Elementi di Teoria dei Sistemi

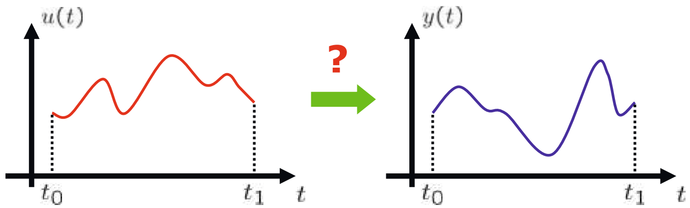
Definizione di sistema dinamico

Sistema dinamico a tempo continuo

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Ingresso Uscita

Cosa significa “Dinamico”?



$y(t)$ **e` univocamente determinata?**

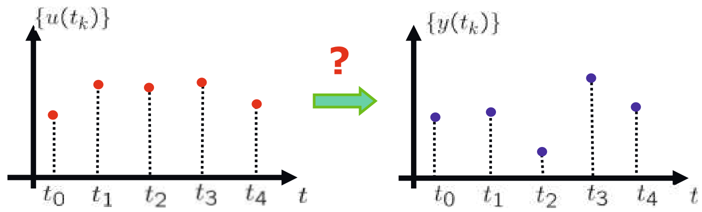
Se la risposta e` no ➡ Sistema dinamico

Sistema dinamico a tempo discreto

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Ingresso   Uscita

Cosa significa "Dinamico"?

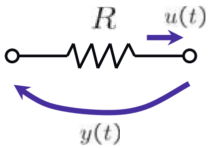


$\{y(t_k)\}$ **è univocamente determinata?**

Se la risposta è no → **Sistema dinamico**

La medesima definizione applicata ai sistemi dinamici a tempo continuo

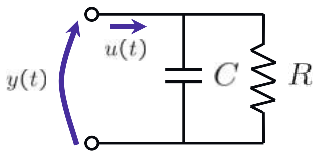
Esempio 1)



$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

Esempio 2)

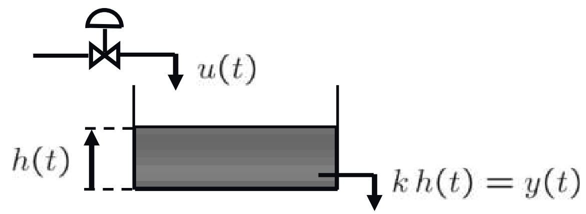


$$\left. \begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) \end{array} \right\}$$

$$y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

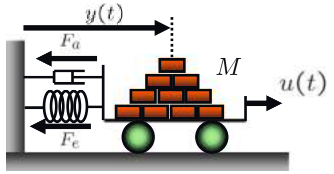
Esempio 3)



$$\left. \begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ h(t_0) \end{array} \right\} \rightarrow y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

Esempio 4)



$$\left.\begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

Esempio 5)

"Le spese nell' anno k sono proporzionali al reddito nell' anno k" $\Rightarrow$ $y(k) = \alpha \cdot u(k)$

Non dinamico

Esempio 6)

"Le scorte di magazzino del prossimo mese sono proporzionali alle scorte attuali, alla quantità prodotta e venduta nel mese attuale"

$$\left\{\begin{array}{l} u(k), k = 0,\, 1,\, 2 \ldots, p \\ y(0) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y(k), k = 0, 1, 2, \ldots, p$$

Dinamico

Sistemi dinamici a tempo continuo

Analisi e proprietà

Variabili di stato

Variabili da conoscere in t_0 per determinare $y(t), t \geq t_0$

a partire da $u(t), t \geq t_0$

Ordine del sistema

$x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n$ (variabili di stato)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

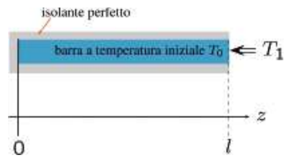
(vettore di stato)

Attenzione!

- Non tutti i sistemi dinamici a tempo continuo ammettono una rappresentazione in equazioni di stato!
- Quelli che la ammettono si dicono **sistemi a dimensione finita**, oppure **sistemi a parametri concentrati**.
- Esistono casi in cui lo stato al tempo t è costituito da una funzione di una o più variabili [non da un numero finito n di scalari!]. In tal caso si parla di sistemi a dimensione infinita, oppure a parametri distribuiti.

Esempio di sistema a parametri distribuiti

- **Diffusione del calore lungo un corpo omogeneo**: consideriamo una barra di materiale omogeneo, di lunghezza l, posta inizialmente a temperatura costante T_0 ed isolata come in figura



- Supponiamo poi che all'istante iniziale l'estremo della barra sia portato e mantenuto a temperatura costante T_1 ($\neq T_0$)

$$T(l,t) = T_1 \quad \forall t \geq 0$$

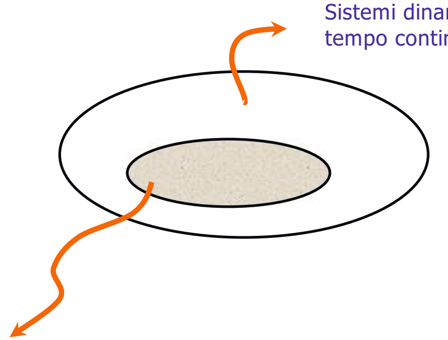
- L'equazione *a una dimensione* che descrive l'evoluzione della temperatura $T(z, t)$ della barra, lungo la coordinata longitudinale della barra z all'istante t è del tipo:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \qquad k = \frac{K}{c\rho}$$

dove k è la diffusività, c è il calore specifico, ρ è la massa volumica, K è la conduttività termica (equazione di Fourier o di trasmissione del calore nel caso monodimensionale).

