Stima delle componenti deterministiche in una serie temporale

Supponiamo di aver acquisito N campioni di una variabile aleatoria

$$\{ y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad \cdots \quad y(N) \}$$

Vogliamo descrivere $y(\cdot)$ come processo stocastico stazionario:

sappiamo che condizione necessaria è che

funzione di autocorrelazione $\gamma_{yy}(\tau) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{} 0$

Che cosa succede se oltre alla parte stocastica nel processo di $y(\cdot)$ fossero presenti componenti deterministiche?

componente determ. costante $\Longleftrightarrow$ valore atteso non nullo $\bar{y}$

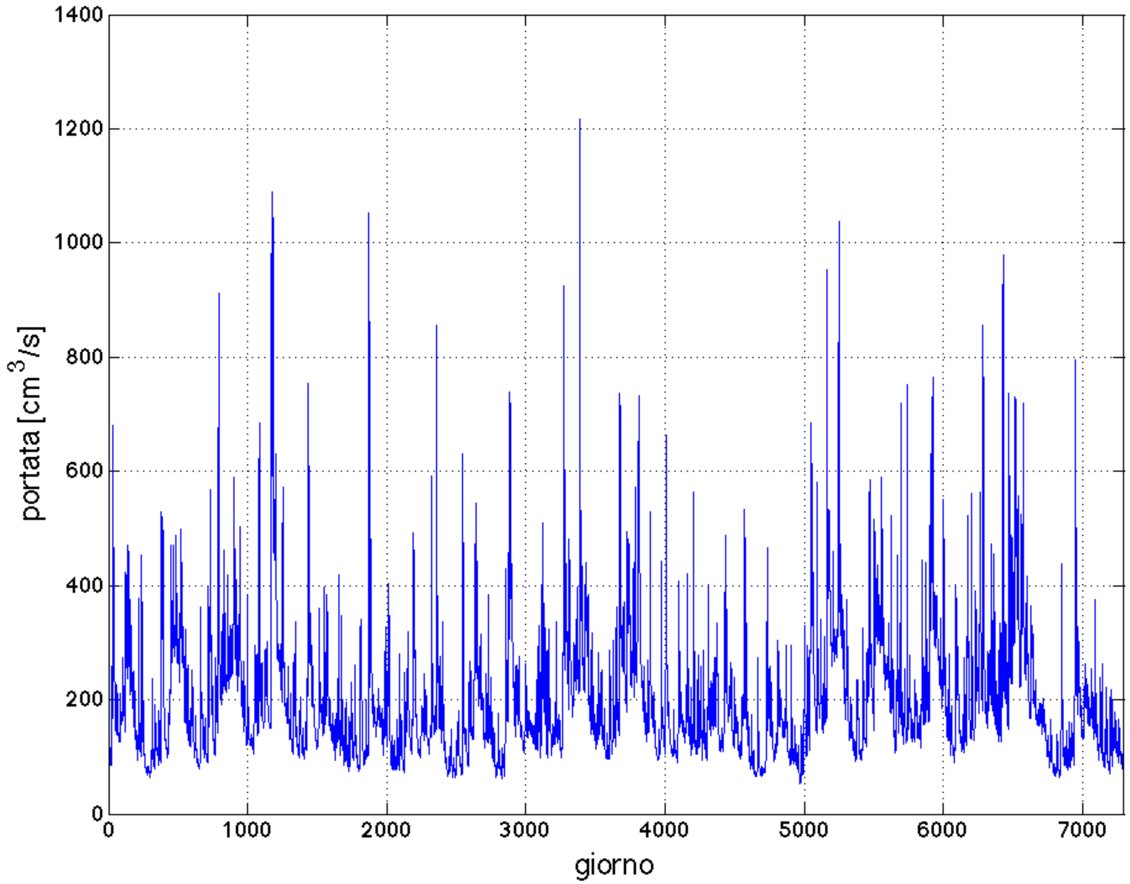
$\Downarrow$

lo si sottrae dai dati

$$\tilde{y} = y - E(y)$$

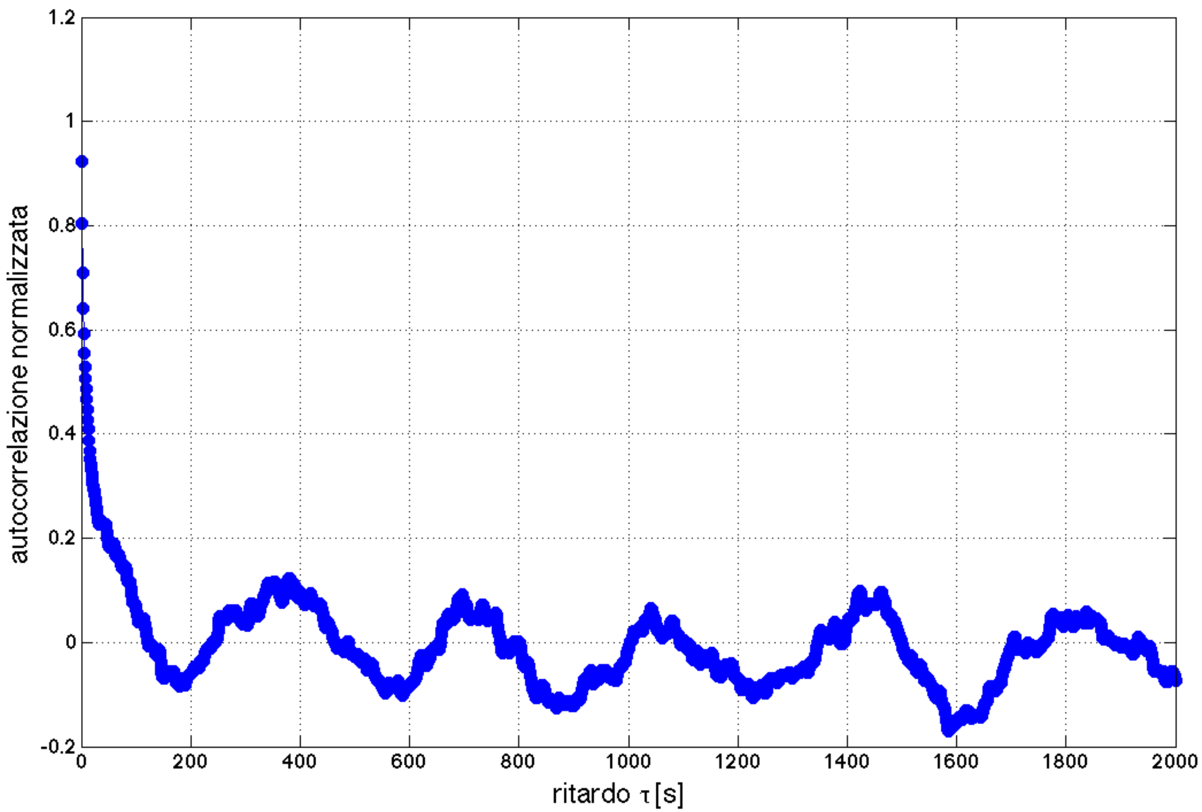
componente deterministica
non costante

⟷ va sottratta,
ma come
la si stima?



portata del
Danubio a
Donauwörth
dal 1985 al 2004

portata del Danubio a Donauwörth dal 1985 al 2004



autocorrelazione

Notare l'andamento pseudoperiodico, oscillante per $\tau \to +\infty$

Componente deterministica: modello additivo

Solitamente si suppone che il processo che genera la serie temporale analizzata sia esprimibile come somma di contributi diversi

