Stabilità di sistemi interconnessi

Introduzione

- Assegnato un sistema dinamico LTI descritto tramite uno schema a blocchi (a tempo continuo oppure a tempo discreto), che cosa si può dire della stabilità (**stabilità interna e stabilità BIBO**) del sistema nel suo complesso?

- La **struttura** dello schema agevola l'analisi di stabilità?
  - Esistono delle configurazioni in cui la **stabilità del sistema interconnesso** e' **garantita**, se i sottosistemi elementari sono stabili?
  - Esistono configurazioni in cui questa proprietà non e' valida?

Tempo continuo vs tempo discreto

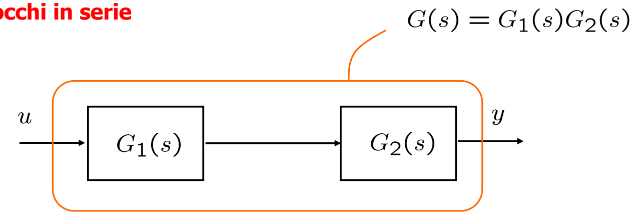
- I **risultati** a cui arriveremo saranno **validi** sia per **sistemi a tempo continuo** che **a tempo discreto**.

- Per semplicità allora analizziamo in dettaglio solo il caso a tempo continuo, riportando poi i risultati del caso a tempo discreto.

Sistemi interconnessi a tempo continuo

Analisi di stabilità

- Blocchi in serie



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Caso 1: assenza di fattori comuni

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Poli di } G_1(s) \right\} \cup \left\{ \text{Poli di } G_2(s) \right\}$$

$G(s)$ asint. stabile $\Longleftrightarrow$ $G_1(s),\, G_2(s)$ asint. stabili

- Caso 2: presenza di fattori comuni

- Cancellazioni con $\mathrm{Re}(\text{poli "cancellati"}) < 0$

Dinamica "nascosta" asint. stabile

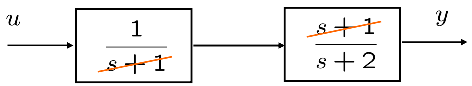
- Cancellazioni con $\mathrm{Re}(\text{poli "cancellati"}) \geq 0$

Dinamica "nascosta" non asint. stabile

Il sistema non e` asint. stabile anche se $G(s)$ non lo mostra

- Esempi

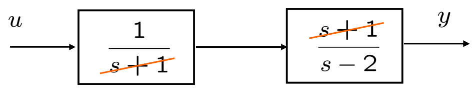
1)



$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Asint. stabile

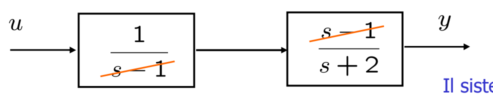
2)



$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

Instabile

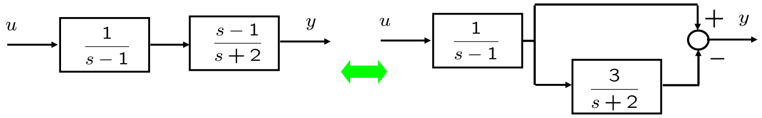
3)



$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Il sistema e` instabile anche se $G(s)$ non lo mostra

Infatti:

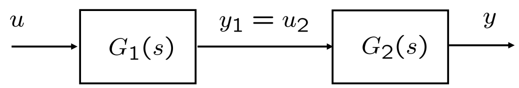


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Autovalore > 0

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1]\, x \end{cases}$$

- Blocchi in serie: analisi nel tempo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y_1 = A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 + b_2 d_1 u \\ y = c_2 x_2 + d_2 y_1 \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1(sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1 \qquad G_2(s) = c_2(sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{bmatrix} u \\ y = [d_2 c_1 \quad c_2]\, x + d_1 d_2 u \end{cases}$$

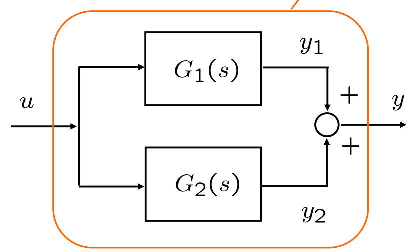
- Conclusione blocchi in serie

- Sistema complessivo asintoticamente stabile ⟺ Sottosistemi asintoticamente stabili

- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in serie

- Blocchi in parallelo

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$



$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Caso 1: assenza di fattori comuni

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Poli di } G_1(s) \right\} \cup \left\{ \text{Poli di } G_2(s) \right\}$$