- Se si considera $T(z,t)$ come un vettore di cui la variabile z è l'indice, risulta evidente che **lo spazio degli stati ha dimensione infinita** non numerabile: questa è una tipica caratteristica dei sistemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Sistemi dinamici a tempo continuo



$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], \; i = 1, \ldots, n \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$

Eq. di stato
Trasf. d'uscita

Usando la notazione vettoriale:

$$f[x(t), u(t), t] := \begin{bmatrix} f_1[x(t), u(t), t] \\ \vdots \\ f_n[x(t), u(t), t] \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$

e per brevita` notazionale scriveremo spesso

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

Alcune importanti definizioni:

- Sistema strettamente proprio
  se $g(\cdot)$ non dipende da u
- Sistema tempo-invariante (o stazionario)
  se $f(\cdot), g(\cdot)$ non dipendono da t
- Sistema lineare
  se $f(\cdot), g(\cdot)$ sono funzioni lineari in x, u
- Sistema monovariabile (SISO)
  se $m = p = 1$ (1 ingresso, 1 uscita)
- Sistema multivariabile (MIMO)
  se $m \neq 1$ e/o $p \neq 1$ (piu` ingressi e/o piu` uscite)

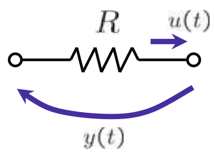
Sistemi dinamici a tempo continuo

$t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$	stato
$u(t) \in \mathbb{R}^m$	ingresso
$y(t) \in \mathbb{R}^p$	uscita

Esempio 1)

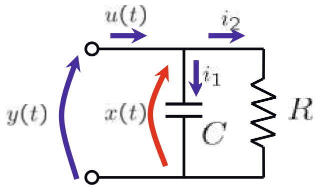


$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

Non e` necessaria l'introduzione di variabili di stato

Esempio 2)



... dall'elettrotecnica

$$\begin{cases} C\dot{x} = i_1 \\ y = x = R\,i_2 \\ u = i_1 + i_2 \end{cases}$$

$$x = R\,i_2 = R\,(u - i_1)$$

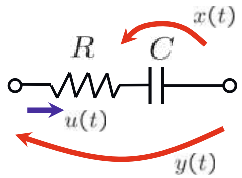
$$i_1 = u - \frac{1}{R}x$$

$$\dot{x} = \frac{1}{C}i_1 = \frac{1}{C}\left(u - \frac{1}{R}x\right)$$

- Primo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{RC}x + \dfrac{1}{C}u = f(x,u) \\ y = x = g(x) \end{cases}$$

Esempio 2bis)



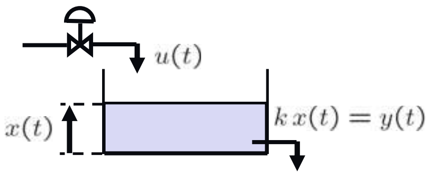
... dall'elettrotecnica

$$\begin{cases} C\dot{x} = u \\ y = x + R\,u \end{cases}$$

- Primo ordine
- SISO
- Stazionario
- Non str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{1}{C}u = f(x,u) \\ y = x + R\,u = g(x,u) \end{cases}$$

Esempio 3)



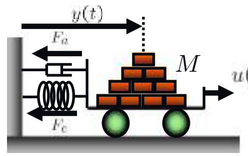
... dalla fisica

$$\begin{cases} A\,\dot{x} = u - k\,x \\ y = kx \end{cases}$$

- Primo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{k}{A}x + \dfrac{1}{A}u = f(x,u) \\ y = kx = g(x) \end{cases}$$

Esempio 4)



... dalla fisica

$$F_e = ky$$
$$F_a = h\dot{y}$$
$$M\ddot{y} = u - k\,y - h\dot{y}$$

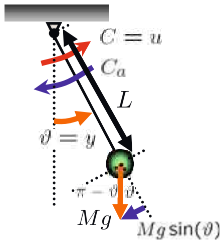
Ponendo poi

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Secondo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = -\dfrac{k}{M}x_1 - \dfrac{h}{M}x_2 + \dfrac{1}{M}u = f_2(x,u) \\ y = x_1 = g(x) \end{cases}$$

Esempio 5)



... dalla fisica

$$C_a = h\dot{\vartheta}$$
$$J\ddot{\vartheta} = u - h\dot{\vartheta} - MgL\sin(\vartheta)$$
$$J = ML^2$$

Ponendo poi

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\vartheta} = x_2 = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\vartheta} = -\frac{MgL}{J}\sin(x_1) - \frac{h}{J}x_2 + \frac{1}{J}u = f_2(x,u) \\ y = x_1 = g(x) \end{cases}$$

- Secondo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Non lineare

Rappresentazione di stato

$t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ stato
$u \in \mathbb{R}^m$ ingresso
$y \in \mathbb{R}^p$ uscita

Scelta delle variabili di stato

- Criteri?
- La scelta e` univoca?
- L'ordine e` fissato?

Un criterio "ingegneristico"

Variabili di stato ⟷ Grandezze associate ad accumuli di energie, massa, ecc….