$$y(t) = v(t) + p(t) + s(t)$$

v.a di processo stocastico stazionario e valor atteso nullo

trend lineare

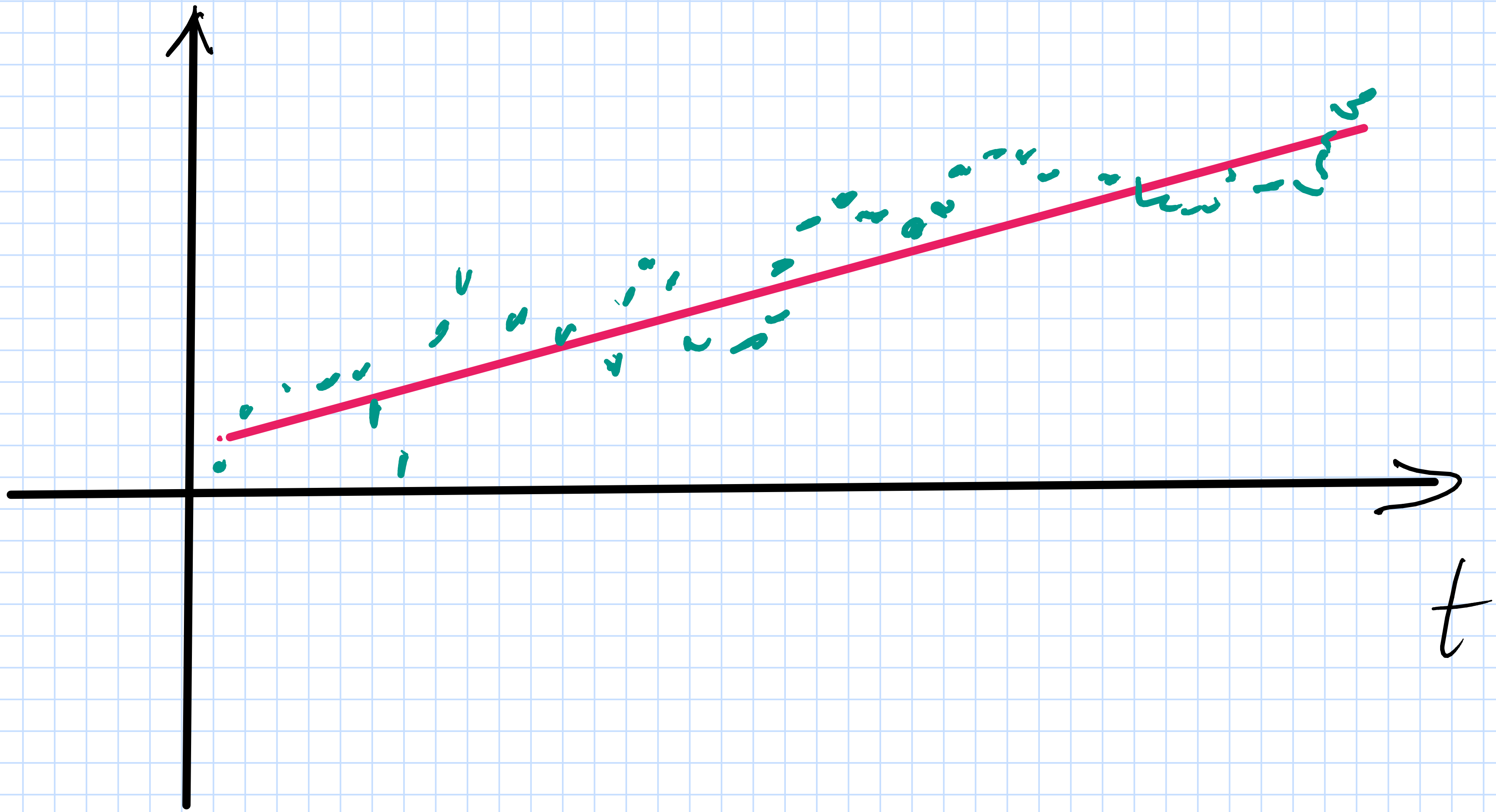
$$p(t) = p_0 + p_1 t$$

componente stagionale

$$s(t) = s(t+T)$$

Esempi:

- temperatura al suolo varia tra il giorno e la notte, varia durante l'anno con le stagioni, presenta un aumento progressivo (trend)
- la portata media di un fiume varia durante l'anno con una periodicità legata alle stagioni
- il traffico lungo un tratto autostradale varia durante le ore del giorno, varia durante la settimana, varia in particolari periodi dell'anno...


t

Come fare per individuare trend e stagionalità?

1) ispezione visiva dei dati

2) Trasformata di Fourier della sequenza

$$\left\{ y(t) \right\}_{t=t_1}^{t=t_N}$$

può mettere in evidenza la presenza di componenti periodiche (picchi)

3) autocorrelazione normalizzata

trend lineare → rimane non nulla per molti pass

stagionalità → se periodica o pseudoper.

$$y(t) = v(t) + p(t) + s(t)$$

$$E[v(t)\,p(t)] = 0$$

$$E[v(t)\,s(t)] = 0$$

Stima del trend lineare

$$\hat{p}(t) = p_0 + p_1 t \Rightarrow \vartheta = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \end{bmatrix} \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

