Forma canonica di Jordan

algoritmo ed esempi

Jordan canonical form

Def $A \sim B$ se $\exists\, T :$ rank$(T) = n$
$$T^{-1} A T = B$$

$\sim$ rel. equivalenta

$A \sim A$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Th $A \sim B \Rightarrow$ stessi autovalori

$\lambda_A, \bar{v}_A : \quad (A - \lambda_A I)\bar{v}_A = 0$

$A \sim B \rightarrow A = T^{-1} B T$

$$\left(T^{-1} B T - \lambda T^{-1} T\right)\bar{v} = 0$$

$$\left[T^{-1}(B - \lambda I)T\right]\bar{v} = 0$$

$(T \cdot)$ $\quad T^{-1}(B - \lambda I)\underbrace{(T\bar{v})}_{\tilde{v}} = 0$

$$(B - \lambda_A I)\tilde{v}_B = 0 \qquad \tilde{v}$$

Def A diagonalizzabile

$$A \sim \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

se autovalori tutti distinti

$\Downarrow$

è diagonalizzabile

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile

$$\Updownarrow$$

A con autovalori tutti distinti $\Longrightarrow$ $\exists$ base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A

$$T = \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, v_n \right]$$

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$(\lambda_i, \bar{v}_i)$$

$$A\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n \end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{v}_1 & \lambda_2 \bar{v}_2 & \cdots & \lambda_n \bar{v}_n \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$$

$$(T^{-1}) \quad AT = T\Lambda$$

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

Es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ -1 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = +2$$

$$V_1 = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_2 \to \mu_2 = 2$ //

$\dim V_2 = 2$ //

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dz J_0

$\boxed{\text{Es}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

$$V_1 = \ker(A - I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

NON diagonalizzabile

$\lambda_2 = 2 \quad \mu_2 = 2 \quad \dim V_2 = 1$

Procedimento per trovare la matrice di trasformazione T per ottenere la forma canonica di Jordan

a $\quad p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{m_p}$

p autovalori distinti

$$m_1+m_2+\dots m_p = n$$

Se

$\forall \lambda_i \quad \dim V_i = \dim \ker(A - \lambda_i I) = m_i$

$i = 1, 2 .. p$

allora la matrice A è diagonalizzabile

$$T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix}$$

$$V_i = \ker(A - \lambda_i I)$$

(b) $\exists j : \lambda_j : \dim\ker(A - \lambda_j I) < m_j$

allora $\exists T :$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ 0 & & J_2 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Def 1 rango generalizzato di ordine k

$$\rho_k \triangleq \text{rank}(A-\lambda I)^k \qquad k \geq 1$$

$$\mu_k \triangleq n - \rho_k \qquad n \to A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\nu_k \triangleq \mu_k - \mu_{k-1} \qquad (\mu_0 \equiv 0)$$

$k = 1, 2, \dots, g$ $\quad g: \ \nu_g \neq 0 \quad \nu_{g+1} = 0$

$g \to$ grado dell'autovalore

giustificazione

$$J_i = \lambda_i I + N_i$$

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(N_i)^k$$

Def Dati A, λ_j si definisce

autovettore generalizzato $\bar{v}$ di ordine k associato a λ_j un vettore $\bar{v} \neq 0$ tale che:

$$(A - \lambda_j \cdot I)^k \bar{v} = 0 \, ,$$

$$(A - \lambda_j \cdot I)^{k-1} \bar{v} \neq 0$$

Def 1 Dato $\bar{v}$ autovettore generalizzato di ordine k associato a λ_j, si definisce **catena di autovettori** relativa a λ_j:

$$\bar{v} \quad (A-\lambda_j I)\bar{v} \quad \cdots\cdots \quad (A-\lambda_j I)^{k-1}\bar{v}$$

$$v^{(k)} \qquad v^{(k-1)} \qquad\qquad v^{(1)}$$

Lemma I vettori della catena sono **lin. indip.**

Algoritmo A $\quad p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_p)^{m_p}$

