Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini
DEEI-Università di Trieste
Tel. 334 6936615
Email: parisini@units.it
URL: http://control.units.it

ESAMI

- Solo prova scritta
- Iscrizione elettronica (http://control.units.it)

CORSI A “MONTE”

- Analisi I e II
- Geometria

ARGOMENTI DA CONOSCERE

- Equazioni differenziali
- Numeri complessi
- Algebra delle matrici

LIBRO DI TESTO

Bolzern, Scattolini, Schiavoni, **Fondamenti di Controlli automatici**, McGraw-Hill (disponibile in Biblioteca)

"Lucidi" Corso, testi d'esame risolti, ecc.

Tutto disponibile su

http://control.units.it

Strategia di studio sconsigliata

Studiare solo sugli appunti. Gli appunti devono servire da "indice" per lo studio approfondito

TESTI per ESERCIZI

Joseph J. DiStefano, Allen R. Stubberud, Ivan J. Williams, "**Schaums outline of theory and problems of feedback and control systems : continuous (analog) and discrete (digital)**", 2ª ed. McGraw-Hill, 1990 (disponibile in Biblioteca).

Esercizi nei testi di riferimento (alla fine di ogni capitolo).

TESTI su MATLAB

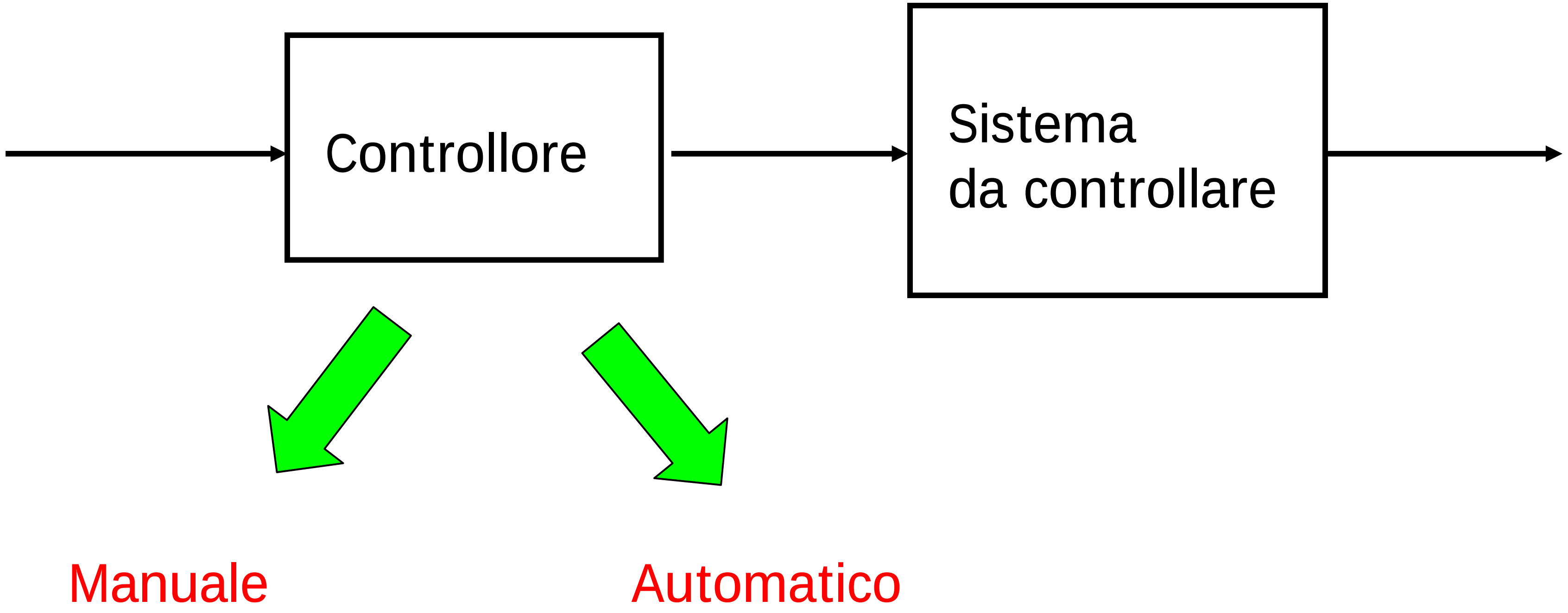
Bolzern, “**Programmi MATLAB per esercitazioni di elementi di automatica**”, ed. Masson, 1994 (disponibile in Biblioteca).

Cavallo, Setola, Vasca, “**Guida operativa a MATLAB, SIMULINK e Control toolbox**”, ed. Liguori, 1994 (2ª ed. 2002) (disponibile in Biblioteca).

Oggetto del Corso

Cos'è l'**Automatica**? ⇨ *Insieme di discipline che forniscono strumenti per analizzare e progettare sistemi automatici di controllo*

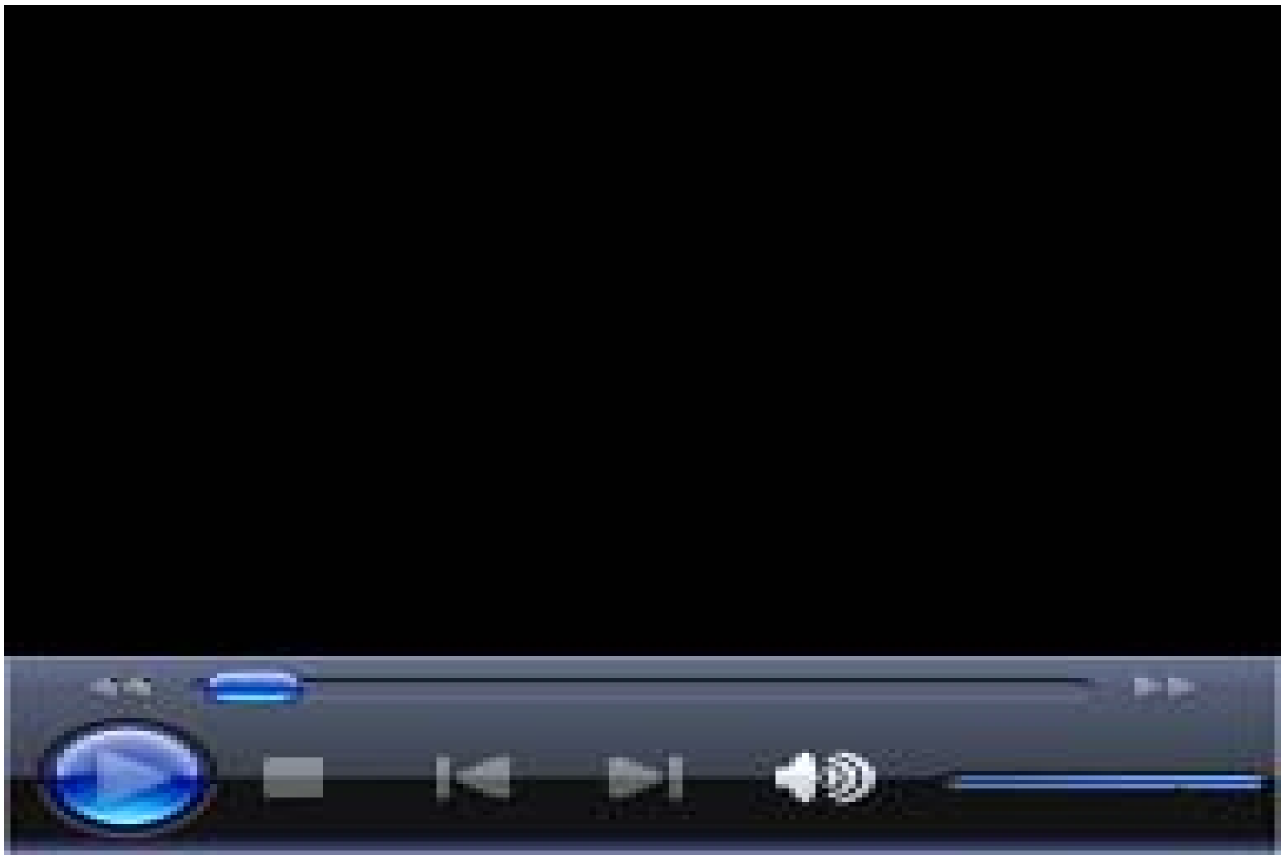
Sistema di controllo



Gli esempi sono davvero innumerevoli:

- Autofocus di macchina fotografica
- Condizionamento di un edificio
- Sistema di guida di un aereo
- Controllo di un manipolatore robotico
- Controllo di un impianto termoelettrico
- Sistema di produzione automatizzato
- ...

Un esempio in dettaglio: controllo di un manipolatore



Cosa hanno in comune?

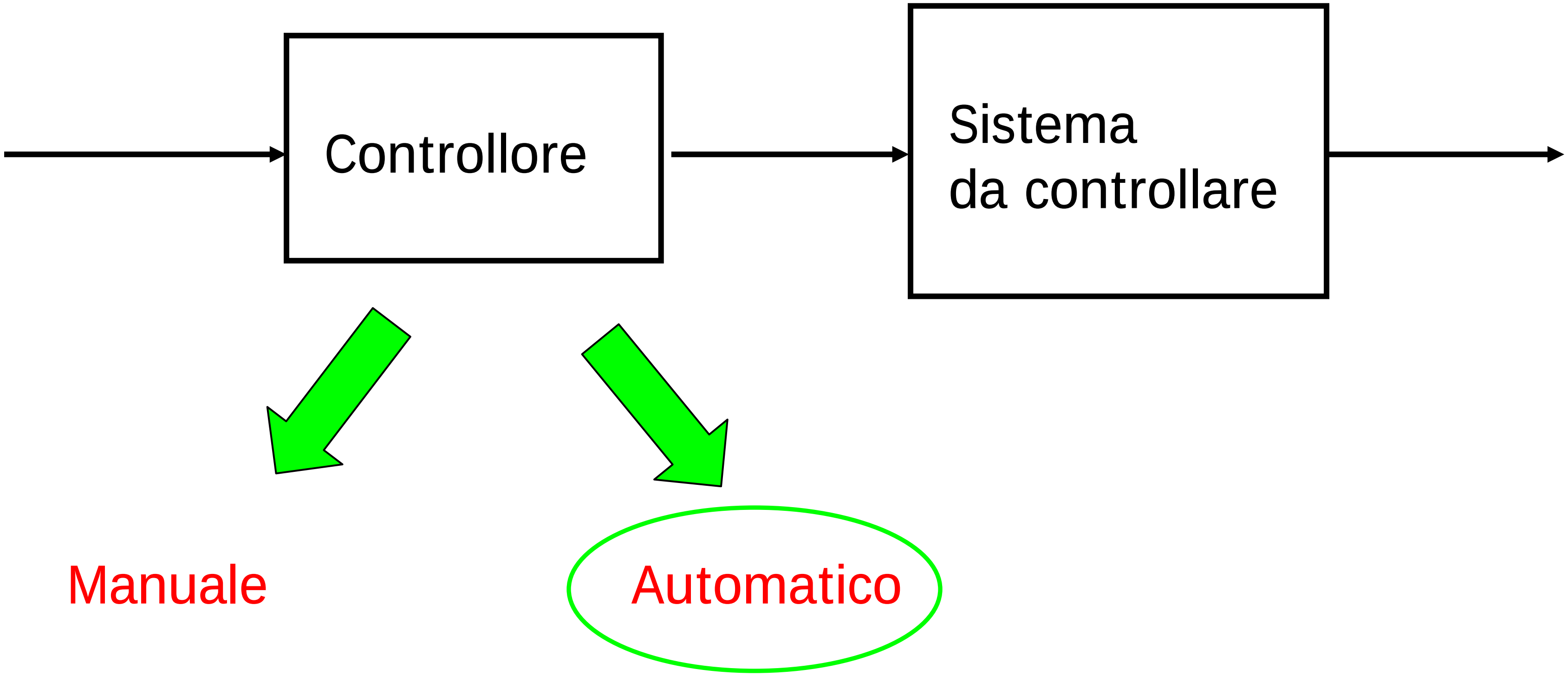
Modelli matematici

Logica di funzionamento

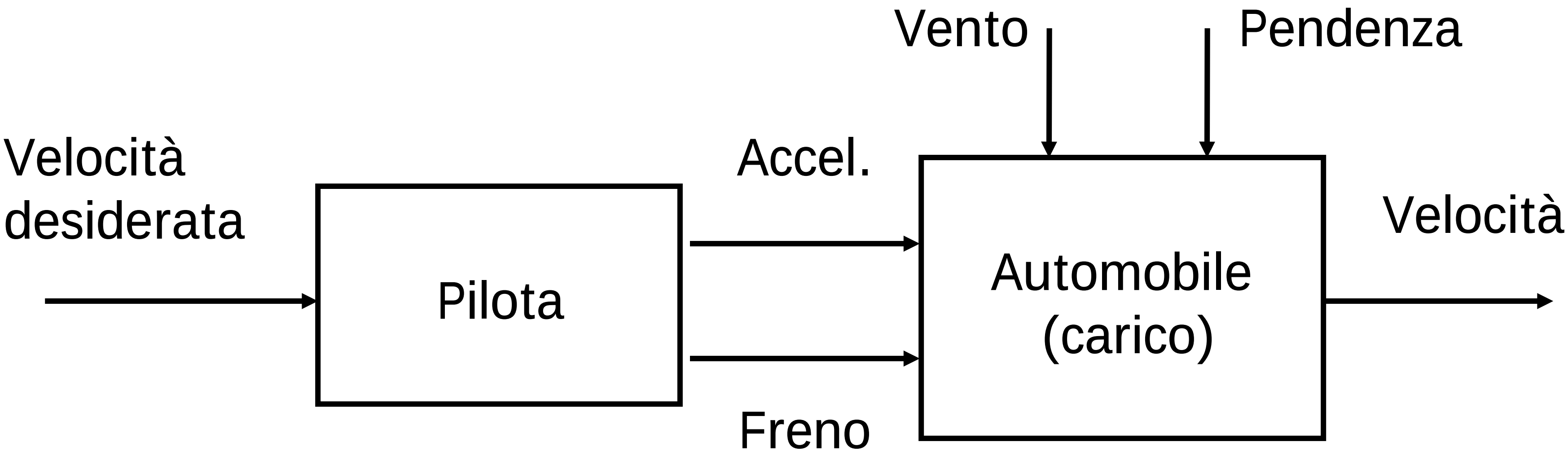
Teoria del controllo

Il problema del controllo

Imporre un determinato andamento nel tempo ad una variabile di un sistema agendo sulle variabili che influenzano il comportamento del sistema stesso



Esempio 1: controllo di velocità



Strategia in anello aperto

Poco efficace in presenza di incertezza

Il comportamento nel tempo della velocità, a parità di accelerazione e freno, dipende da:

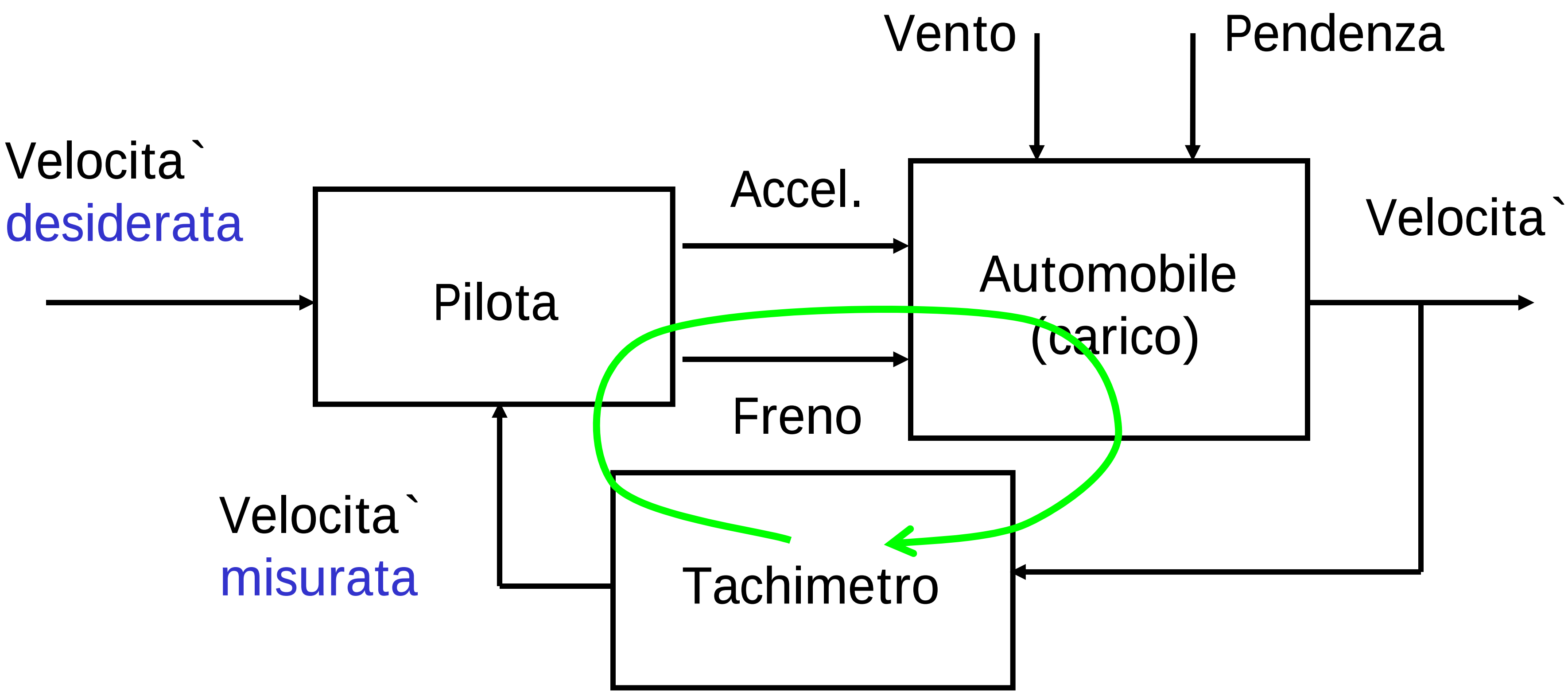
Velocità iniziale

Parametri del veicolo

Cause esterne

Di solito incerti

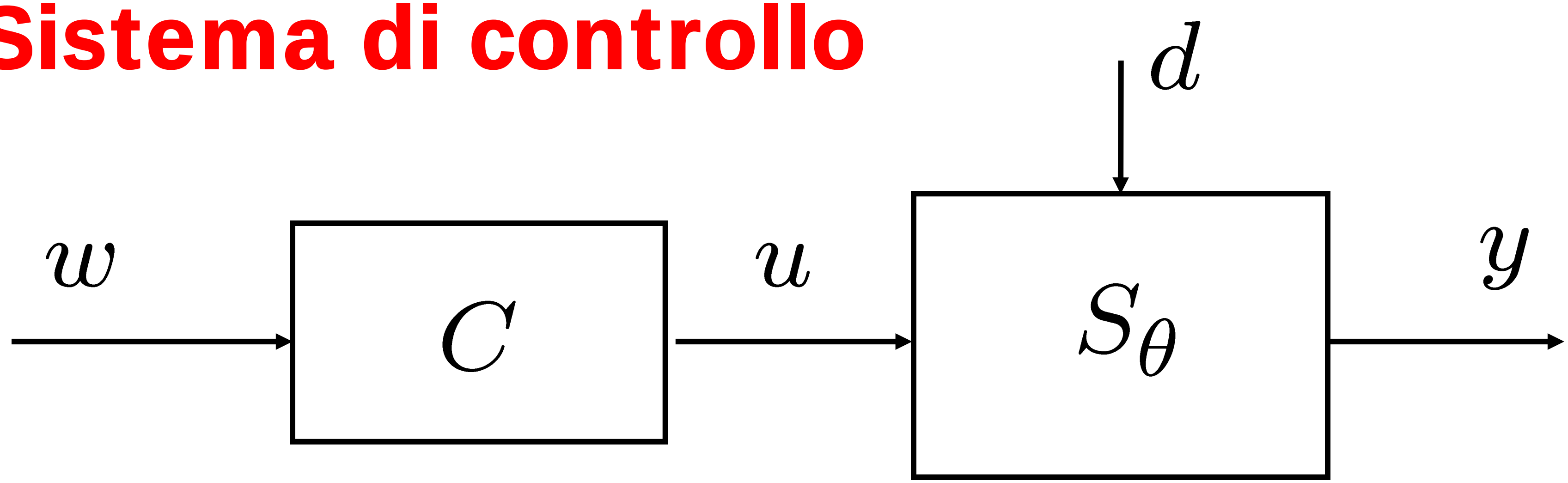
La misura della velocità permette di neutralizzare l'incertezza



Strategia in anello chiuso

Potenzialmente efficace a neutralizzare gli effetti dell'incertezza

Sistema di controllo



S Sistema, Processo, Impianto

C Controllore, Regolatore

θ Parametri del Sistema

y Variabile controllata (uscita)

u Variabile di controllo (variabile manipolabile)

w Variabile di riferimento (set-point)

d Variabile di disturbo (variabile non manipolabile)

Obiettivo del controllore

Agire su u in modo che $y \simeq w$ anche in presenza di incertezza

Tipicamente:

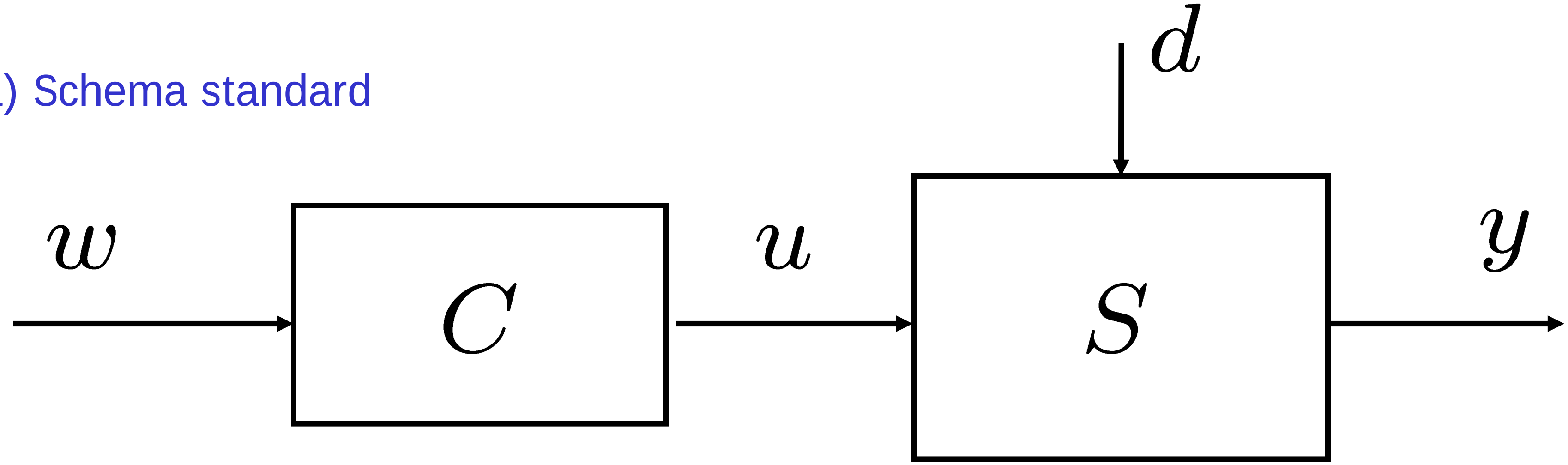
$$d = \bar{d} + \Delta d, \qquad |\Delta d| < \bar{D}$$

valori nominali

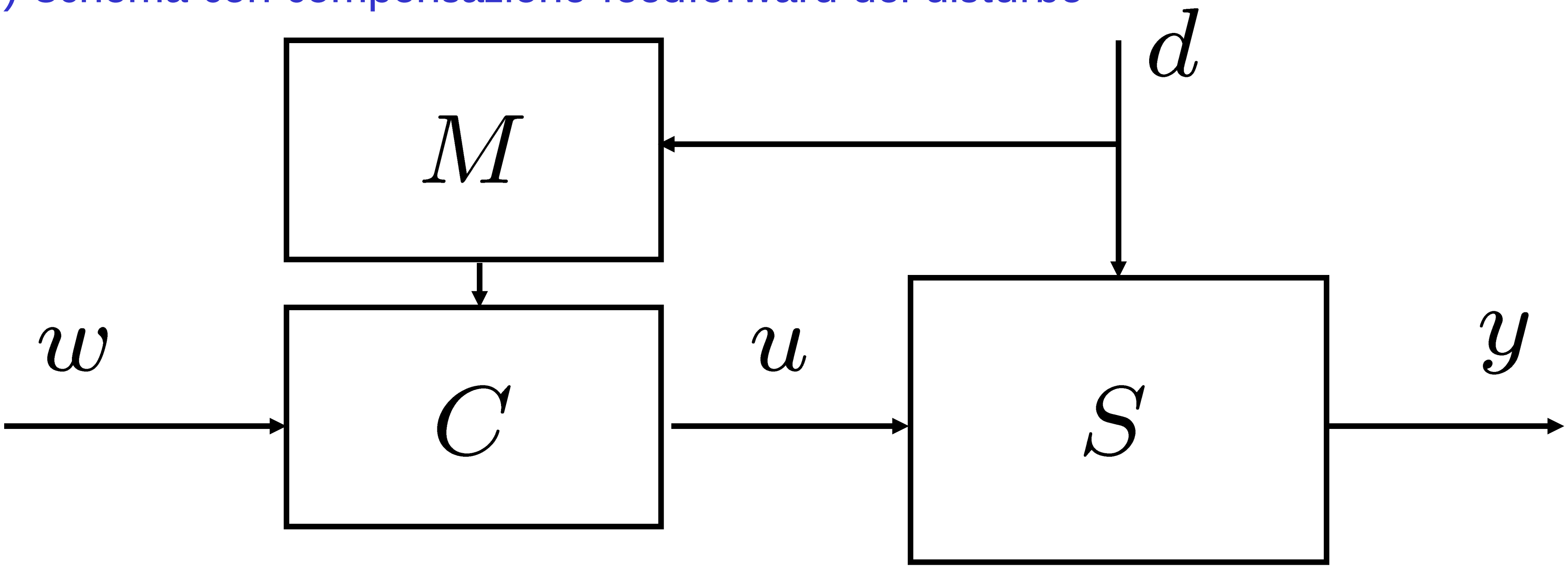
$$\theta = \bar{\theta} + \Delta\theta$$