- Elettrotecnica
  - Tensioni sui condensatori
  - Correnti negli induttori
- Meccanica
  - Posizione
  - Velocita`
- Termodinamica
  - Temperatura
  - Entalpia

Un criterio "matematico"

Supponiamo di aver ricavato dalla fisica o dall'elettrotecnica, o … un'eq. Differenziale di ordine n

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y, u\right)$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ x_n := \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x, u) \\ y = x_1 \end{cases}$$

Esempio

Si abbia l'eq. differenziale di ordine 3 $\quad \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - y = 6u$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \frac{dy}{dt} \\ x_3 := \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_3 - 2x_2 + x_1 + 6u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{matrix}$$

$$\hat{x} = Tx, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\dot{\hat{x}} = T\dot{x} = Tf(T^{-1}\hat{x}, u, t) =: \hat{f}(\hat{x}, u, t)$$
$$y = g(T^{-1}\hat{x}, u, t) =: \hat{g}(\hat{x}, u, t)$$

Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} t_0 \\ u(t), t \geq t_0 \\ x(t_0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \overbrace{x(t), t \geq t_0}^{\text{Movimento dello stato}} \\ \\ \underbrace{y(t), t \geq t_0}_{\text{Movimento dell'uscita}} \end{matrix}$$

Calcolo del Movimento

Due passi:

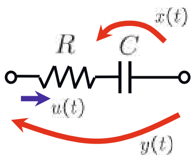
a) Integrazione eq. di stato → $x(t), t \geq t_0$

b) Sostituzione di x, u nella trasformazione d'uscita → $y(t), t \geq t_0$

Osservazione importante:

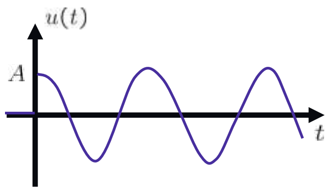
Per sistemi stazionari e` lecito assumere $t_0 = 0$ senza ledere la generalita`

Esempio



$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{C} u \\ y = x + R\,u \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$
$$u(t) = A\cos(\omega t) \cdot 1(t)$$



a) Integrazione eq. di stato:

$$x(t) = x_0 + \frac{A}{C}\int_0^t \cos(\omega\tau)d\tau =$$
$$= x_0 + \frac{A}{C}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Big|_0^t =$$
$$= x_0 + \frac{A}{C\omega}\sin(\omega t), t \geq 0$$

b) Sostituzione di x, u nella trasformazione d'uscita:

$$y(t) = x_0 + \frac{A}{C\omega}\sin(\omega t) + RA\cos(\omega t), t \geq 0$$

... con le trasf. di Laplace:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}u\right\} \Rightarrow sX(s) - x_0 = \frac{1}{C}U(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = x_0\frac{1}{s} + \frac{1}{sC}U(s)$$

$$= x_0\frac{1}{s} + \frac{1}{\cancel{s}C}\frac{A\cancel{s}}{s^2+\omega^2} = x_0\frac{1}{s} + \frac{A}{C}\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

$$= x_0\frac{1}{s} + \frac{A}{\omega C}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad x(t) = x_0 + \frac{A}{C\omega}\sin(\omega t), t \geq 0$$

Equilibrio (sistemi stazionari)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \qquad u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

- Stato di equilibrio $\bar{x}$

  ↳ movimento costante di $x(t)$ con $u(t) = \bar{u}$

- Gli stati di equilibrio si trovano tutti al variare di $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

- Uscita di equilibrio $\bar{y}$

  ↳ movimento costante di $y(t)$ con $u(t) = \bar{u}$

Calcolo dell'equilibrio

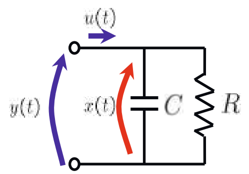
- Risolvere l'equazione algebrica

$$0 = f(x, \bar{u}) \Rightarrow \bar{x}$$

- Sostituire $\bar{x}, \bar{u}$ nella trasformazione d'uscita

$$\Rightarrow \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

Esempio 1)



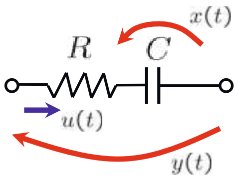
$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}u \\ y = x \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}\bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = R\bar{u}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = R\bar{u}$$

Esempio 2)



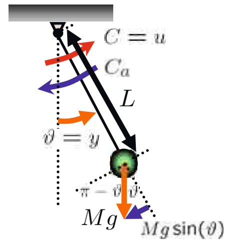
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{C}u \\ y = x + Ru \end{cases}$$

$u(t) = \bar{u}$ → $0 = \dfrac{1}{C}\bar{u}$

→ se $\bar{u} = 0$ → $\exists \infty\, \bar{x}$, $\exists \infty\, \bar{y} = \bar{x}$

→ se $\bar{u} \neq 0$ → $\nexists\, \bar{x}$, $\nexists\, \bar{y}$

Esempio 3)



Ponendo

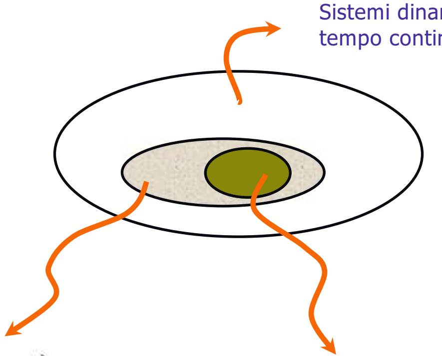
$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$u(t) = \bar{u}$ → $\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}\bar{u} \end{cases}$

→ $\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \sin(\bar{x}_1) = \dfrac{1}{MgL}\bar{u} \end{cases}$ $\xrightarrow{|\bar{u}| \leq MgL}$ $\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 = \arcsin\left(\dfrac{\bar{u}}{MgL}\right) \end{cases}$ → $\exists \infty\, \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

