Stabilità

Applicazione della trasformazione bilineare e del criterio di Routh-Hurwitz

Sistemi Dinamici

a.a. 2019/20

Es. Studiare la stabilità interna del sistema LTI

$$
\begin{cases}
x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)
\end{cases}
$$

polinomio caratteristico

$$p_A(z) = \det(zI - A) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$$

$P_A(z) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$ ← NON banale da fattorizzare (ricerca di radici del polinomio per via numerica con la tecnica di bisezione per es.)

Allora non è conveniente utilizzare

- analisi degli autovalori della matrice A
- forma di Jordan della matrice A

È conveniente invece far uso della trasformazione z lineare per analizzare il polinomio caratteristico

$$z = \frac{w+1}{w-1} \qquad p(z) \longrightarrow q(w)$$

Per sostituzione nell'equazione $p(z)=0$

$$z^3 - 5z^2 + 2z + 5 = 0$$

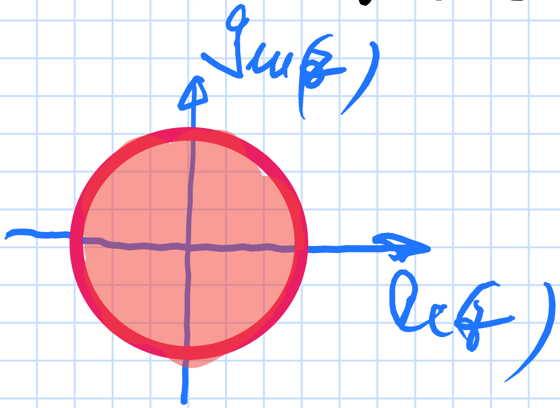
$$z = \frac{w+1}{w-1} \Longrightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 5 = 0$$

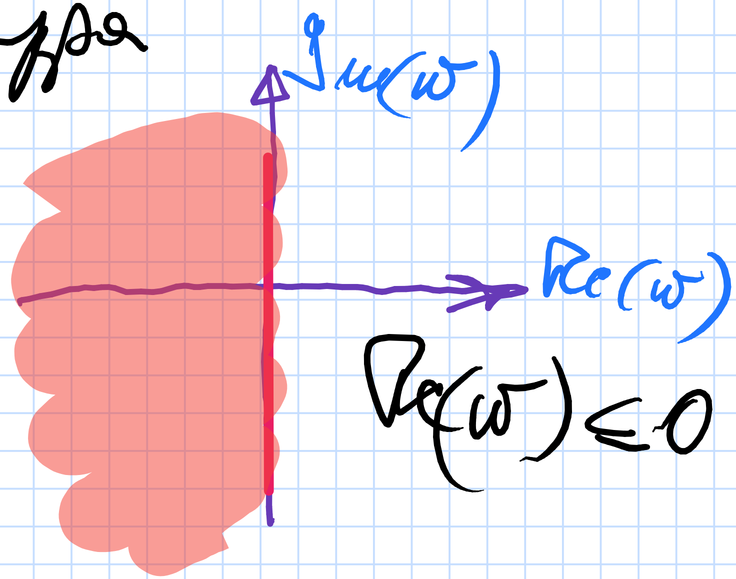
moltiplicando per $(w-1)^3$ e riordinando i vari termini si ottiene l'equazione $q(w)=0$

$$3w^3 - 19w^2 + 21w + 3 = 0$$

La trasformazione bilineare mappa

$|z| \leq 1$





$\mathrm{Re}(w) \leq 0$

Ora è possibile analizzare le radici di $q(w)$ [distinguendo tra radici con $\mathrm{Re}(w)<0$ e radici con $\mathrm{Re}(w)\geq 0$] per poi discutere delle radici del polinomio originario $p(z)$

Tabella di Routh-Hurwitz per $q(\omega)$

$$q(\omega) = 3\omega^2 - 19\omega^2 + 21\omega + 3$$

$+$	3	3	21
$-$	2	-19	3
$+$	1	$\frac{408}{19}$	
$+$	0	3	

$$\frac{(-19)\cdot 21 - 9}{-19}$$

2 variazioni di segno

$\Downarrow$

2 radici di $q(\omega)$ hanno $\mathrm{Re}(\omega) > 0$

In definitiva

2 radici di $p(z)$ con

modulo maggiore di 1

$\Downarrow$

Il sistema è instabile

$f(z) = 0 \longleftarrow$ stima numerica delle radici

$$z_1 \simeq -0,77$$

$$z_2 \simeq +1,52$$

$$z_3 \simeq +4,25$$