(0) $\lambda_j \quad j = 1, 2 \dots p$

$k = g \rightarrow$ grado di λ_j

$\mathcal{B} = \emptyset$

$v_{g+1} = 0$

(1) - determinare $\nu_k - \nu_{k-1}$ autovettori generalizzati di ordine k, linearmente indipendenti fra loro e rispetto ai vettori presenti in B

per ciascuno costruire la catena

$$v_1^{(1)} \leftarrow \cdots \leftarrow v_1^{(k-1)} \leftarrow v_1^{(k)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$v^{(1)}_{\nu_k-\nu_{k-1}} \leftarrow \cdots \leftarrow v^{(k-1)}_{\nu_k-\nu_{k-1}} \leftarrow v^{(k)}_{\nu_k-\nu_{k-1}}$$

(1 bis) se $v_k - v_{k+1} = 0$?

Nessuna catena va aggiunta a $\mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{$tutti i vettori lin. indip. di tutte le catene costruite al passo 1$\}$

(3) se $k = 1 \longrightarrow$ passo (5)

altrimenti $k \leftarrow k - 1$

(4) torna ad (1)

(5) le colonne di T relative all'auto-
valore λ_j sono tutti gli elementi
di $\mathcal{B}$

I passi da 1 e 5 vanno ripetuti
per tutti gli autovalori λ_j

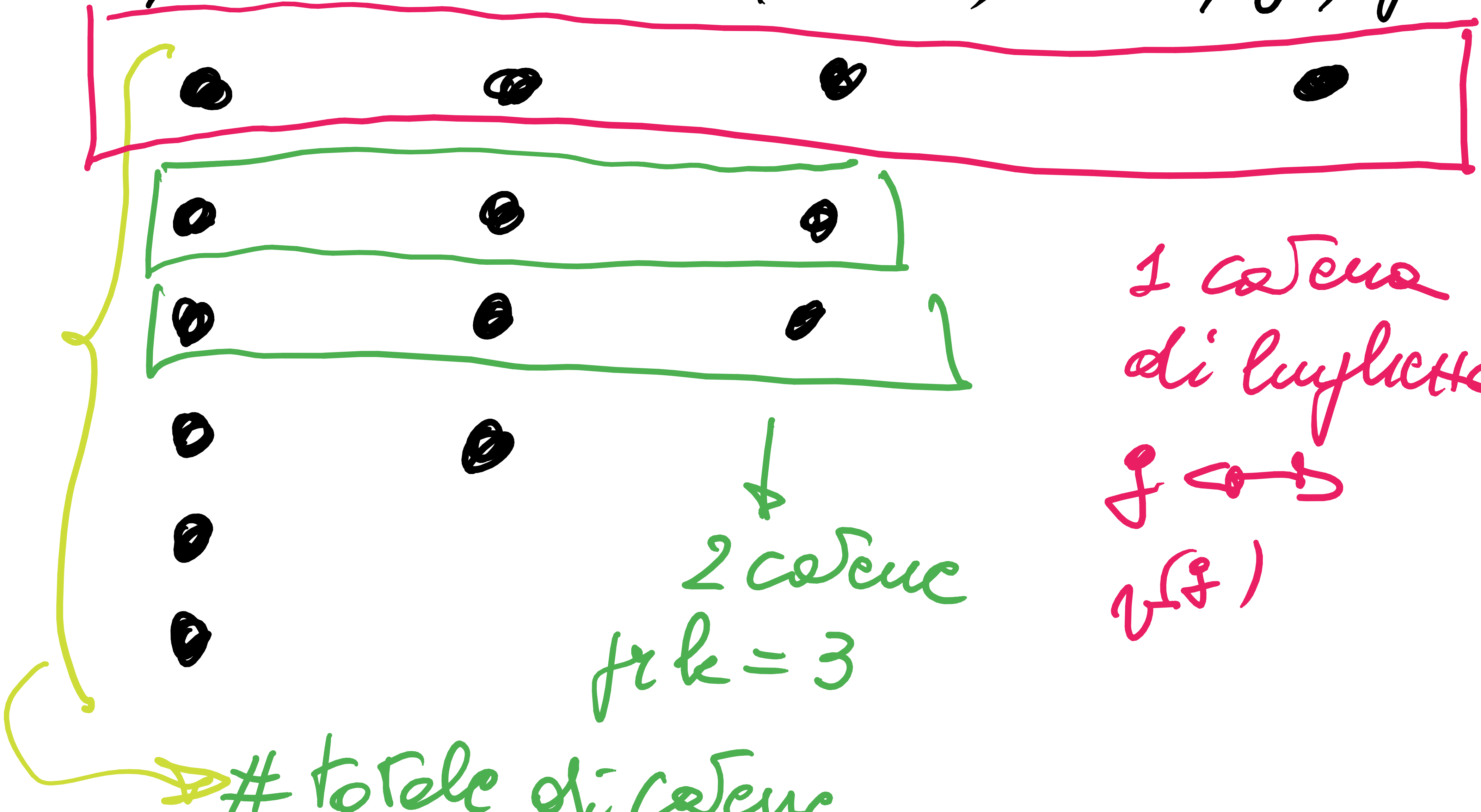
dati A, λ_j $\quad j = 1, 2 \dots p$

$$\rho_k = \text{rank}\left(A - \lambda_j I\right)^k \quad k = 1, 2 \dots$$

$$\mu_k = n - \rho_k \qquad (\mu_0 = 0)$$

$$\nu_k = \mu_k - \mu_{k-1}$$

$$\mu_1 \qquad (\mu_2-\mu_1) \qquad (\mu_3-\mu_2) \cdots\cdots \mu_g-\mu_{g-1}$$



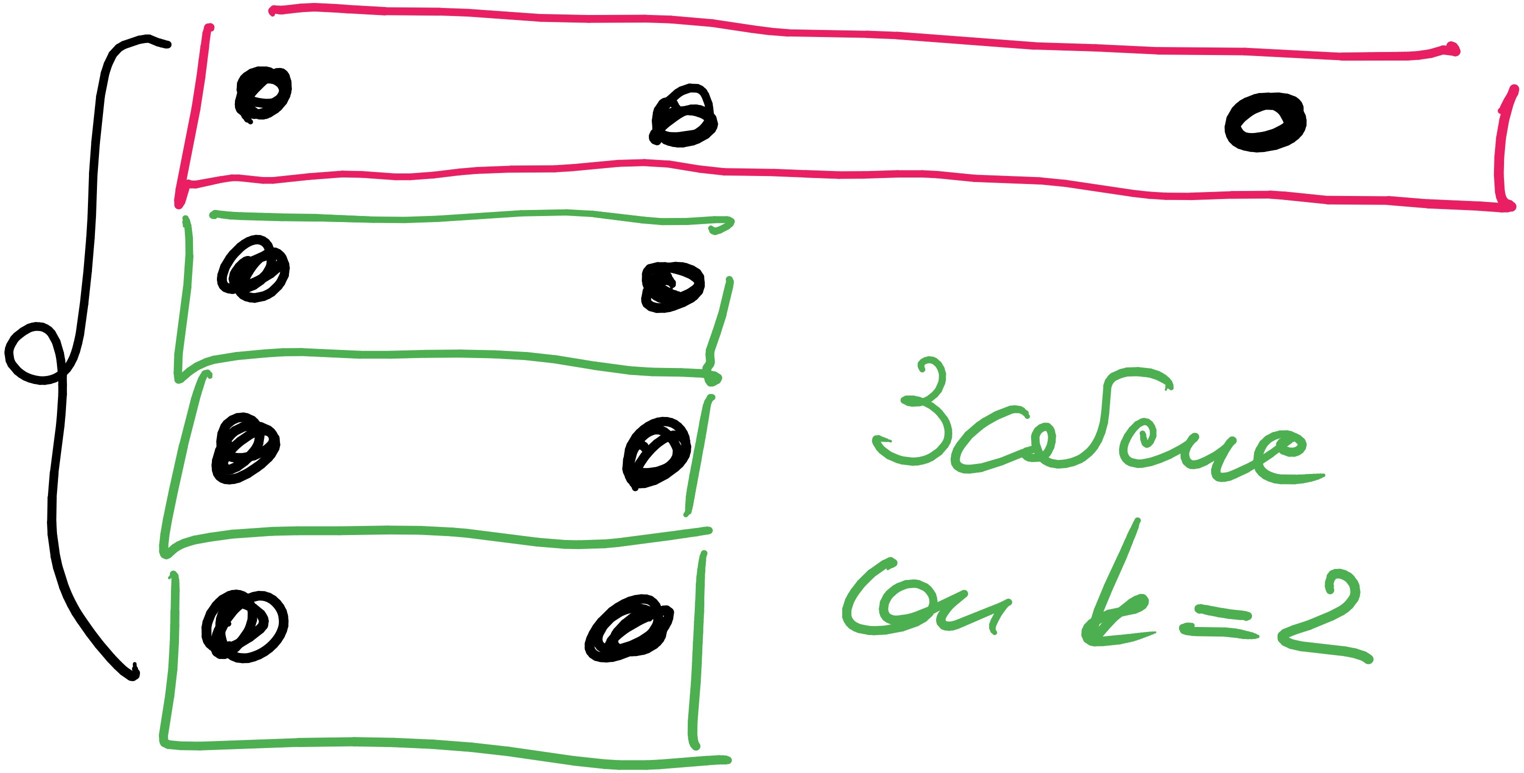
1 catena di lunghezza $g \leftrightarrow$ $v(g)$

2 catene per $k=3$

totale di catene

$\boxed{E_s}$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$



catena $k=3$

4 catene

3 catene con $k=2$

Continuazione esempio

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

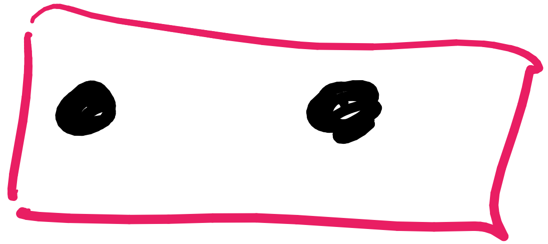
$$\rho_1=\operatorname{rank}(A-2I)=2$$

$$\mu_1=3-\rho_1=1$$

$$\rho_2=\operatorname{rank}(A-2I)^2=1$$

$$\mu_2=3-1=2$$

$\mu_1 \quad \mu_2-\mu_1$



1 catena per $k=2$

$$v^{(2)} \in \ker(A-2I)^2$$

$$\notin \ker(A-2I)$$

$$\ker(A-2I)^2 = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$v^{(2)}$

$$v^{(1)} = (A - \lambda I)\, v^{(2)} \Leftarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\| $$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & v^{(1)} & v^{(2)} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Es. Determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^4$$

un solo autovalore con molteplicità 4

valutazione di $\rho_k = \text{rank}(A-2I)^k$ e di μ_k

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = 2$

$\mu_1 = 4-2 = 2$ $\nu_1 = 2$

Troveremo 2 catene quindi 2 mini-blocchi di Jordan all'interno del blocco di Jordan associato a $\lambda = 2$

μ_1

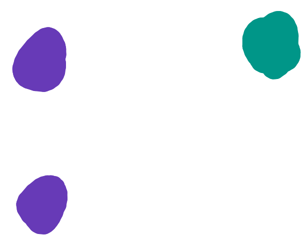
•

•

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = 1 \qquad \begin{cases} \mu_2 = 4-1 = 3 \\ \mu_2 - \mu_1 = 1 \end{cases}$$

