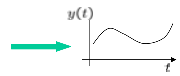
Sistemi LTI:
conversione da tempo continuo a tempo discreto per campionamento

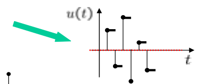
Campionamento ed equazioni di stato:
rappresentazione a tempo continuo e rappresentazione a tempo discreto di un sistema dinamico soggetto a campionamento.

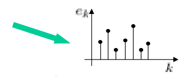
Definizioni

- Una prima classificazione:
  - **segnali continui** nel tempo



  - **segnali costanti a tratti**, cioè costanti in ogni intervallo [i Δ, (i+1) Δ] con Δ periodo di campionamento
  - **segnali discreti** nel tempo

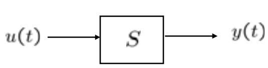




- Ulteriore classificazione:
  - **segnali analogici**: le loro ampiezze possono variare con continuità;
  - **segnali digitali**: le loro ampiezze sono quantizzate (per es. rappresentate con un numero finito di cifre).

Rappresentazione a tempo discreto di un sistema LTI a tempo continuo

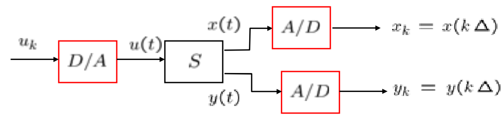
- Consideriamo un sistema LTI a tempo continuo, come in figura:



- Sottoponendo il sistema S a campionamento secondo lo schema di "campionamento e tenuta" (definiamo tra poco operativamente che significhi questa operazione): come si trasformano le equazioni di stato del sistema quando si passa dalla descrizione a tempo continuo a quella a tempo discreto/campionato?

C2d "con campionamento e tenuta"

- Facciamo riferimento a questa situazione



- I blocchi "A/D" eseguono l'operazione di "campionamento": ad ogni istante di tempo multiplo intero di un periodo base (periodo di campionamento) alla loro uscita è presente il valore numerico corrispondente al valore a quell'istante del segnale al loro ingresso.
- Il blocco "D/A" "converte" il segnale a tempo discreto presente al suo ingresso in un segnale a tempo continuo, generato nel modo seguente:

$$u(t) = u_k \quad \forall\, t: \quad k\,\Delta \le t < (k+1)\Delta$$

Ipotesi

- Il segnale u(t) è costante a tratti, analogico (la quantizzazione è ininfluente ...)
- Il sistema S è LTI descritto da

$$y^{(n)}(t)+\alpha_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_n y(t) = \beta_0 u^{(m)}(t)+\ldots+\beta_m u(t)$$

con $n \geq m$
a cui corrisponde (c. i. nulle)

$$G(s) = \frac{\beta_0 s^m + \ldots + \beta_m}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_0}$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

C2d tramite descrizione su base stato, con campionamento e tenuta

- Eq. di stato a tempo continuo: è sufficiente determinare una realizzazione della fdt *G(s)*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + b_c u(t) \\ y(t) = c_c^T x(t) + d_c u(t) \end{cases}$$

- Vale la relazione

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)} x(t_0^-) + \int_{t_0^-}^{t} e^{A_c(t-\tau)} b_c u(\tau)\, d\tau$$

con

$$I + A_c t + \frac{A_c^2 t^2}{2} + \frac{A_c^3 t^3}{3!} + \ldots = e^{A_c t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A_c)^{-1}\right\}$$

- Consideriamo due istanti di campionamento successivi : il segnale u(τ) è costante a tratti ed è quindi costante nell'intervallo di tempo considerato

$$\underbrace{x[(i+1)\Delta]}_{x_{i+1}} = \ldots$$

$$e^{A_c[(i+1)\Delta - i\Delta]} x(i\Delta) + \left\{ \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} e^{A_c[(i+1)\Delta-\tau]} b_c\, d\tau \right\} \underbrace{u(i\Delta)}_{u_i}$$

$$r \overset{\triangle}{=} (i+1)\Delta - \tau$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = A x_i + b u_i \\ y_i = c^T x_i + d u_i \end{cases} \qquad \begin{cases} A = e^{A_c \Delta} \ , \ b = \int_0^{\Delta} e^{A_c r} b_c\, dr \\ c = c_c \ , \ d = d_c \end{cases}$$

Esempio

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{K}{s^2 + as}$$

- Poniamo il sistema in forma compagna di controllo (per es.)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$(sI - A_c) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+a \end{bmatrix}$$

$$(sI - A_c)^{-1} = \frac{1}{s(s+a)} \begin{bmatrix} s+a & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+a)} \\ 0 & \frac{1}{s+a} \end{bmatrix}$$

$$e^{A_c t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A_c)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1(t) & \frac{1}{a}1(t) - \frac{1}{a}e^{-at}1(t) \\ 0 & e^{-at}1(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{A_c \Delta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a\Delta}\right) \\ 0 & e^{-a\Delta} \end{bmatrix}$$

$$b = \int_0^{\Delta} e^{A_c r} b_c \, dr = \begin{bmatrix} \int_0^{\Delta} \frac{1}{a}\left(1 - e^{-ar}\right) dr \\ \int_0^{\Delta} e^{-ar} dr \end{bmatrix}$$

C2d su base equazioni di stato in Matlab

- Come si fa in Matlab ad ottenere la conversione da "tempo continuo" a "segnali campionati", partendo da una descrizione su base stato?
- Il comando da utilizzare è "**`c2d`**", con la sintassi
  - **`c2d( sistema, Ts, metodo )`**
    - **`sistema`**: il sistema LTI descritto da un'opportuna variabile Matlab;
    - **`Ts:`** il valore del periodo di campionamento;
    - **`metodo`**: specifica la tecnica di discretizzazione che si intende utilizzare. In particolare:
      - **`'zoh'`**: discretizzazione con il metodo del "**campionamento e tenuta**"; è la scelta predefinita
    - Esistono altre tecniche di discretizzazione, ma non le analizziamo (si rimanda ad es. al corso di "Controllo Digitale").