Sistemi dinamici a tempo continuo



$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

Sistemi dinamici
- lineari
- stazionari

Sistemi lineari stazionari SISO

$$\underbrace{\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u \\ y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + du \end{cases}}_{\text{Combinazioni lineari di variabili di stato e del controllo}}$$

Combinazioni lineari di variabili di stato e del controllo

Sistemi lineari stazionari SISO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{1} \Big\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{n} \} 1 \qquad D = d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \quad (A, B, C, D)$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u}$$

$$A\bar{x} = -B\bar{u}$$

$\det(A) \neq 0$

$\det(A) = 0$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \Rightarrow \exists\, \bar{x}$ unico

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = -CA^{-1}B\bar{u} + D\bar{u}$$

$$= \underbrace{\left(-CA^{-1}B + D\right)}_{\mu} \bar{u}$$

Guadagno statico

$$u(t) = \bar{u} \longrightarrow \boxed{\mu} \longrightarrow y(t) = \bar{y} = \mu\bar{u}$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$\det(A) = 0$

$\exists \infty\, \bar{x} \quad \exists \infty\, \bar{y}$

$\nexists\, \bar{x} \quad \nexists\, \bar{y}$

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ u(t), t \geq 0 \end{array}$$

$$\boxed{x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}$$

Cenno di dimostrazione:

Si segue la procedura seguente: si verifica che l'espressione soddisfa l'equazione differenziale. In caso affermativo, il teo. di esist. ed unicita` ci permette di concludere la dimostrazione.

$x(0) = x_0$ OK!

Ricordiamo: $\frac{d}{dt}\int_0^{r(t)} f(\tau)d\tau = \dot{r}(t)f[r(t)] + \int_0^{r(t)} \frac{d}{dt}f(\tau)d\tau$

Quindi:

$$\dot{x}(t) = ae^{at}x_0 + bu(t) + \int_0^t ae^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$= a\underbrace{\left(e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right)}_{x(t)} + bu(t)$$

$= ax(t) + bu(t)$ OK!

… con le trasf. di Laplace:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \mathcal{L}\{ax + bu\} \Rightarrow sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s)$$

$$(s-a)X(s) = x_0 + bU(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}x_0 + \frac{b}{s-a}U(s)$$

usando la proprieta` $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$

e la trasformata notevole $\mathcal{L}[e^{kt}1(t)] = \frac{1}{s-k}$

$\mathcal{L}^{-1}$ $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, t \geq 0$

Movimento (caso generale - $n > 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ u(t), t \geq 0 \end{array}$$

$$\underbrace{x(t)}_{n\times 1} = \underbrace{e^{At}}_{n\times n}\underbrace{x_0}_{n\times 1} + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{n\times n}\underbrace{B}_{n\times 1}\underbrace{u(\tau)}_{1\times 1}d\tau$$

dove si definisce l'esponenziale di matrice

$$\underbrace{e^{At}}_{n\times n} := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \cdots$$

Formule di Lagrange

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{x_f(t)},\ t \geq 0$$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u(t)$ linearmente

Formule di Lagrange

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{y_l(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{y_f(t)},\ t \geq 0$$

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u(t)$ linearmente

Principio di sovrapp. degli effetti

$$\left.\begin{array}{l} x'_0 \\ u'(t), t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x'(t), y'(t),\ t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x''_0 \\ u''(t), t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x''(t), y''(t),\ t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \\ u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t), t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \\ y(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t) \end{array}$$

Nota: la proprieta` vale anche per sistemi non stazionari purche` lineari

Sistemi lineari stazionari MIMO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p \qquad D = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}_{m} \Big\} p$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array} \quad (A, B, C, D)$$

Le formule valide nel caso SISO si applicano con ovvi cambiamenti

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(T) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x = T\hat{x}, \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = T^{-1}(Ax + Bu) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\hat{A}}\hat{x} + \underbrace{T^{-1}B}_{\hat{B}}u \\ y = \underbrace{CT}_{\hat{C}}\hat{x} + \underbrace{D}_{\hat{D}}u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Notazione: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

Esercizio a casa

Dati: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

Mostrare che:

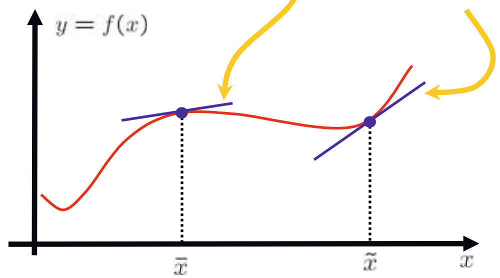
- se $\det(A) \neq 0$ il guadagno statico μ non cambia
- se $\hat{x}_0 = Tx_0$ il movimento $y(t)$ non cambia

Linearizzazione

Idea di base:

Pendenza retta tangente = $f_x(\bar{x})$

Pendenza retta tangente = $f_x(\tilde{x})$



$$\Rightarrow \quad y(x) \simeq y(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Definiamo gli scostamenti rispetto all'equilibrio:

$$\begin{aligned} \delta u(t) &:= u(t) - \bar{u} \\ \delta x(t) &:= x(t) - \bar{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u(t) &= \delta u(t) + \bar{u} \\ x(t) &= \delta x(t) + \bar{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \delta\dot{x} = f(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u)$$

$$\simeq \underbrace{\cancel{f(\bar{x}, \bar{u})}}_{= 0 \text{ (equilibrio)}} + f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

$$\Rightarrow \quad \delta\dot{x} \simeq \underbrace{f_x(\bar{x}, \bar{u})}_{\substack{n\times n \\ A}}\delta x + \underbrace{f_u(\bar{x}, \bar{u})}_{\substack{n\times m \\ B}}\delta u$$

dove evidentemente:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{n} \Bigg\} n$$