Stima LS

$$J(\vartheta) = \sum_{t=1}^{N} \left[y(t) - \phi^T(t)\vartheta \right]^2$$

$$\hat{\vartheta} = \arg\min J$$

MATLAB detrend

$$\hat{\vartheta} = \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{p}(t) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 t$$

stima LS

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^{N} \phi(t)\phi^T(t)\right]^{-1}\left[\sum_{t=1}^{N} \phi(t)y(t)\right]$$

cfr comando MATLAB detrend

Stima del Termine Stagionale

$$s(t) = \sum_{1}^{m} A_i \operatorname{sen}(\omega_i t + \varphi_i)$$

n° finito di componenti periodiche

$$s(t) = \sum_{1}^{m} \left[a_i \operatorname{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t) \right]$$

$$a_i = A_i \cos \varphi_i \qquad b_i = A_i \operatorname{sen} \varphi_i$$

NB i parametri da stimare sono i coefficienti a_i b_i

Le pulsazioni ω_i sono note oppure stimate in precedenza per altra via (picchi nel diagramma del modulo della FFT per es)

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_m \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \phi(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \\ \vdots \\ \operatorname{sen}(\omega_m t) \\ \cos(\omega_m t) \end{bmatrix}$$

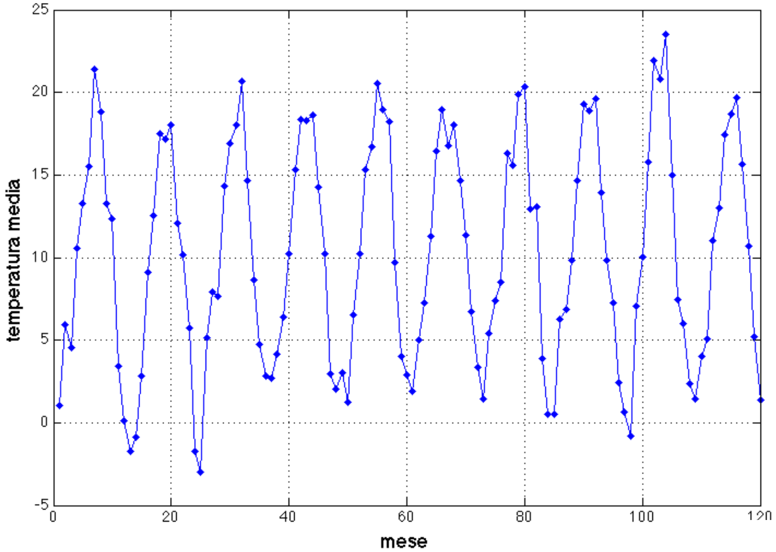
$$J(\theta) = \sum_{t=1}^{N} \left[y(t) - \phi^T(t)\theta \right]^2$$

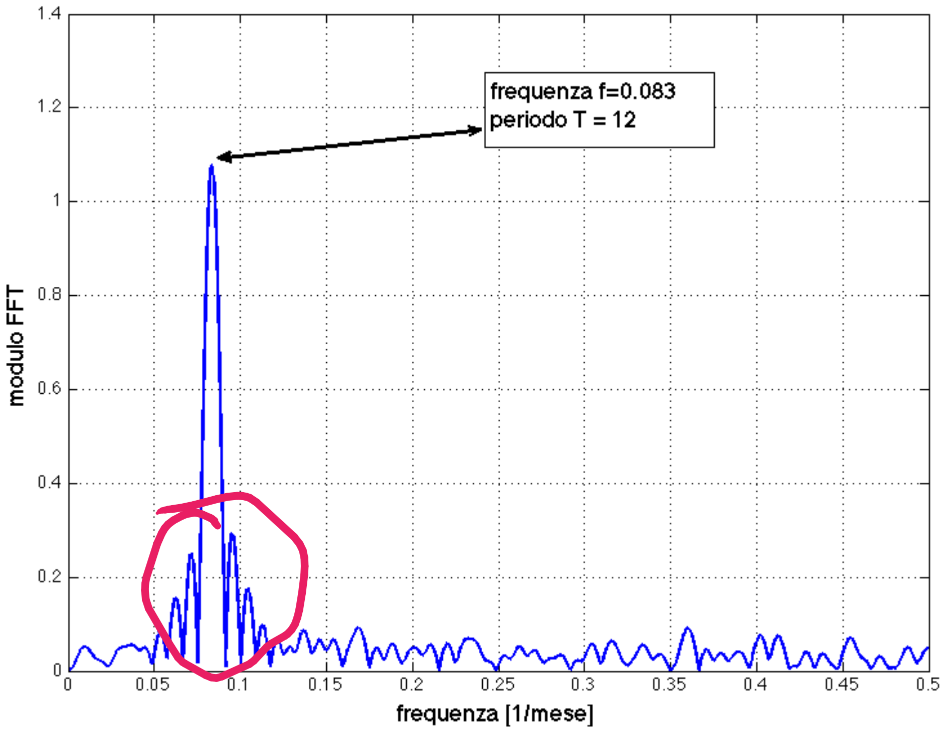
$$J(\theta) = \sum_{t=1}^{N} \left[y(t) - \phi^T(t)\theta \right]^2$$

