Studio di sistemi dinamici tramite FdT

Risposta transitoria e risposta a regime

Alcune definizioni e richiami

- Consideriamo un **sistema LTI**, a tempo continuo oppure a tempo discreto, **asintoticamente stabile** (**as. s.**) (cfr. Parte 3, 4 e 6) e supponiamo che il sistema si trovi inizialmente nello stato nullo (**condizioni iniziali nulle**).
- Se si applica ora al sistema un **ingresso qualsiasi** (anche non limitato), che cosa si può dire dell'evoluzione dell'uscita del sistema in risposta a tale sollecitazione in ingresso?
- Cominciamo analizzando il caso dei sistemi a tempo continuo. Nel caso di sistemi a tempo discreto si potranno fare considerazioni analoghe.

Sistema a tempo continuo as. s. : risposta transitoria e risposta a regime

- Consideriamo un **sistema a tempo continuo as. s. completamente descritto dalla funzione di trasferimento**

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

  (cioè **non ci sono cancellazioni**) ed applichiamo al sistema un ingresso qualsiasi (anche non limitato) $u(t)$ [ma che ammetta trasformata di Laplace razionale].
- Per la risposta (ancora in termini di trasformata di Laplace) vale che

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s)$$

- Ora, mettendo in evidenza nella scomposizione "in fratti semplici" della trasformata di Laplace della risposta Y(s) i termini associati a poli asintoticamente stabili, semplicemente stabili ed instabili si ottiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i}{s-p_i}\right] + \ldots$$

Contributo alla risposta dei poli as. stabili.

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j}{s-p_j}\right] + \ldots$$

Contributo alla risposta dei poli sempl. stabili.

$$+ \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k}{s-p_k}\right]$$

Contributo alla risposta dei poli instabili.

- Il contributo alla risposta dovuto ai termini associati ai poli a parte reale negativa è un contributo che svanisce a tempo lungo, poiché tende a zero al crescere del tempo:
  - **Risposta transitoria**

$$y_{\text{trans.}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i}{s-p_i}\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

- I contributi alla risposta dovuti ai termini associati ai poli sempl. stabili oppure instabili (sono termini da imputare al segnale d'ingresso) certamente non tendono a zero al crescere del tempo: in realtà man mano che il tempo passa la risposta diviene sempre più simile a quella ottenibile dai soli contributi considerati
  - **Risposta a regime permanente**

$$y_{\text{reg.}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j}{s-p_j}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k}{s-p_k}\right]$$

Un esempio

- Si applica al sistema $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{(s+2)(s+10)}$

  in condizioni iniziali nulle, l'ingresso

$$u(t) = 4\,t \cdot 1(t)$$

- Espressa tramite la trasformata di Laplace, la risposta del sistema è data dall'espressione (si tratta della risposta forzata del sistema [cfr. Parte 2, slide 53-54]):

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+10)} \cdot \frac{4}{s^2}$$

- In base a quanto visto finora, nella risposta del sistema sono identificabili le parti:
  - **Risposta transitoria** $Y_{\text{trans.}}(s) = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{9}{100}\cdot\dfrac{1}{s+10}$

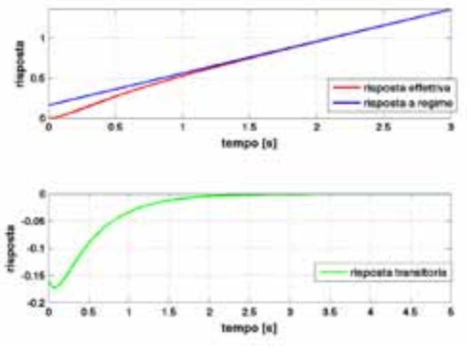
$$y_{\text{trans.}}(t) = \left[-\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{9}{100}e^{-10t}\right]\cdot 1(t)$$

  - **Risposta a regime permanente**

$$Y_{\text{reg.}}(s) = \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$y_{\text{reg.}}(t) = \left[\frac{4}{25} + \frac{2}{5}t\right]\cdot 1(t)$$

- Graficamente l'evoluzione della risposta è



Sistema a tempo discreto as. s. : risposta transitoria e risposta a regime

- Consideriamo ora invece un **sistema a tempo discreto, as. s. completamente descritto dalla funzione di trasferimento**

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

(cioè **non ci sono cancellazioni**) ed applichiamo al sistema un ingresso qualsiasi (anche non limitato) $u(k)$ [ma che ammetta Z-trasformata razionale].
- Per la risposta (espressa in termini di Z-trasformata) vale che

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot U(z)$$

- Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso a tempo continuo.
- Mettendo in evidenza nella scomposizione "in fratti semplici" i termini associati a poli asintoticamente stabili, semplicemente stabili ed instabili si ottiene

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i\, z}{z-p_i}\right] + \ldots$$

Contributo alla risposta dei poli as. stabili.

$$+ \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j\, z}{z-p_j}\right] + \ldots$$

Contributo alla risposta dei poli sempl. stabili.

$$+ \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{l=1}^{n_{inst.}} \frac{R_l\, z}{z-p_l}\right]$$

Contributo alla risposta dei poli instabili.

- Il contributo alla risposta dovuto ai termini associati ai poli a modulo inferiore all'unità è un contributo che svanisce a tempo lungo, poiché tende a zero al crescere del tempo:
  - **Risposta transitoria**

$$y_{\text{trans.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i\, z}{z-p_i}\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

- I contributi alla risposta dovuti ai termini associati ai poli sempl. stabili oppure instabili (sono termini da imputare al segnale d'ingresso) certamente non tendono a zero al crescere del tempo: in realtà man mano che il tempo passa la risposta diviene sempre più simile a quella ottenibile dai soli contributi considerati
  - **Risposta a regime permanente**

$$y_{\text{reg.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j\, z}{z-p_j}\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k\, z}{z-p_k}\right]$$

Riassumendo: sistemi LTI as. s. a tempo continuo ed a tempo discreto

- La **risposta in regime permanente** è soltanto una situazione **asintotica**, alla quale la risposta effettiva converge al crescere del tempo.

- La differenza tra risposta effettiva e risposta in regime permanente viene chiamata **risposta in regime transitorio** (o **risposta transitoria**). Quest'ultima tende effettivamente a zero al crescere del tempo.

