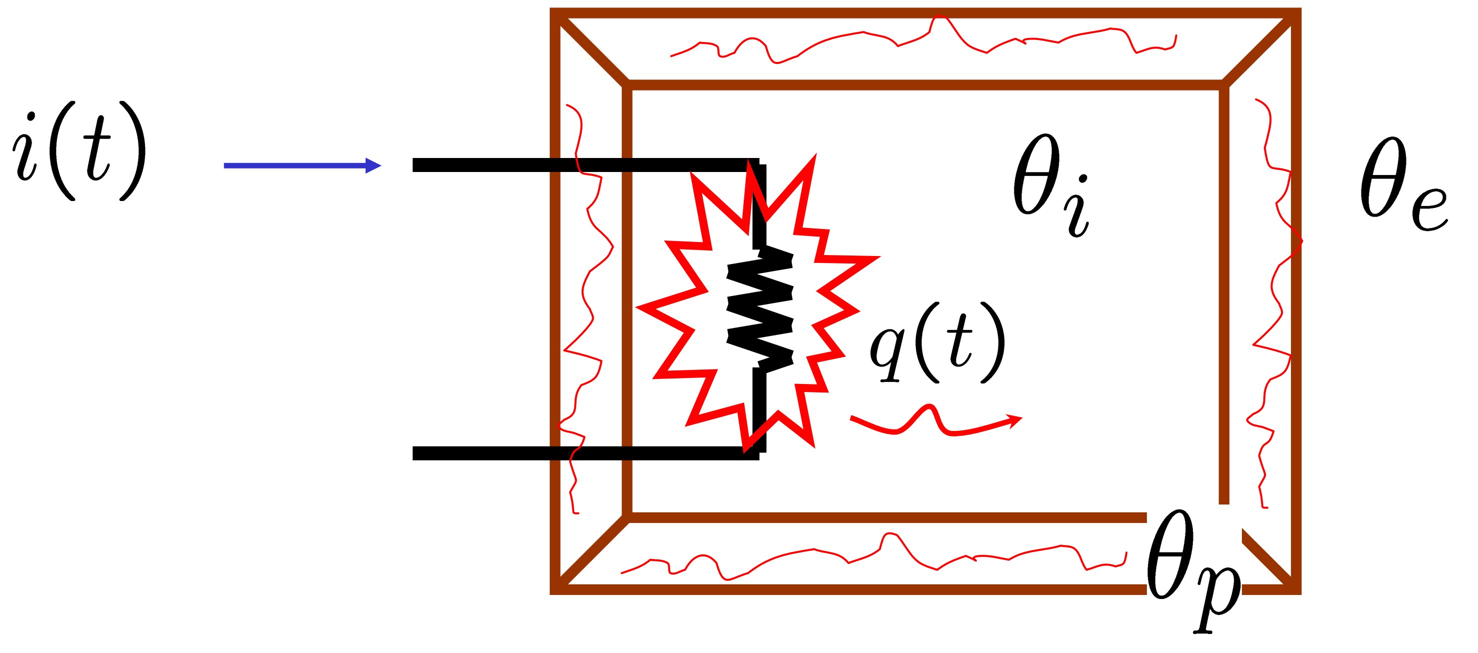
Esercizi – sistemi dinamici a tempo continuo

Modelli in equazioni di stato

Linearizzazione

Equazioni di stato:

1. Determinare le equazioni di stato per il seguente sistema termico:



Hp. Modellistica a)

Trascuriamo la temperatura di parete θ_p :

Si scrive l'equazione di equilibrio termico.

No equilibrio di massa! Il sistema e' chiuso.

$$C_f \, \dot{\theta}_i = q(t) - k_{ie} \, [\theta_i(t) - \theta_e(t)]$$

C_f capacita' termica del fluido

k_{ie} coefficiente di scambio termico interno-esterno

Variabili di stato:

$$x(t) := \theta_i(t)$$

Uscite:

$$y(t) = \theta_i(t)$$

Ingressi:

$$\begin{cases} u_1(t) = q(t) = R\,i^2(t) \\ u_2(t) = \theta_e(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{1}{C_f}\{u_1(t) - k_{ie}[x(t) - u_2(t)]\} \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Hp. Modellistica b)

Consideriamo ora la temperatura di parete θ_p :

Ora abbiamo due equazioni di equilibrio termico:

$$\begin{cases} C_f\,\dot{\theta}_i = q(t) - k_{ip}\,[\theta_i(t) - \theta_p(t)] \\ C_p\,\dot{\theta}_p = k_{ip}\,[\theta_i(t) - \theta_p(t)] - k_{ep}\,[\theta_p(t) - \theta_e(t)] \end{cases}$$