$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{m} \Bigg\} n$$

Vediamo la trasformazione d'uscita:

$$\delta y(t) := y(t) - \bar{y} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \delta y(t) + \bar{y}$$

$$y(t) = \cancel{\bar{y}} + \delta y = g(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u)$$

$$\simeq \cancel{g(\bar{x},\bar{u})} + g_x(\bar{x},\bar{u})\delta x + g_u(\bar{x},\bar{u})\delta u$$

$$\delta y \simeq \underbrace{g_x(\bar{x},\bar{u})}_{\substack{p \times n \\ C}}\delta x + \underbrace{g_u(\bar{x},\bar{u})}_{\substack{p \times m \\ D}}\delta u$$

dove:

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{n} \Bigg\} p$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{m} \Bigg\} p$$

Sistema linearizzato:

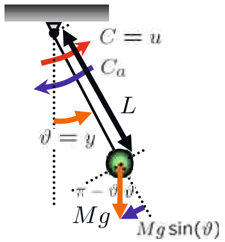
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \qquad 0 = f(x,\bar{u}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$$

$$\delta\dot{x} = \underbrace{f_x(\bar{x},\bar{u})}_{A}\delta x + \underbrace{f_u(\bar{x},\bar{u})}_{B}\delta u$$

$$\delta y = \underbrace{g_x(\bar{x},\bar{u})}_{C}\delta x + \underbrace{g_u(\bar{x},\bar{u})}_{D}\delta u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

Esempio



Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{MgL}{J}\sin(x_1) - \frac{h}{J}x_2 + \frac{1}{J}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\frac{MgL}{J}\sin(x_1) \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$f_x(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

Poi (tutte queste quantita` non dipendono dallo stato di eq.):

$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \bar{B}$$

$$f_u(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \tilde{B}$$

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{C}$$

$$g_x(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = 0_{\bar{x},\bar{u}} = 0$$

$$g_u(\tilde{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\tilde{x},\bar{u}} = 0_{\tilde{x},\bar{u}} = 0$$

Sistemi dinamici a tempo discreto

Analisi e proprietà

Variabili di stato

Variabili da conoscere in k_0 per determinare $\{y(k)\}, k \geq k_0$

a partire da $\{u(k)\}, k \geq k_0$

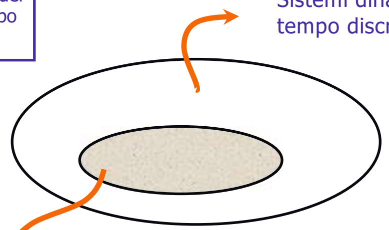
Ordine del sistema

$x_i(k),\ i = 1, 2, \ldots, n$ (variabili di stato)

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ (vettore di stato)

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Sistemi dinamici a tempo discreto



Equazioni di stato

$$\begin{cases} x_i(k+1) = f_i[x(k), u(k), k],\ i = 1, \ldots, n \\ y(k) = g[x(k), u(k), k] \end{cases}$$

Trasformazione d'uscita

Usando la notazione vettoriale:

$$f[x(k), u(k), k] := \begin{bmatrix} f_1[x(k), u(k), k] \\ \vdots \\ f_n[x(k), u(k), k] \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \\ y(k) = g[x(k), u(k), k] \end{cases}$$

e per brevità di notazione scriveremo a volte

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) \\ y_k = g(x_k, u_k, k) \end{cases}$$

Definizioni:

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

- Sistema strettamente proprio
  se $g(\cdot)$ non dipende da $u(k)$
- Sistema tempo-invariante (o stazionario)
  se $f(\cdot), g(\cdot)$ non dipendono da k
- Sistema lineare
  se $f(\cdot), g(\cdot)$ sono funzioni lineari in $x(k), u(k)$
- Sistema monovariabile (SISO)
  se $m = p = 1$ (1 ingresso, 1 uscita)
- Sistema multivariabile (MIMO)
  se $m \neq 1$ e/o $p \neq 1$ (più ingressi e/o più uscite)

Sistemi dinamici a tempo discreto

$k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \\ y(k) = g[x(k), u(k), k] \end{cases}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ stato
$u(k) \in \mathbb{R}^m$ ingresso
$y(k) \in \mathbb{R}^p$ uscita

Esempio 5)

"Le spese nell' anno k sono proporzionali al reddito nell' anno k"

$$y(k) = \alpha \cdot u(k)$$

Non dinamico

Non è necessaria l'introduzione di variabili di stato

Esempio 6)

"Le scorte di magazzino del prossimo mese sono proporzionali alle scorte attuali, alla quantità prodotta e venduta nel mese attuale"

$$s(k+1) = s(k) + q(k) - v(k)$$

$$\begin{cases} x(k) = s(k) \\ u_1(k) = q(k) \quad u_2(k) = v(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

- Primo ordine
- MIMO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k) - u_2(k) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = x(k) = g(x(k)) \end{cases}$$

Rappresentazione di stato

$k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ stato
$u \in \mathbb{R}^m$ ingresso
$y \in \mathbb{R}^p$ uscita

Scelta delle variabili di stato

- Criteri?
- La scelta è univoca?
- L'ordine è fissato?