Strategie di controllo: anello aperto

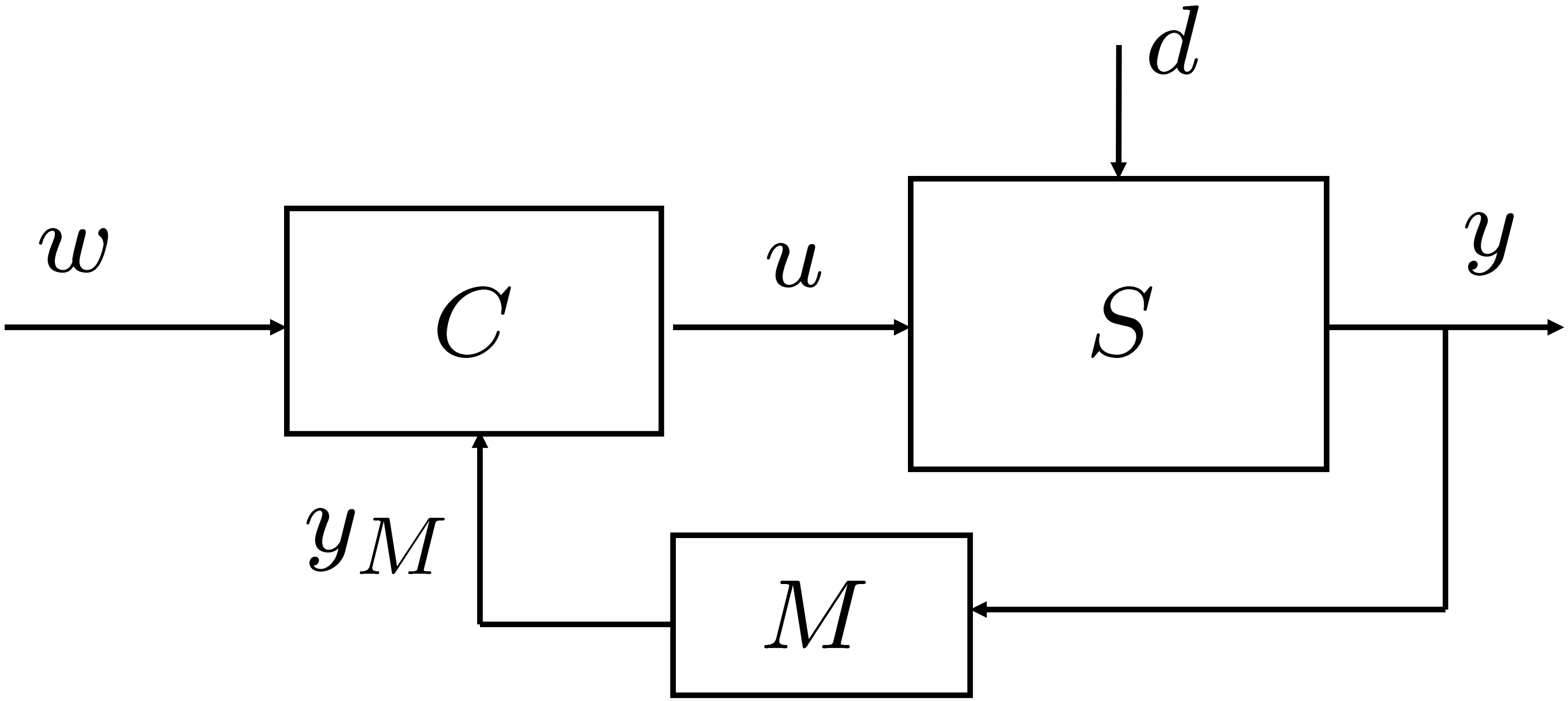
a) Schema standard



b) Schema con compensazione feedforward del disturbo



Strategie di controllo: anello chiuso



Ipotesi sulle variabili: segnali analogici

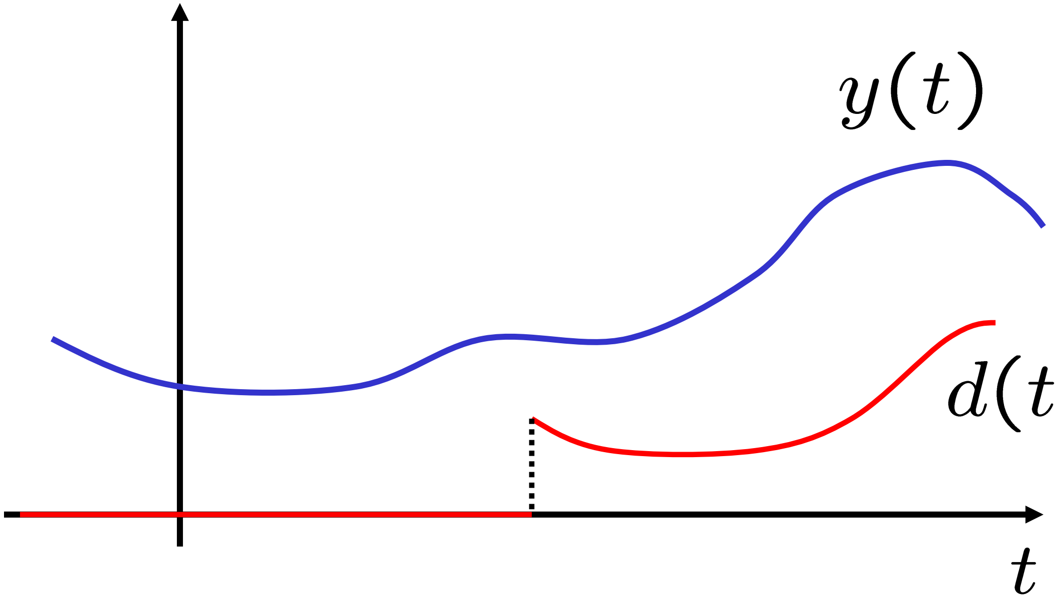
Variabili reali a tempo continuo

$$t \in \mathbb{R}$$

$$y(t) \in \mathbb{R}$$

$$d(t) \in \mathbb{R}$$

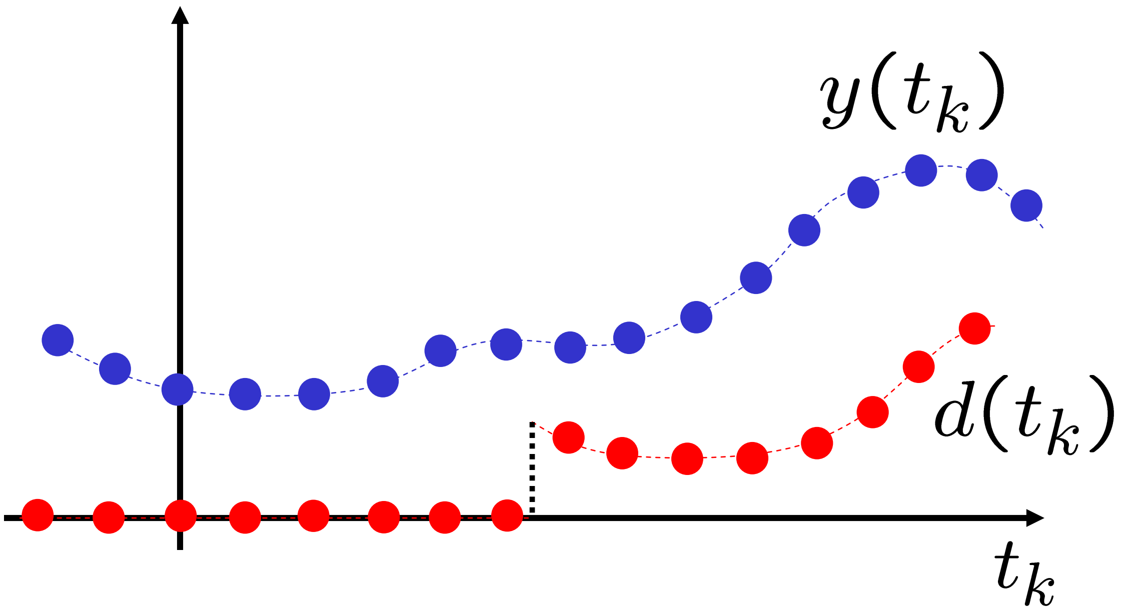
$\vdots$



Ipotesi sulle variabili: segnali discreti – tempo campionato

Variabili reali a tempo discreto

$$t_k \in \mathbb{Z}$$
$$y(t_k) \in \mathbb{R}$$
$$d(t_k) \in \mathbb{R}$$
$$\vdots$$



Il tempo non e' variabile continua: esiste soltanto una successione di istanti di tempo multipli interi di un intervallo di tempo fissato, chiamato periodo di campionamento.

$$\{t_k = kT_s \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Controllo digitale: motivazioni

I sistemi di controllo che fanno uso di un calcolatore digitale come controllore (sistemi di controllo digitali) hanno alcuni vantaggi rispetto ai sistemi di controllo a tempo continuo:

- Flessibilità del SW rispetto all'HW
- Compatibilità rispetto alla strumentazione
- Integrazione di funzioni
- Costi

Controllore analogico vs controllore digitale

- Il **controllore analogico** riceve in ingresso segnali analogici a tempo continuo e fornisce in uscita ancora segnali analogici a tempo continuo.

- Il **controllore digitale** viene realizzato con un'apparecchiatura digitale (un μC, una scheda DSP, un calcolatore digitale ecc.).

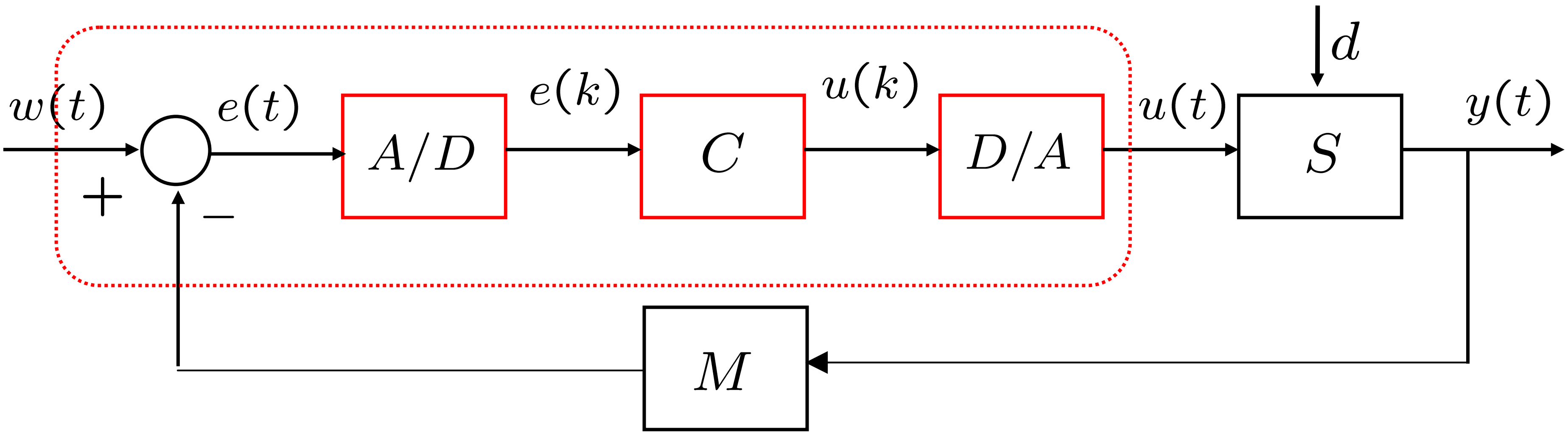
- Tale dispositivo può elaborare soltanto segnali digitali, quindi ha bisogno di interfacce opportune da e verso il processo da controllare:
  - Convertitori analogico—digitali (A/D)
  - Convertitori digitale—analogici (D/A)

- Il necessario sincronismo tra i convertitori e l'unità di controllo digitale viene garantito da un opportuno segnale di clock di periodo T_S (chiamato periodo di campionamento).
- L'unità di controllo acquisisce i segnali d'ingresso dagli A/D e fornisce i segnali d'uscita ai D/A soltanto in corrispondenza degli istanti di clock.
- Questi segnali allora sono definiti soltanto in istanti in istanti di tempo discreti, multipli del periodo di clock T_S .
- Segnali con questa caratteristica vengono detti **segnali a tempo discreto.**
- Per semplicità in ciò che segue trascuriamo di indicare esplicitamente l'intervallo di campionamento

$$t_k = kT_s \quad \Longrightarrow \quad k$$

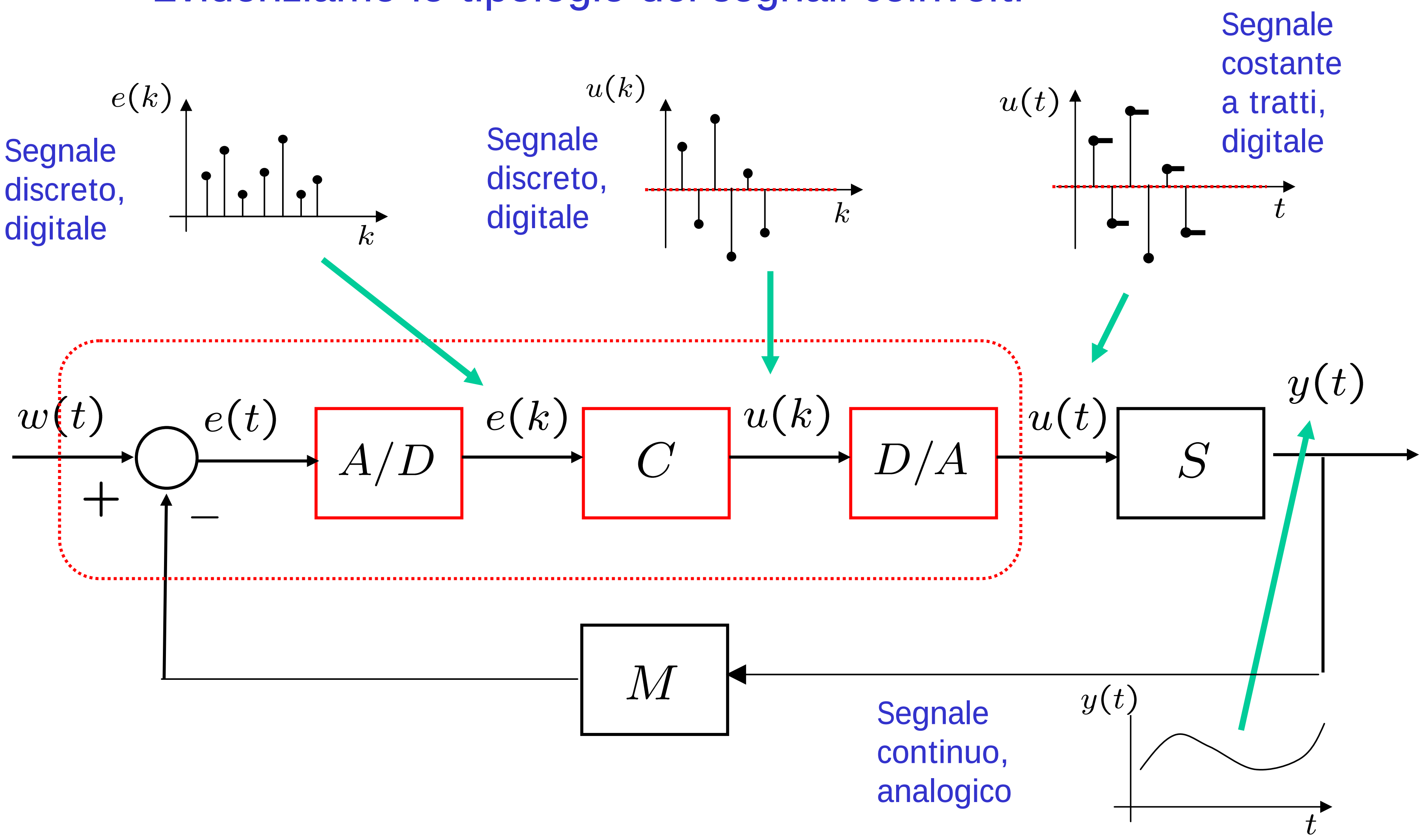
Riassumendo

I sistemi di controllo digitale sono tipicamente strutturati così:

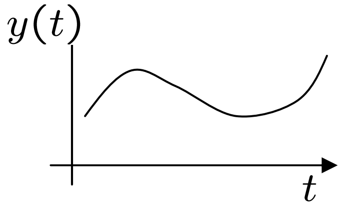


Si tratta di sistemi ibridi in cui convivono variabili a tempo continuo ed a tempo discreto

- Evidenziamo le tipologie dei segnali coinvolti



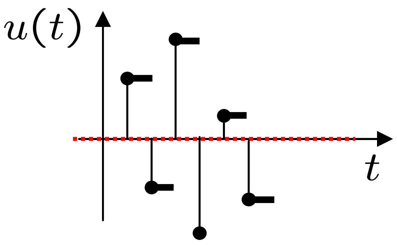
Definizioni



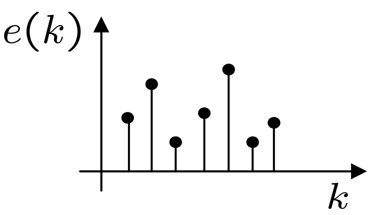
- segnali continui nel tempo

- segnali costanti a tratti, cioè costanti in ogni intervallo [i Δ, (i+1) Δ]

  con Δ periodo di campionamento



- segnali discreti nel tempo

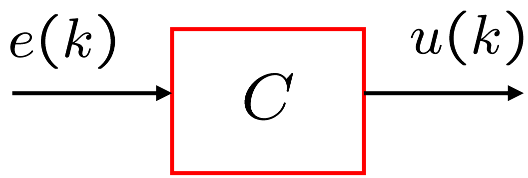


- segnali analogici: le loro ampiezze possono variare con continuità

- segnali digitali: le loro ampiezze sono quantizzate

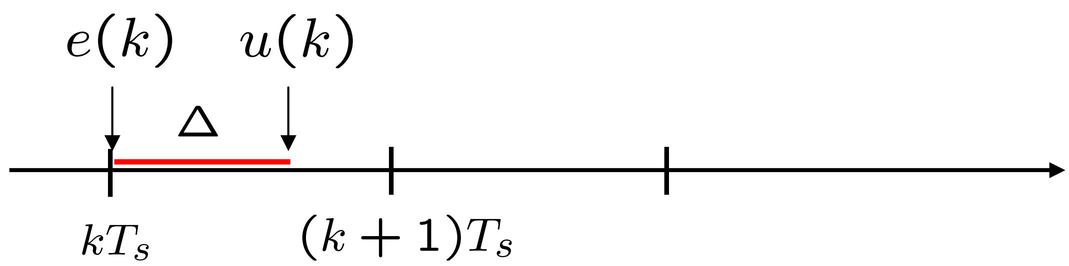
Controllore digitale a tempo discreto

Il controllore è un sistema a tempo discreto ovvero è di fatto un algoritmo di calcolo (in ciò risiede in effetti la potenzialità del controllo digitale).



$$u(k) = f(u(k-1), u(k-2), \ldots, e(k), e(k-1), \ldots)$$

Temporizzazione



Evidentemente il tempo di elaborazione necessario per calcolare il campione della sequenza di controllo deve essere inferiore al periodo di campionamento:

$$\Delta < T_s$$

Requisiti di un sistema di controllo analogico a tempo continuo

$$\boxed{y(t) \simeq w(t)}$$

Introduciamo la variabile errore: $e(t) = w(t) - y(t)$

$$\boxed{|e(t)| \simeq 0 \quad \text{in tutte le situazioni di interesse}}$$

Requisiti di un sistema di controllo digitale a tempo discreto

$$\boxed{y(k) \simeq w(k)}$$

Introduciamo la variabile errore:

$$e(k) = w(k) - y(k)$$

$$\boxed{|e(k)| \simeq 0 \quad \text{in tutte le situazioni di interesse}}$$

- In che cosa si differenzia un sistema di controllo digitale da uno analogico?
- Si possono fare sempre le medesime considerazioni?
- Valgono proprietà simili?
- È possibile utilizzare gli stessi strumenti, le stesse tecniche in fase di analisi di prestazioni o di progetto di un controllore?
- È “indolore” il passaggio da controllore analogico a controllore digitale?