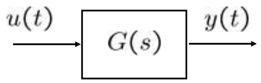
Studio dei sistemi dinamici tramite FdT

Risposta in frequenza
per sistemi LTI a tempo continuo

- Risposta alla sinusoide

$x(0) = 0$

$u(t) = A\sin(\omega t)1(t)$



$$\Rightarrow \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+sT_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1+s\tau_i)}$$

Hp: as. stabilita`

$$Y(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = G(s)\frac{A\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

Supponiamo per semplicita` che tutti i poli siano reali distinti

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \underbrace{\frac{\alpha_1}{1+s\tau_1}+\frac{\alpha_2}{1+s\tau_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{1+s\tau_n}}_{Y_1(s)}+\underbrace{\frac{\beta s+\gamma}{s^2+\omega^2}}_{Y_2(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad y(t) = \boxed{y_1(t)} + y_2(t) \qquad t \geq 0$$

$$y_1(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \quad \text{(as. stabilita`)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{Per} \quad t\to\infty \quad \text{(a transitorio esaurito)} \quad y(t) \simeq y_2(t)}$$

- Calcolo di $y_2(t)$

$$Y(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = G(s)\frac{A\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad y(t) \simeq y_2(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t} \qquad t \geq 0$$

$$k_1 = G(s)\frac{A\omega}{s+j\omega}\Big|_{s=j\omega} = \frac{A}{2j}G(j\omega)$$

$$k_2 = G(s)\frac{A\omega}{s-j\omega}\Big|_{s=-j\omega} = -\frac{A}{2j}G(-j\omega)$$

- Si dimostra che $G(s^*) = G^*(s)$ $\Rightarrow$ $G(j\omega) = G^*(-j\omega)$

- Scriviamo ora i numeri complessi $G(j\omega), G^*(-j\omega)$ in termini di modulo ed argomento, cioe`:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

dove $\varphi(\omega) := \arg G(j\omega)$

$$G(-j\omega) = G^*(j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$y(t) \simeq y_2(t) = A|G(j\omega)| \frac{e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi(\omega)} - e^{-j\omega t} \cdot e^{-j\varphi(\omega)}}{2j}$$

$$= A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j}$$

$$= A \cdot |G(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)], \; t \geq 0$$

- Teorema Risposta in Frequenza (AS. STAB.)

$$u(t) = A \sin(\omega t) 1(t)$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

A transitorio esaurito (in pratica per $t > t_a$)

$$y(t) \simeq B \sin(\omega t + \varphi)$$

Stessa pulsazione sinusoide in ingresso!

dove $B = |G(j\omega)| \cdot A$

$\varphi = \arg G(j\omega)$

- Definizione Risposta in Frequenza

$G(j\omega)\,, \quad \omega \geq 0$ funzione complessa di variabile reale

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{1}{1+s} \qquad u(t) = 10 \sin(2t) 1(t)$$

$$A = 10; \; \omega = 2 \text{rad}/s$$

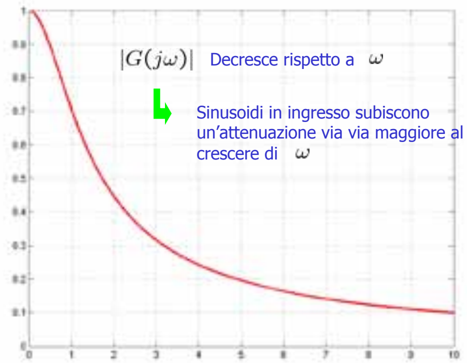
$$G(j2) = \frac{1}{1+2j} = \frac{1-2j}{(1-2j)(1+2j)} = \frac{1-2j}{5} = \frac{1}{5} - j\frac{2}{5}$$

$$|G(j2)| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \simeq 0.447$$

$$\arg G(j2) = \text{arctg}\,(-2) = -63^\circ = -63^\circ \frac{\pi}{180} \simeq -1.1$$

$$y(t) \simeq \frac{10}{\sqrt{5}} \sin(2t - 1.1)\,, \; t > t_a \simeq 5$$

$|G(j\omega)|$



ω

$|G(j\omega)|$ Decresce rispetto a ω

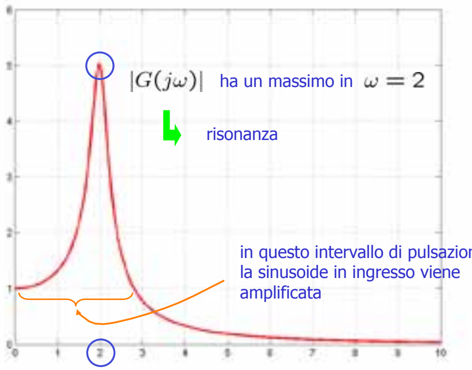
Sinusoidi in ingresso subiscono un'attenuazione via via maggiore al crescere di ω

- Esempio 2

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + \frac{s^2}{4}}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\left|1 + j0.1\omega + \frac{(j\omega)^2}{4}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right)^2 + 0.01\omega^2}}$$

$|G(j\omega)|$



ω

$|G(j\omega)|$ ha un massimo in $\omega = 2$

risonanza

in questo intervallo di pulsazioni la sinusoide in ingresso viene amplificata

- Estensioni del Teorema Risposta in Frequenza

- $u(t)$ multi-sinusoidale
- $u(t)$ periodico
- $u(t)$ "generico"

- Ingresso multi-sinusoidale

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sin(\omega_k t + \gamma_k)$$

Sovrapposizione effetti + teo. risposta in frequenza

(a transitorio esaurito)

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k\,|G(j\omega_k)|\,\sin[\omega_k t + \gamma_k + \arg G(j\omega_k)]$$

$$t \geq 0$$

- Ingresso periodico di periodo T

Serie di Fourier

$$u(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t + \gamma_k)\,, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sovrapposizione effetti + teo. risposta in frequenza

(a transitorio esaurito)

$$y(t) = G(0)c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,|G(jk\omega_0)|\,\sin[k\omega_0 t + \gamma_k + \arg G(jk\omega_0)]$$

$$t \geq 0$$

- Ingresso "generico"

Sotto ipotesi blande si puo` scrivere

Integrale di Fourier

$$u(t) = \int_0^{\infty} \underbrace{C(\omega)}_{\text{Spettro di ampiezza}}\,\sin[\omega t + \underbrace{\gamma(\omega)}_{\text{Spettro di fase}}]d\omega$$

Sovrapposizione effetti + teo. risposta in frequenza

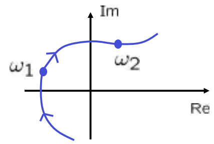
(a transitorio esaurito)

$$y(t) = \int_0^{\infty} \underbrace{C(\omega)\,|G(j\omega)|}_{C'(\omega)}\,\sin[\omega t + \underbrace{\gamma(\omega) + \arg G(j\omega)}_{\gamma'(\omega)}]d\omega \qquad t \geq 0$$

- Rappresentazioni grafiche della r.i.f.