Cfr. le considerazioni fatte per le variabili di stato dei sistemi dinamici a tempo continuo

Un criterio "ingegneristico"

Variabili di stato $\Longleftrightarrow$ Grandezze associate ad accumuli di …

Cfr. le considerazioni fatte per le variabili di stato dei sistemi dinamici a tempo continuo

Un criterio "matematico"

Supponiamo di aver ricavato un'eq. alle differenze di ordine n

$$y(k) = f\left(u(k), y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n)\right)$$

Associamo ai **valori passati** della successione incognita $\{y(k)\}$ le variabili di stato (*n* per la precisione) nel modo seguente

$$\begin{cases} x_1(k) &= y(k-n) \\ x_2(k) &= y(k-n+1) \\ x_3(k) &= y(k-n+2) \\ & \cdots \\ x_n(k) &= y(k-1) \end{cases}$$

Utilizzando le variabili di stato appena definite è possibile scrivere

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_4(k) \\ & \cdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\ x_n(k+1) &= f\left(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k)\right) \\ y(k) &= f\left(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k)\right) \end{cases}$$

Esempio

Si abbia l'eq. alle differenze di ordine 3

$$w(k) - 3w(k-1) + 2w(k-2) - w(k-3) = 6u(k)$$

Ponendo $x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\begin{cases} x_1(k) := w(k-3) \\ x_2(k) := w(k-2) \\ x_3(k) := w(k-1) \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \\ y(k) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \end{cases}$$

Proviamo a risolvere l'eq. alle differenze a partire dall'istante k=0, con condizioni iniziali

$$w(-1) = w(-2) = w(-3) = 0$$

e come segnale {u(k)} utilizziamo un gradino unitario (sempre applicato a partire dall'istante k=0).

La sequenza {w(k)} allora è

$$\{w(k)\} = \{6, 24, 66, 162, \ldots\}$$

Proviamo a risolvere in modo ricorsivo l'eq. alle differenze utilizzando le equazioni di stato con condizioni iniziali

$$x(0) := \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per come abbiamo definito le variabili di stato, i valori all'istante k=0 di x_1, x_2 e x_3 coincidono con i valori w(-1), w(-2), w(-3) della sequenza {w(k)}.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \\ y(k) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \end{cases}$$

$$\text{per } k = 0 \quad \begin{cases} x_1(1) = x_2(0) = 0 \\ x_2(1) = x_3(0) = 0 \\ x_3(1) = 3x_3(0) - 2x_2(0) + x_1(0) + 6u(0) = 6 \\ y(0) = 3x_3(0) - 2x_2(0) + x_1(0) + 6u(0) = 6 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 1 \quad \begin{cases} x_1(2) = x_2(1) = 0 \\ x_2(2) = x_3(1) = 6 \\ x_3(2) = 3x_3(1) - 2x_2(1) + x_1(1) + 6u(1) = 24 \\ y(1) = 3x_3(1) - 2x_2(1) + x_1(1) + 6u(1) = 24 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 2 \quad \begin{cases} x_1(3) = x_2(2) = 6 \\ x_2(3) = x_3(2) = 24 \\ x_3(3) = 3x_3(2) - 2x_2(2) + x_1(2) + 6u(2) = 66 \\ y(2) = 3x_3(2) - 2x_2(2) + x_1(2) + 6u(2) = 66 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 3 \quad \begin{cases} x_1(4) = x_2(3) = 24 \\ x_2(4) = x_3(3) = 66 \\ x_3(4) = 3x_3(3) - 2x_2(3) + x_1(3) + 6u(3) = 162 \\ y(3) = 3x_3(3) - 2x_2(3) + x_1(3) + 6u(3) = 162 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 4 \quad \begin{cases} x_1(5) = x_2(4) = 66 \\ x_2(5) = x_3(4) = 162 \\ x_3(5) = 3x_3(4) - 2x_2(4) + x_1(4) + 6u(4) = 414 \\ y(4) = 3x_3(4) - 2x_2(4) + x_1(4) + 6u(4) = 414 \end{cases}$$

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

$$\hat{x} = Tx, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}(k+1) = Tx(k+1) = Tf(T^{-1}\hat{x}(k), u(k), k)$$
$$\hat{x}(k+1) =: \hat{f}(\hat{x}(k), u(k), k)$$

$$y(k) = g(T^{-1}\hat{x}(k), u(k), k) =: \hat{g}(\hat{x}(k), u(k), k)$$

Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} k_0 \\ u(k), k \geq k_0 \\ x(k_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \overbrace{x(k), k \geq k_0}^{\text{Movimento dello stato}} \\[1em] \underbrace{y(k), k \geq k_0}_{\text{Movimento dell'uscita}} \end{array}$$

Calcolo del Movimento

Due passi:

a) soluzione eq. di stato $\Rightarrow$ $x(k), k \geq k_0$

b) Sostituzione di x, u nella trasformazione d'uscita $\Rightarrow$ $y(k), k \geq k_0$

Osservazione importante:

Per sistemi stazionari è lecito assumere

$$k_0 = 0$$

senza ledere la generalità

Esempio

Vogliamo determinare il movimento dello stato per il sistema

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k) - u_2(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

supponendo che

$$u_1(k) = 5 \cdot 1(k) \qquad x_0 = 10$$
$$u_2(k) = 0.5^k \, 1(k)$$

Utilizzo la Z-Trasformata!

$$z\,[X(z) - x(0)] = X(z) + U_1(z) - U_2(z)$$

$$X(z) = \frac{10z(z-1)(z-0.5) + 5z(z-0.5) - z(z-1)}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = \frac{z\,(20z^2 - 22z + 7)}{(z-1)^2(2z-1)}$$

$$\Downarrow \; \mathcal{Z}^{-1}$$

$$x(k) = \left[8 + 5\,k + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] 1(k)$$

Il movimento dell' uscita coincide con quello dello stato.