Requisiti di un sistema di controllo

A) Precisione “statica”

- in condizioni di equilibrio

B) Precisione “dinamica”

- velocita` di risposta
- smorzamento di eventuali oscillazioni
- Capacita` di seguire segnali $w(t)$ “veloci”

C) Insentivita` ai disturbi

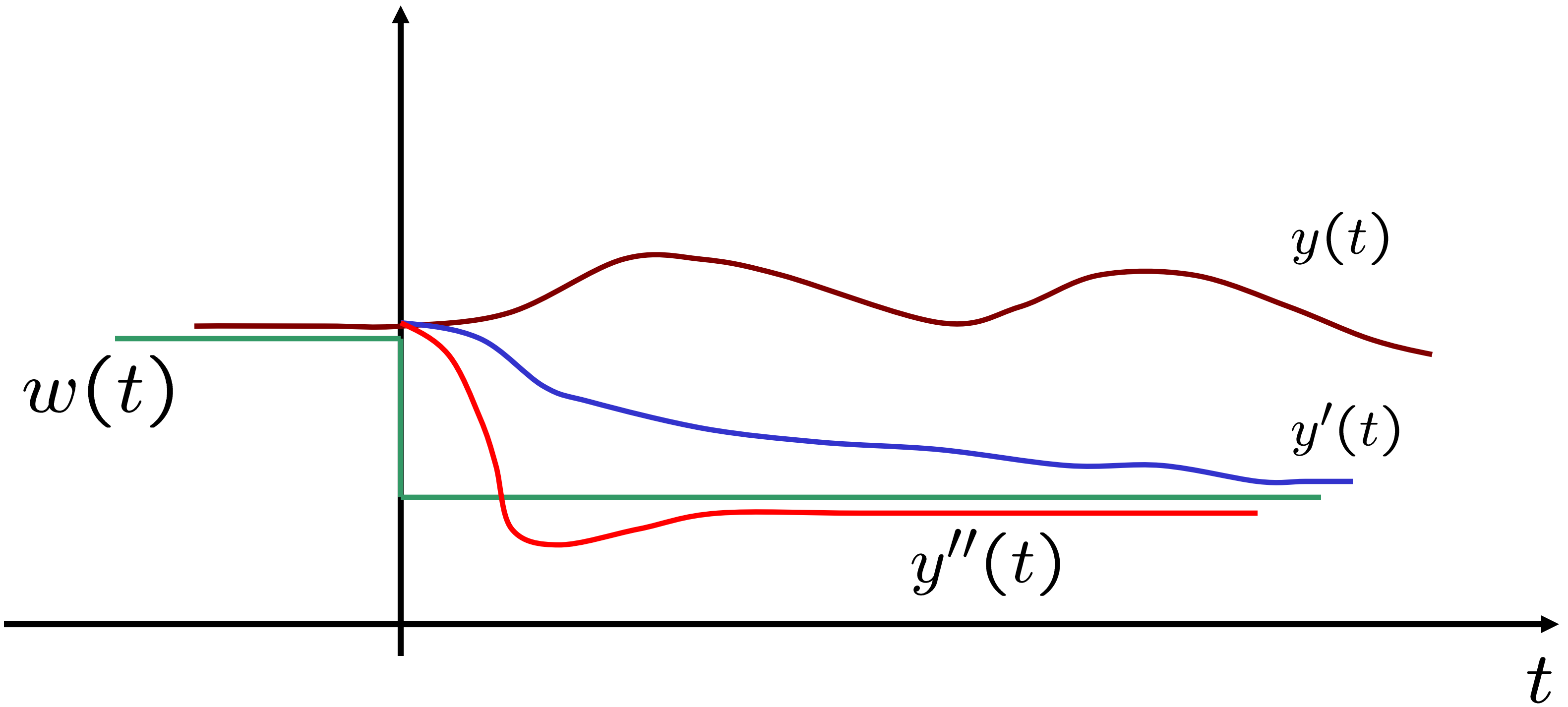
- capacita` di reagire a $d(t)$

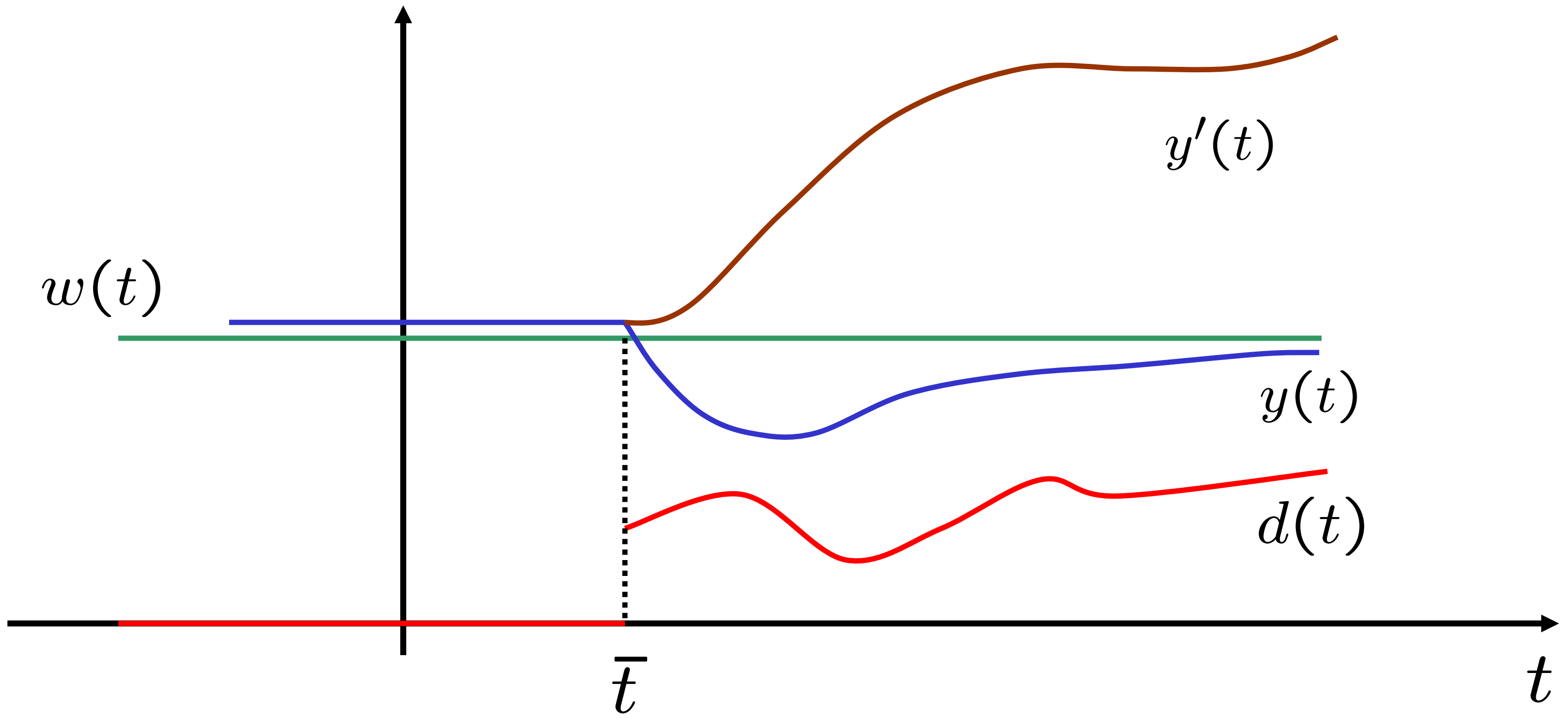
D) Robustezza

- garanzia di A), B), C) anche in presenza di θ incerti

E) Moderazione

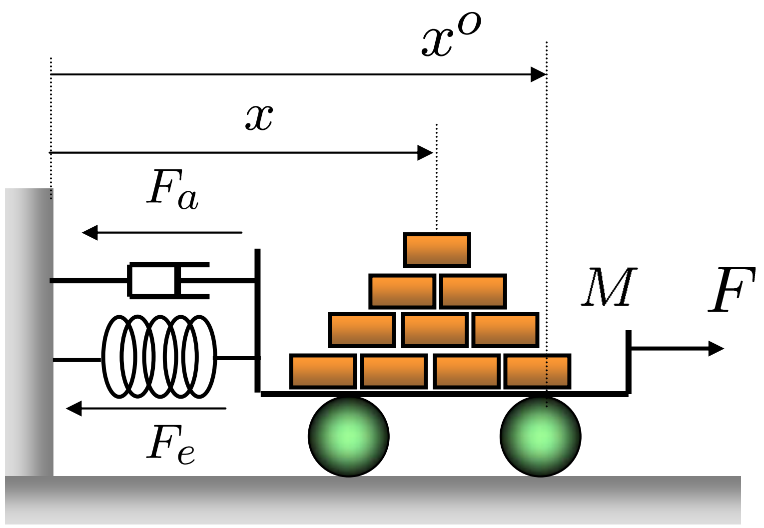
- evitare inutili sollecitazioni di $u(t)$


$y(t)$
$w(t)$
$y'(t)$
$y''(t)$
t


$w(t)$
$y'(t)$
$y(t)$
$d(t)$
$\bar{t}$
t

Esempio 2: controllo di posizione

Sistema meccanico



Ingresso manipolabile: forza motrice F

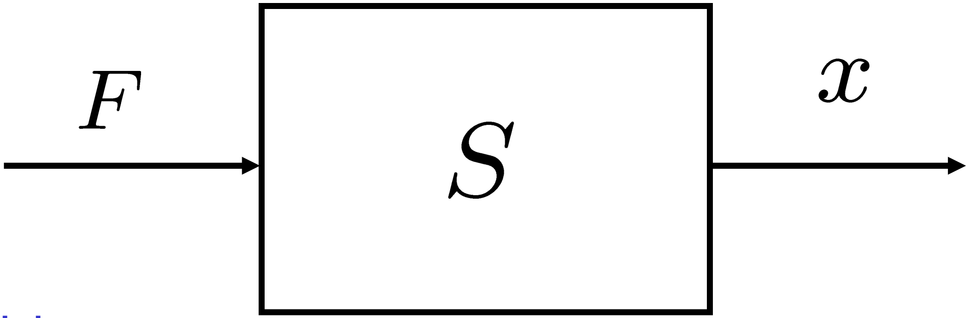
Uscita: posizione del carrello x

Uscita desiderata: $w = x^o$ costante

Forza elastica della molla: $F_e = kx$

Forza di attrito viscoso dovuto all'ammortizzatore: $F_a = h\dot{x}$

Modello statico



$$F = kx$$

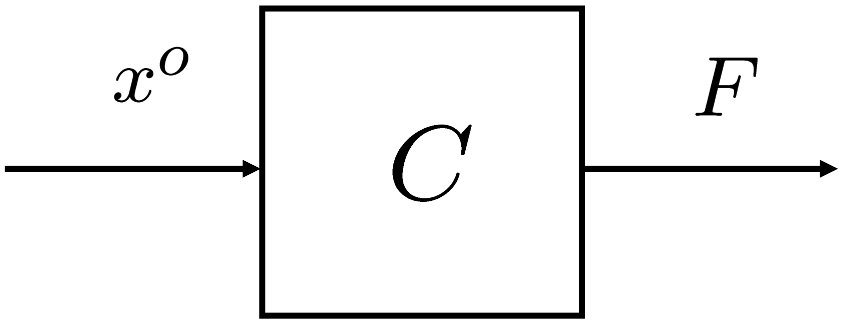
Equilibrio delle forze in condizioni statiche

$$x = \frac{1}{k}F$$

Uscita

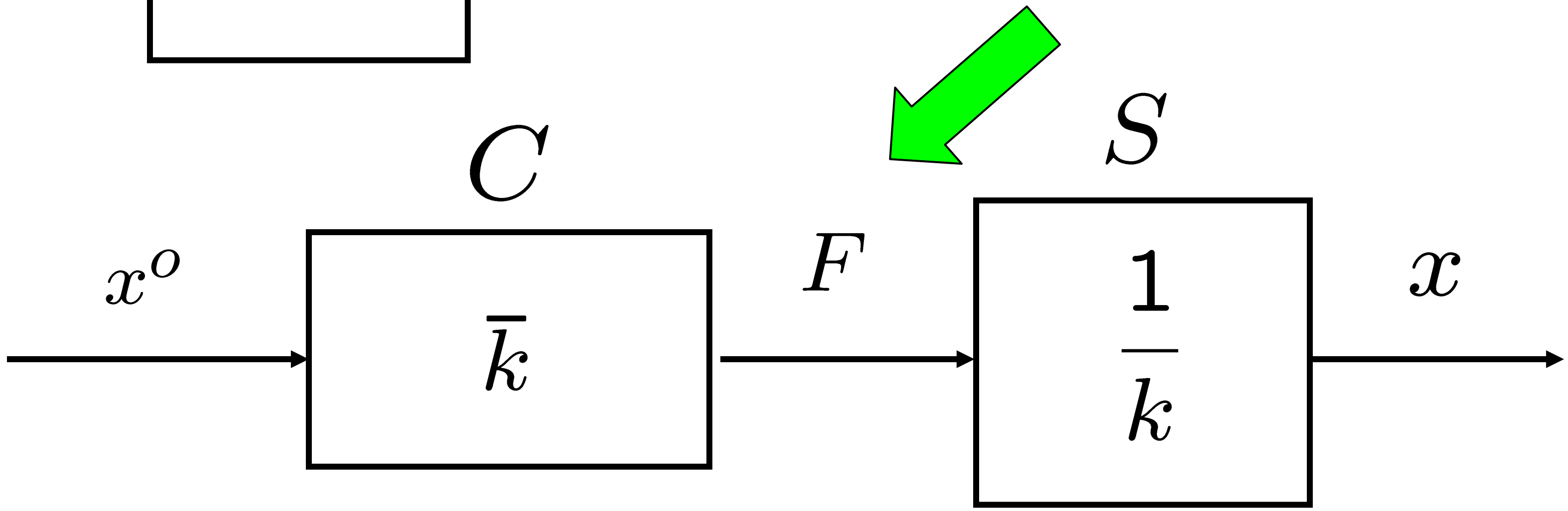
Ingresso

Anello aperto



$$F = \bar{k} x^o$$

$\bar{k}$ valore nominale di k



$$x = \frac{\bar{k}}{k} x^o \quad \Rightarrow \quad e = x^o - x = x^o \left(1 - \frac{\bar{k}}{k}\right)$$

