Es processo stocastico stazionario

$$y(t) = \frac{1}{3} y(t-1) + e(t-1) + 2e(t-2)$$

con $e(\cdot) \sim WN(0, 2)$

ⓐ che tipo di processo è?

ⓑ determinare il predittore ottimo a 1 passo

$$y(t) = \frac{1}{3} y(t-1) + e(t-1) + 2e(t-2)$$

autoregressivo   contributo di rumore

Si ha evidentemente un processo ARMA di ordini?

$n_A = 1$

$n_C = ?$,

$$e(t-1) + 2e(t-2) = v(t)$$

$$\eta(t) \triangleq e(t-1)$$ operazione che lascia inalterato lo spettro

$$\Gamma_e(\omega) \equiv \Gamma_\eta(\omega) = 2$$

posso riscrivere il processo ARMA così

$$y(t) = \frac{1}{3} y(t-1) + \eta(t) + 2\eta(t-1)$$

$$\eta(\cdot) \sim WN(0,2)$$

NON è in forma canonica!
Devo determinare la forma canonica prima di trovare il predittore!

$$\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)y(t)=\left(1+2z^{-1}\right)\eta(t)$$

$$W(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z+2}{z-\frac{1}{3}}$$

$$\hat{W}(z)=\frac{z+2}{z-\frac{1}{3}}\cdot\frac{z+1/2}{z+2}=\frac{z+1/2}{z-1/3}$$

$$\hat{\lambda}^2=?$$

$$W(z) \cdot W(z^{-1}) \cdot \lambda^2 =$$

$$= \acute{W}(z)\, \acute{W}(z^{-1}) \cdot \acute{\lambda}^2 = \phi_y(z)$$

$$\acute{\lambda}^2 = 8$$

$$T(z) = \frac{z+a}{z+1/a} \qquad T(z) \cdot T(z^{-1}) = a^2$$

$$W(z)\cdot W(z^{-1})\cdot \lambda^2 = \hat{W}(z)\cdot \hat{W}(z^{-1})\cdot \hat{\lambda}^2$$

$$\downarrow$$

$$W(z)\cdot T(z)$$

$$= W(z)\cdot T(z)\cdot W(z^{-1})\cdot T(z^{-1})\cdot \hat{\lambda}^2$$

$$a^2$$

$$\lambda^2 = a^2\hat{\lambda}^2 \Longrightarrow a = \frac{1}{7}\hat{\lambda}^2$$

$$\hat{W}(z) = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$e \longrightarrow \boxed{\hat{W}} \longrightarrow y$$

$$e(\cdot) \sim WN(0,8)$$

predittore ad 1 passo

- alimentato da rumore (1)
- alimentato dai dati (2)

① $$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z)-A(z)}{A(z)}\, e(t)$$

② $$\hat{y}(t|t-1) = \frac{C(z)-A(z)}{C(z)}\, y(t)$$

$$\hat{y}(t+1|t) = ? \quad z \cdot \frac{C-A}{C}\, y(t)$$

(2) $\hat{y}(t|t-1) = \dfrac{5/6\, z^{-1}}{1+\frac{1}{2} z^{-1}}\, y(t)$

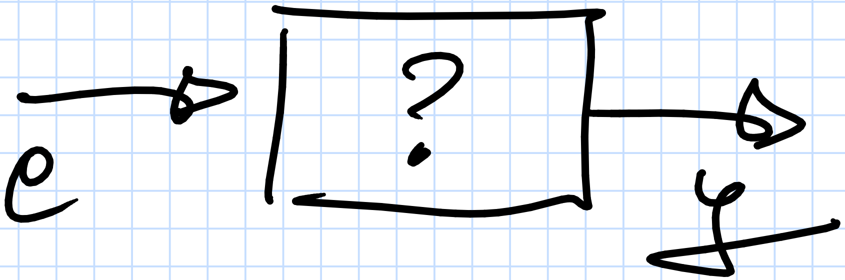
$\hat{y}(t|t-1) = -\frac{1}{2}\hat{y}(t-1|t-2) + \frac{5}{6} y(t-1)$

$\hat{y}(t+1|t) = -\frac{1}{2}\hat{y}(t|t-1) + \frac{5}{6} y(t)$

Es

$$\begin{cases} x(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + e(t) \\ y(t) = x(t) + 5x(t-1) \end{cases}$$

$e(\cdot) \sim WN(0,1)$ $\qquad$ x, y v.a.



① è processo stazionario? di che tipo?

② $\hat{y}(t+2|t) = ?$

dalla 1° eq $\Rightarrow$ $x(t) = \dfrac{1}{z - 1/2}\, e(t)$

dalle 2° eq $\Rightarrow$ $y(t) = (1 + 5z^{-1})\, x(t)$

~~Sostituendo~~

$$y(t) = \frac{z+5}{z\left(z - 1/2\right)}\, e(t)$$

$$W(z) = \frac{z+5}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

è LTI

as. stabile!

$$e(t) \longrightarrow \boxed{W} \xrightarrow{y} $$

Allora a regime

il processo di $y(t)$

è stazionario

$$e(t) \longrightarrow \boxed{W} \longrightarrow y(t)$$

ARMA(2, 1)

da $W(z)$ alla forma canonica

$$\hat{W}_1(z) = W(z) \cdot T(z)$$

$$= \frac{z+5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)z} \cdot \frac{z+1/5}{z+5}$$

$$= \frac{z+1/5}{z\,(z-1/2)}$$

$$\lambda_1^2 = 25$$

NON è ancora la forma canonica

$$\hat{W}(z) = z\,\hat{W}_1(z) = \frac{z+1/5}{z-1/2}$$

ARMA(1,1)

$$\hat{y}(t+2\,|\,t) = ?$$

$$1+\frac{1}{5}z^{-1} \quad \Big| \quad 1-\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$1+\frac{7}{10}z^{-1}$$

$$-1+\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$/ + \frac{7}{10}z^{-1}$$

$$-\frac{7}{10}z^{-1}+\frac{7}{20}z^{-2}$$

$$/ \qquad + \frac{7}{20}z^{-2}$$

$$\hat{W}(z)=1+\frac{7}{10}z^{-1}+$$

$$+\ z^{-2}\cdot\frac{7/20}{1-1/2\,z^{-1}}$$

$$\overline{W}_2(z) = \frac{7/20}{1 - \frac{1}{2} z^{-2}}$$

predittore a 2
passi alimentato
da rumore

$$\widetilde{W}_2(z) = \frac{7/20}{1 + \frac{1}{5} z^{-1}}$$

predittore a 2
passi alimentato
dai dati