Equilibrio (sistemi stazionari)

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \qquad u(k) = \bar{u}, k \geq 0$$

- Stato di equilibrio $\bar{x}$

  ↳ movimento costante di $x(k)$ con $u(k) = \bar{u}$

- Gli stati di equilibrio si trovano tutti al variare di $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

- Uscita di equilibrio $\bar{y}$

  ↳ movimento costante di $y(k)$ con $u(k) = \bar{u}$

Calcolo dell' equilibrio

- Risolvere l' equazione algebrica

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \Rightarrow \bar{x}$$

- Sostituire $\bar{x}, \bar{u}$ nella trasformazione d' uscita

  ↳ $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$

Esempio 6)

Consideriamo ancora il sistema lineare MIMO

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k) - u_2(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

Se succede che: $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

allora $\exists \infty \bar{x} \quad \exists \infty \bar{y}$

In particolare $\bar{x} = x(0)$

Esempio 7)

Consideriamo il sistema SISO non lineare

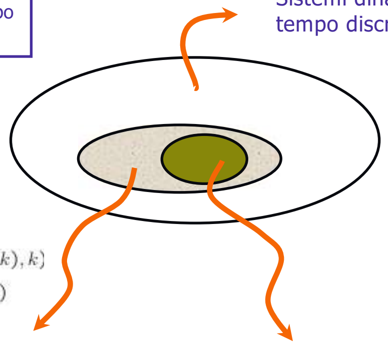
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha(1-\beta x_1(k))x_1(k) + \\ \qquad -\gamma x_1(k)x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \delta x_2(k) + \eta x_1(k)x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \frac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Sistemi dinamici a tempo discreto



$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

Sistemi dinamici a tempo discreto che ammettono equazioni di stato

Sistemi dinamici
- lineari
- stazionari

Sistemi lineari stazionari SISO

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \cdots + a_{1n}x_n(k) + b_1u(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \cdots + a_{nn}x_n(k) + b_nu(k) \\ y(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + \cdots + c_nx_n(k) + du(k) \end{cases}$$

Combinazioni lineari di variabili di stato e del controllo

Sistemi lineari stazionari SISO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{1} \Big\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{n} \} 1 \qquad D = d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad (A, B, C, D)$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad u(k) = \bar{u}, k \geq 0$$

$$x = Ax + B\bar{u}$$

$$(I - A)x = B\bar{u}$$

$\det(I - A) \neq 0$

$\det(I - A) = 0$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$\det(I - A) \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = (I - A)^{-1}B\bar{u} \Rightarrow \exists \bar{x}$ unico

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = C(I - A)^{-1}B\bar{u} + D\bar{u}$$

$$= \underbrace{\left[C\,(I - A)^{-1}\,B + D\right]}_{\mu}\bar{u}$$

Guadagno statico

$$u(k) = \bar{u} \longrightarrow \boxed{\mu} \longrightarrow y(k) = \bar{y} = \mu\bar{u}$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$\det(I - A) = 0$

$\exists \infty \bar{x} \quad \exists \infty \bar{y}$

$\nexists \bar{x} \quad \nexists \bar{y}$

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = cx(k) + du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(k) = a^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i)}$$

Cenno di dimostrazione:

Per semplice sostituzione, partendo da $x(0) = x_0$

Ricordiamo: $x(k+1) = ax(k) + bu(k)$

Quindi:

$$x(1) = ax(0) + bu(0)$$
$$x(2) = ax(1) + bu(1) = a^2 x(0) + abu(0) + bu(1)$$
$$x(3) = \cdots = a^3 x(0) + a^2 bu(0) + ab\,u(1) + bu(2)$$
$$\cdots$$
$$x(k) = a^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i)$$

... con le Z-trasformate:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \mathcal{Z}\{ax(k) + bu(k)\}$$

$$zX(z) - z\,x(0) = aX(z) + bU(z)$$

$$(z-a)X(z) = z\,x(0) + bU(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} x(0) + \frac{b}{z-a} U(z)$$

usando la proprietà $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$

e la trasformata notevole $\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \frac{z}{z-a}$

$$\mathcal{Z}^{-1} \quad x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = a^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i), k \geq 0$$

Movimento (caso generale - $n > 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{x(k)}_{n\times 1} = \underbrace{A^k}_{n\times n} \underbrace{x_0}_{n\times 1} + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{A^{k-i-1}}_{n\times n} \underbrace{B}_{n\times 1} \underbrace{u(i)}_{1\times 1}$$

Lo si confronti con l' analogo risultato per i sistemi dinamici lineari tempo-invarianti a tempo continuo

Movimento dello stato

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{x_l(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)}_{x_f(k)}$$

$$x(k) = x_l(k) + x_f(k)$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u(k)$ linearmente

Movimento dell'uscita

$$y(k) = \underbrace{C\,A^k x_0}_{y_l(k)} + \underbrace{C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) + Du(k)}_{y_f(k)}$$

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k)$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u(k)$ linearmente

Principio di sovrapp. degli effetti

$$\left.\begin{array}{l} x_0' \\ u'(k), k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x'(k), y'(k),\ k \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0'' \\ u''(k), k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x''(k), y''(k),\ k \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \alpha x_0' + \beta x_0'' \\ u(k) = \alpha u'(k) + \beta u''(k), k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(k) = \alpha x'(k) + \beta x''(k) \\ y(k) = \alpha y'(k) + \beta y''(k) \end{array}$$

Nota: la proprietà vale anche per sistemi non stazionari purché lineari.