In condizioni nominali ⟹ $e = 0$

$k = \bar{k}$

In condizioni perturbate ⟹ $e = x^o \dfrac{\Delta k}{k} \neq 0$

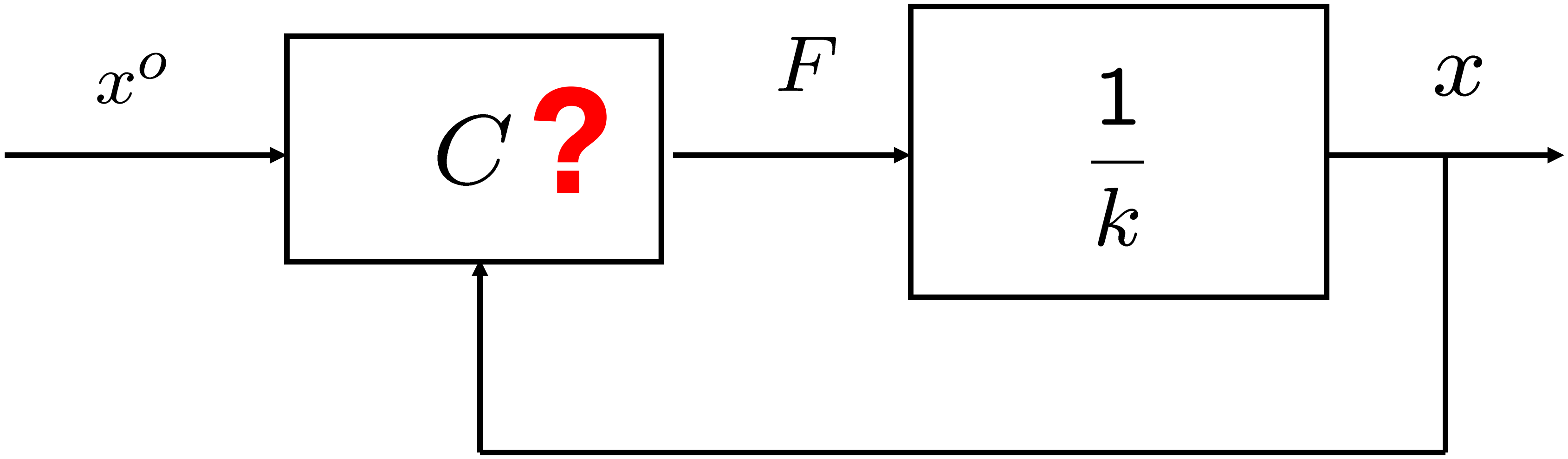
$k \neq \bar{k}$

$$\Delta k = k - \bar{k} \neq 0$$

Incertezza

In anello aperto non si ha modo di compensare l'incertezza

Anello chiuso



Scegliamo un controllore proporzionale:

$$F = \alpha \underbrace{(x^o - x)}_{e}, \ \alpha > 0$$

Quindi (si suppone $x^o \neq 0$):

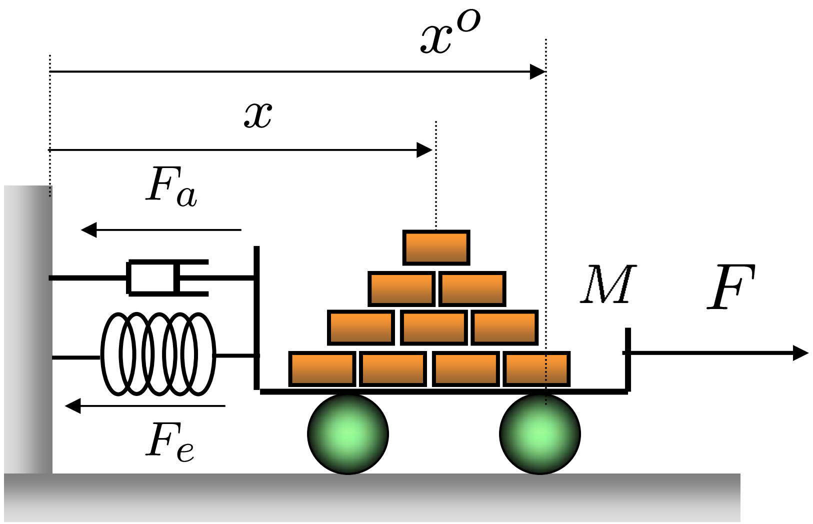
$$x = \frac{1}{k} F = \frac{1}{k} \alpha \left(x^o - x\right) \Rightarrow x \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) = \frac{\alpha}{k} x^o$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha/k}{1+\alpha/k} x^o \Rightarrow \boxed{e = x^o - x = \frac{1}{1+\alpha/k} x^o}$$

In condizioni nominali $k = \bar{k}$ $\Rightarrow$ $e \neq 0$

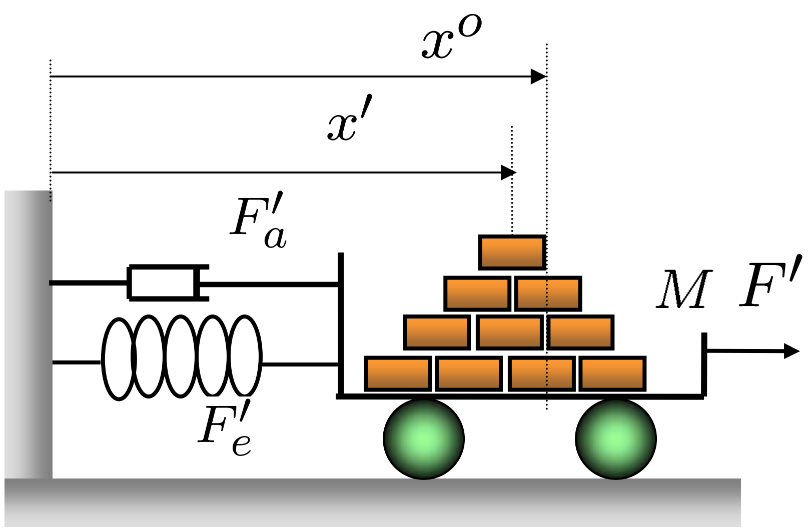
In condizioni perturbate $k \neq \bar{k}$ $\Rightarrow$ $e \simeq 0$ se $\alpha >> k_{\mathrm{max}}$

Lo progettiamo noi!!!



$$F = \alpha\,\underbrace{(x^o - x)}_{e}\,,\ \ \alpha > 0$$

Massa, molla ed ammortizzatore non hanno effetti trascurabili



Oscillazioni?

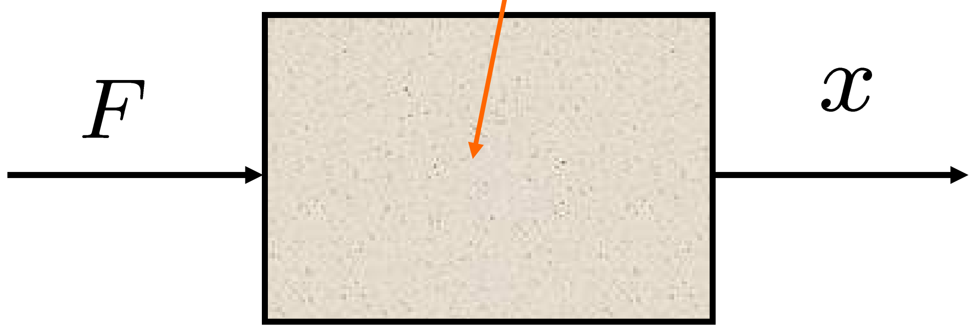
Necessita` di modelli dinamici

Modello dinamico

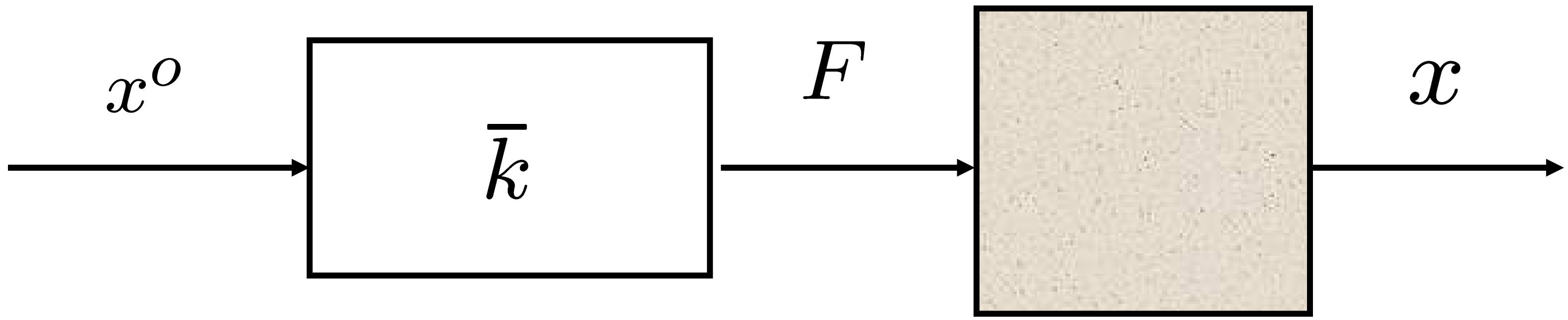
$$\text{somma forze} = M\ddot{x}$$

$$F - kx - h\dot{x} = M\ddot{x}$$

$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$



Modello dinamico: contr. anello aperto



$$\underbrace{M\ddot{x} + h\dot{x}}_{\text{Termini dinamici}} + \underbrace{kx = \underbrace{\bar{k}x^o}_{\text{Costante}}}_{\text{Condizione di equilibrio (statica)}}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{matrix}}_{\text{Condizioni iniziali}}$$

... dalla teoria delle eq. differenziali ordinarie ...

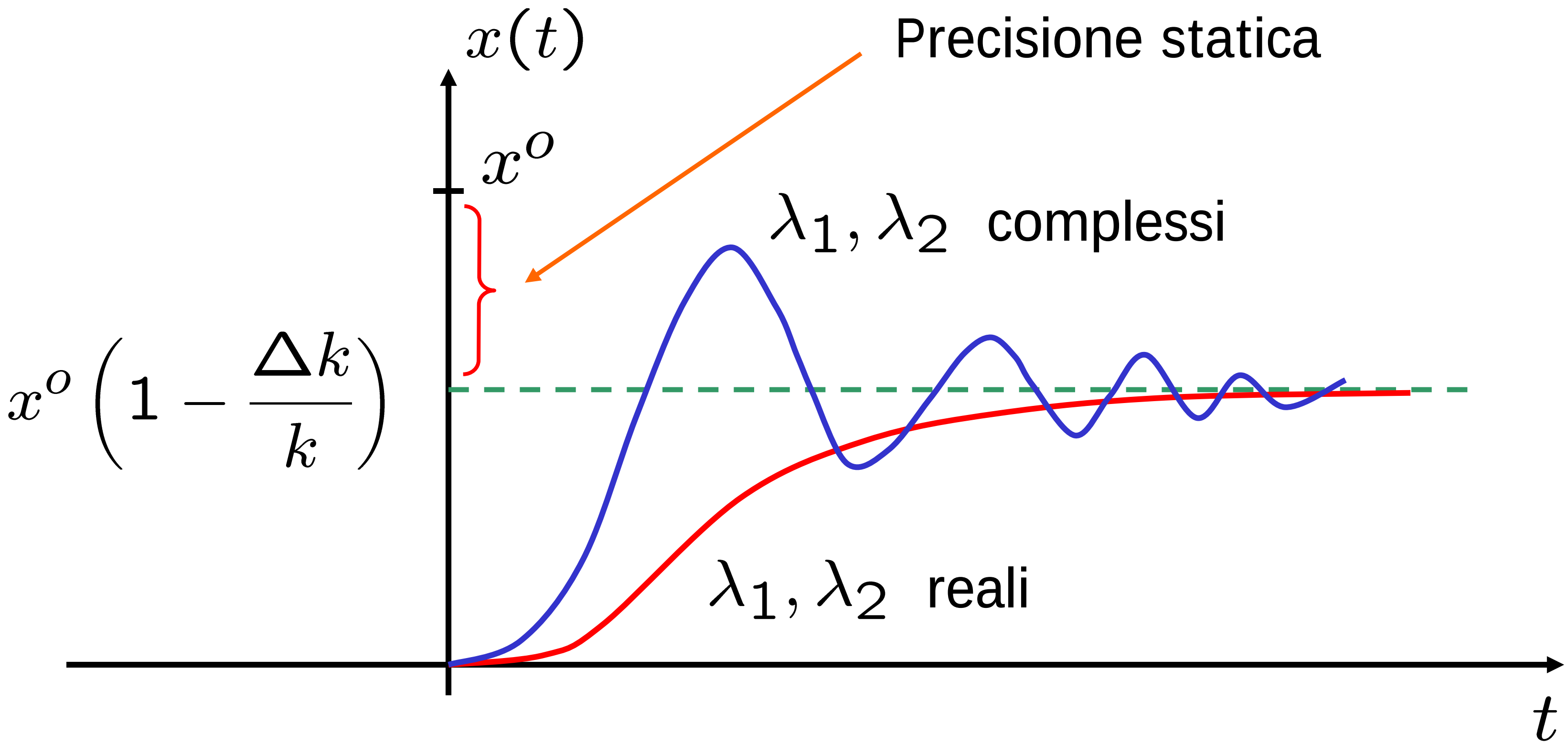
$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \bar{k}x^o$$

$$\underbrace{M\lambda^2 + h\lambda + k = 0}_{\text{Eq. algebrica}} \Rightarrow \underbrace{\lambda_1, \lambda_2}_{\text{Radici}}$$

- Se λ_1, λ_2 reali $\Rightarrow$ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3$

