Funzione di trasferimento

Sistemi lineari a tempo continuo

Definizione di FdT e proprietà

Trasformata di un vettore

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

- Proprieta`

$$\mathcal{L}[Ax(t)] = A\mathcal{L}[x(t)]$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$= sX(s) - x(0)$$

- Sistemi dinamici lineari stazionari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Operando la trasf. di L. ad ambo i membri dell'eq. di stato:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\boxed{Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s)}$$

- Quando $x(0) = 0$

$$Y(s) = \underbrace{\left[\overset{p \times n}{\overbrace{C}}\,(\overset{n \times n}{\overbrace{sI - A}})^{-1}\overset{n \times m}{\overbrace{B}} + \overset{p \times m}{\overbrace{D}}\right]}_{\substack{p \times m \\ G(s)}} U(s)$$

Funzione di trasferimento

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(s) & \cdots & G_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(s)U_j(s)$$

$$= G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \cdots$$

- Quando

$$x(0) = 0$$
$$u_k(t) = 0, \; k \neq j$$

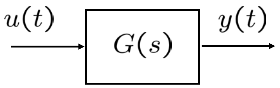
(sovrapposizione effetti)

$$\boxed{G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}}$$

- Sistemi dinamici lineari SISO

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad u(t), y(t) \in \mathbb{R} \qquad x(0) = 0$$

$$Y(s) = \underbrace{\Big[\overbrace{C}^{1\times n}\overbrace{(sI - A)^{-1}}^{n\times n}\overbrace{B}^{n\times 1} + \overbrace{D}^{1\times 1}\Big]}_{\substack{1\times 1 \\ G(s)}} U(s)$$



Funzione di trasferimento scalare

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}$$

Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo continuo

Rappresentazione Interna

$$(A, B, C, D)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Rappresentazione Esterna

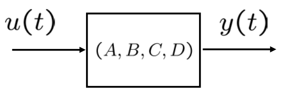
$$G(s) = \big[C(sI - A)^{-1}B + D\big]$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$
$$(\text{con } x(0) = 0)$$

? **"Realizzazione"**

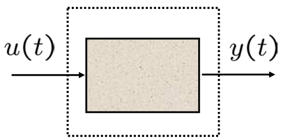
Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo continuo

Rappresentazione Interna



Si tiene conto della struttura "interna" del sistema

Rappresentazione Esterna



Rappresentazione IN/OUT del sistema

Funz. di trasferimento di sistemi equivalenti

Ricordiamo:

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(T) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x} = Tx, \quad x = T^{-1}\hat{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = TAT^{-1}\hat{x} + TBu \\ y = CT^{-1}\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{G}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} \\
&= C\left[T^{-1}\left(sI - TAT^{-1}\right)^{-1}T\right]B + D \\
&= C\left[T^{-1}\left(sTT^{-1} - TAT^{-1}\right)^{-1}T\right]B + D \\
&= C\left[T^{-1}\left(T(sI - A)T^{-1}\right)^{-1}T\right]B + D \\
&= C\left[T^{-1}T\,(sI - A)^{-1}\,T^{-1}T\right]B + D \\
&= C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

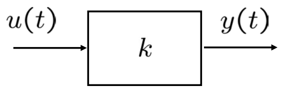
↳ La funzione di trasferimento non dipende dalla particolare scelta di variabili di stato considerata per la rappresentazione interna

- Esempio 1

$$y(t) = ku(t)$$

↳ $Y(s) = kU(s)$

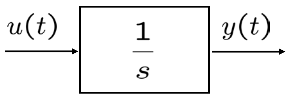
↳ $G(s) = k$



- Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ y = x \end{cases} \qquad A = 0;\ B = 1;\ C = 1;\ D = 0$$

↳ $G(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D = \dfrac{1}{s}$

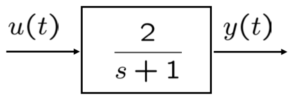


Integratore

- Esempio 3

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = 2x \end{cases} \qquad A = -1;\ B = 1;\ C = 2;\ D = 0$$

↳ $G(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D = \dfrac{2}{s+1}$



- Esempio 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D$$

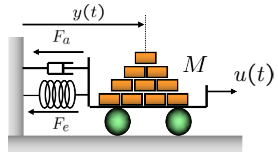
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