μ_1 $\quad$ $\mu_2 - \mu_1$



$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_3 = 0$

$$\begin{cases} \mu_3 = 4 \\ \mu_3 - \mu_2 = 1 \end{cases}$$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{chiaramente} \\ \rho_4 = \rho_3 = 0 \\ \text{quindi} \\ \text{grado } g \to g = 3 \end{array}}$$

catena di lunghezza 3 da generare partendo da un autovettore generalizzato di ordine 3

$$(A-2I)^3 v^{(3)} = 0$$

catena di lunghezza 1 da generare partendo da un autovettore di ordine 1

$$(A-2I)v = 0$$

$$\ker(A-2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2I)^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2I)^3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Il vettore $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore generalizzato di ordine 3

Infatti $\begin{cases} (A - 2I)^3 \bar{v} = 0 \\ (A - 2I)^2 \bar{v} \neq 0 \end{cases}$

NB verificare che è l'unico autovettore generalizzato di ordine 3!

La catena cercata vale

$$(A-2I)\,\bar{v}^{(2)} = \bar{v}^{(1)} \leftarrow (A-2I)\,\bar{v}^{(3)} = \bar{v}^{(2)} \leftarrow \bar{v}^{(3)}$$

$$\underset{\bar{v}^{(1)}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \leftarrow \underset{\bar{v}^{(2)}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \leftarrow \underset{\bar{v}^{(3)}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

La seconda catena di lunghezza 1 è costituita da un autovettore generalizzato di ordine 1 che DEVE essere INDIPENDENTE da quelli che formano l'altra catena

$$\overline{w}^{(1)} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di Trasformazione

$$T = \begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \bar{w}^{(1)} & \bar{v}^{(1)} & \bar{v}^{(2)} & \bar{v}^{3} \end{array} \end{array}$$

La matrice inversa è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma canonica di Jordan cercata è

$$J_A = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2 miniblocchi

mini-blocco 1x1 $\longleftrightarrow$ catena di lunghezza 1

mini-blocco 3x3 $\longleftrightarrow$ catena di lunghezza 3

Es. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^5 \cdot \lambda$

$p(\lambda) = (\lambda - 2)^5 \cdot \lambda$

2 autovalori distinti

$\lambda_1 = 0$ con $m_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$ con $m_2 = 5$

la forma canonica di Jordan conterrà sicuramente un blocco 1×1 associato all'autovalore λ_1

per determinare invece quanti e di che dimensione saranno i mini-blocchi associati a λ_2 vanno calcolati ρ_k, μ_k, ν_k per $k = 1, 2, 3, 4, 5$

$$
(A-2I)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$\rho_1 = \operatorname{rank}(A-2I) = 4$

$\mu_1 = 6-4 = 2$

$A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$

μ_1

$\left.\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}\right\}$ ci saranno 2 catene quindi 2 mini-blocchi

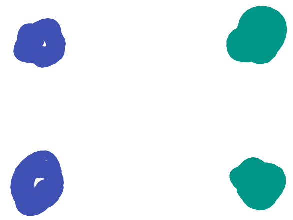
$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = \text{rank}(A-2I)^2 = 2$$

$$\mu_2 = 6-2 = 4$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1 = 2$$

μ_1 $\quad$ $\mu_2 - \mu_1$



$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rho_3 = \text{rank}(A-2I)^3 = 1$$

$$\mu_3 = 6 - 1 = 5$$

$$\nu_3 = \mu_3 - \mu_2 = 1$$

μ_1 $\qquad$ $\mu_2 - \mu_1$ $\qquad$ $\mu_3 - \mu_2$

NB $\mu_3 = \mu_2$

Non potrà aumentare ancora

$$(A-2I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$\rho_4 = \text{rank}(A-2I)^4 = 1$

$\mu_4 = 6-1 = 5$

$\nu_4 = \mu_4 - \mu_3 = 0$

$\mu_1 \quad \mu_2 - \mu_1 \quad \mu_3 - \mu_2$

STOP!