- Se λ_1, λ_2 complessi (cioe` $\lambda_1 = \sigma + j\omega,\ \lambda_2 = \sigma - j\omega$)

$$\Rightarrow x(t) = c_4 e^{\sigma t} \cos(\omega t + c_5) + c_6$$



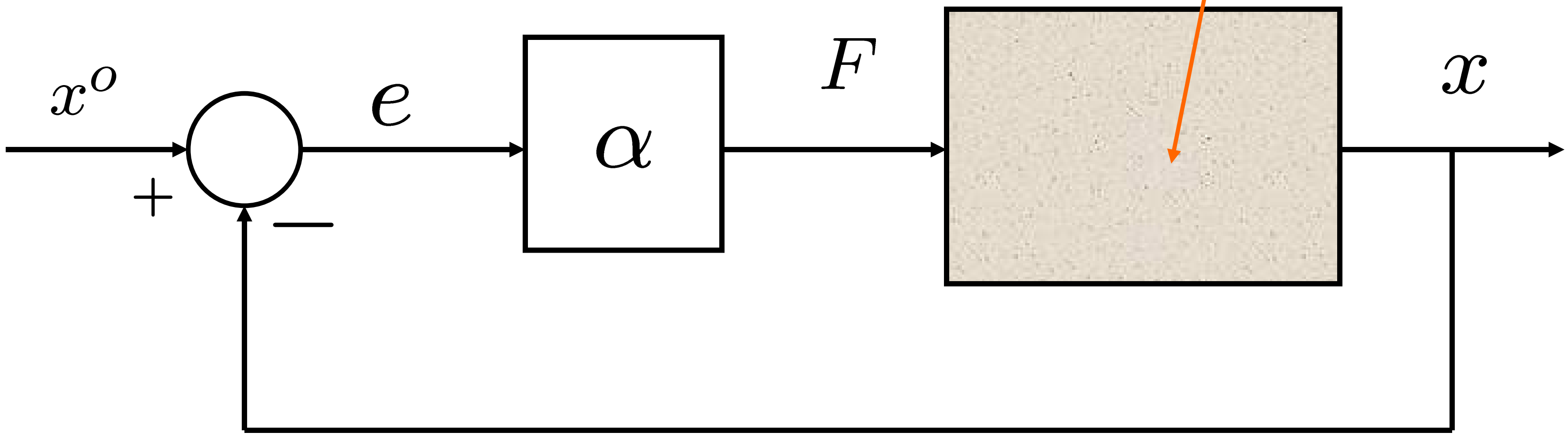
Nel controllo ad anello aperto la precisione dinamica dipende solo dal sistema (cioe` M, k, h)

Modello dinamico: contr. anello chiuso

Scegliendo un controllore proporzionale:

$$F = \alpha \underbrace{(x^o - x)}_{e}, \;\; \alpha > 0$$

$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$



Quindi, sostituendo la formula del contr. proporz. si ha:

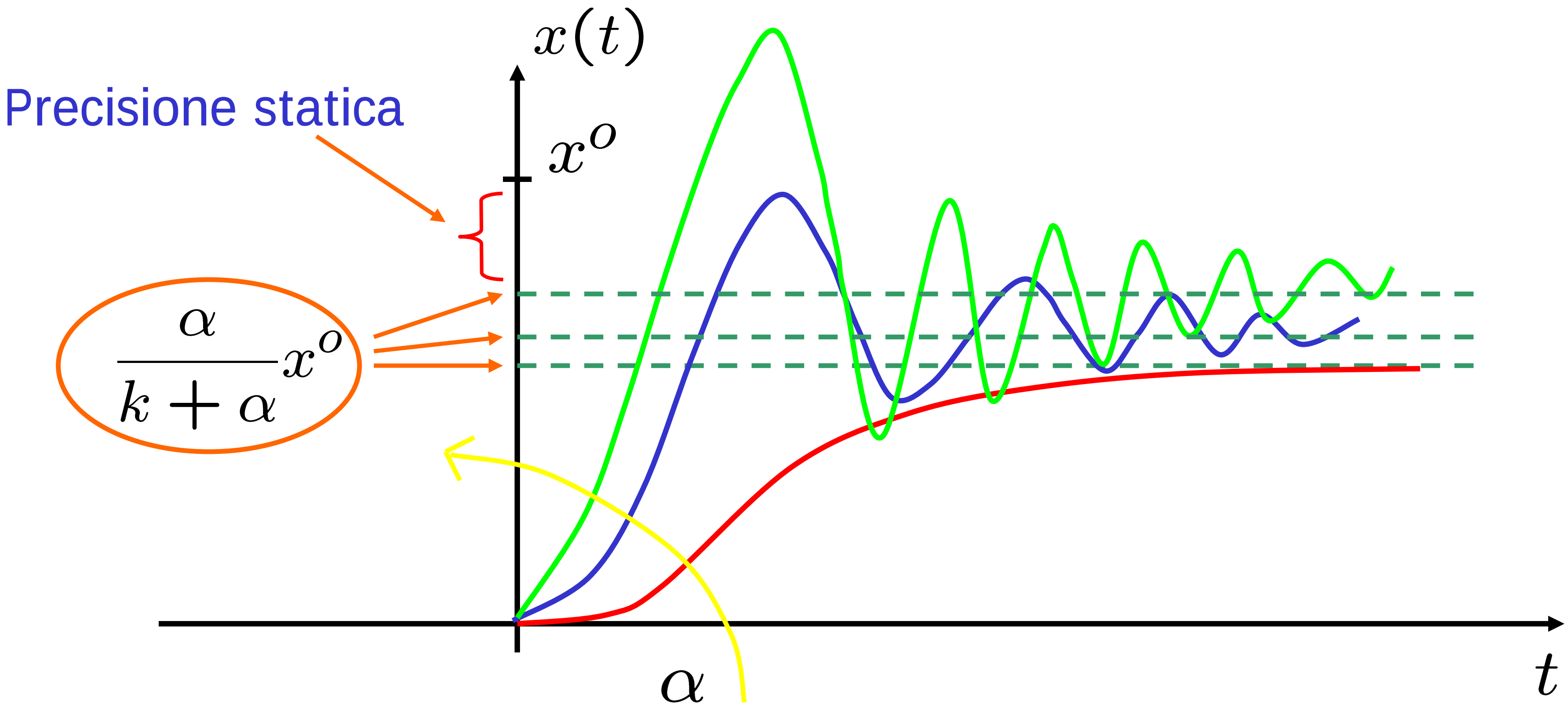
$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \alpha(x^o - x)$$

$$M\ddot{x} + h\dot{x} + (k+\alpha)x = \alpha x^o$$

$$M\lambda^2 + h\lambda + \underbrace{(k+\alpha)}_{} = 0$$

Il guadagno α influenza il termine noto dell'eq. algebrica

λ_1, λ_2 radici inflenzate da α



Precisione dinamica dipende anche dal controllore

Requisiti statici e dinamici contrastanti: miglior prec. statica a scapito della prec. dinamica

Modello dinamico: contr. anello chiuso

Scegliendo un controllore proporzionale/derivativo

$$F = \alpha\left(x^o - x\right) + \beta\frac{d}{dt}\left(x^o - x\right), \;\; \alpha, \beta > 0$$

$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \alpha(x^o - x) - \beta\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + (h + \beta)\dot{x} + (k + \alpha)x = \alpha x^o$$

$$M\lambda^2 + (\underbrace{h + \beta}_{})\lambda + (\underbrace{k + \alpha}_{}) = 0$$

Il parametri α e β influenzano due coefficienti dell'eq. algebrica

$$\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \;\; \text{radici inflenzate da } \alpha \text{ e } \beta}$$

Esempio 2: conclusioni

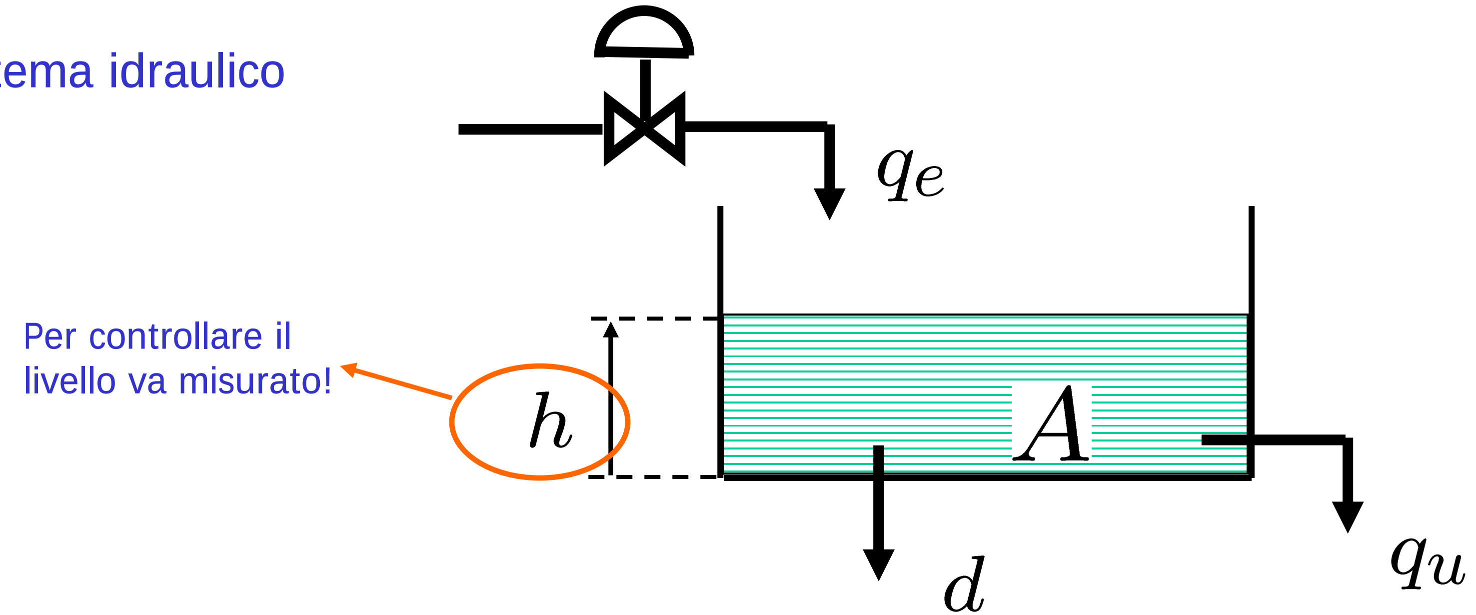
- Vantaggi controllo in anello chiuso in presenza di incertezza

- Necessita` di modelli dinamici

- Il controllo in anello chiuso altera la dinamica del sistema

Esempio 3: controllo di livello

Sistema idraulico



Ingresso manipolabile: portata entrante q_e

Uscita: livello h

Uscita desiderata: $w = h^o$ costante

Portata flusso uscente: $q_u = kh$

Disturbo: d

Modello dinamico

Equaz. di conservazione: variazione di volume nell'unita` di tempo = flusso IN – flusso OUT

$$A\dot{h} = q_e - kh$$

$$\dot{h} = \frac{1}{A} q_e - \frac{k}{A} h$$

Ipotesi:

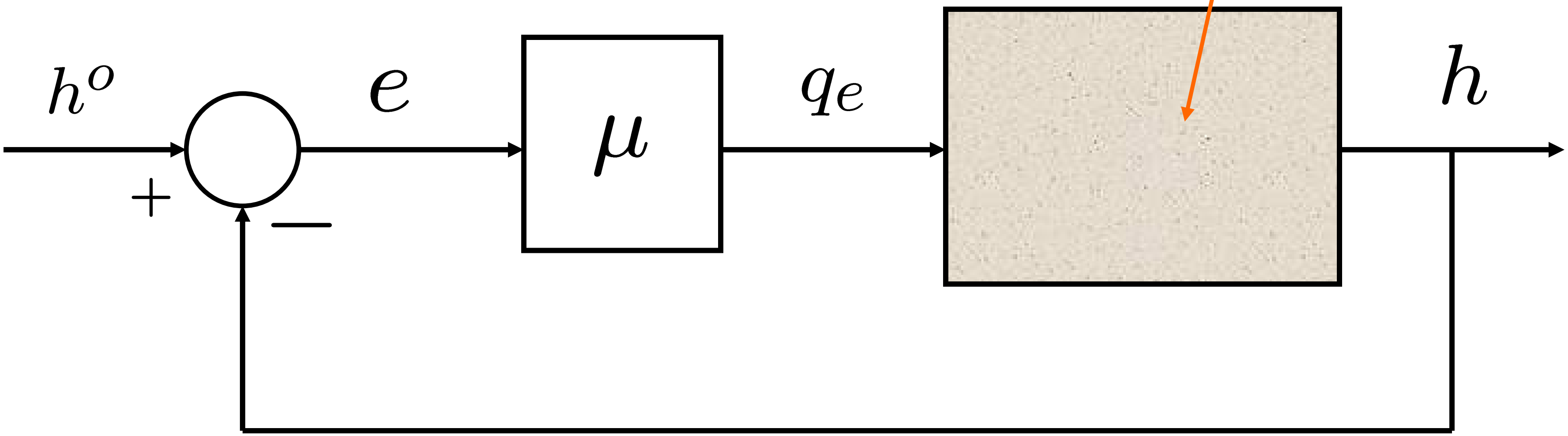
-serbatoio infinito

-no disturbo (per ora)

Controllore proporzionale

$$q_e = \mu \underbrace{\left(h^o - h\right)}_{e}\,,\ \ \mu > 0$$

$$\dot{h} = \frac{1}{A} q_e - \frac{k}{A} h$$



Quindi, sostituendo la formula del contr. proporz. si ha:

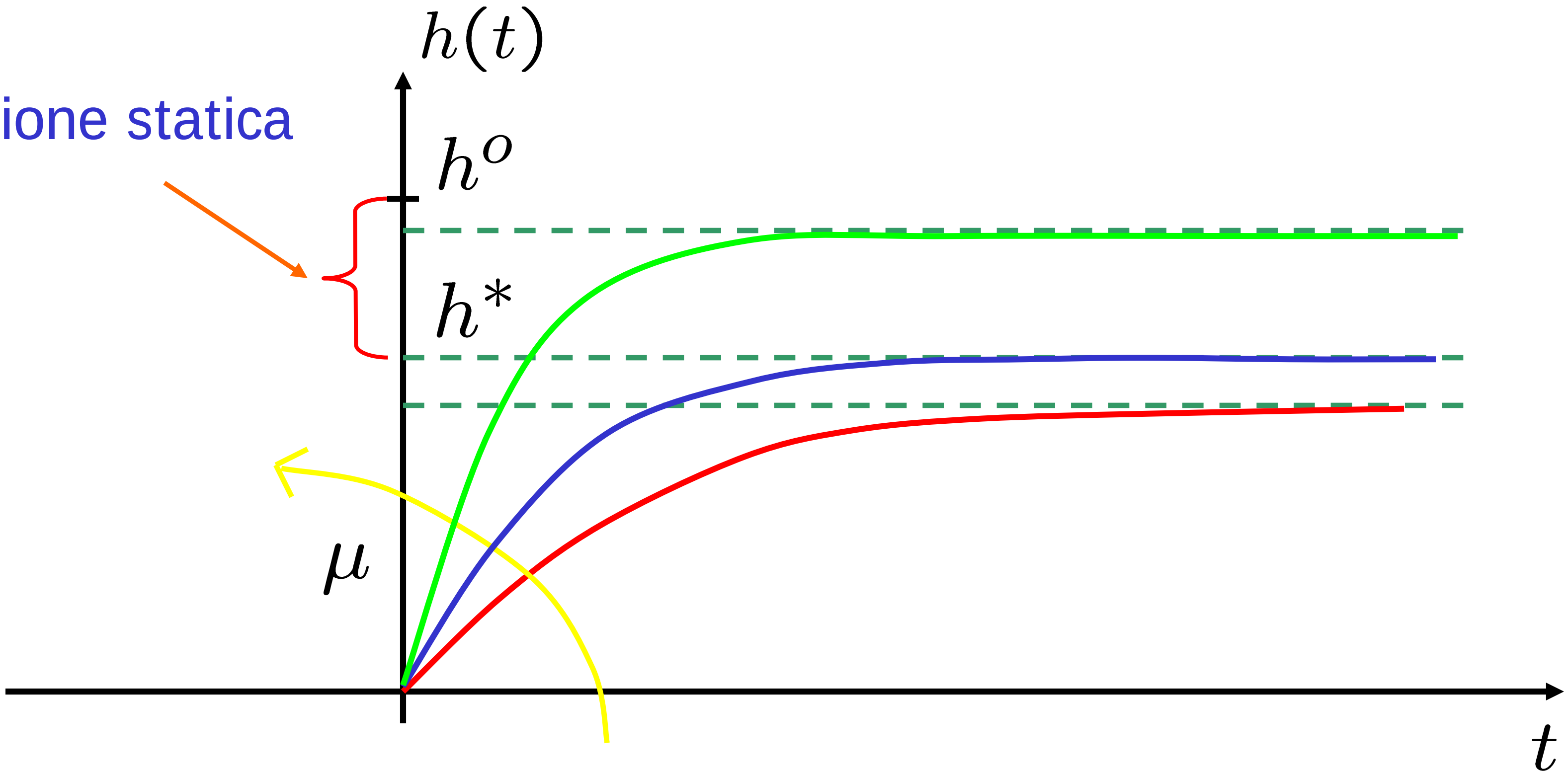
$$\dot{h} = \frac{1}{A}\mu\left(h^o - h\right) - \frac{k}{A}h$$

$$\dot{h} = \underbrace{-\frac{1}{A}\left(k + \mu\right)}_{\sigma > 0} h + \underbrace{\frac{\mu}{A}}_{\text{cost.}} h^o$$