Doppio integratore

- Esempio 5



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{M}x_1 - \frac{h}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \;\; 0]\, x \end{cases}$$

$$G(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{h}{M} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} \begin{bmatrix} s + \frac{h}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}} [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} s + \frac{h}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} = \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

Osservazione:

$$M\ddot{y} = -h\dot{y} - ky + u \qquad y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = 0$$

$$Ms^2Y(s) = -hsY(s) - kY(s) + U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

- Proprieta` della FDT – Caso LTI SISO a tempo continuo

$$G(s) = C\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & s - a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

Matrice compl. algebrici

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

- $\det(sI - A) = \varphi(s)$ polinomio di grado n
- $K(s) = \left[k_{ij}(s),\, i, j = 1, \ldots, n\right]$

  $k_{ij}(s)$ polinomio di grado $< n, \ \forall\, i, j$
- $C\,(sI - A)^{-1}\,B = \dfrac{1}{\det(sI - A)} \underbrace{CK(s)B}_{M(s)} = \dfrac{M(s)}{\varphi(s)}$

  $M(s)$ polinomio di grado $< n$

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D$$

$$= \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

- $N(s)$ polinomio di grado n
- se $D = 0$

  $N(s)$ polinomio di grado $< n$

- In conclusione (caso SISO):

- $G(s) = \dfrac{N(s)}{\varphi(s)}$ funzione razionale (rapporto di polinomi) in s
- $\varphi(s) = \det(sI - A)$ polinomio di grado n
- $N(s)$ ha grado $m \leq n$

  $= n$ solo se $D \neq 0$

salvo cancellazioni

- Se ci sono fattori comuni:

$$G(s) = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{\varphi}(s)}$$

- $\bar{\varphi}(s)$ e` un fattore di $\varphi(s)$ di grado $\nu < n$
- $\bar{N}(s)$ ha grado $m < \nu$

  $= \nu$ solo se $D \neq 0$

- Esempio 1

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \;\; 1]\, x \end{cases} \qquad n = 2$$

$$G(s) = [1 \;\; 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \;\; 1] \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

$\bar{\varphi}(s) = s + 1$ e` un fattore di $\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{x}_1 = x_1 \;\Rightarrow\; x_1(t) = 0, \forall\, t \geq 0$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_2 = \cancel{x_1} - x_2 + u \\ y = \cancel{x_1} + x_2 \end{cases}}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

La parte della dinamica descritta da x_1 e` "nascosta"

- Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \;\; 1]\, x \end{cases} \qquad n = 2$$

$$G(s) = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \;\; 1] \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

$\bar{\varphi}(s) = s + 1$ e` un fattore di $\varphi(s) = (s+1)(s-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \boxed{\begin{array}{l} \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{array}} \end{cases}$$

questa parte della dinamica evolve senza essere influenzata dall'evoluzione di $x_1(t)$

la parte della dinamica descritta da x_1 e` "nascosta"

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Significato delle cancellazioni?

cancellazioni in $G(s)$ ⟷ presenza di parti "nascoste"

Sistemi SISO – def. alternativa di FDT
Sistemi a tempo continuo

$u(t) = \delta(t)$ $y(t)$

$x(0) = 0$

$u(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

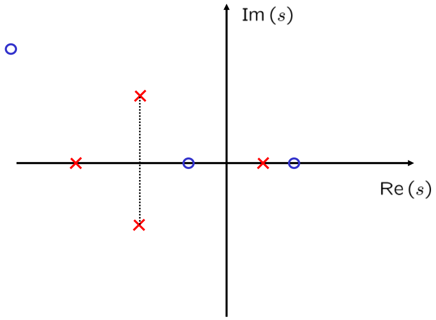
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{1} = Y(s)$$

ovvero $\quad G(s) = \mathcal{L}\left[\text{risposta all'impulso}\right]$

Poli e zeri di una FDT: sistemi a tempo continuo

$$G(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

- Poli: radici di $\varphi(s)$ ×
- Zeri: radici di $N(s)$ o



- Proprieta`

- I poli sono autovalori
- Un autovalore puo` non essere un polo in caso di cancellazioni (vedi esempi)
- La stabilita` dipende dai poli

As. stabilita` ⟷ $\text{Re}\,(\text{poli}) < 0$

salvo cancellazioni

- Nr. zeri $\leq$ Nr. poli

Parametrizzazione della FdT: Esempio

$$G(s) = \frac{4s^2 + 12s}{s^4 + 3s^3 + 2s^2}$$

Parametri:

$\beta_2 = 4,\ \beta_1 = 12,\ \beta_0 = 0$

$\alpha_4 = 1,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_1 = \alpha_0 = 0$

$$= 4\,\frac{\cancel{s}(s+3)}{s^{\cancel{2}}(s+1)(s+2)}$$

Parametri:

$\varrho = 4,\ z_1 = -3$

$p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = -2$

$$= \frac{1}{s}\,\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\,\frac{\left(1+\frac{s}{3}\right)}{(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)}$$

Parametri:

$\mu = 6,\ T_1 = 1/3$

$\tau_1 = 1,\ \tau_2 = 1/2$

- Diverse parametrizzazioni di una FDT

(1) Parametrizzazione secondo i coefficienti dei polinomi al numeratore ed al denominatore

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Parametri: $\beta_i,\ \alpha_i$

(2) Parametrizzazione secondo poli e zeri

Zeri (col segno cambiato)

$$G(s) = \varrho\,\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

costante di trasferimento

Poli (col segno cambiato)

Parametri: $\varrho,\ z_i,\ p_i$

$$G(s) = \varrho\,\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$\boxed{\text{se } z_i, p_i \in \Re,\ \forall i}$

$$= \varrho\,\frac{1}{s^g}\,\frac{\prod_{i=1}^{m} z_i\left(\frac{s}{z_i}+1\right)}{\prod_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{s}{p_i}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{s^g}\,\boxed{\varrho\,\frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{i=1}^{n} p_i}}\,\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{s}{p_i}\right)}$$

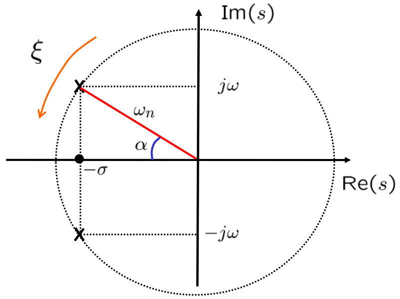
$$\underbrace{\frac{1}{z_i} = T_i \qquad \frac{1}{p_i} = \tau_i}_{\text{costanti di tempo}}$$

g tipo del sistema

μ guadagno

$g :=$ (Nr. poli in $s = 0$) - (Nr. zeri in $s = 0$)

Rappresentazione alternativa nel caso di poli/zeri complessi:



$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$
$$\omega_n \xi = \sigma$$
$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \omega$$

ω_n Pulsazione naturale

$\cos\alpha = \xi$ Smorzamento $0 \le \xi \le 1$

$$\boxed{G(s) = \frac{\varrho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Quindi dalla parametrizzazione di tipo (2) si ha:

$$G(s) = \frac{\varrho}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)} = \frac{\varrho}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\varrho}{s^2 + \underbrace{2\sigma}_{2\xi\omega_n} s + \underbrace{\sigma^2+\omega^2}_{\omega_n^2}} = \frac{\varrho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\varrho/\omega_n^2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{\mu}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

dove $\mu := \frac{\varrho}{\omega_n^2}$

Pertanto: se alcuni zeri e/o poli sono complessi si può scrivere:

$$G(s) = \frac{1}{s^g}\,\boxed{\varrho\,\frac{\prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2}}\,\frac{\prod_i\left(1+\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_i\left(1+\frac{s}{p_i}\right)}\,\frac{\prod_i\left(1+\frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}}s+\frac{1}{\alpha_{ni}^2}s^2\right)}{\prod_i\left(1+\frac{2\xi_i}{\omega_{ni}}s+\frac{1}{\omega_{ni}^2}s^2\right)}$$

g tipo del sistema

μ guadagno

$$\underbrace{\frac{1}{z_i} = T_i \qquad \frac{1}{p_i} = \tau_i}_{\text{costanti di tempo}}$$

$g :=$ (Nr. poli in $s = 0$) - (Nr. zeri in $s = 0$)

(3) Parametrizzazione secondo costanti di tempo

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g}\,\frac{\prod_i(1+T_i s)\,\prod_i\left(1+\frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}}s+\frac{1}{\alpha_{ni}^2}s^2\right)}{\prod_i(1+\tau_i s)\,\prod_i\left(1+\frac{2\xi_i}{\omega_{ni}}s+\frac{1}{\omega_{ni}^2}s^2\right)}$$

Parametri: $\mu,\ g,\ T_i,\ \tau_i,\ \zeta_i,\ \alpha_{ni},\ \xi_i,\ \omega_{ni}$

Guadagno (?!)

ha a che fare con il guadagno statico ???