Un esempio

- Vogliamo discretizzare il sistema descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) \end{cases}$$

- Scegliamo come periodo di campionamento il valore

$$\Delta = \frac{1}{10} \text{ [s]}$$


```
% definizione del sistema a tempo continuo
Ac = [0 1;0 -1];
Bc = [0; 10];
Cc = [1 0];
Dc = 0;
% periodo di campionamento [s]
Ts = 0.1; % in secondi

sistema_c = ss(Ac, Bc, Cc, Dc);
% conversione con campionamento e tenuta
sis_d_sample_hold = c2d( sistema_c, Ts, 'zoh')
```

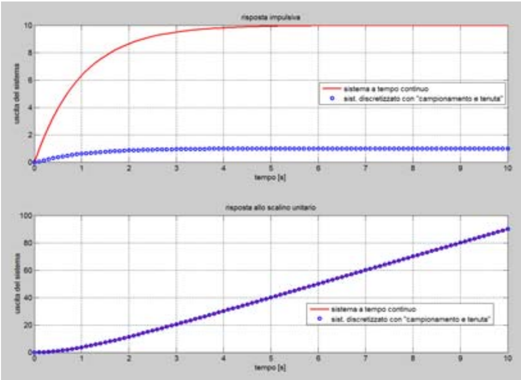
```
a =
            x1       x2
   x1        1  0.09516
   x2        0   0.9048
 b =
            u1
   x1  0.04837
   x2   0.9516
 c =
        x1  x2
   y1    1   0
 d =
        u1
   y1    0

Sampling time: 0.1
Discrete-time model.
```

Conversione con "campionamento e tenuta"

Proprietà della conversione per campionamento e tenuta

- Si noti che questa **tecnica di discretizzazione** e' **tale da conservare la risposta allo scalino** del sistema:
  - La risposta allo scalino del sistema nella rappresentazione a segnali campionati coincide con la risposta allo scalino del sistema a tempo continuo originario, valutata negli istanti di campionamento (si rimanda al corso di Controllo Digitale per le motivazioni, che qui non approfondiamo).

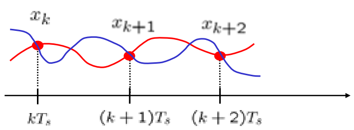
- Per il sistema dell'esempio si ha infatti



Scelta del periodo di campionamento

- Come va scelto il periodo di campionamento?
- Esistono delle scelte migliori di altre (nel senso di conservare più informazione sul sistema/segnale originario a tempo continuo)?
- La risposta e' sì; il come scegliere dipende da caratteristiche del sistema/segnale che si vuole sottoporre a campionamento.
- Il campionamento, se non applicato correttamente, introduce distorsione nell'informazione (*aliasing*): l'informazione ricostruita a partire dai campioni contiene degli artefatti (imputabili proprio al processo di campionamento) che non permettono di risalire all'informazione corretta originaria [non approfondiamo].

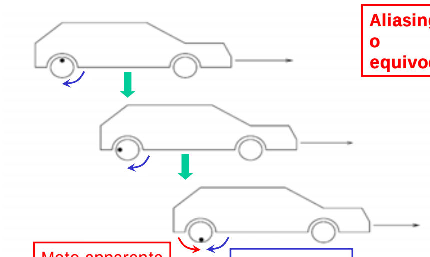
Campionamento e informazione



In generale il problema di ricostruire un segnale a tempo continuo a partire dai campioni è mal posto nel senso che tale ricostruzione non è univoca.

$$\left.\begin{array}{c} x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots \\ + \\ \text{Informazione a priori su } x(t) \end{array}\right\} \xrightarrow{?} x(t)$$

Un esempio : ripresa video



Aliasing o equivocazione

Moto apparente

Aliasing

Moto effettivo

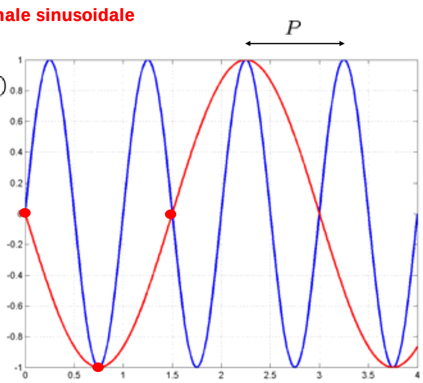
Esempio: segnale sinusoidale

$x(t) = \sin(\bar{\omega} t)$

$P = \dfrac{2\pi}{\bar{\omega}}$

$T_s = \dfrac{3}{4}P = \dfrac{3\pi}{2\bar{\omega}}$

aliasing



Esistono sinusoidi con periodo $\bar{P} > P$ che producono gli stessi campioni

Teorema del campionamento

Riportiamo, senza dimostrazione, il seguente **teorema (di Shannon)**

In generale, se un segnale a tempo continuo $x(t)$ è a banda limitata e $B = [0, \bar{\Omega}]$

se $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\Omega}$ $\Longrightarrow$ $x(t)$ è ricostruibile univocamente a partire dai campioni $x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Pulsazione di campionamento

Non approfondiamo ulteriormente!