Ipotesi: condizioni iniziali nulle: $h(0) = 0$

$$h(t) = \underbrace{\frac{\mu}{\mu + k} h^o}_{h^* = \lim_{t \to \infty} h(t)} \left(1 - e^{-\sigma t}\right), t \geq 0$$

Precisione statica



Aumentando μ migliorano sia le prestazioni statiche che quelle dinamiche

In questo caso quindi i requisiti statici e dinamici non sono contrastanti

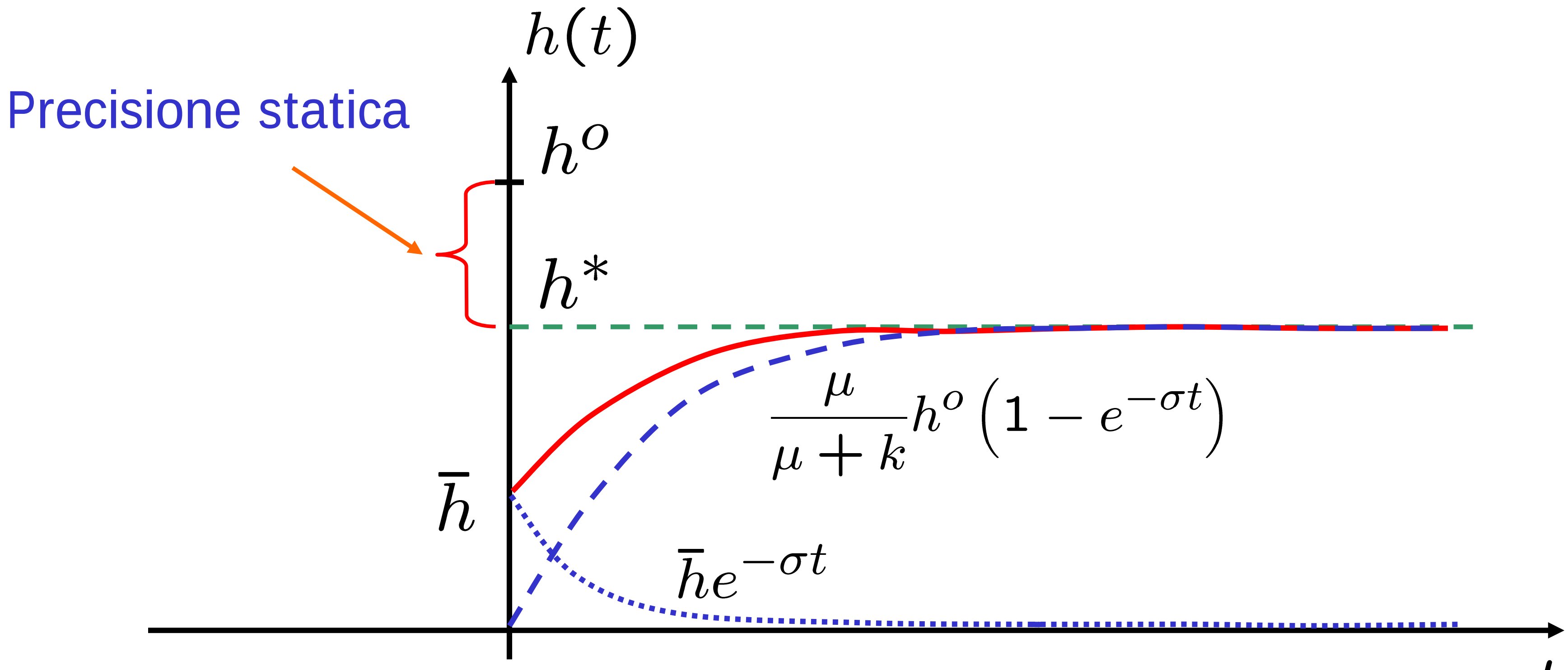
Consideriamo ora una condizione iniziale arbitraria: $h(0) = \bar{h} \neq 0$

$$h(t) = \underbrace{\overbrace{\frac{\mu}{\mu + k} h^o}^{h^*} \left(1 - e^{-\sigma t}\right)}_{\text{Effetto ingresso}} + \underbrace{\bar{h} e^{-\sigma t}}_{\text{Effetto condizione iniziale}}, t \geq 0$$

Effetto ingresso

Effetto condizione iniziale

Sovrapposizione degli effetti



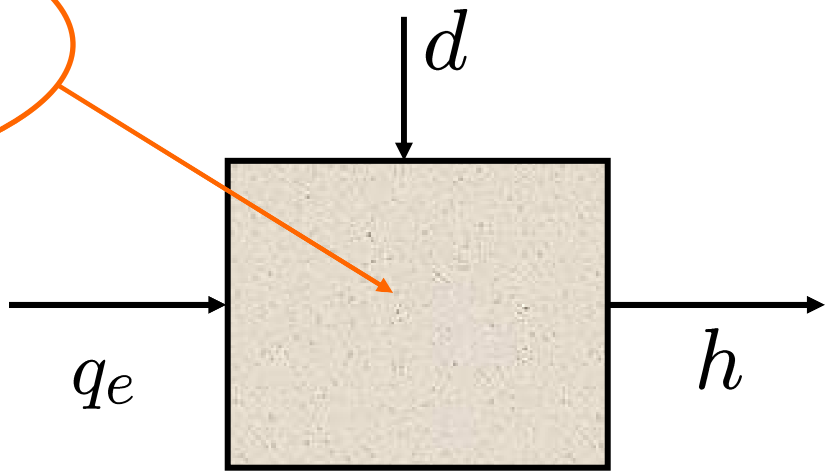
Precisione statica
$h(t)$
h^o
h^*
$\frac{\mu}{\mu+k} h^o \left(1 - e^{-\sigma t}\right)$
$\bar{h}$
$\bar{h} e^{-\sigma t}$
t

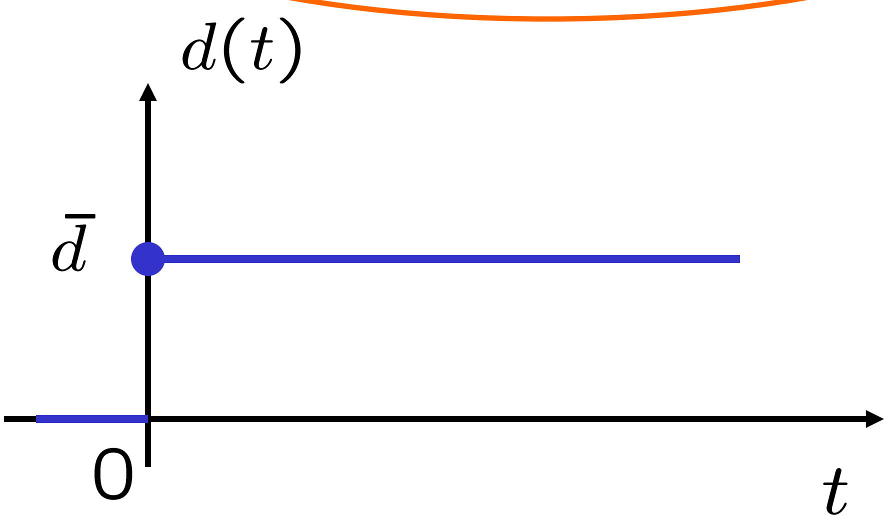
Modello dinamico con disturbo

Ipotesi:
- serbatoio infinito
- disturbo a scalino

$$A\dot{h} = q_e - kh - \bar{d}$$

$$\dot{h} = \frac{1}{A}q_e - \frac{k}{A}h - \frac{1}{A}\bar{d}$$





Disturbo a scalino

Quindi, sostituendo la formula del contr. proporzionale

$$q_e = \mu \left(h^o - h\right), \;\; \mu > 0$$

$$\dot{h} = \frac{1}{A}\mu \left(h^o - h\right) - \frac{k}{A}h - \frac{1}{A}\bar{d}$$

$$\dot{h} = \underbrace{-\frac{1}{A}\left(k + \mu\right)}_{\sigma > 0} h + \underbrace{\frac{\mu}{A}h^o - \frac{1}{A}\bar{d}}_{\text{cost.}}$$

Ipotesi semplificativa: $$h(0) = h^* = \frac{\mu}{\mu + k} h^o$$

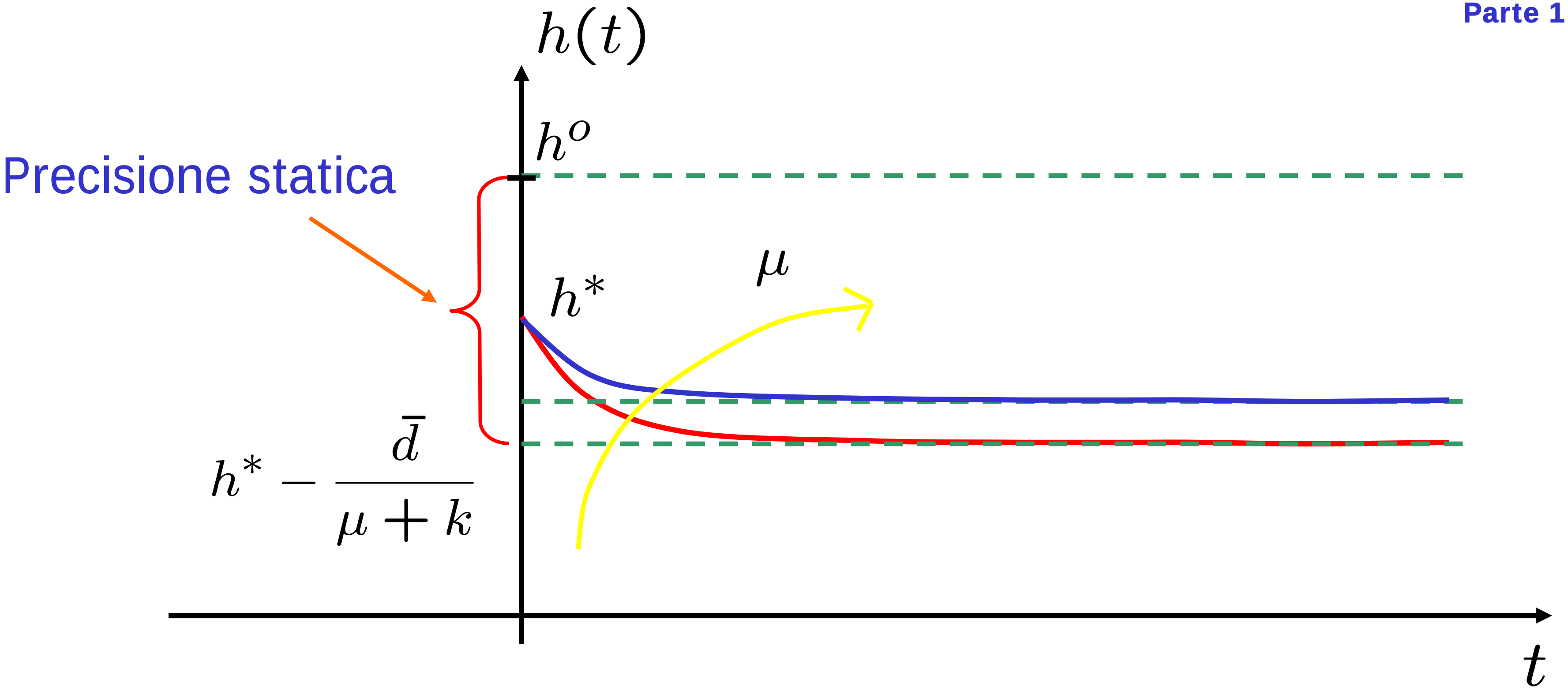
$$h(t) = \frac{\mu}{\mu + k} h^o \left(1 - e^{-\sigma t}\right) + h(0) e^{-\sigma t} - \frac{\bar{d}}{\mu + k} \left(1 - e^{-\sigma t}\right)$$

$$= h^* - \cancel{h^* e^{-\sigma t}} + \cancel{h^* e^{-\sigma t}} - \frac{\bar{d}}{\mu + k} \left(1 - e^{-\sigma t}\right)$$

$$h(t) = h^* - \frac{\bar{d}}{\mu + k} \left(1 - e^{-\sigma t}\right), t \geq 0$$

e

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = h^* - \frac{\bar{d}}{\mu + k}$$



Aumentando μ migliorano le prestazioni anche in presenza di disturbo a scalino

Come migliorare la precisione statica?

A) Introducendo azioni in anello aperto

$$q_e = \mu\left(h^o - h\right) + \underbrace{kh^o + \bar{d}}^{\text{A.A.}}$$

$$\dot{h} = \frac{1}{A}\mu\left(h^o - h\right) + \frac{k}{A}h^o + \cancel{\frac{1}{A}\bar{d}} - \frac{k}{A}h - \cancel{\frac{1}{A}\bar{d}}$$

$$h(t) = h^o\left(1 - e^{-\sigma t}\right), t \geq 0$$

e

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = h^o$$

PERO`: e` richiesta la conoscenza di $k, \bar{d}$

Come migliorare la precisione statica?