- Guadagno per sistemi a tempo continuo

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D$$

$$G(s)|_{s=0} = -CA^{-1}B + D$$

- Se $g = 0$

$$\mu = G(0) = -CA^{-1}B + D = \text{ guadagno statico } \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

- In generale, se $g \neq 0$

$$\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s) \quad \text{guadagno “generalizzato”}$$

	Guadagno statico $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$	Guadagno della FDT μ
$g = 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D \quad (= G(0))$	$\mu = G(0)$
$g < 0$	$\mu = -CA^{-1}B + D = 0 \quad (= G(0))$	$\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)$
$g > 0$	NON DEFINITO	$\mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)$

Sistemi lineari a tempo discreto

Definizione di FdT e proprietà

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) + du(k) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x(0) = \bar{x} \\ u(k), k \geq 0 \end{array}$$

$$\boxed{x(k) = a^k\,\bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}\,bu(i)}$$

... con le Z-trasformate:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \mathcal{Z}\{ax(k) + bu(k)\}$$

$$zX(z) - z\,\bar{x} = aX(z) + bU(z)$$

$$(z-a)X(z) = z\,\bar{x} + bU(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}\bar{x} + \frac{b}{z-a}U(z)$$

usando la proprietà $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$

e la trasformata notevole $\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \dfrac{z}{z-a}$

$$\mathcal{Z}^{-1} \quad x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = a^k\bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}\,bu(i), k \geq 0$$

Movimento dello stato: caso generale

$$x(k) = A^k\,\bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\,Bu(i)$$

Come determino questa espressione?
Posso utilizzare anche in questo caso
la Z—trasformata?

Movimento dell'uscita: caso generale

$$y(k) = C\,A^k\,\bar{x} + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\,Bu(i) + Du(k)$$

Come determino questa espressione?
Posso utilizzare anche in questo caso
la Z—trasformata?

Z-Trasformata di un vettore

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} \triangleq \begin{bmatrix} X_1(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix}$$

- Proprietà

$$\mathcal{Z}\{A\,x(k)\} = A\mathcal{Z}\{x(k)\}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}\{x_1(k+1)\} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}\{x_n(k+1)\} \end{bmatrix} = \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} z\,(X_1(z) - x_1(0)) \\ \vdots \\ z\,(X_n(z) - x_n(0)) \end{bmatrix} = \cdots$$

$$= z\,[X(z) - x(0)]$$

- Sistemi dinamici lineari stazionari

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Operando la Z-trasformata ad ambo i membri dell' eq. di stato:

$$z\,[X(z) - x(0)] = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = z\,x(0) + BU(z)$$

NB!

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}z\,x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\boxed{Y(z) = C(zI - A)^{-1}z\,x(0) + \left[C(zI - A)^{-1}B + D\right]U(z)}$$

- Quando $x(0) = 0$

$$Y(z) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{p\times n}(\overbrace{zI - A}^{n\times n})^{-1}\overbrace{B}^{n\times m} + \overbrace{D}^{p\times m}\right]}_{\substack{p\times m \\ G(z)}} U(z)$$

Funzione di trasferimento

Per il movimento forzato dell' uscita avevamo scritto $y_f(k) = C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) + Du(k)$

In generale (m ingressi, p uscite)

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \cdots & G_{1m}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(z) & \cdots & G_{im}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(z) & \cdots & G_{pm}(z) \end{bmatrix}$$

$$Y_i(z) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(z)U_j(z)$$

$$= G_{i1}(z)U_1(z) + G_{i2}(z)U_2(z) + \cdots$$

- Quando

$$x(0) = 0$$
$$u_h(k) = 0, \; h \neq j$$

sovrapposizione degli effetti

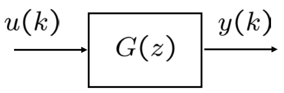
$$\boxed{G_{ij}(z) = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)}}$$

- Sistemi dinamici lineari SISO

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad u(k), y(k) \in \mathbb{R} \qquad x(0) = 0$$

$$Y(z) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{1\times n}\overbrace{(zI - A)^{-1}}^{n \times n}\overbrace{B}^{n\times 1} + \overbrace{D}^{1\times 1}\right]}_{\substack{1\times 1 \\ G(z)}} U(z)$$

Funzione di trasferimento scalare



$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}}$$

Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo discreto.