- Diagramma polare

  $G(j\omega)\,, \quad \omega \geq 0$

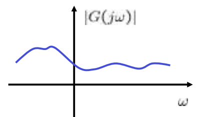


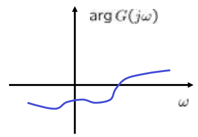
- Diagrammi di Bode

  $|G(j\omega)|\,, \quad \omega \geq 0$

  $\arg G(j\omega)\,, \quad \omega \geq 0$

  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

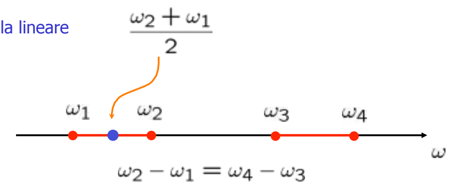




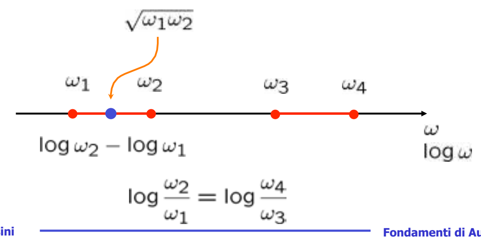
- Diagrammi di Bode: convenzioni

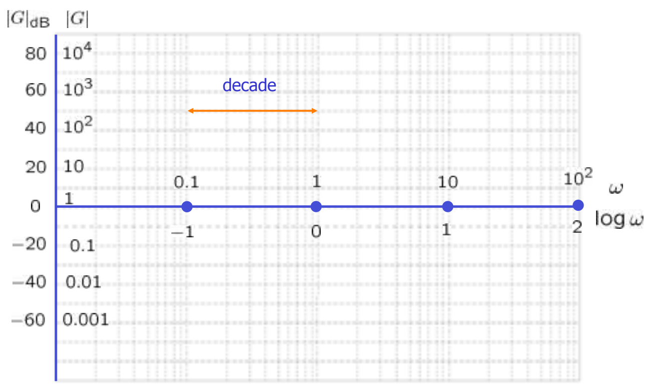
- Modulo
  - ascisse: $\log \omega$
  - ordinate: $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ $\quad (x_{\text{dB}} := 20 \log x)$
- Fase
  - ascisse: $\log \omega$
  - ordinate: $\arg G(j\omega)$ in gradi

- Scala lineare



- Scala logaritmica





- Diagrammi di Bode: Modulo

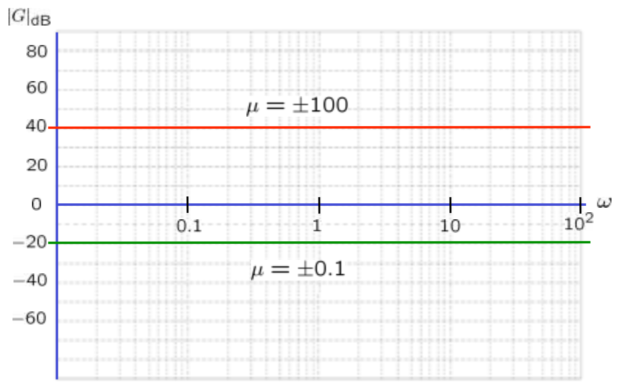
$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^{n} (1 + s\tau_i)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \frac{\prod_{i=1}^{m} |1 + j\omega T_i|}{\prod_{i=1}^{n} |1 + j\omega\tau_i|}$$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \underbrace{\boxed{20 \log |\mu|}}_{\text{(A)}} \underbrace{\boxed{-20 \log |j\omega|^g}}_{\text{(B)}} + \sum_i \boxed{20 \log |1 + j\omega T_i|} - \sum_i \boxed{20 \log |1 + j\omega\tau_i|}$$

(C),(D)

(A) $\boxed{20 \log |\mu|}$ retta costante

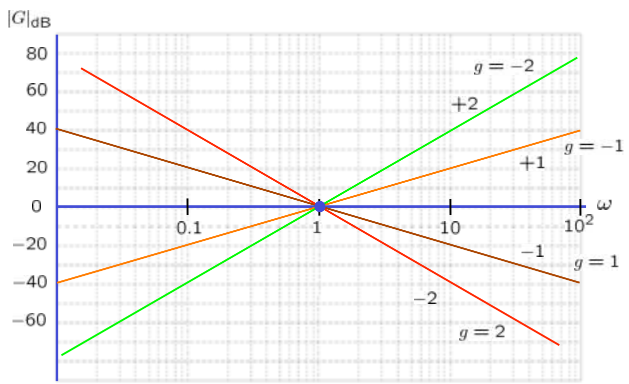


(B) $\boxed{-20 \log |j\omega|^g}$

$$-20 \log |j\omega|^g = -20\, g \underbrace{\log \omega}_{x}$$

Per convenzione:

retta con pendenza [–20 g dB/decade] passante per 0 dB in $\omega = 1$



(C) $\boxed{20 \log |1 + j\omega T|}$

$-$Caso $T \in \Re$

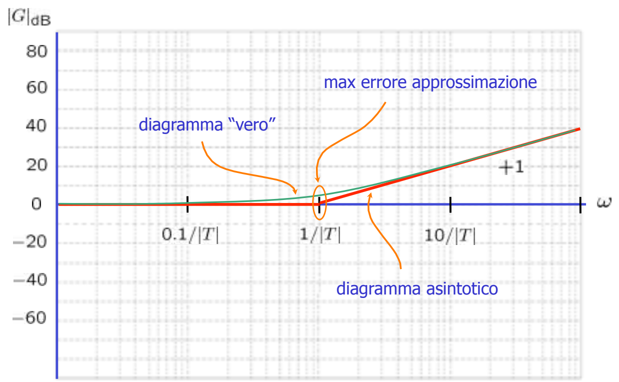
$$20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

- Se $\omega^2 T^2 << 1$ ovvero $\omega << \dfrac{1}{|T|}$

$$20 \log |1 + j\omega T| \simeq 0$$

- Se $\omega^2 T^2 >> 1$ ovvero $\omega >> \dfrac{1}{|T|}$

$$\begin{aligned} 20 \log |1 + j\omega T| &\simeq 20 \log |j\omega T| \\ &= 20 \log \omega |T| \\ &= 20 \underbrace{\log \omega}_{x} + 20 \log |T| \end{aligned}$$



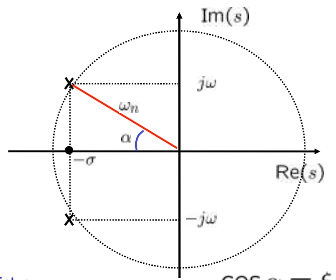
Errore di approssimazione in $\omega = \dfrac{1}{|T|}$

$$20 \log \sqrt{2} = 10 \log 2 \simeq 3 \, \text{dB}$$

(D) $\boxed{20 \log |1 + j\omega T| + 20 \log |1 + j\omega T^*|}$

$-$Caso $T \in \mathcal{C}$

$$(1 + sT)(1 + sT^*)$$
$$= 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2$$