B) Modificando il controllore

$$q_e = \mu\,[h^o - h(t)] + \varphi \int_0^t [h^o - h(\tau)]d\tau \quad \mu, \varphi > 0$$

Controllore proporzionale-integrale (PI)

Giustificazione:

(derivando membro a membro)

$$q_e = \mu e(t) + \varphi \int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow \dot{q}_e = \mu\dot{e}(t) + \varphi e(t)$$

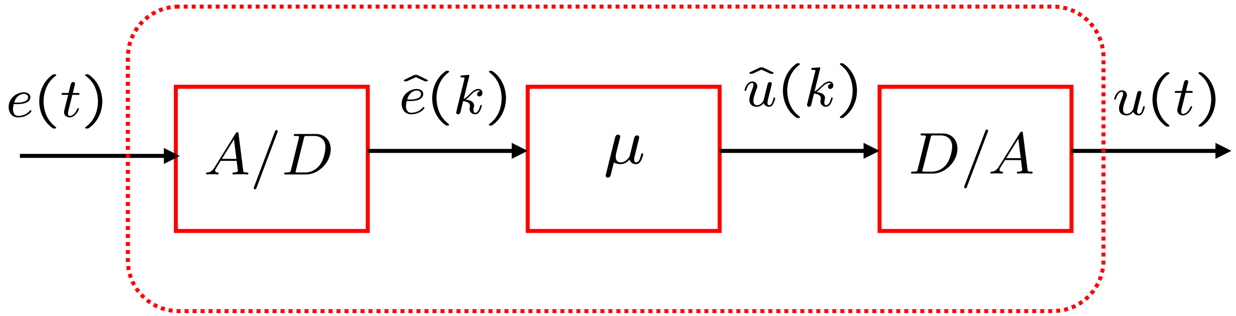
All'equilibrio:

$$\begin{cases} e(t) = \text{cost} = \bar{e} \\ q_e(t) = \text{cost} \end{cases} \Rightarrow 0 = \mu \cdot 0 + \varphi \cdot \bar{e}$$

$$\boxed{\bar{e} = 0}$$

Esempio 3: controllore a tempo discreto

- Discretizziamo la legge di controllo proporzionale (slide #52) :



$$\widehat{e}(k) = e(kT)\,, \quad \widehat{u}(k) = \mu\,\widehat{e}(k)\,, \quad u(t) = \widehat{u}(k),\; kT \leq t < (k+1)T$$

Per semplicità supponiamo che il riferimento $h_0(t)$ sia scalino unitario e condizioni iniziali nulle.

- $k = 0$

$$\widehat{e}(0) = 1$$
$$\widehat{u}(0) = \mu\,\widehat{e}(0) = \mu$$
$$u(t) = \mu,\; 0 \leq t < T$$
$$y(t) = \mu\, t,\; 0 \leq t < T$$

- $k = 1$

$$\hat{e}(1) = e(T) = w(T) - y(T) = 1 - \mu T$$

$$\hat{u}(1) = \mu\, \hat{e}(1) = \mu(1 - \mu T)$$

$$u(t) = \mu(1 - \mu T),\ T \leq t < 2T$$

$$y(t) = \mu\, T + \mu(1 - \mu T)(t - T),\ T \leq t < 2T$$

$$\Rightarrow \quad y(2T) = \mu\, T + \mu(1 - \mu T)T = 1 - (1 - \mu T)^2$$

- $k = 2$

$$\hat{e}(2) = e(2T) = w(2T) - y(2T) = (1 - \mu T)^2$$

... e così via ...

Quindi:

$$\hat{e}(k) = (1 - \mu T)^k\,, \qquad k \geq 0$$

$$\hat{u}(k) = \mu(1 - \mu T)^k\,, \qquad k \geq 0$$

$$\hat{y}(k) = 1 - (1 - \mu T)^k\,, \qquad k \geq 0$$

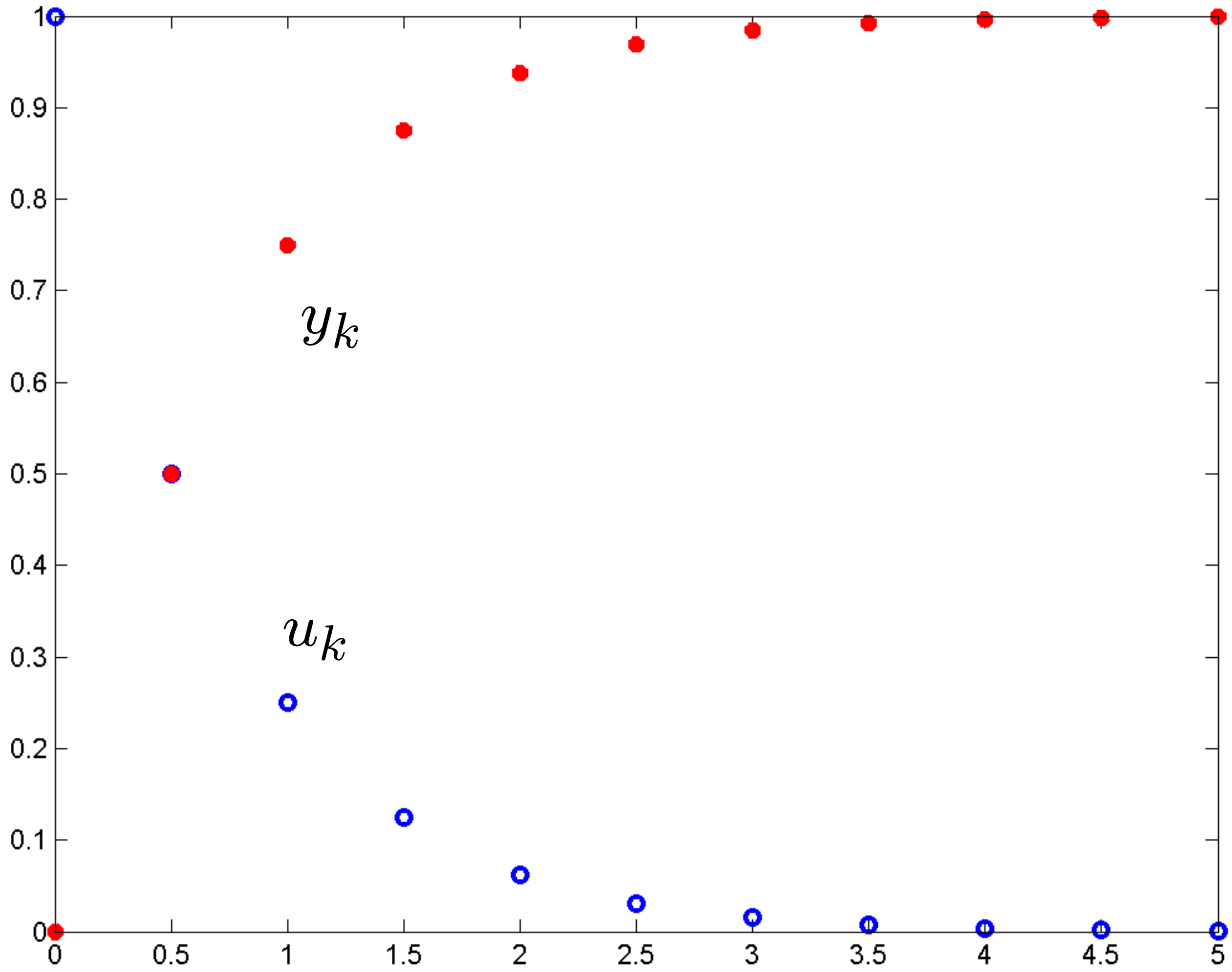
Osserviamo che:

$$0 < \mu T < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \hat{y}(k) = 1$$

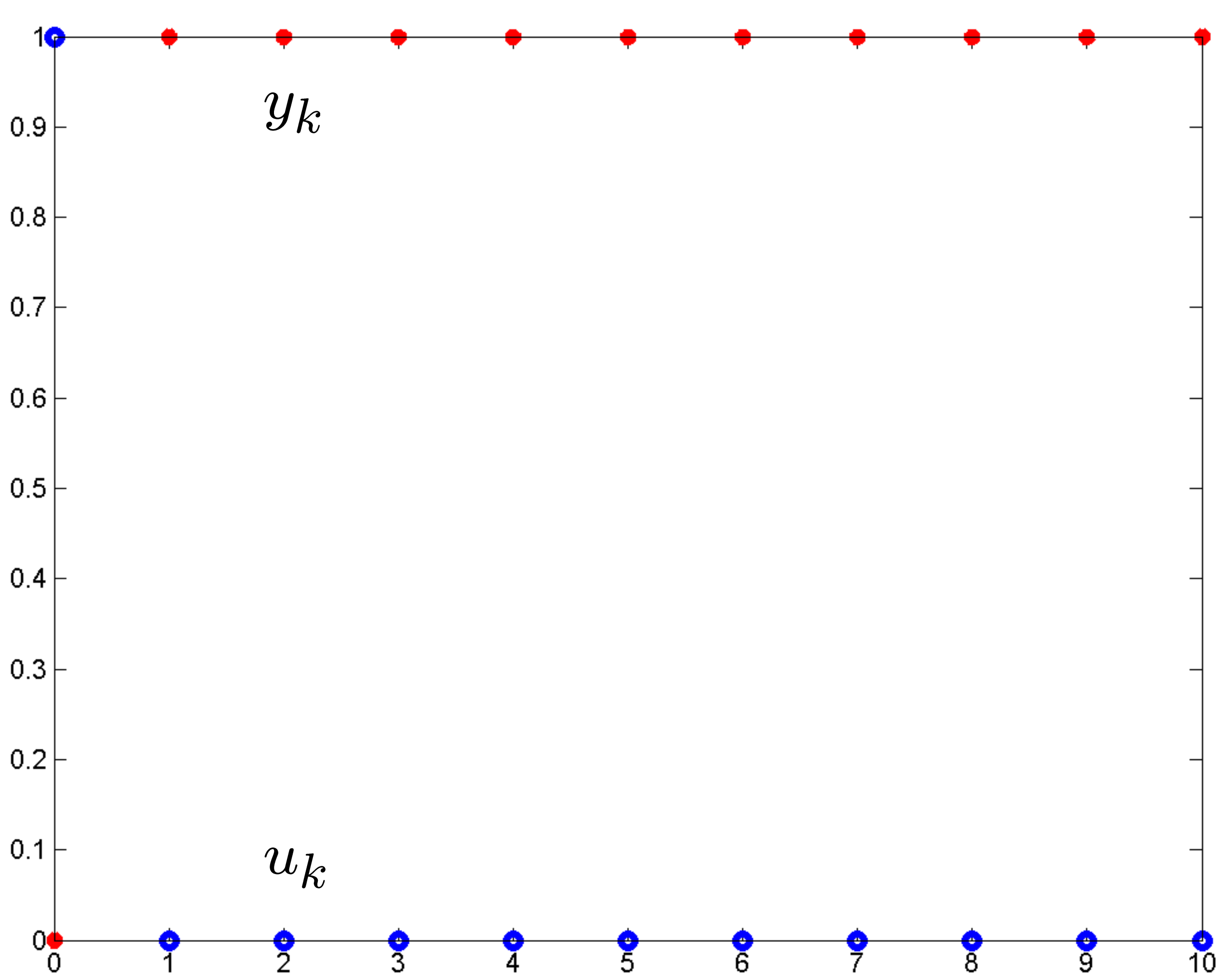
$$\mu T > 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \hat{y}(k) = \infty$$

Si confronti questo risultato con quello di slide # 54, 56 e 60 !

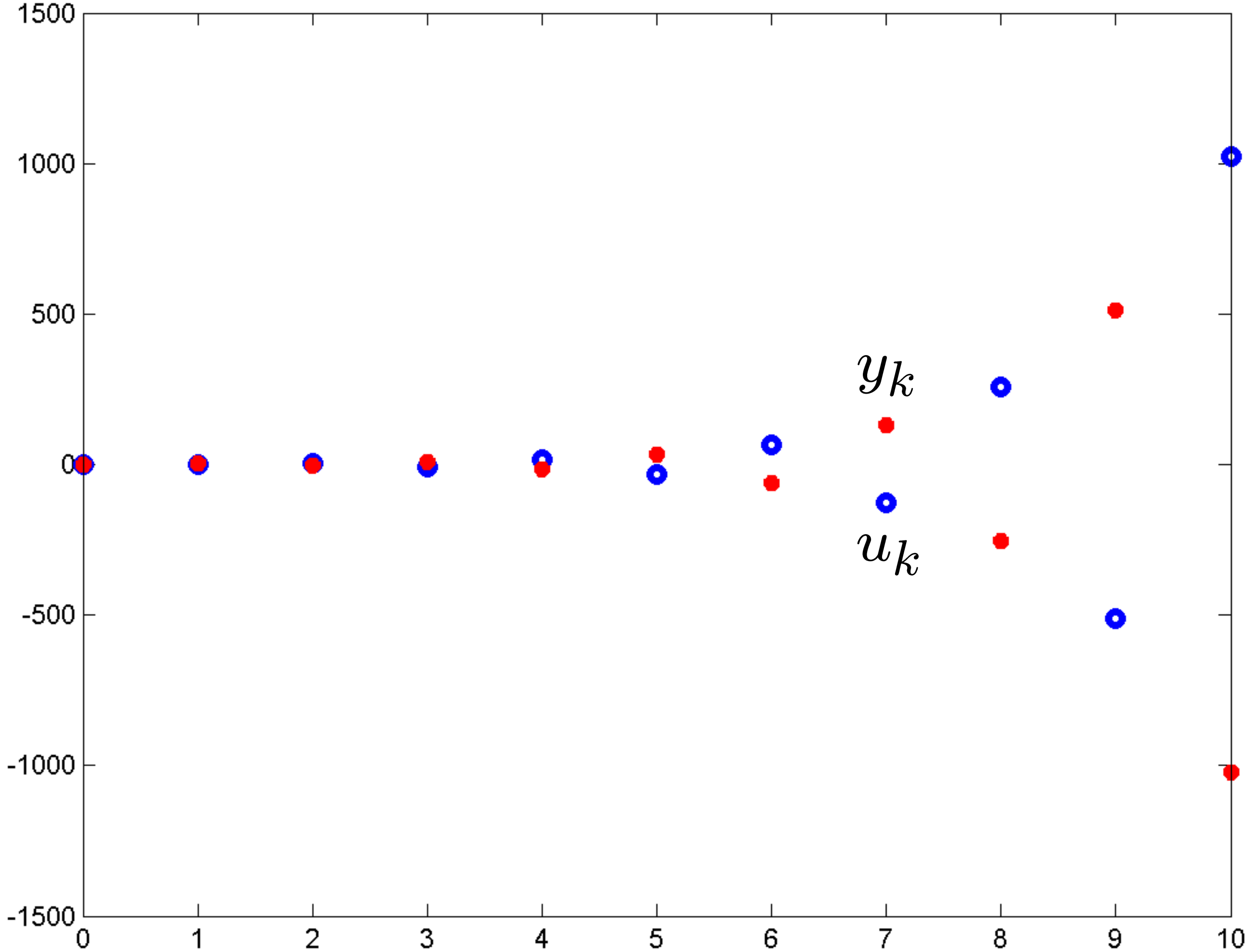
$$\mu = 1\,, \qquad T = 0.5$$



$$\mu = 1\,, \quad T = 1$$



$\mu = 3\,, \qquad T = 1$



Considerazioni

- Le prestazioni del sistema dipendono anche dalla scelta del periodo di campionamento!
- Il sistema deve venire analizzato con criteri diversi da quelli utilizzati nel caso di sistemi di controllo a tempo continuo.
- Il passaggio da controllore a tempo continuo a controllore digitale non è per nulla indolore, anzi va fatto con accortezza!

Esempio 3: conclusioni

- Controllo in anello chiuso efficace anche in presenza di disturbi

- Controllo PI per migliorare la precisione statica

- Passaggio da controllo analogico a controllo digitale non banale.

Valutazioni di riepilogo

- Confronto Anello Aperto / Anello Chiuso

- Azione di controllo basata sull'errore

- Vari tipi di leggi di controllo

- Requisiti spesso contrastanti (prec. Statica, prec. Dinamica)

- Utilita` dei modelli matematici

- Controllo analogico vs controllo digitale