Rappresentazione Interna

$$(A, B, C, D)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Rappresentazione Esterna

$$G(z) = \left[C(zI - A)^{-1}B + D\right]$$

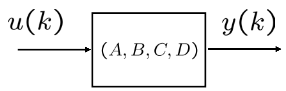
$$Y(z) = G(z)U(z)$$

(con $x(0) = 0$)

? **"Realizzazione"**

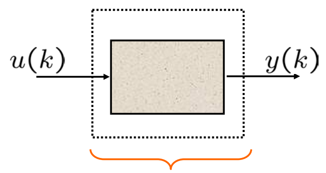
Rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo discreto.

Rappresentazione Interna



Si tiene conto della struttura "interna" del sistema

Rappresentazione Esterna



Rappresentazione IN/OUT del sistema

Funzioni di trasferimento di sistemi equivalenti

Ricordiamo: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \det(T) \neq 0$$

$$\hat{x}(k) = Tx(k), \quad x(k) = T^{-1}\hat{x}(k)$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = TAT^{-1}\hat{x}(k) + TBu(k) \\ y(k) = CT^{-1}\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + Du(k) \end{cases}$$

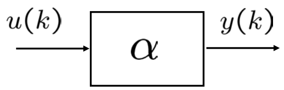
$$\begin{aligned} \hat{G}(z) &= \hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + D \\ &= C\left[T^{-1}\left(zI - TAT^{-1}\right)^{-1}T\right]B + D \\ &= C\left[T^{-1}\left(zTT^{-1} - TAT^{-1}\right)^{-1}T\right]B + D \\ &= C\left[T^{-1}\left(T(zI - A)T^{-1}\right)^{-1}T\right]B + D \\ &= C\left[T^{-1}T\,(zI - A)^{-1}T^{-1}T\right]B + D \\ &= C\left[(zI - A)^{-1}\right]B + D \\ &= G(z) \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento non dipende dalla particolare scelta di variabili di stato considerata per la rappresentazione interna!

- Esempio 1

"Le spese nell'anno k sono proporzionali al reddito nell'anno k" $\Rightarrow$ $y(k) = \alpha \cdot u(k)$

$$Y(z) = \alpha \cdot U(z)$$



$$G(z) = \alpha$$

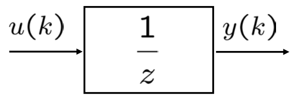
Sistema algebrico

Funzione di trasferimento puramente algebrica

- Esempio 2

$$\begin{cases} x(k+1) = u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases} \qquad A = 0; \ B = 1; \ C = 1; \ D = 0$$

$$G(z) = C\left[(zI - A)^{-1}\right]B + D = \frac{1}{z}$$



Ritardo finito (pari ad 1 passo)

- Esempio 3

$$\begin{cases} x(k+1) = -x(k) + u(k) \\ y(k) = 2x(k) \end{cases}$$

$$A = -1;\ B = 1;\ C = 2;\ D = 0$$

$$G(z) = C\left[(zI - A)^{-1}\right]B + D = \frac{2}{z+1}$$

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\frac{2}{z+1}} \longrightarrow y(k)$$

- Esempio 4

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

$$G(z) = C\left[(zI - A)^{-1}\right]B + D = \frac{1}{z-1}$$

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{z-1}} \longrightarrow y(k)$$

Integratore a tempo discreto (formula di Eulero "in avanti")

Osservazione:
funzione di trasferimento ed equazioni alle differenze

Partiamo da
$$\begin{aligned} y(k+n) &= -a_1\, y(k+n-1) - a_2\, y(k+n-2) + \dots \\ &\quad -a_n\, y(k) + b_0\, u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \dots + b_m\, u(k) \end{aligned}$$

Siano nulle tutte le condizioni iniziali ed applichiamo la Z-Trasformata ad entrambi i membri dell'espressione

$$\begin{aligned} z^n\, Y(z) &= -a_1\, z^{n-1}\, Y(z) - \cdots - a_n\, Y(z) + \\ &\quad + b_0\, z^m\, U(z) + \cdots + b_m\, U(z) \end{aligned}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0\, z^m + b_1\, z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n}$$

- Esempio 5

$$y(k+1) = y(k) + u(k+1)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k) \\ y(k) = x(k) + u(k) \end{cases}$$

$$u(k) \longrightarrow \boxed{\frac{z}{z-1}} \longrightarrow y(k)$$

Integratore discreto (formula di Eulero "all'indietro")

- Proprietà della FDT – Caso SISO

$$G(z) = C\left[(zI-A)^{-1}\right]B + D$$

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} z - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & z - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & z - a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo.