$G(s)$ asint. stabile $\Longleftrightarrow$ $G_1(s),\ G_2(s)$ asint. stabili

- Caso 2: presenza di fattori comuni

- Cancellazioni con $\mathrm{Re}\,(\text{poli "cancellati"}) < 0$

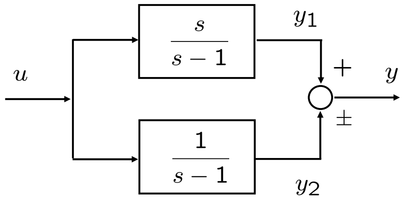
Dinamica "nascosta" asint. stabile

- Cancellazioni con $\mathrm{Re}\,(\text{poli "cancellati"}) \geq 0$

Dinamica "nascosta" non asint. stabile

Il sistema non e` asint. stabile
anche se $G(s)$ non lo mostra

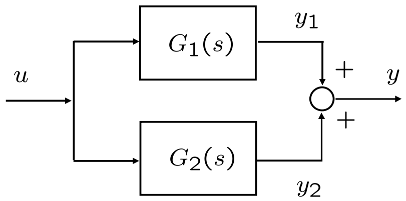
- Esempio



$(+)\quad G(s) = \dfrac{s+1}{s-1}$ Instabile

$(-)\quad G(s) = 1$ Il sistema e` instabile anche se $G(s)$ non lo mostra

- Blocchi in parallelo: analisi nel tempo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u \\ y_2 = c_2 x_2 + d_2 u \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1 \qquad G_2(s) = c_2 (sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \quad c_2]\, x + (d_1 + d_2)\, u \end{cases}$$

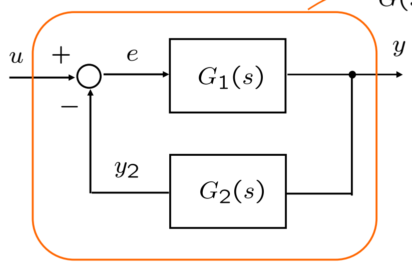
- Conclusione blocchi in parallelo

- Sistema complessivo asintoticamente stabile $\Longleftrightarrow$ Sottosistemi asintoticamente stabili

- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in parallelo

- Blocchi in retroazione

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



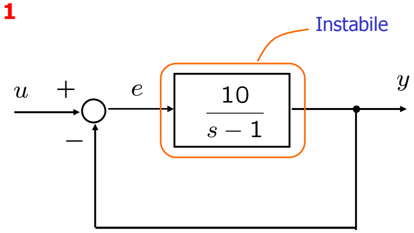
$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \dfrac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

- Anche in assenza di fattori comuni

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Radici di } D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) \right\}$$

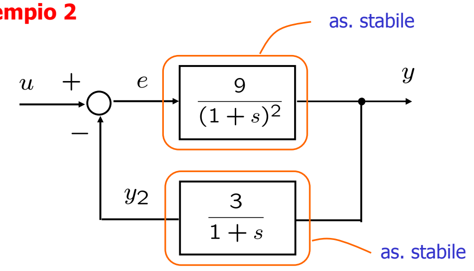
$\Rightarrow$ $G(s)$ asint. stabile $\not\Leftrightarrow$ $G_1(s),\ G_2(s)$ asint. stabili

- Esempio 1



$$G(s) = \frac{\dfrac{10}{s-1}}{1 + \dfrac{10}{s-1}} = \frac{\dfrac{10}{s-1}}{\dfrac{s-1+10}{s-1}} = \frac{10}{s+9}$$ Asint. stabile

- Esempio 2



$$G(s) = \frac{\frac{9}{(1+s)^2}}{1 + \frac{27}{(1+s)^3}} = \frac{9(1+s)}{(1+s)^3 + 27}$$

$$\varphi(s) = (1+s)^3 + 27 = s^3 + 3s^2 + 3s + 28$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 28 & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & 0 \\ 4 & \beta & 0 & 0 \end{array}$$

r_4

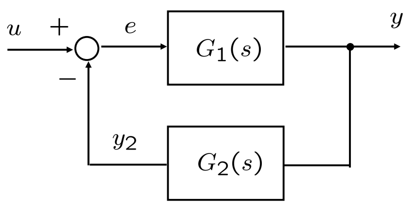
$$\alpha = -\frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 28 \end{bmatrix} = -\frac{19}{3}$$

$$\beta = 28$$

Due variazioni di segno in r_4

Instabilita`

- Blocchi in retroazione: analisi nel tempo



$e = u - y$

$d_1 = d_2 = 0$

Perche` (es. a casa)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 e \\ y = c_1 x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y \\ y_2 = c_2 x_2 \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1(sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1 \qquad G_2(s) = c_2(sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -b_1 c_2 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \;\; 0]\, x \end{cases}$$

- Conclusione blocchi in retroazione

- Sistema complessivo asintoticamente stabile $\not\Leftrightarrow$ Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori cambiano a causa della connessione in retroazione

Sistemi interconnessi a tempo discreto

Analisi di stabilità: i risultati

Tempo discreto: blocchi in serie

- Sistema complessivo asintoticamente stabile ⟺ Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in serie

A tempo discreto sistema as. stabile significa che gli autovalori …

Per le **cancellazioni** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso di sistemi a tempo continuo.