$$\hat{\theta} = \arg\min J$$

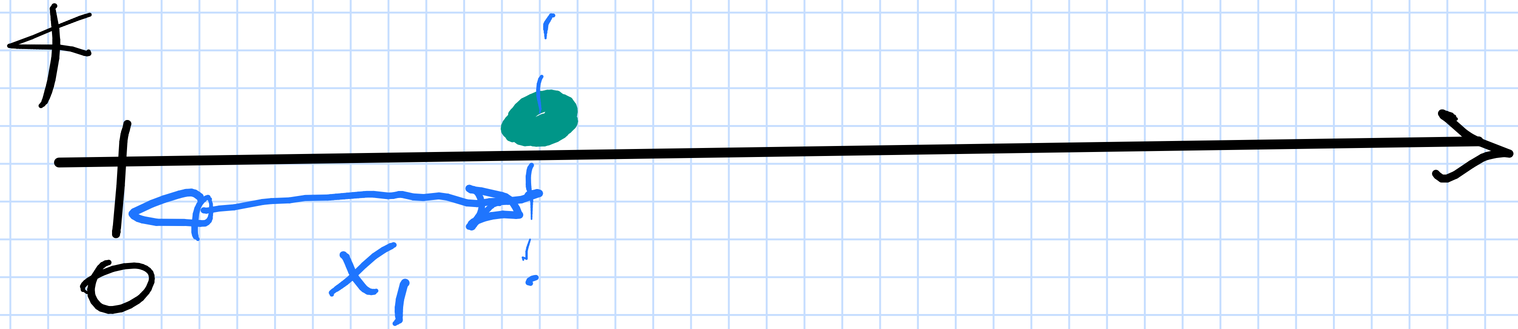
$$\hat{s}(t) = \sum_{i=1}^{m} \left[\hat{a}_i \operatorname{sen} \omega_i t + \hat{b}_i \cos \omega_i t \right]$$

Temperatura media mensile a Würzburg da gennaio 1995 a dicembre 2004





Esercizio



moto rettilineo "uniforme"

$x_1 \longleftrightarrow$ posizione del corpo

$x_2 \longleftrightarrow$ velocità del corpo

$\Delta \longleftrightarrow$ periodo di campionamento

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + \Delta x_2(t) + v_a(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) + v_b(t) \\ y(t) = x_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

v_a, v_b indipendenti

$v_a \sim WGN(0, a^2)$

$v_b \sim WGN(0, b^2)$

$v_2 \sim WGN(0, \lambda_2^2)$

$V_2 = \lambda_2^2$

$$V_1 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(t)\, e(t)$$

$$e(t) = y(t) - H\hat{x}(t|t-1)$$

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(t)y(t) + -K(t)H\hat{x}(t|t-1)$$

$$= \left[F - K(t)H\right]\hat{x}(t|t-1) + K(t)y(t)$$

predittore ad 1 passo col filtro di Kalman

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(t)\,e(t)$$

$$e(t) = y(t) - H\hat{x}(t|t-1)$$

$$K(t) = F P(t) H^T \left[H P(t) H^T + V_2 \right]^{-1}$$

$$P(t+1) = \left[F - K(t)H\right] P(t) \left[F - K(t)H\right]^T + V_1 + K(t) V_2 K^T(t)$$