Matrice compl. algebrici

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI-A)}K(z)$$

- $\det(zI-A) = \varphi(z)$ polinomio di grado n
- $K(z) = \left[k_{ij}(z),\, i,j = 1,\ldots,n\right]$

  $k_{ij}(z)$ polinomio di grado $< n, \ \forall\, i,j$
- $C(zI-A)^{-1}B = \dfrac{1}{\det(zI-A)}\underbrace{CK(z)B}_{M(z)} = \dfrac{M(z)}{\varphi(z)}$

  $M(z)$ polinomio di grado $< n$

$$G(z) = C(zI-A)^{-1}B + D = \frac{M(z)}{\varphi(z)} + D$$
$$= \frac{M(z) + D\varphi(z)}{\varphi(z)} = \frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

- $N(z)$ polinomio di grado n
- se $D = 0$

  ↳ $N(z)$ polinomio di grado $< n$

- In conclusione (caso SISO):

- $G(z) = \dfrac{N(z)}{\varphi(z)}$ funzione razionale (rapporto di polinomi) in z
- $\varphi(z) = \det(zI-A)$ polinomio di grado n
- $N(z)$ ha grado $m \leq n$

  $= n$ solo se $D \neq 0$

salvo cancellazioni

- Se ci sono fattori comuni:

$$G(z) = \frac{\bar{N}(z)}{\bar{\varphi}(z)}$$

- $\bar{\varphi}(z)$ è un fattore di $\varphi(z)$ di grado $\nu < n$
- $\bar{N}(z)$ ha grado $m < \nu$

  $= \nu$ solo se $D \neq 0$

Valgono le medesime considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo!

- Esempio 1

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \;\; 2]\, x(k) \end{cases} \qquad n = 2$$

$$G(z) = [0 \;\; 2] \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 0 & z+\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \;\; 2] \frac{1}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} z+\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2\,\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{z+\frac{1}{2}}$$

$\bar{\varphi}(z) = z + \frac{1}{2}$ è un fattore di $\varphi(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)$

di grado $1 < 2$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - 2x_2(k) + u(k) \\ \boxed{\begin{aligned} x_2(k+1) &= -\frac{1}{2}x_2(k) + u(k) \\ y(k) &= 2x_2(k) \end{aligned}} \end{cases}$$

questa parte della dinamica evolve senza essere influenzata dall'evoluzione di $x_1(k)$

la parte della dinamica descritta da x_1 è "nascosta"

$$G(z) = \frac{2}{z+1}$$

- Significato delle cancellazioni?

cancellazioni in $G(z)$ $\Longleftrightarrow$ presenza di parti "nascoste"

Sistemi SISO
definizione alternativa di FDT

$u(k) = \delta(k)$ $\quad$ $y(k)$

$x(0) = 0$

$u(k) = \delta(k) \quad \Rightarrow \quad U(k) = \mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{1} = Y(z)$$

ovvero $\quad G(z) = \mathcal{Z}\left[\text{risposta all'impulso}\right]$

- Esempio 2

Dato il sistema descritto dall' equazione alle differenze

$$y(k+2) \;=\; 1.5\, y(k+1) - 0.5\, y(k) + u(k+1)$$

si determini la sua risposta impulsiva, a partire da condizioni iniziali tutte nulle.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 - 1.5\,z + 0.5}$$

$$U(k) = \mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$$

$$Y_{\text{imp}}(z) = \frac{z}{z^2 - 1.5\,z + 0.5}$$

$$Y_{\text{imp}}(z) = \frac{z}{(z-0.5)\,(z-1)}$$

$$\frac{Y_{\text{imp}}(z)}{z} = \frac{1}{(z-0.5)\,(z-1)} = \frac{C_{1,1}}{z-0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-1}$$

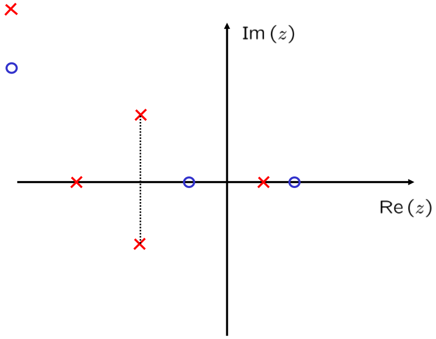
$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0.5} \frac{1}{(z-1)} = -2 \qquad C_{2,1} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-0.5)} = 2$$

$$y_{\text{imp}}(k) = -2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right] \cdot 1(k)$$

Poli e zeri di una FDT per un sistema a tempo discreto

$$G(z) = \frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

- Poli: radici di $\varphi(z)$ $\times$
- Zeri: radici di $N(z)$ $\circ$



Valgono le medesime considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo!