$\cos \alpha = \xi$

$0 < \xi < 1$ semipiano sinistro

$-1 < \xi < 0$ semipiano destro

$$20\log|1+j\omega T| + 20\log|1+j\omega T^*|$$

$$= 20\log\left|1+\frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right| \quad = 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Se $\omega \to 0$

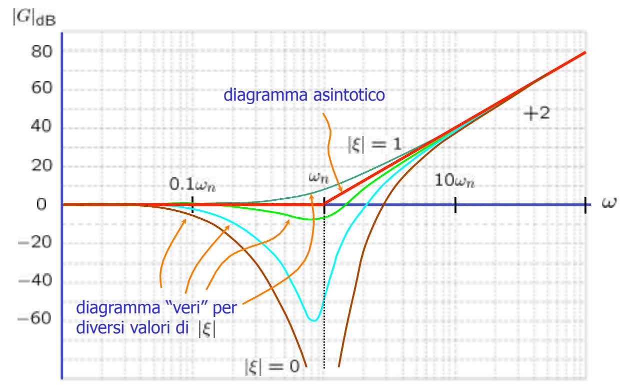
↳ $$20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \simeq 0$$

- Se $\omega \to \infty$

↳ $$20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\simeq 20\log\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = 20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \quad = 40\log\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$= \underbrace{40\log\omega}_{x} - 40\log\omega_n$$



Errore di approssimazione in $\omega = \omega_n$

↳ $$20\log\sqrt{4\xi^2} = 20\log(2|\xi|)$$

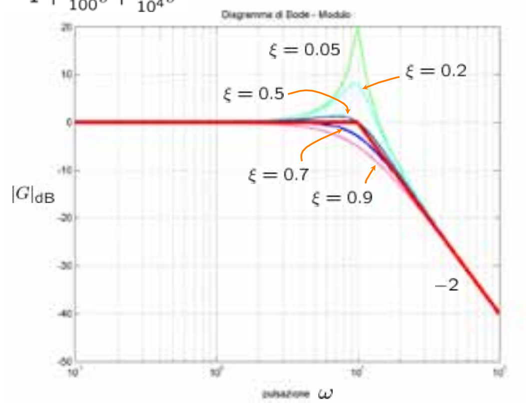
- Se $|\xi| = 1$

  ↳ $20\log(2) \simeq 6\mathrm{dB}$

- Se $\xi \to 0$

  ↳ $\to -\infty$

$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{2\xi}{100}s+\frac{1}{10^4}s^2}$$



- Regole per il tracciamento del diagr. asint. del modulo

- Pendenza iniziale $-g$
- Tratto iniziale passa in $\omega = 1$ per $|\mu|_{\text{dB}}$
- Cambi di pendenza in corrispondenza di poli e zeri:
  - zero $+1$
  - polo -1
- Pendenza finale = nr. zeri – nr. poli ≤ 0

  $= 0$ solo se $G(s)$ non str. propria

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{100(1+10s)}{s(1+2s)(1+0.4s+s^2)}$$

$g = 1$

$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$

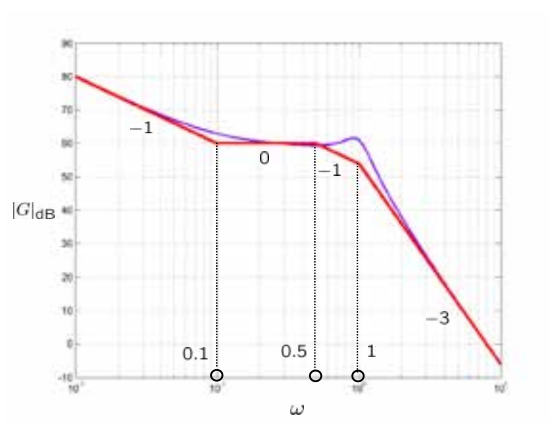
$z_1 = -0.1$

$p_1 = 0$

$p_2 = -0.5$

$p_{3,4} = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$

$\omega_n = 1;\ \xi = 0.2$



- Esempio 2

$$G(s) = \frac{100(1+10s)}{s(1+s)^2}$$

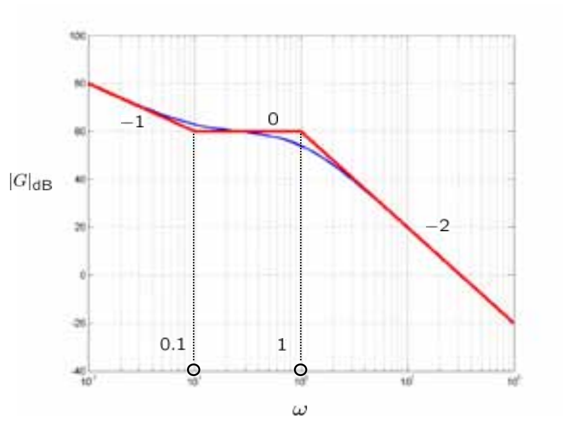
$g = 1$

$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$

$z_1 = -0.1$

$p_1 = 0$

$p_2 = p_3 = -1$



- Esempio 3

$$G(s)=\frac{0.1s(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

$g=-1$

$\mu=0.1 \implies \mu_{\mathrm{dB}}=-20\mathrm{dB}$

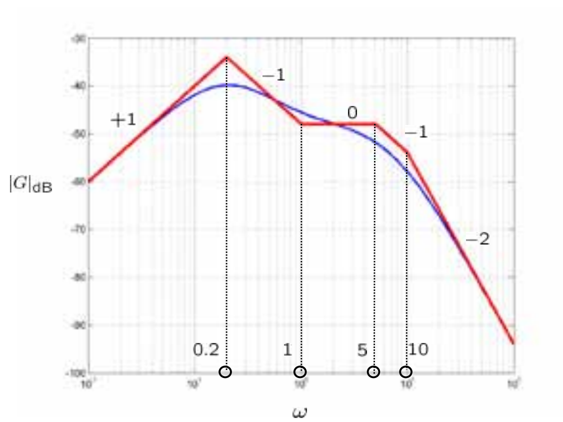
$z_1=0$

$z_2=-1$

$p_1=p_2=-0.2$

$p_3=-5$

$p_4=+10$



- Esempio 4

$$G'(s)=\frac{50(1+0.4s)}{(1+10s)(1+0.2s+s^2)}$$

$$G''(s)=\frac{50(1+0.4s)}{(1+10s)(1+1.6s+s^2)}$$

$g=0$

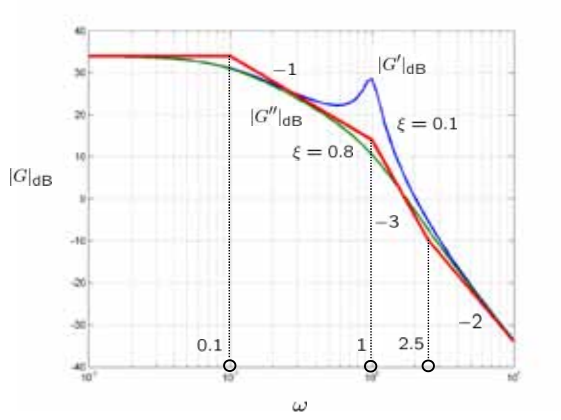
$\mu=50 \implies \mu_{\mathrm{dB}}\simeq 34\mathrm{dB}$