Stato iniziale $x(1) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$P(1) = P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{P} \to ?$

$$\left[V_2 + H P(t) H^T \right]^{-1} = ?$$

$V_2 = \sigma_2^2 \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & p_2(t) \end{bmatrix}$

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & p(t) \\ p(t) & p_2(t) \end{bmatrix} \quad \begin{cases} p_1(t) > 0 & \forall t \\ p_1(t) \cdot p_2(t) - p^2(t) > 0 & \forall t \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{1}{10} \qquad b^2 = 1$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left[V_2 + H P(t) H^T \right]^{-1} = ?$$

Lemma di inversione di matrici (lemma ABCD)

$$(A+BCD)^{-1}_{n \times n} =$$

$$A_{n \times n} \qquad C_{m \times m}$$

$$B_{n \times m} \qquad D_{m \times n}$$

$$= A^{-1} - A^{-1}B\underbrace{\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}}_{m \times m}DA^{-1}$$

$$m \ll n$$

$$\left[V_2 + H P(t) H^T\right]^{-1} = ?$$

$V_2 \to 1 \times 1$

$P(t) \to 2 \times 2$

$V_2 = \sigma_2^2$

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) & P(t) \\ P(t) & P_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\left[\ldots\right]^{-1} = \left[\sigma_2^2 + P_{11}(t)\right]^{-1}$$

Se volessi il predittore di Kalman a 2 passi?

$$\hat{x}(t+2|t) = F^2 \hat{x}(t+1|t)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = H \hat{x}(t+2|t)$$

$$F^2 = F \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 2\Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

predittore di regime $\bar{K} = ?$ $\bar{P} = ?$

1° Teorema di convergenza di DRE non applicabile [Autovalori di F $| = 1$]

2° Teorema è applicabile

G_v : $G_v G_v^T = V_1 = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$

una soluzione è

$$G_v = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

(F, H) osservabile $\forall\ \theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}$

(F, G_v) raggiungibile $\forall\ R = \begin{bmatrix} a & 0 & a & \Delta b \\ 0 & b & 0 & b \end{bmatrix}$

$$\bar{P} = F\left[\bar{P} - \bar{P}H^T\left(V_2 + H\bar{P}H^T\right)^{-1}H\bar{P}\right]F^T + V_1$$

eq. non lineare .....

Esercizio

$$\begin{cases} x(t+1) = \frac{1}{2}x(t) + v_1(t) \\ y(t) = x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

$v_1 \sim WGN(0,1)$ $\qquad$ v_1, v_2 indip.

$v_2 \sim WGN(0,1)$

Determinare il predittore di Kalman ad 1 passo di regime

$F = \frac{1}{2}$ $\quad H = 1 \quad V_1 = 1 \quad V_2 = 1$

$V_{12} = 0$

$\Updownarrow$

vale il Teorema 1 di convergenza per DRE

ARE

$$\bar{P} = F\left[\bar{P} - \bar{P}H^T\left(V_2 + H\bar{P}H^T\right)^{-1}H\bar{P}\right]F^T + V_1$$

$$\bar p = \frac{1}{2}\left[\bar p - \bar p\,\frac{1}{1+\bar p}\cdot\bar p\right]\frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{\bar p}{4} + 1 - \frac{\bar p^{2}}{4(1+\bar p)} \qquad / \, 4(1+\bar p)$$