- Proprietà

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

- I poli sono autovalori
- Un autovalore può non essere un polo in caso di cancellazioni (vedi esempi)
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità $\Longleftrightarrow$ $|(\text{poli})| < 1$

salvo cancellazioni

- Nr. zeri $\leq$ Nr. poli

Osservazione: stabilità BIBO e stabilità interna per sistemi a tempo discreto

Ora possiamo affermare che

Stabilità asintotica

Stabilità BIBO

Solo se non ci sono cancellazioni!

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

-Diverse parametrizzazioni di una FDT per sistemi a tempo discreto

(1) Parametrizzazione secondo i coefficienti dei polinomi al numeratore ed al denominatore

$$G(z) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

Parametri: $\beta_i, \; \alpha_i$

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

(2) Parametrizzazione secondo poli e zeri

Zeri

$$G(z) = \gamma \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

costante di trasferimento

Poli

Parametri: $\gamma, \; z_i, \; p_i$

$$G(z) = \gamma \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

se $z_i, p_i \in \mathbb{R}, \forall\, i$

$$= \boxed{\gamma} \frac{1}{(z-1)^{g}} \frac{\prod_i (z-z_i)}{\prod_i (z-p_i)}$$

Fattorizzo mettendo in evidenza il termine $(z-1)^g$

γ costante di trasferimento

g tipo del sistema

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le FDT di sistemi a tempo continuo!

g := (Nr. poli in $z = 1$) - (Nr. zeri in $z = 1$)

Se alcuni zeri e/o poli sono complessi si generalizza così:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^{g}} \boxed{\gamma} \frac{\prod_i (z-z_i)}{\prod_i (z-p_i)} \frac{\prod_i \left(z^2 - 2\varphi_i \cos(\zeta_i)\, z + \varphi_i^2\right)}{\prod_i \left(z^2 - 2\psi_i \cos(\vartheta_i)\, z + \psi_i^2\right)}$$

$z_i \in \mathbb{C}, \quad z_i = \varphi_i e^{\zeta_i}$

$p_i \in \mathbb{C}, \quad p_i = \psi_i e^{\vartheta_i}$

g tipo del sistema

γ costante di trasferimento

g := (Nr. poli in $z = +1$) - (Nr. zeri in $z = +1$)

Esempio

$$G(z) = \frac{4z^2 + 12z}{z^4 + z^3 - 2z^2}$$

Parametri:

$\beta_2 = 4,\ \beta_1 = 12,\ \beta_0 = 0$

$\alpha_4 = 1,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_1 = \alpha_0 = 0$

$$= 4 \frac{\cancel{z}(z+3)}{z^{\cancel{2}}(z-1)(z+2)}$$

Parametri:

$\gamma = 4,\ z_1 = -3$

$p_1 = 0,\ p_2 = 1,\ p_3 = -2$

- Guadagno: definizione per sistemi a tempo discreto

$$G(z) = C\,(zI - A)^{-1}\,B + D$$

$$G(z)|_{z=1} = ?$$

- Se $g = 0$

  $\mu = G(1) = C(I-A)^{-1}B + D =$ guadagno statico $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$

- In generale, se $g \neq 0$

  $\mu = \lim_{z \to 1} (z-1)^g G(z)$ guadagno "generalizzato"

	Guadagno statico $\frac{\bar{y}}{\bar{u}}$	**Guadagno della FDT** μ
$g = 0$	$\boxed{\mu = C(I-A)^{-1}B + D \quad (= G(1))}$	$\boxed{\mu = G(1)}$
$g < 0$	$\mu = C(I-A)^{-1}B + D = 0 \; (= G(1))$	$\mu = \lim_{z \to 1} (z-1)^{-g} G(z)$
$g > 0$	NON DEFINITO	$\mu = \lim_{z \to 1} (z-1)^{-g} G(z)$