PROVA SCRITTA DI TEORIA DEI SISTEMI E DEL CONTROLLO
A.A. 2009/2010

6 luglio 2010

TESTO E SOLUZIONE

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo, di ordine n:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial P(x)}{\partial x_i}, \qquad i = 1 \dots n$$

dove $P(x) : R^n \rightarrow R$ è detta *funzione di potenziale* ed è continua con le sue derivate parziali prime.

Sia $\bar{x}$ un minimo locale isolato di $P(x)$, ossia $P(\bar{x}) < P(x)$ per $0 < \|x - \bar{x}\| < r$ per qualche r.

Domanda 1.1 Si dimostri che $\bar{x}$ è stato di equilibrio per il sistema.

Risposta
Poiché $\bar{x}$ è punto di minimo locale di una funzione continua con le sue derivate parziali prime, necessariamente il gradiente di $P(x)$ si annulla in $\bar{x}$. Dunque:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_i}|_{x=\bar{x}} = 0, \qquad i = 1 \dots n$$

il che implica che $\bar{x}$ è di equilibrio.

Domanda 1.2

Sfruttando la funzione di Lyapunov:

$$V(x) = P(x) - P(\bar{x})$$

si dimostri che $\bar{x}$ è stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Risposta
E' sufficiente osservare che, essendo $P(\bar{x})$ costante:

$$\dot{V}(x) = \nabla(P(x) - P(\bar{x})) \cdot \dot{x} = \nabla P(x) \cdot \dot{x} = \left[\frac{\partial P(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P(x)}{\partial x_n}\right] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial P(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial P(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

e dunque:

$$\dot{V}(x) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x_i}\right)^2.$$

Poiché $\bar{x}$ è un punto di minimo *isolato*, tale funzione è definita negativa in un intorno di $\bar{x}$. Quindi per il Teorema di Lyapunov, lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

Esercizio 2

Si consideri il **sistema dinamico lineare** **a tempo continuo** descritto dallo schema a blocchi di figura:

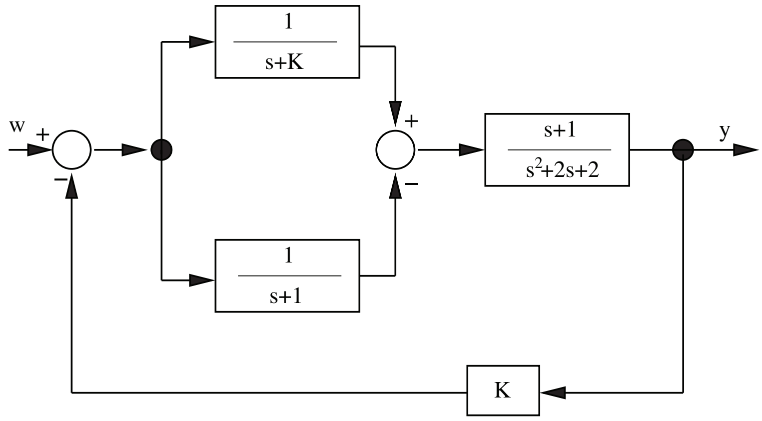

Figura 1: Schema a blocchi

Domanda 2.1

Si studi la controllabilità del sistema al variare del parametro K.

Risposta

Una possibilità per rispondere al quesito consiste nell'individuare una realizzazione in equazioni di stato del sistema complessivo e nello studiare il rango della matrice di controllabilità al variare di K. In alternativa si può procedere applicando le regole sullo studio di controllabilità e raggiungibilità per mezzo di schemi a blocchi presenti nella Parte 8 delle dispense. Anzitutto, la retroazione con blocco algebrico K non ha effetto sulla controllabilità, e quindi può essere ignorata. Esaminando il solo ramo di 'andata' si osserva che:

- si ha una perdita di controllabilità (e anche di osservabilità) relativamente ai primi due blocchi in parallelo se e solo se $K = 1$;
- la connessione in serie fra il sottosistema costituito dai due blocchi in parallelo e il sistema del secondo ordine causa, per qualsiasi valore di K, una cancellazione polo/zero che però non pregiudica la controllabilità.

Pertanto, l'unico caso di perdita di controllabilità è quello in cui $K = 1$. Chiaramente, l'autovalore associato al modo non controllabile è $\lambda = -1$.

Domanda 2.2

Sulla base dell'analisi svolta nella risposta alla domanda precedente e sfruttando eventualmente anche l'analisi dello schema a blocchi dire se sono vere o false le affermazioni seguenti, fornendo adeguata motivazione per ciascuna risposta:

- per opportuni valori di K il sistema possiede ordine minimo pari a 4;

  FALSO. La somma degli ordini dei sottosistemi che costituiscono il sistema complessivo è 4. Allora l'ordine minimo sarà 4 solo se non si verificano cancellazioni. Ma qualunque sia il valore di K, si verifica almeno una cancellazione polo/zero fra il sottosistema costituito dai due blocchi in parallelo e il sistema del secondo ordine.

- l'ordine minimo del sistema può essere al massimo 3 (nel caso in cui $K \neq 1$);

  VERO. Per $K \neq 1$ l'ordine minimo vale 3 (si verifica una cancellazione polo/zero come detto sopra).

- quale è, al variare di K, il valore più piccolo che può assumere l'ordine minimo del sistema?

  Per $K = 1$ la funzione di trasferimento del parallelo risulta nulla e, pertanto, nulla risulta anche la funzione di trasferimento complessiva. In questo caso quindi l'ordine minimo è zero e questo è anche il minimo valore possibile.