$$4\bar p^{2} - \bar p - 4 = 0$$

$$4\bar{P}^2 - \bar{P} - 4 = 0$$

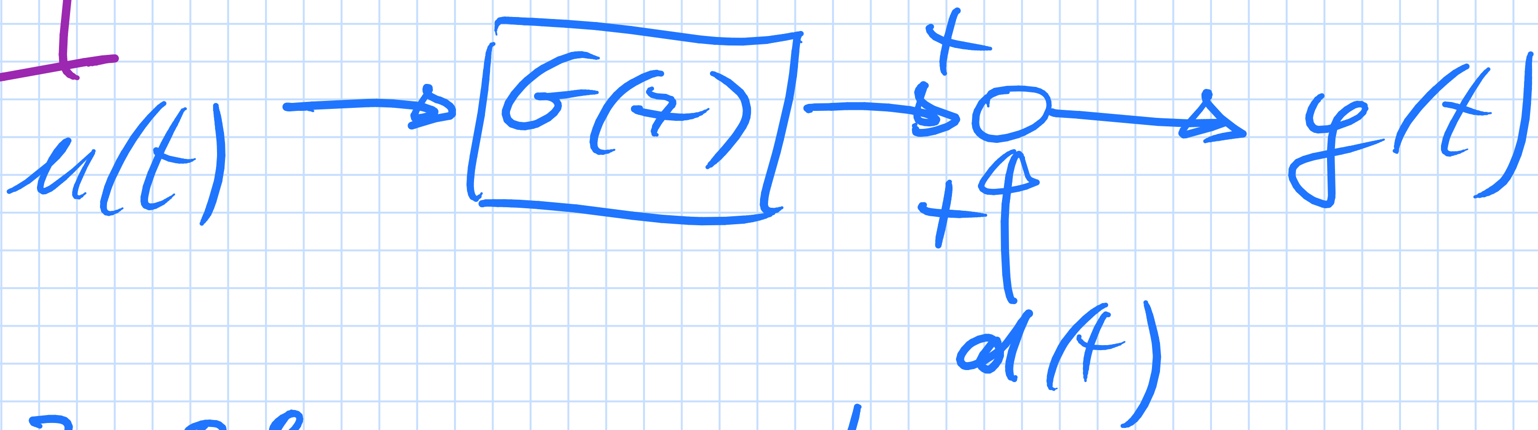
$$\bar{P}_1 = \frac{1+\sqrt{1+64}}{8} = \frac{1+\sqrt{65}}{8} \quad V$$

$$\bar{P}_2 = \frac{1-\sqrt{1+64}}{8} = \frac{1-\sqrt{65}}{8} \quad \text{NO}$$

$$\bar{P}_1 \longrightarrow \bar{K} = F\bar{P}H^T\left(V_2 + H\bar{P}H^T\right)^{-1}$$

$$\quad = \frac{1}{2}\,\frac{\bar{P}}{1+\bar{P}}$$

Esercizio 1

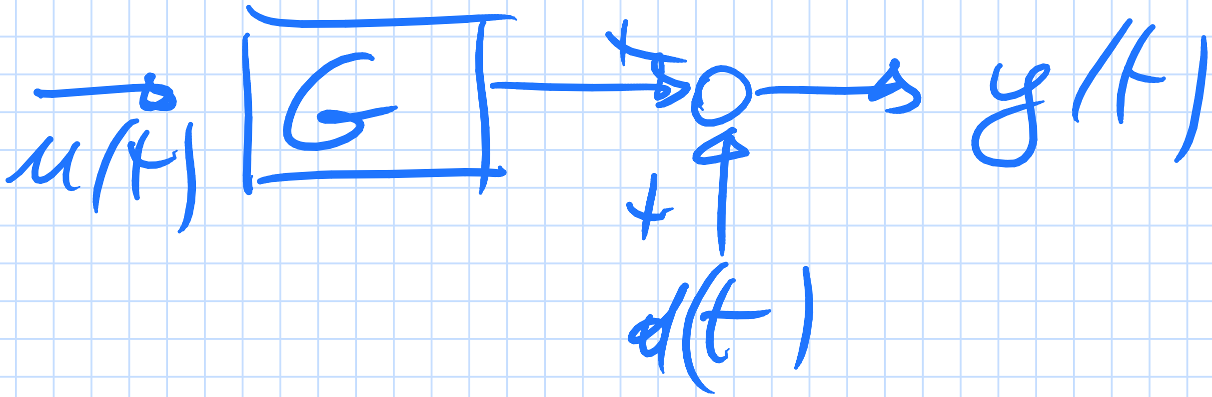


$$G(z) = \frac{z-0{,}9}{z} = 1 - 0{,}9z^{-1}$$

$d(t) \sim WGN(0,1)$ d, u indipendenti

$u(t) \sim WGN(0, \sigma_u^2)$

Vorrei stimare $u(t)$ sulla base delle osservazioni di $y(t)$



$$y(t) = u(t) - 0{,}9\,u(t-1) + d(t)$$

$$v_1 \sim WGN(0, \sigma_u^2)$$

$$x_1(t) = u(t)$$
$$x_2(t) = u(t-1)$$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = v_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \\ y(t) = x_1(t) - 0{,}9\,x_2(t) + d(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad V_2 = 1$$

$$\bar{P} = ? \qquad \bar{K} = ?$$