λ_2 ha ordine

$g = 3$

← catena di lunghezza 3

← catena di lunghezza 2

NB si inizia SEMPRE dalla catena di lunghezza massima per poi determinare le altre (cfr. algoritmo pezzi da 0 a 5) catena di lunghezza 3

deve esistere $\bar{v}^{(3)}$: $\bar{v}^{(3)} \in \ker (A - \lambda I)^3$

$\bar{v}^{(3)} \notin \ker (A - \lambda I)^2$

Verificare che

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{v} \in \ker (A - \lambda I)^3$

$\bar{v} \notin \ker (A - \lambda I)^2$

è autovettore generalizzato di ordine 3

$$\bar{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}^{(1)} = (A - \lambda I)\vec{v}^{(2)} \leftarrow \vec{v}^{(2)} = (A - \lambda I)\vec{v}^{(3)} \leftarrow \vec{v}^{(3)}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Catena di lunghezza 2

$\overline{w}$:
$$(A-2I)^2\overline{w}=0$$
$$(A-2I)\overline{w}\neq 0$$

Verificare che

$$\overline{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\overline{w}\in \ker(A-2I)^2$$
$$\overline{w}\notin \ker(A-2I)$$

$\overline{w}$ è autovettore generalizzato di ordine 2

$$w^{(1)} = (A - \lambda I)\, w^{(2)} \Leftarrow w^{(2)} = \overline{w}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

catena di lunghezza 1
associata a $\lambda_1 = 0$

$$\bar{w} : (A - \lambda_1 I)\bar{w} = 0$$

Verifiche che $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è autovettore cercato matrice T di trasformazione

$$T = \left[\ \bar{w}\ \middle|\ \bar{v}^{(1)}\ \middle|\ \bar{v}^{(2)}\ \middle|\ \bar{v}^{(3)}\ \middle|\ \bar{w}^{(1)}\ \middle|\ \bar{w}^{(2)}\ \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +2 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

forma canonica $\qquad J_A = T^{-1} A T$

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 9 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$= \dots$

sviluppo lungo questa colonna

$$p_A(\lambda) = (-1)^{7+7} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo questa riga $\Rightarrow$

$= \ldots$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)\cdot(-1)^{6+6}\cdot(1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo questa riga

$$= (1-\lambda)^2\cdot(-1)^{5+5}\cdot(1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo quella riga

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & -1 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & -1 \\ -2 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

Sviluppo lungo questa colonna

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 \cdot \Big\{ (-1)^{3+3} \cdot (2-\lambda) \cdot \left[-(1+\lambda)(2-\lambda) + 2 \right] +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \left[1+\lambda-2 \right] +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (1) \cdot \left[-2 + 2(2-\lambda) \right] \Big\} = \dots$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (2-\lambda)\left[-\cancel{2}-\lambda+\lambda^2+\cancel{2}\right] + (\lambda-1) + 2(1-\lambda) \right\}$$

$$= (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (2-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-1) + (1-\lambda)(2-1) \right\}$$

$$= (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (1-\lambda)\left[1-\lambda(2-\lambda)\right] \right\}$$

$$= (1-\lambda)^5 \cdot \left\{ 1-2\lambda+\lambda^2 \right\} = (1-\lambda)^7$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^7$$ ← potrebbe esserci più di un mini-blocco di Jordan