$z_1=-2.5$

$p_1=-0.1$

$p'_{2,3}=-0.1\pm j\sqrt{0.99};\ \omega_n=1,\ \xi=0.1$

$p''_{2,3}=-0.8\pm j\sqrt{0.36};\ \omega_n=1,\ \xi=0.8$

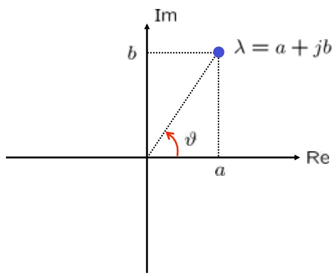


- Diagrammi di Bode: Fase

- ascisse: $\log \omega$
- ordinate: $\arg G(j\omega)$ in gradi

- Argomento di un numero complesso

$\arg\lambda = \vartheta \pm k360°$



Si impone per convenzione:

$|\arg\lambda| \leq 180°$

e se $\lambda \in \Re,\ \lambda < 0$ si impone per convenzione: $\arg\lambda = -180°$

(Funzione atan2 di Matlab)

- Se $a > 0$

$$\arg\lambda = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$$

- Se $a < 0$
  $b > 0$

$$\arg\lambda = \text{arctg}\,\frac{b}{a} + 180°$$

- Se $a < 0$
  $b < 0$

$$\arg\lambda = \text{arctg}\,\frac{b}{a} - 180°$$

- Argomento di un numero complesso: Proprieta`

- $\arg(\lambda\eta) = \arg(\lambda) + \arg(\eta)$
- $\arg(\lambda^k) = k \arg(\lambda)$
- $\arg\left(\frac{\lambda}{\eta}\right) = \arg(\lambda) - \arg(\eta)$

Quindi l'argomento di un numero complesso segue regole analoghe a quelle del logaritmo nel caso del modulo

- Diagrammi di Bode: Argomento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^{m}(1+sT_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1+s\tau_i)}$$

$$\arg G(j\omega) = \boxed{\arg \mu} \quad \text{(A)}$$

$$\boxed{-\arg(j\omega)^g} \quad \text{(B)}$$

$$+\sum_i \boxed{\arg(1+j\omega T_i)}$$

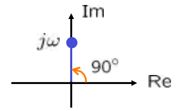
$$-\sum_i \boxed{\arg(1+j\omega\tau_i)} \quad \text{(C),(D)}$$

(A) $\boxed{\arg(\mu)}$

$0°$	$\mu > 0$
$-180°$	$\mu < 0$

retta costante

(B) $\boxed{-\arg(j\omega)^g}$



$$-\arg(j\omega)^g = -g \arg(j\omega) = -g\,90°$$

retta costante

(C) $\boxed{\arg(1 + j\omega T)}$

$\arg(1 + j\omega T) = \text{arctg}\,\omega T \quad T$ reale

- Se $\omega \to 0$

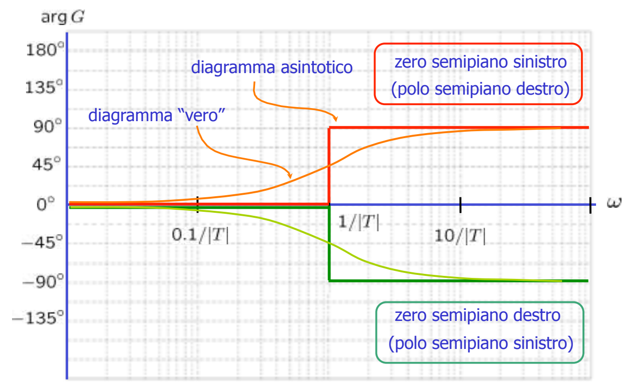
  $\arg(1 + j\omega T) \to 0°$

- Se $\omega \to \infty$

  $\arg(1 + j\omega T)$ $\to 90°$ se $T > 0$; $\to -90°$ se $T < 0$

- In $\omega = \dfrac{1}{|T|}$

  $\arg(1 + j\omega T)$ $= 45°$ se $T > 0$; $= -45°$ se $T < 0$



(D) $\boxed{\arg(1 + j\omega T) + \arg(1 + j\omega T^*)}$

$$\arg(1 + j\omega T) + \arg(1 + j\omega T^*) = \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right)$$

- Se $\omega \to 0$

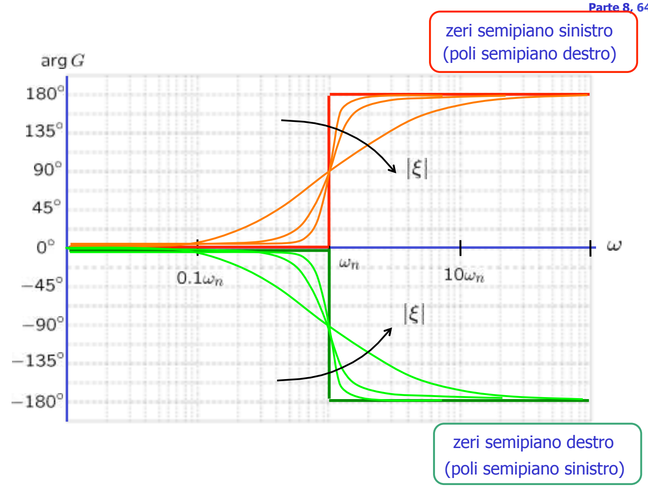
  $\arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right) \simeq \arg(1) = 0°$

- Se $\omega \to \infty$

  $\lim_{\omega\to\infty} \text{arctg}\,\dfrac{2\xi/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} = 0°$ $\quad +180°$ se $\xi > 0$; $-180°$ se $\xi < 0$

- In $\omega = \omega_n$

  $\arg\left(j\dfrac{2\xi\cancel{\omega_n}}{\cancel{\omega_n}}\right)$ $= 90°$ se $\xi > 0$; $= -90°$ se $\xi < 0$



- Regole per il tracciamento del diagr. asint. della fase

- Valore iniziale $\arg(\mu) - g\,90^\circ$
- Cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri:

	semipiano sinistro	semipiano destro
poli	-90°	$+90^\circ$
zeri	$+90^\circ$	-90°

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{100(1+10s)}{s(1+2s)(1+0.4s+s^2)}$$