Esempi

1)

$$u \rightarrow \boxed{\frac{1}{\cancel{z+0.1}}} \rightarrow \boxed{\frac{\cancel{z+0.1}}{z-0.5}} \rightarrow y \qquad G(z) = \frac{1}{z-0.5}$$

Asint. stabile

2)

$$u \rightarrow \boxed{\frac{1}{\cancel{z-0.5}}} \rightarrow \boxed{\frac{\cancel{z-0.5}}{z-2}} \rightarrow y \qquad G(z) = \frac{1}{z-2}$$

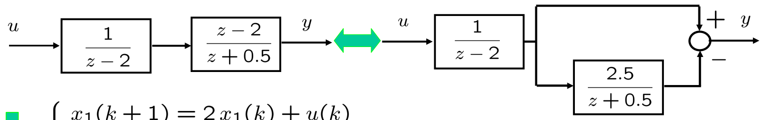
Instabile

3)

$$u \rightarrow \boxed{\frac{1}{\cancel{z-2}}} \rightarrow \boxed{\frac{\cancel{z-2}}{z+0.5}} \rightarrow y \qquad G(z) = \frac{1}{z+0.5}$$

Il sistema è instabile anche se $G(z)$ non lo mostra

Infatti:



$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2\,x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 2.5\,x_1(k) - 0.5\,x_2 \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

|Autovalore| > 1

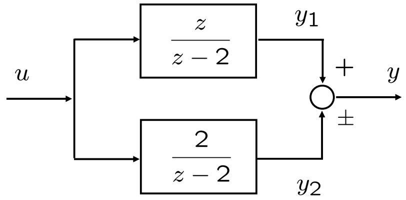
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \;\; 1]\, x(k) \end{cases}$$

Tempo discreto: blocchi in parallelo

- Sistema complessivo asintoticamente stabile ⟺ Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in parallelo

Per le **cancellazioni** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso di sistemi a tempo continuo.

Esempio



$(+) \quad G(z) = \frac{z+2}{z-2}$ Instabile

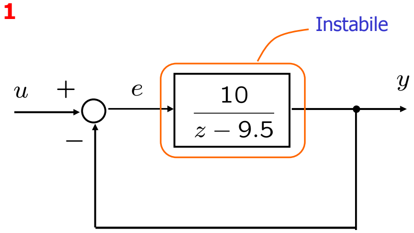
$(-) \quad G(z) = 1$ Il sistema è instabile anche se $G(z)$ non lo mostra

Tempo discreto: blocchi in retroazione

- Sistema complessivo asintoticamente stabile ~~⟺~~ Sottosistemi asintoticamente stabili
- Gli autovalori cambiano a causa della connessione in retroazione!

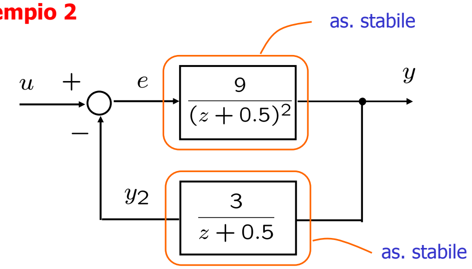
Per le **cancellazioni** valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso di sistemi a tempo continuo.

- Esempio 1



$$G(z) = \frac{\frac{10}{z-9.5}}{1+\frac{10}{z-9.5}} = \frac{\frac{10}{z-9.5}}{\frac{z-9.5+10}{z-9.5}} = \frac{10}{z+0.5}$$ Asint. stabile

- Esempio 2



$$G(z) = \frac{\dfrac{9}{(z+0.5)^2}}{1 + \dfrac{27}{(z+0.5)^3}} = \frac{9(z+0.5)}{(z+0.5)^3 + 27}$$

$$\varphi(z) = (z+0.5)^3 + 27 = z^3 + 1.500z^2 + 0.750z + 27.125$$

Per i criteri di as. stabilità, questo polinomio caratteristico è instabile!

Infatti

$$\begin{aligned} z_1 &= -3.5000 \\ z_2 &= 1.0000 + 2.5981\,j \\ z_3 &= 1.0000 - 2.5981\,j \end{aligned}$$

Trasformazione bilineare $z = \dfrac{w+1}{w-1}$

$$q(w) = 30.375\,w^3 - 77.625\,w^2 + 82.125\,w - 26.875$$

Criterio di Routh

3	30.375	82.125
2	−77.625	−26.875
1	71.6087	
0	−26.875	

3 variazioni di segno: instabile! Tutte le radici di $\varphi(z)$ hanno modulo maggiore dell'unità.