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = N$$

$$\operatorname{rank} N = \rho(N) = 3 \Rightarrow \mu_1 = 7 - 3 = 4$$

$$\nu_1 = \mu_1 - 0 = 4$$

ν_1

•
•
•
•

4 catene di autovettori associate tutte all'autovalore

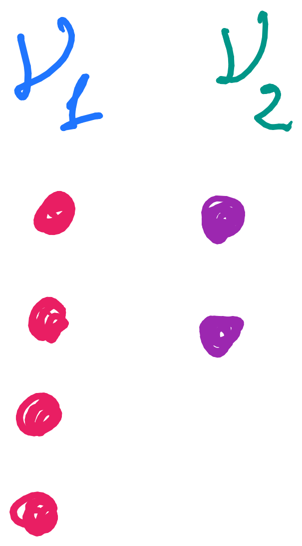
$d = 1 \Rightarrow$ 4 miniblocchi di Jordan

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(N^2) = 1$$

$$\mu_2 = 7 - 1 = 6$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1 = 2$$



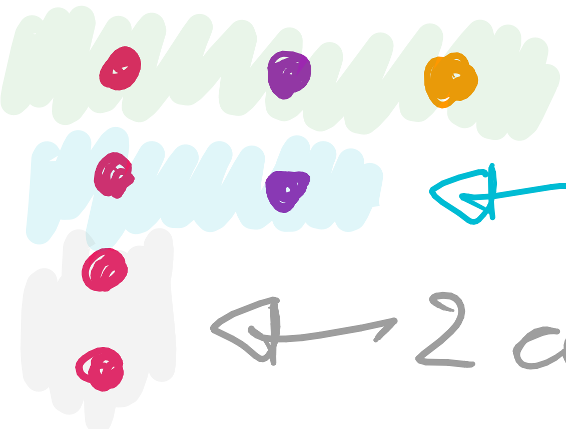
$N^3 = O_{7\times 7}$ $\qquad$ $\rho(N^3) = 0$

$\mu_3 = 7 - 0 = 7$ ← STOP all'algoritmo! L'indice non può aumentare ancora!

$\nu_3 = \mu_3 - \mu_2 = 1$

$g = 3$ (cfr algoritmo)

ν_1 $\quad$ ν_2 $\quad$ ν_3



← una catena di lunghezza 3

← una catena di lunghezza 2

← 2 catene di lunghezza 1

Catena di lunghezza 3:

$\bar{v} \in \ker(N^3)$, $\bar{v} \notin \ker(N^2)$ autovettore generalizzato di ordine 3

verificare che $\bar{v} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$$\begin{cases} \bar{v} \in \ker(N^3) \\ \bar{v} \notin \ker(N^2) \end{cases}$$

la catena sarà

$$N^2\bar{v} \leftarrow N\bar{v} \leftarrow \bar{v}$$

In definitiva

$$\underset{N^2\bar{v}}{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}} \longleftarrow \underset{N\bar{v}}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}} \longleftarrow \underset{\bar{v}}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}$$

Per la catena di lunghezza 2 serve un autovettore generalizzato di ordine 2

$$\begin{cases} \bar{w} \in \ker(N^2) \\ \bar{w} \notin \ker(N) \end{cases}$$

Verifica che $\bar{w} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$:

$$\begin{cases} \bar{w} \in \ker N^2 \\ \bar{w} \notin \ker N \end{cases}$$

La catena di lunghezza 2 è allora

$$Nw \longleftarrow w$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mancano ora le 2 catene di lunghezza 1.

Possiamo semplicemente scegliere 2 vettori in modo che

$$\begin{cases} \bar{z}, \bar{r} \in \ker N \\ \{N^2\bar{v} \quad N\bar{w} \quad \bar{z} \quad \bar{r}\} \text{ lin. indip.} \end{cases}$$

Per esempio:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

soddisfano i requisiti.

La matrice di trasformazione per la forma di Jordan allora è

$$T = \begin{bmatrix} N^2\bar{v} & N\bar{v} & \bar{v} & N\bar{w} & \bar{w} & \bar{z} & \bar{r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Define

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan cercata vale:

$$J_A = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$