Sistemi lineari stazionari MIMO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p \qquad D = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array} \quad (A, B, C, D)$$

Le formule valide nel caso SISO si applicano con ovvi cambiamenti.

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(T) \neq 0$$

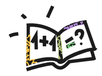
$$\hat{x} = Tx, \quad x = T^{-1}\hat{x}$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = T(Ax(k) + Bu(k)) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\hat{A}}\hat{x}(k) + \underbrace{TB}_{\hat{B}}u(k) \\ y(k) = \underbrace{CT^{-1}}_{\hat{C}}\hat{x}(k) + \underbrace{D}_{\hat{D}}u(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \end{cases}$$

Notazione: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

Esercizio "per casa"



Considerare due descrizioni in equazioni di stato equivalenti per un sistema dinamico lineare a tempo discreto

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

Mostrare che:

- se $\det(I - A) \neq 0$ il guadagno statico μ non cambia
- se $\hat{x}_0 = Tx_0$ il movimento $y(k)$ non cambia

Linearizzazione

Idea di base: vogliamo studiare il comportamento di un sistema dinamico a tempo discreto, non lineare, nell' intorno di una condizione d' equilibrio, descritta da

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \qquad \begin{aligned} & u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ & \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ & \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$

$$y(x) \simeq y(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Definiamo gli scostamenti rispetto all' equilibrio:

$$\begin{aligned} \delta u(k) &:= u(k) - \bar{u} \\ \delta x(k) &:= x(k) - \bar{x} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} u(k) &= \delta u(k) + \bar{u} \\ x(k) &= \delta x(k) + \bar{x} \end{aligned}$$

$$x(k+1) = \bar{x} + \delta x(k+1) = f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))$$

$$\cancel{\bar{x}} + \delta x(k+1) \simeq \underbrace{\cancel{f(\bar{x}, \bar{u})}}_{= \bar{x} \text{ (equilibrio)}} + f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(k) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(k)$$

$$\delta x(k+1) \simeq \underbrace{f_x(\bar{x}, \bar{u})}_{\substack{n \times n \\ A}}\delta x(k) + \underbrace{f_u(\bar{x}, \bar{u})}_{\substack{n \times m \\ B}}\delta u(k)$$

dove evidentemente:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \vdots \\ \dfrac{a}{b} \end{bmatrix}}\right\} n$$

$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{m} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \vdots \\ \dfrac{a}{b} \end{bmatrix}}\right\} n$$

Vediamo la trasformazione d' uscita:

$$\delta y(k) := y(k) - \bar{y} \quad \Rightarrow \quad y(k) = \delta y(k) + \bar{y}$$

$$y(k) = \cancel{\bar{y}} + \delta y(k) = g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))$$

$$\simeq \cancel{g(\bar{x},\bar{u})} + g_x(\bar{x},\bar{u})\delta x(k) + g_u(\bar{x},\bar{u})\delta u(k)$$

$$\delta y(k) \simeq \underbrace{g_x(\bar{x},\bar{u})}_{\substack{p\times n \\ C}}\delta x(k) + \underbrace{g_u(\bar{x},\bar{u})}_{\substack{p\times m \\ D}}\delta u(k)$$

dove:

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \vdots \\ \dfrac{a}{b} \end{bmatrix}}\right\} p$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{m} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \vdots \\ \dfrac{a}{b} \end{bmatrix}}\right\} p$$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \qquad \bar{x} = f(\bar{x},\bar{u}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$$

$$\delta x(k+1) = \underbrace{f_x(\bar{x},\bar{u})}_{A}\delta x(k) + \underbrace{f_u(\bar{x},\bar{u})}_{B}\delta u(k)$$

$$\delta y(k) = \underbrace{g_x(\bar{x},\bar{u})}_{C}\delta x(k) + \underbrace{g_u(\bar{x},\bar{u})}_{D}\delta u(k)$$

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = A\,\delta x(k) + B\,\delta u(k) \\ \delta y(k) = C\delta x(k) + D\,\delta u(k) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

Esempio

Consideriamo ancora il sistema SISO non lineare

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha(1-\beta x_1(k))x_1(k) + \\ \qquad -\gamma x_1(k)x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \delta x_2(k) + \eta x_1(k)x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

$$\bar{u} = 0 \Rightarrow \quad \bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}\left(1-\frac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

Determiniamo le espressioni dei sistemi linearizzati in corrispondenza dell' ingresso e degli stato d' equilibrio considerati.

Quindi:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1+\alpha-2\alpha\beta x_1-\gamma x_2) & -\gamma x_1 \\ \eta x_2 & 1-\delta+\eta x_1 \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \bar{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\delta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \bar{A}_{(2)} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\frac{\gamma}{\beta} \\ 0 & 1-\delta+\frac{\eta}{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}\left(1-\frac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{(3)} = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\alpha\beta\delta}{\eta}\right) & -\frac{\gamma\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha\eta}{\gamma}\left(1-\frac{\beta\delta}{\eta}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Poi (tutte queste quantità non dipendono dallo stato di eq.):

$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{B}$$

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{C}$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = 0_{\bar{x},\bar{u}} = 0 = \bar{D}$$