C_f capacita' termica del fluido

k_{ip} coefficiente di scambio termico interno-parete

C_p capacita' termica del fluido

k_{ep} coefficiente di scambio termico parete-esterno

Variabili di stato:

$$x_1(t) := \theta_i(t)$$
$$x_2(t) := \theta_p(t)$$

$$\begin{cases} u_1(t) = q(t) = R\,i^2(t) \\ u_2(t) = \theta_e(t) \end{cases}$$

Uscite:

$$y(t) = \theta_i(t)$$

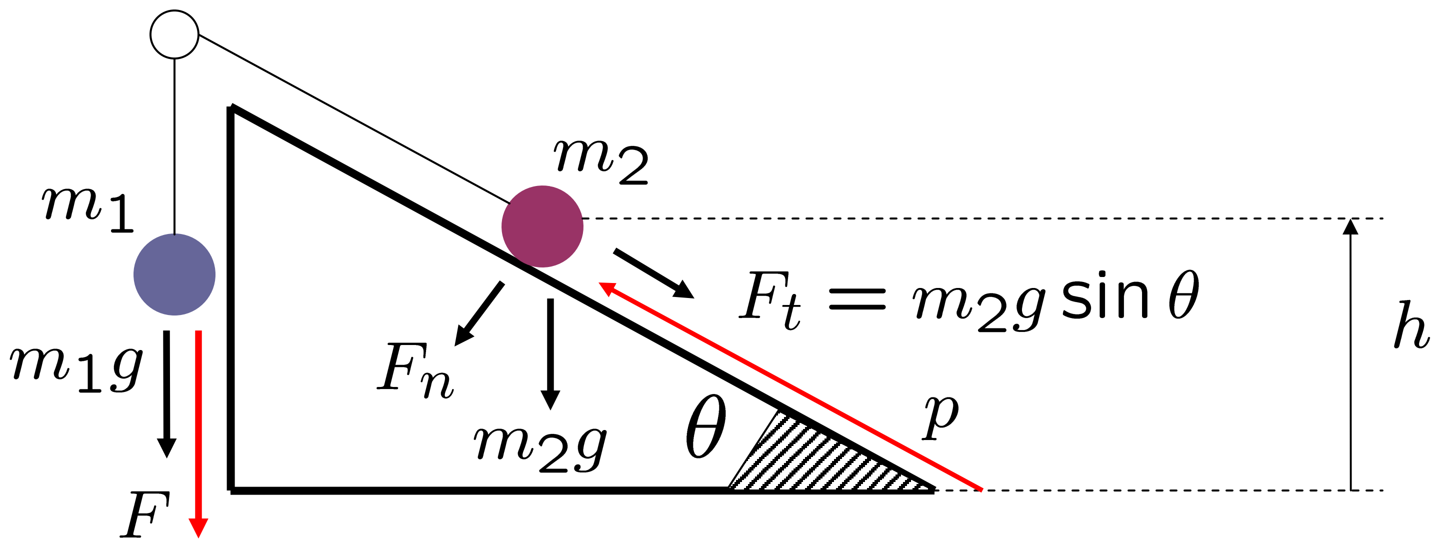
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C_f}\left\{u_1(t) - k_{ip}[x_1(t) - x_2(t)]\right\} \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{C_p}\left\{k_{ip}[x_1(t) - x_2(t)] - k_{ep}[x_2(t) - u_2(t)]\right\} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Costruiamo le equazioni di stato in forma matriciale per il caso b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_{ip}}{C_f} & \dfrac{k_{ip}}{C_f} \\ \dfrac{k_{ip}}{C_p} & -\dfrac{k_{ep}}{C_p} - \dfrac{k_{ip}}{C_p} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{C_f} & 0 \\ \dfrac{k_{ep}}{C_p} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

2. Determinare delle equazioni di stato per il sistema (piano inclinato senza attriti) :



Si considera come variabile da controllare l’altezza h della massa m_2

Risultante su m_2 :

$$R_{m_2} = m_2 a_2 = -F_t + m_1 g + F - m_1 a_1$$

$$a_1 = a_2 = \ddot{p}$$

$$\Longrightarrow \quad m_2 \ddot{p} = -m_2 g \sin\theta + m_1 g + F - m_1 \ddot{p}$$

$$\begin{cases} x_1(t) := p(t) \\ x_2(t) := \dot{p}(t) \end{cases} \qquad u(t) = F$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{m_1 + m_2} \left[-m_2 g \sin\theta + m_1 g + u(t) \right] \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_1+m_2} \end{pmatrix} u(t) \; + $$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_1+m_2}(m_1 - m_2 \sin\theta) \end{pmatrix} g$$

Si potrebbe interpretare come "disturbo esterno"

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Ma noi vogliamo osservare h , non la posizione p nel s.d.r. del piano inclinato !