$g = 1$

$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$

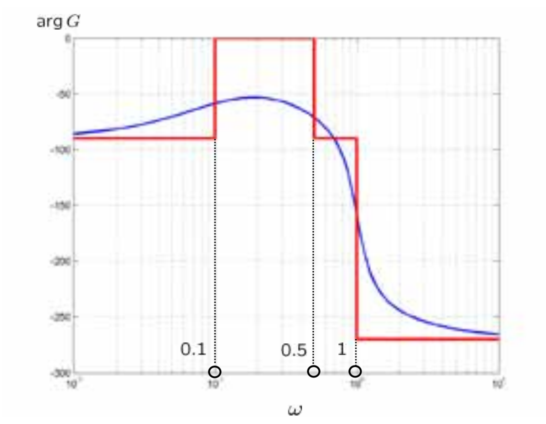
$z_1 = -0.1$

$p_1 = 0$

$p_2 = -0.5$

$p_{3,4} = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$

$\omega_n = 1;\ \xi = 0.2$



- Esempio 2

$$G(s) = \frac{100(1+10s)}{s(1+s)^2}$$

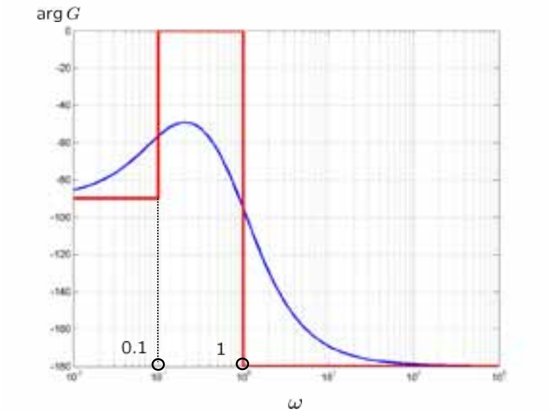
$g = 1$

$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$

$z_1 = -0.1$

$p_1 = 0$

$p_2 = p_3 = -1$



- Esempio 3

$$G(s) = \frac{0.1s(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

$g = -1$

$\mu = 0.1 \implies \mu_{\text{dB}} = -20\text{dB}$

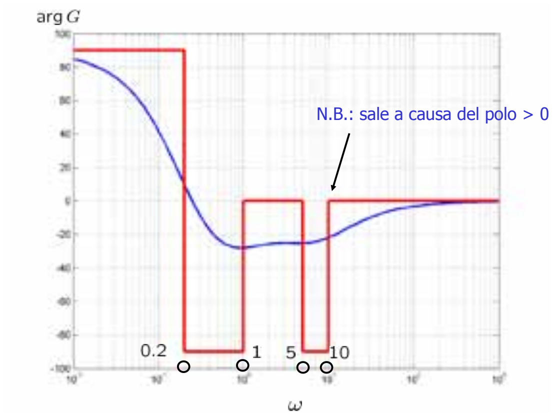
$z_1 = 0$

$z_2 = -1$

$p_1 = p_2 = -0.2$

$p_3 = -5$

$p_4 = +10$



- Esempio 4

$$G'(s) = \frac{50(1+0.4s)}{(1+10s)(1+0.2s+s^2)}$$

$$G''(s) = \frac{50(1+0.4s)}{(1+10s)(1+1.6s+s^2)}$$

$g = 0$

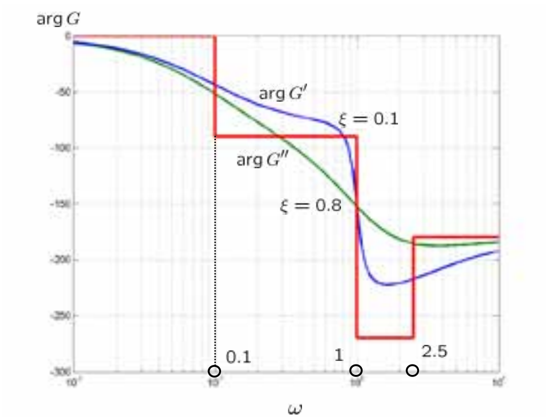
$\mu = 50 \implies \mu_{\text{dB}} \simeq 34\text{dB}$

$z_1 = -2.5$

$p_1 = -0.1$

$p'_{2,3} = -0.1 \pm j\sqrt{0.99};\ \omega_n = 1,\ \xi = 0.1$

$p''_{2,3} = -0.8 \pm j\sqrt{0.36};\ \omega_n = 1,\ \xi = 0.8$



- Legami tra $|G(j\omega)|$ e $\arg G(j\omega)$

- In generale nessuno
- Per sistemi a fase minima:
  - formula di Bode

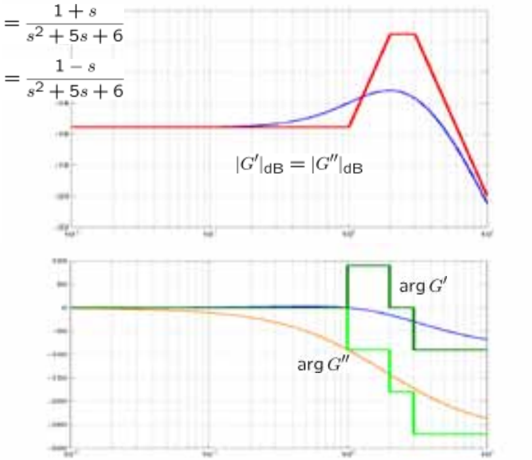
    $\arg G(j\omega)$ in funzione di $|G(j\omega)|$
  - legame tra i diagrammi asintotici

- Sistema a fase minima

- Guadagno $\mu > 0$
- Poli e zeri con $\mathrm{Re} < 0$

$$G'(s) = \frac{1+s}{s^2+5s+6}$$

$$G''(s) = \frac{1-s}{s^2+5s+6}$$



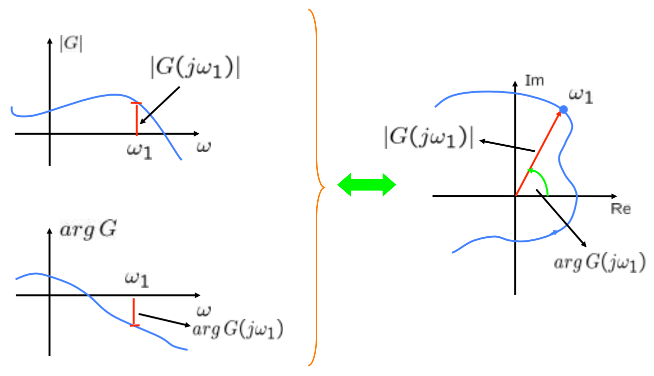
- Legami tra $|G(j\omega)|$ e $\arg G(j\omega)$

