(w) = (w - 1)^2 \left[ \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right)^2 + \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right) + 1 \right]$$



$$q(w) = 3w^2 + 1$$

- Applicando l'algoritmo appena descritto

$$p(z) = z^2 + z + 1$$

**Passo (1)**

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | 1 | 1 | 1 |
| 1 |   | 1 | 2 |
|   | 1 | 2 | 3 |
| 1 |   | 1 |   |
|   | 1 | 3 |   |

**Passo (2)**

$$\times 2^0$$

$$\times 2^1$$

$$\times 2^2$$

**Passo (3)**

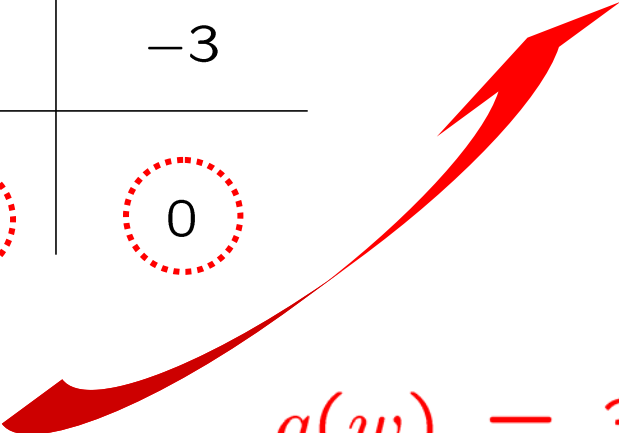
$$[3 \cdot 2^0 \quad 3 \cdot 2^1 \quad 1 \cdot 2^2]$$

[3 6 4]


**Passo (3)**
**Passo (4)**

|    |   |    |    |
|----|---|----|----|
|    | 3 | 6  | 4  |
| -1 |   | -3 | -3 |
|    | 3 | 3  | 1  |
| -1 |   | -3 |    |
|    | 3 | 0  |    |

**Passo (5)**



$$q(w) = 3w^2 + 0w + 1$$

# Un altro esempio

- Partiamo dal polinomio

$$p(z) = z^3 + 12z^2 + 21z + 10 = (z + 1)^2(z + 10)$$

- Dato che il polinomio  $p(z)$  presenta una **radice di modulo maggiore dell'unità**, il polinomio trasformato  $q(w)$  dovrà avere una radice a parte reale positiva (segnalata dall'applicazione del criterio di Routh—Hurwitz).
- La **radice doppia** in  $z = -1$  per  $p(z)$  corrisponde ad una radice doppia in  $w = 0$  per il polinomio  $q(w)$

- Applicando l'algoritmo

$$p(z) = z^3 + 12z^2 + 21z + 10$$



**Passo (1)**

|   |   |    |    |    |
|---|---|----|----|----|
|   | 1 | 12 | 21 | 10 |
| 1 |   | 1  | 13 | 34 |

