PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI SISTEMI E DEL CONTROLLO
A.A. 2009/2010

15 giugno 2010

nome e cognome:

numero di matricola:

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

SOLUZIONE

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo, detto *sistema di Lorenz*:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$

dove σ, r, b sono costanti positive.

Domanda 1.1

Sfruttando la funzione di Lyapunov:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$$

si dimostri che l'origine è stato di equilibrio asintoticamente stabile $\forall\ 0 \leq r < 1$.

Risposta
La derivata di V lungo le traiettorie del sistema è data dal prodotto scalare:

$$\dot{V}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sigma}x & 2y & 2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{bmatrix} = -2\left(x^2 + y^2 + 2bz^2 - (1+r)xy\right).$$

Si tratta di dimostrare che tale derivata è definita negativa in un intorno dell'origine. E' immediato verificare che per $x = y = z = 0$ la funzione vale 0. Anche il gradiente

$$\nabla\dot{V}(x,y,z) = -2\left[2x - (1+r)y \qquad 2y - (1+r)x \qquad 4bz\right]$$

è nullo nell'origine. Quindi la funzione ammette un estremo relativo nell'origine. Lo studio della matrice Hessiana permette di stabilire che si tratta di un punto di *massimo* relativo, il che prova che la funzione è definita negativa. Infatti:

$$H = \left[\frac{\partial^2\dot{V}}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} -4 & 2(1+r) & 0 \\ 2(1+r) & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8b \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico risulta

$$p(\lambda) = (\lambda + 8b)\left((\lambda+4)^2 - 4(1+r)^2\right) = (\lambda + 8b)\left(\lambda^2 + 8\lambda + 16 - 4(1+r)^2\right).$$

Pertanto, per la regola di Cartesio, condizione necessaria e sufficiente affinché gli autovalori siano tutti strettamente negativi (e dunque l'origine sia punto di massimo relativo) è $(1+r)^2 < 4$ che è soddisfatta $\forall\ 0 \leq r < 1$.

Domanda 1.2

Sulla base dell'analisi svolta rispondendo alla domanda precedente, si può affermare che per $r \geq 1$ l'origine è stato di equilibrio instabile? **Motivare la risposta.**

Risposta
No, non lo si può affermare, perché il teorema di Lyapunov fornisce una condizione solo *sufficiente* (e non, anche, necessaria) per la asintotica stabilità.

Esercizio 2

Si consideri il **sistema dinamico lineare** **a tempo continuo** descritto dallo schema a blocchi di figura:

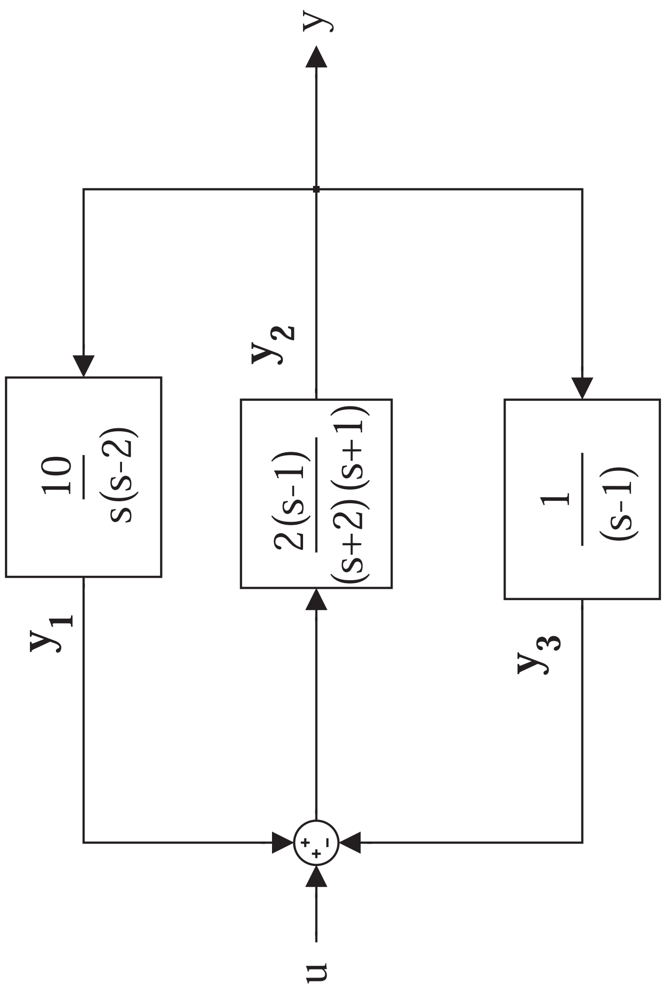

Figura 1: Schema a blocchi

Domanda 2.1

Sfruttando anche l'analisi dello schema a blocchi di figura 1, determinare

- l'ordine del sistema
- l'ordine minimo del sistema

Risposta
Il sistema complessivo è costituito dall'interconnessione di due sistemi del secondo ordine e uno del primo. Pertanto l'ordine del sistema è 2+2+1=5. Per quanto riguarda l'ordine minimo, esso può essere trovato in vari modi, fra i quali:

- realizzare il sistema dinamico complessivo, mettendo a sistema le realizzazioni minime dei tre sottosistemi che lo compongono ed evidenziare, attraverso la forma canonica di Kalman, la parte raggiungibile e osservabile, l'ordine della quale è l'ordine minimo del sistema;
- applicare le regole di analisi dello schema a blocchi per la raggiungibilità e l'osservabilità (Parte 8 delle dispense);
- calcolare la funzione di trasferimento del sistema complessivo, l'ordine della quale è l'ordine minimo del sistema.

Seguendo l'ultimo procedimento, si trova:

$$\begin{aligned} F_u^y(s) &= \frac{\frac{2(s-1)}{(s+2)(s+1)}}{1+\frac{2(s-1)}{(s+2)(s+1)}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{10}{s(s-2)}\right]} \\ &= \cdots = \frac{2s(s-1)(s-2)}{s(s+1)(s+2)(s-2)+2} \end{aligned}$$

E' facile verificare che numeratore e denominatore non hanno alcun fattore in comune, poiché il denominatore non si annulla né per $s=0$, né per $s=1$, né per $s=2$. Pertanto la funzione di trasferimento ha ordine 4 (che è il grado del denominatore di $F_u^y(s)$) e questo è l'ordine minimo del sistema.

Domanda 2.2

Sulla base dell'analisi svolta nella risposta alla domanda precedente, dire se sono vere o false le affermazioni seguenti:

- esiste **una sola** realizzazione minima per il sistema per la quale $\lambda = 0$ è un autovalore ;

  FALSO: infatti tutte le realizzazioni minime di un dato sistema hanno gli stessi autovalori. Pertanto se l'autovalore $\lambda = 0$ appartiene a una realizzazione minima del sistema, appartiene a tutte le (infinite) realizzazioni minime di quel sistema.

- **tutte** le realizzazioni minime del sistema possiedono l'autovalore $\lambda = +1$.

  FALSO poiché il polo in $s = 1$ non compare nella $F_u^y(s)$ (infatti il denominatore non si annulla per $s = 1$). Pertanto non compare nel polinomio minimo e, di conseguenza, neppure nel polinomio caratteristico di alcuna realizzazione minima.