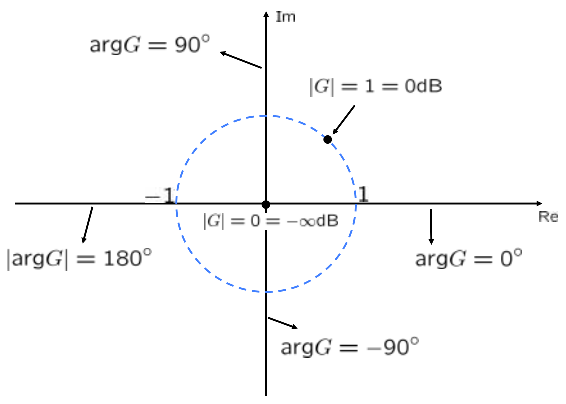
Per sistemi a fase minima:

	Pendenza $\lvert G(j\omega)\rvert$	Valore $\arg G(j\omega)$
Polo	-1	-90°
Zero	$+1$	$+90^\circ$

- Diagrammi polari

$$G(j\omega)\,, \quad \omega \geq 0$$





- Esempio 1

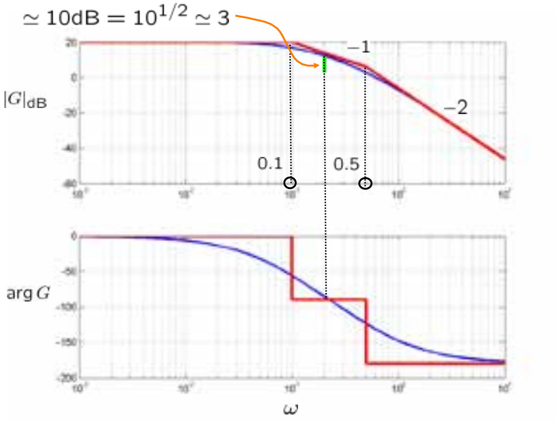
$$G(s) = \frac{10}{(1+10s)(1+2s)}$$

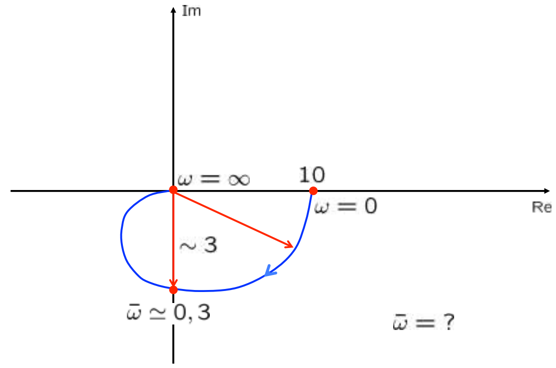
$\mu = 10 \implies \mu_{\text{dB}} = 20dB$

$g = 0$

$\tau_1 = 10 \qquad \omega_1 = 0.1$

$\tau_2 = 2 \qquad \omega_2 = 0.5$





- Esempio 2

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

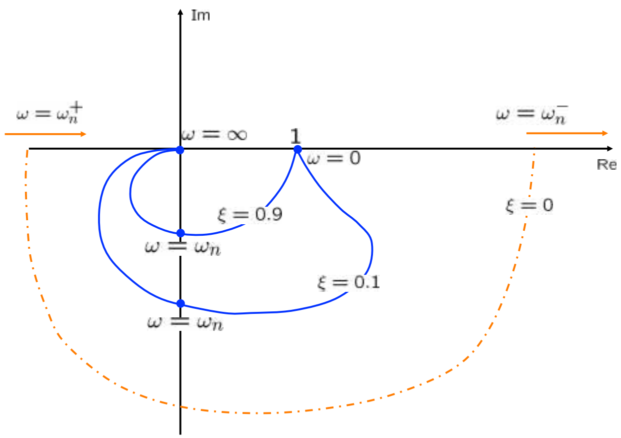
$\mu = G(0) = 1$

$g = 0$

$\xi = 0.9$

$\xi = 0.1$

$\xi = 0$



$\xi = 0$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega_n^2}$$

E' reale

per $\omega < \omega_n$

per $\omega > \omega_n$

- Esempio 3

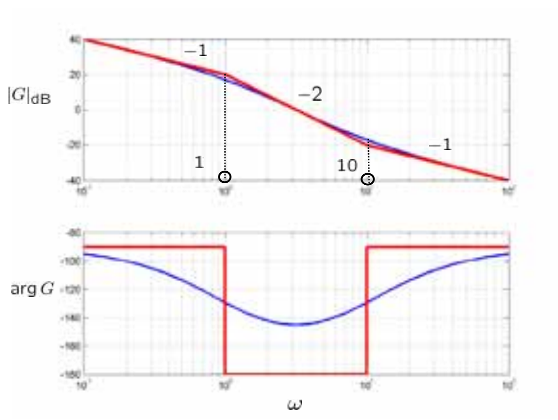
$$G(s) = \frac{s+10}{s(s+1)} = \frac{10(1+\frac{s}{10})}{s(1+s)}$$

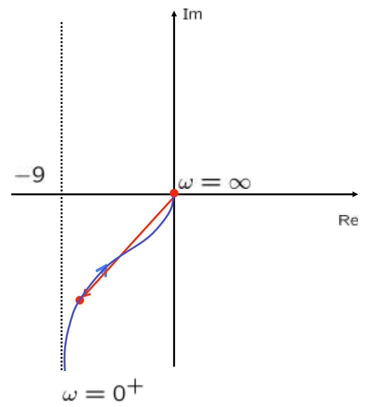
$\omega = 10$

$\omega = 1$

$g = 1$

$\mu = 10 \implies \mu_{\mathrm{dB}} = 20\mathrm{dB}$





- Compito a casa:

valutare la posizione dell' asintoto

$$\lim_{\omega \to 0} Re(G(j\omega)) = ... = -9$$

$$\lim_{\omega \to 0} Re(G(j\omega)) = ...$$

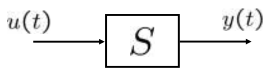
$$(G(j\omega)) = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{-\omega + 10j}{-\omega(j\omega+1)} =$$

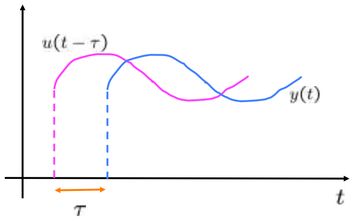
$$= \frac{(-\omega+10j)(1-j\omega)}{-\omega(1+\omega^2)} = \frac{-\omega+10\omega + j(10+\omega^2)}{-\omega(1+\omega^2)}$$