|   |   |    |    |
|---|---|----|----|
|   | 1 | 13 | 34 |
| 1 |   | 1  | 14 |

44

$\times 2^0$

**Passo (2)**

|   |   |    |
|---|---|----|
|   | 1 | 14 |
| 1 |   | 1  |

48

$\times 2^1$

$\times 2^3$

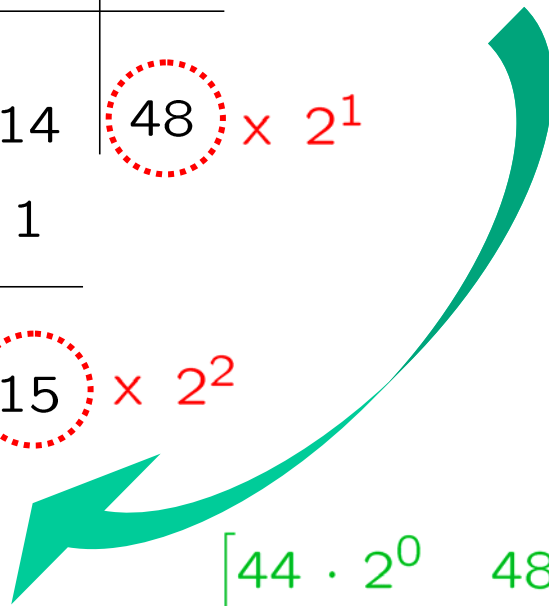
1

15

$\times 2^2$

**Passo (3)**

$$[44 \cdot 2^0 \quad 48 \cdot 2^1 \quad 15 \cdot 2^2 \quad 1 \cdot 2^3]$$



**Passo (3)**

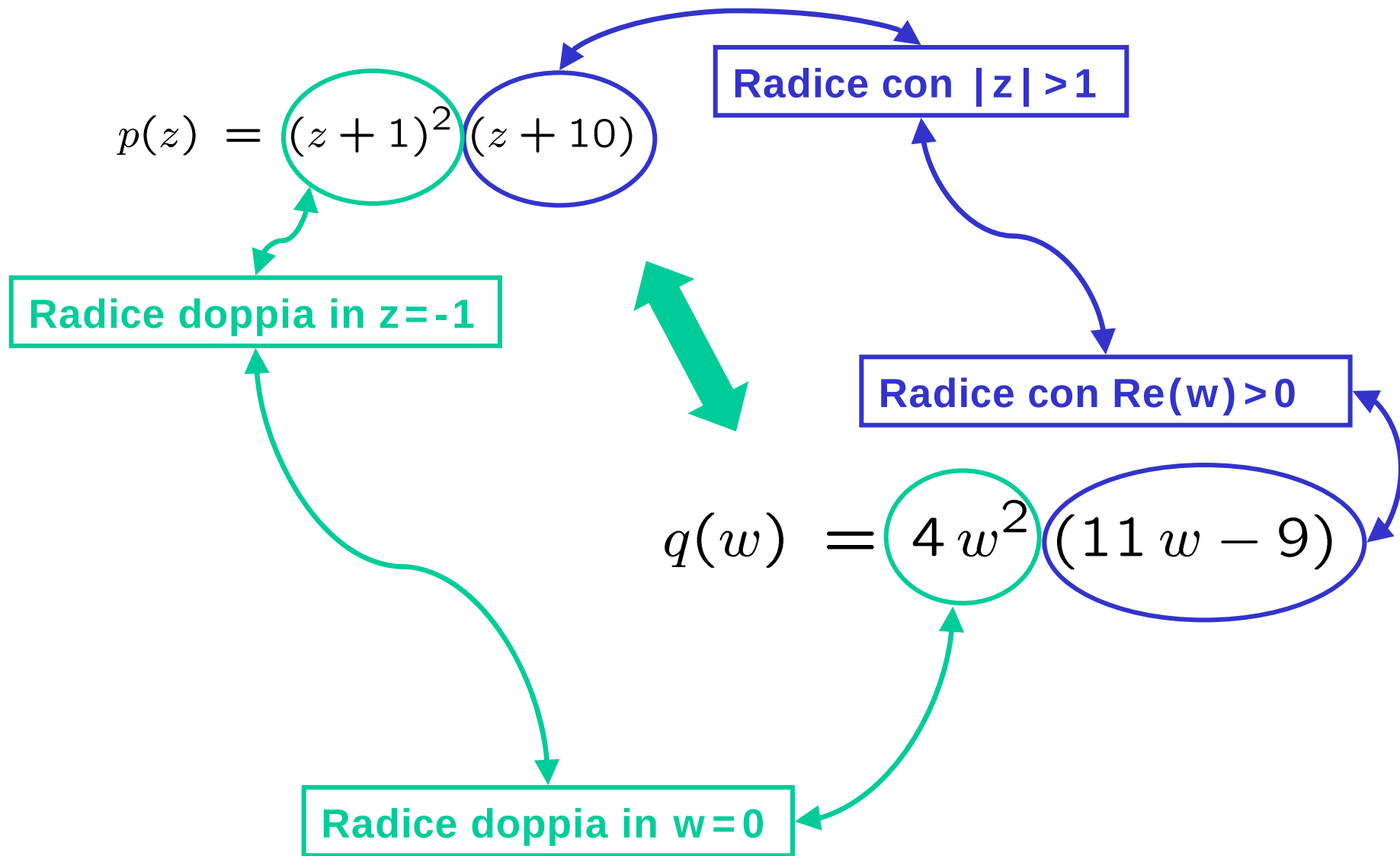
$$\left[ 44 \cdot 2^0 \quad 48 \cdot 2^1 \quad 15 \cdot 2^2 \quad 1 \cdot 2^3 \right]$$

**Passo (4)**

|       |    |     |     |    |
|-------|----|-----|-----|----|
|       | 44 | 96  | 60  | 8  |
| -1    |    | -44 | -52 | -8 |
| <hr/> |    |     |     |    |
|       | 44 | 52  | 8   | 0  |
| -1    |    | -44 | -8  |    |
| <hr/> |    |     |     |    |
|       | 44 | 8   | 0   |    |
| -1    |    | -44 |     |    |
| <hr/> |    |     |     |    |
|       | 44 |     |     |    |
|       |    | -36 |     |    |

**Passo (5)**

$$q(w) = 44 w^3 - 36 w^2$$



## Ancora un esempio

- Consideriamo un sistema LTI a tempo discreto dotato del polinomio caratteristico

$$p(z) = z^4$$

- Si tratta certamente di un sistema asintoticamente stabile (perché? ). Applicando la trasformazione bilineare si ottiene quindi ancora un polinomio hurwitziano.
- Quali sono le radici del polinomio trasformato?

$$p(z) = z^4$$

$$q(w) = (w - 1)^4 p\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right)$$

$$q(w) = (w + 1)^4$$

$$[1 \cdot 2^0 \quad 4 \cdot 2^1 \quad 6 \cdot 2^2 \quad 4 \cdot 2^3 \quad 1 \cdot 2^4]$$

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 |   | 1 | 1 | 1 | 1 |
|   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 |   | 1 | 2 | 3 | 1 |
|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 |   | 1 | 3 | 6 | 4 |
|   | 1 | 3 | 6 | 4 | 1 |
| 1 |   | 1 | 4 | 1 | 1 |

$\times 2^0$   
 $\times 2^1$   
 $\times 2^2$   
 $\times 2^3$   
 $\times 2^4$

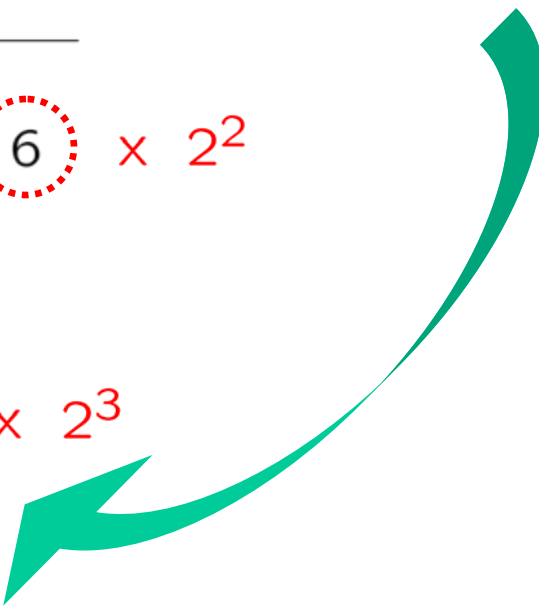


Diagram illustrating a transition  $q(v)$  from a node labeled 6 to a node labeled 4. The node 6 is enclosed in a red dashed circle, and the node 4 is also enclosed in a red dashed circle. The number 11 is above the node 6, and -5 is below it, separated by a vertical line.

## - Teoria dei sistemi e del controllo

## Un ultimo esempio

- La trasformazione bilineare mappa in maniera biunivoca “quasi dovunque” il piano della variabile complessa  $z$  nel piano della variabile complessa  $w$
- La trasformazione non è ben definita per alcuni valori di  $z$  e  $w$

$$w = \frac{z+1}{z-1}, \quad z, w \in \mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad z = \frac{w+1}{w-1}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$z \neq 1 \qquad \qquad \qquad w \neq 1$$

- Che cosa succede in questo caso?
- Se il polinomio  $\varphi(z)$  presenta una radice (anche multipla) in  $z = 1$  che cosa si può dire del polinomio trasformato?
- Si potrebbe dimostrare che in tal caso il **polinomio trasformato  $q(w)$  si abbassa di grado** e l'abbassamento di grado corrisponde alla molteplicità della radice in  $z = 1$  per il polinomio originario  $\varphi(z)$
- Lo verifichiamo con un esempio!

$$\varphi(z) = 2(z-1)^2(z+2) = 2z^3 - 6z + 4$$

|   |   |   |    |    |
|---|---|---|----|----|
|   | 2 | 0 | -6 | 4  |
| 1 |   | 2 | 2  | -4 |

|   |   |   |    |                    |
|---|---|---|----|--------------------|
|   | 2 | 2 | -4 | 0 × 2 <sup>0</sup> |
| 1 |   | 2 | 4  |                    |

|   |   |   |                    |  |
|---|---|---|--------------------|--|
|   | 2 | 4 | 0 × 2 <sup>1</sup> |  |
| 1 |   | 2 |                    |  |

|  |                  |   |                  |  |
|--|------------------|---|------------------|--|
|  | 2                | 6 | × 2 <sup>2</sup> |  |
|  | × 2 <sup>3</sup> |   |                  |  |

$$[0 \cdot 2^0 \quad 0 \cdot 2^1 \quad 6 \cdot 2^2 \quad 2 \cdot 2^3]$$

I coefficienti di grado massimo sono nulli!

$[0 \quad 0 \quad 24 \quad 16]$   $\longleftrightarrow$  Il polinomio si abbassa di grado!

- Per terminare l'algoritmo dobbiamo rielaborare un semplice polinomio del 1.<sup>o</sup> ordine.

|       |    |     |
|-------|----|-----|
|       | 24 | 16  |
| -1    |    | -24 |
| <hr/> |    |     |
|       | 24 | -8  |

$$q(w) = 8(3w - 1)$$

L'abbassamento di grado del polinomio  $q(w)$  è spiegabile pensando di "mappare" la radice doppia in  $z = 1$  del polinomio originario  $\varphi(z)$  nella "radice"  $w \rightarrow \infty$  per il polinomio  $q(w)$