$\omega \to 0$

-9

- Ritardo di tempo





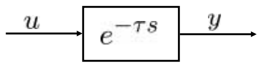
$$y(t) = u(t-\tau)$$

Ritardo

- Funzione di trasferimento

$$Y(s) = \mathcal{L}\{u(t-\tau)\} = \underbrace{e^{-\tau s}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

G(s) ⟶ Non è razionale



Guadagno statico: $G(0) = 1 = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$

- Risposta alla sinusoide

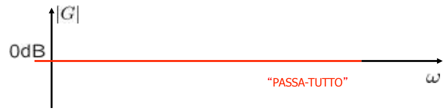
$$u(t) = A\sin(\omega t)$$

$$y(t) = A\sin[\omega(t-\tau)]$$

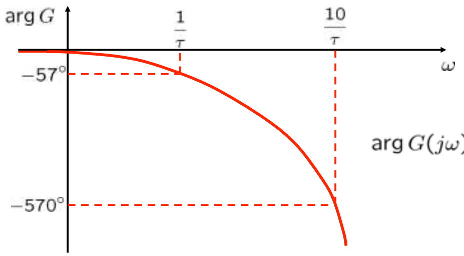
$$= \underbrace{1}_{|G(j\omega)|} \cdot A\ \sin(\omega t \underbrace{- \omega\tau}_{\arg G(j\omega)})$$

VALE IL TEOREMA R.I.F.!!!!!

- Diagramma di Bode del modulo

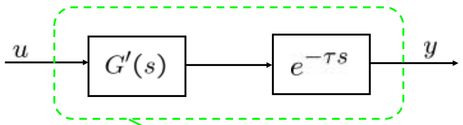


- Diagramma di Bode della fase



$$\arg G(j\omega) = -\omega\tau\frac{180}{\pi}$$

- Sistemi con ritardo



$$G(s) = G'(s)\cdot e^{-\tau s}$$

$$|G(j\omega)| = |G'(j\omega)|\cdot \underbrace{|e^{j\omega\tau}|}_{1} = |G'(j\omega)|$$

$$\arg G(j\omega) = \arg G'(j\omega) - \omega\tau\frac{180}{\pi}$$

Studio di sistemi dinamici a tempo discreto tramite FdT

Risposta in frequenza

Uscita a regime ad ingresso sinusoidale

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad G(z) = \left[C(zI - A)^{-1}B + D\right]$$

Sistema asintoticamente stabile

Ingresso sinusoidale $\quad u(k) = U \sin(\theta k) \cdot 1(k)$

Che espressione avrà l' uscita forzata del sistema?

$$Y(z) = G(z)\,\frac{z \sin(\theta) U}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})}$$

Poli tutti distinti $\qquad Q = G\left(e^{j\theta}\right)\frac{U}{2j}$

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i\, z}{z - p_i}} + \underbrace{\frac{Q\, z}{(z - e^{j\theta})} + \frac{Q^*\, z}{(z - e^{-j\theta})}}\right]$$

transitorio

Risposta di regime sinusoidale

$$y_{regime}(k) = \left|G\left(e^{j\theta}\right)\right| U \sin\left(\theta k + \angle G\left(e^{j\theta}\right)\right) 1(k)$$

Cenni di dimostrazione

- Partendo dall' ingresso

$$u(k) = U \sin(\theta k) \cdot 1(k) = \frac{U}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

- Sulla falsariga di quanto appena ottenuto per il caso a tempo continuo e sfruttando la linearità si ottiene per la risposta a regime l' espressione

$$y_{regime}(k) = U \cdot M \cdot \left[\frac{e^{j(\vartheta k + \varphi)} - e^{-j(\vartheta k + \varphi)}}{2j}\right] \cdot 1(k)$$

$$G\left(e^{j\vartheta}\right) = M \cdot e^{j\varphi}$$

$$y_{regime}(k) = U \cdot M \cdot \sin(\theta k + \varphi) \cdot 1(k)$$

Valgono considerazioni analoghe a quelle viste per la risposta a regime sinusoidale nel caso di sistemi dinamici a tempo continuo.

$$G\left(e^{j\vartheta}\right) = M \cdot e^{j\varphi}$$

$$y_{regime}(k) = U \cdot M \cdot \sin(\theta k + \varphi) \cdot 1(k)$$

Teorema fondamentale della risposta in frequenza

Se si applica ad un sistema lineare asintoticamente stabile con FdT $G(z)$ l'ingresso sinusoidale

$$u(k) = U\,\sin(\theta\,k)$$

l'uscita a transitorio esaurito assume l'espressione

$$y_{regime}(k) = \left|G\left(e^{j\theta}\right)\right|\,U\,\sin\left(\theta\,k + \angle G\left(e^{j\theta}\right)\right)\,1(k)$$

indipendentemente dallo stato iniziale.

Risposta in frequenza

La funzione complessa

$$G(e^{j\theta}) = \left[C(e^{j\theta}I - A)^{-1}B + D\right]$$

definita per $\theta \in [0,\,\pi]$ tali che il termine $e^{j\theta}$ non sia polo di G(z), viene chiamata risposta in frequenza associata al sistema.

Formalmente vale la

$$G(e^{j\theta}) = G(z)\big|_{z=e^{j\theta}}$$

La risposta in frequenza coincide allora con la FdT del sistema valutata sui punti della circonferenza di raggio unitario e centro l'origine degli assi nel piano della variabile z.

Ci sono molte analogie con il legame tra risposta in frequenza e FdT per i sistemi dinamici lineari a tempo continuo.

E' possibile estendere il risultato ottenuto applicando un ingresso sinusoidale puro ad un sistema lineare a tempo discreto ai casi in cui l'ingresso sia sviluppabile in serie di Fourier, oppure sia dotato di trasformata di Fourier, con considerazioni analoghe a quelle fatte nei casi simili per sistemi a tempo continuo.

Per i dettagli si rimanda al testo di Bolzern, Scattolini, Schiavoni.

Diagrammi di Bode e polari della risposta in frequenza

Il **tracciamento** dei **diagrammi di Bode** e polari della risposta in frequenza di un sistema lineare a tempo discreto **è difficoltoso**.

Sarebbe necessario valutare il numero complesso $G(e^{j\theta})$ per un numero sufficientemente elevato di valori di θ

Solitamente il tracciamento dei diagrammi della risposta in frequenza si riduce all'individuazione di pochi punti, fornendo informazioni puramente qualitative.

Non approfondiremo alcuna tecnica di tracciamento manuale dei diagrammi della risposta in frequenza di sistemi dinamici lineari a tempo discreto.

Qualora sia necessario analizzare in dettaglio la risposta in frequenza si ricorrerà a programmi di calcolo su elaboratore elettronico.