Ma poiche': $\Rightarrow$

$$\begin{cases} h = p \sin\theta \\ \dot{h} = \dot{p} \sin\theta \end{cases}$$

Bastera' effettuare una trasformazione del tipo :

$$\hat{x} = Tx, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

con :

$$T = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} h \\ \dot{h} \end{bmatrix}$$

Esercizi per casa...

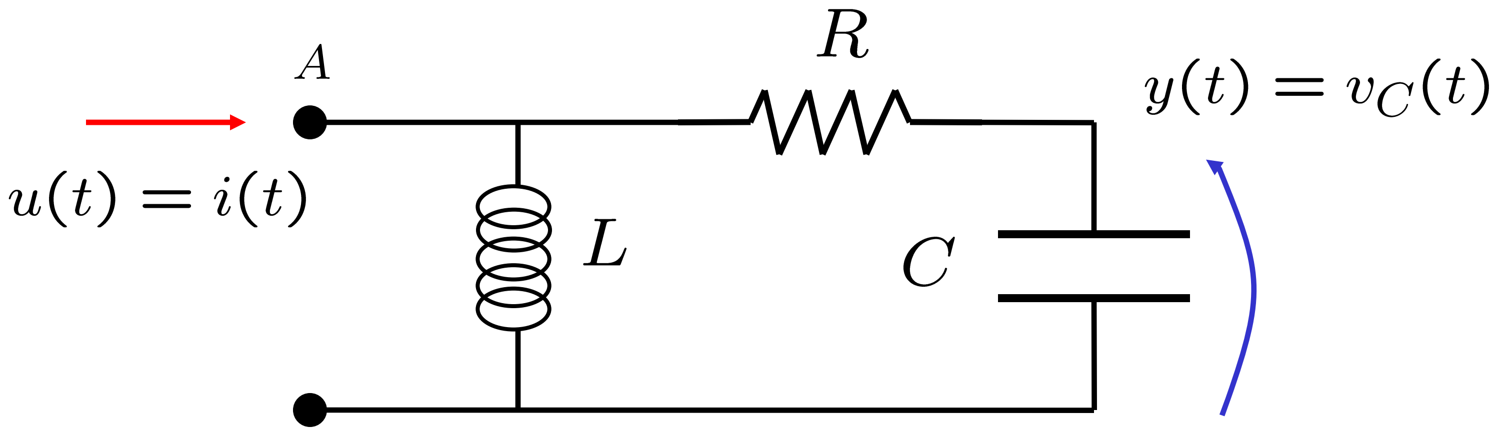
1. Antitrasformare le funzioni:

$$H(s) = \frac{(s+2)}{s^2+2s+2}$$

$$H(s) = \frac{40(s-1)}{s^2+3s+2}$$

$$H(s) = \frac{(2s+5)}{s^3+5s^2-s-5}$$

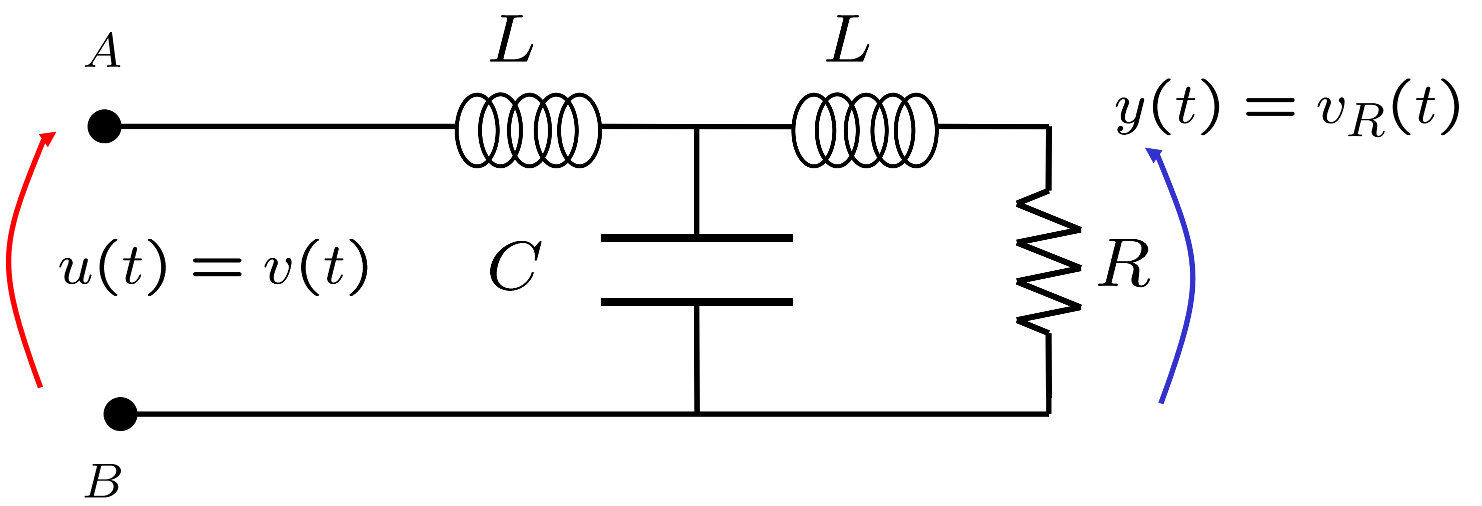
2. Mettere in equazioni di stato il seguente sistema:



Suggerimenti:

- Scrivere i principi di Kirchhoff ai nodi e alle maglie.
- Prendere come variabili di stato le grandezze associate a condensatori (tensione) ed induttanze (correnti).
- Ingresso: corrente entrante al nodo A
- Uscita: tensione sul condensatore

3. Mettere in equazioni di stato il seguente sistema:

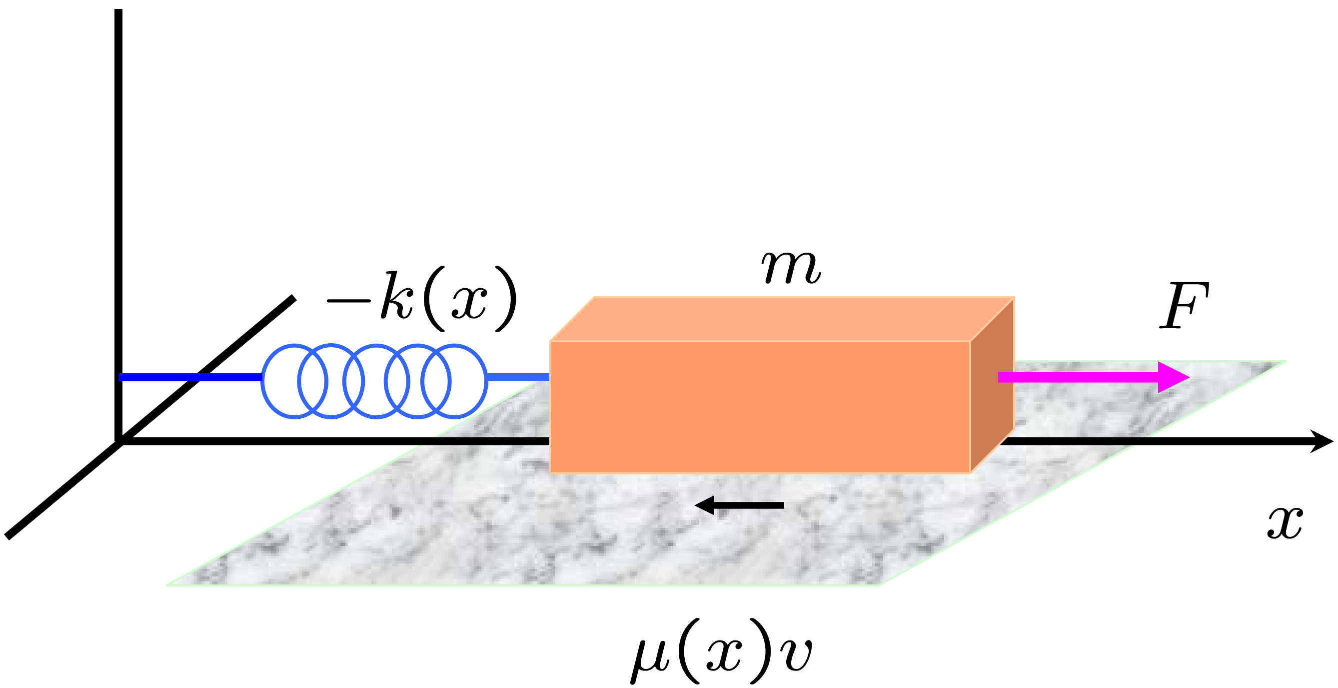


Suggerimenti:

- Scrivere i principi di Kirchhoff ai nodi e alle maglie.
- Prendere come variabili di stato le grandezze associate a condensatori (tensione) ed induttanze (correnti) → avremo tre variabili di stato, sistema tre per tre!
- Ingresso: tensione fra A e B
- Uscita: tensione sulla resistenza

Esercizi - linearizzazione:

1. Determinare le equazioni di stato per il seguente sistema e linearizzarlo intorno ad un punto di equilibrio:



Dove si specificano il coefficiente di attrito radente e la forza della molla, entrambi non lineari:

$$\begin{cases} \mu(x - x_0) = 1 + \cos(x - x_0) \\ k(x - x_0) = (x - x_0)^2 \end{cases}$$

Risultante delle forze su m :

$$R = m\,a = F - \mu(x)v - k(x)$$

$$x_0 = 0$$

Che si puo' riscrivere cosi':

$$m\,\ddot{x} = F - \mu(x)\dot{x} - k(x)$$

Variabili di stato:

$$\begin{cases} x_1(t) := x(t) \\ x_2(t) := \dot{x}(t) = v(t) \end{cases}$$

Ingresso:

$$u(t) := F$$

Uscite:

$$y(t) := x(t)$$

Dunque sostituendo ricaviamo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{m}\left[-(1+\cos(x_1))x_2 - x_1^2 + u\right] \end{cases}$$

Imponiamo un ingresso costante $\bar{\bar{F}}$ e cerchiamo il punto di equilibrio, in cui entrambe le derivate si annullano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \Longrightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_2(t) = 0 \Longrightarrow -\bar{x}_1^2 + \bar{F} = 0 \Longrightarrow \bar{x}_1 = \sqrt{\bar{\bar{F}}} \end{cases}$$

Da cui si ricavano le equazioni di stato linearizzate intorno al punto trovato:

$$\begin{cases} F = 16N \\ m = 1kg \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = 4 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{+x_2 \sin x_1 - 2x_1}{m} & -\frac{1+\cos x_1}{m} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

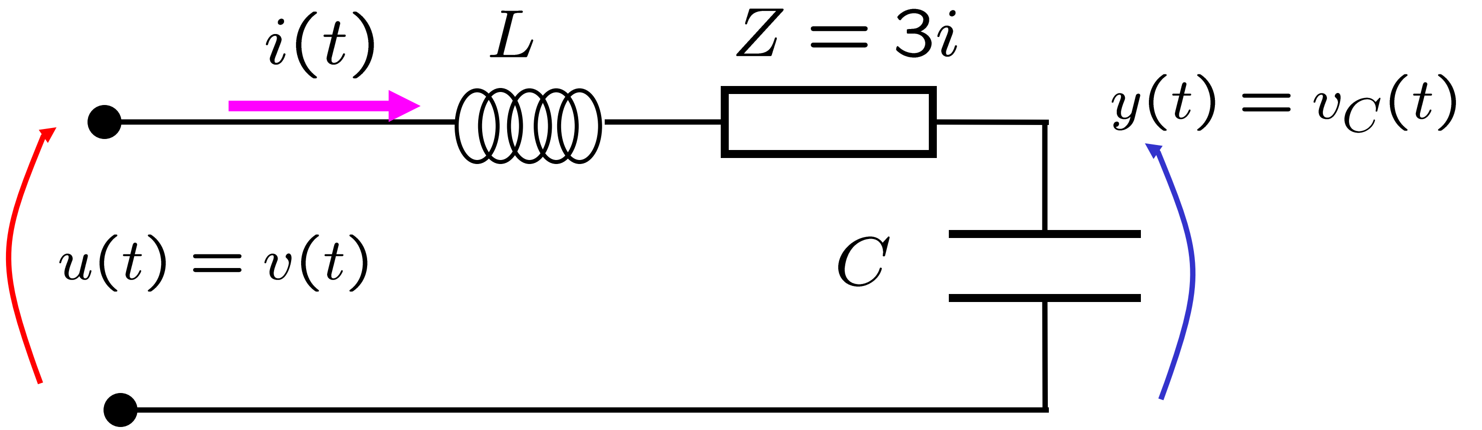
$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \bar{B}$$

Da cui si ricava, sostituendo, il seguente sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -0.3464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u$$

Che vale per piccole perturbazioni intorno al punto di equilibrio trovato.

2. Mettere in equazioni di stato il seguente sistema, in cui e' presente un elemento non lineare:



Secondo principio di Kirchhoff:

$$v(t) = v_l(t) + v_Z(t) + v_C(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} \qquad v_Z(t) = 3\,i^2 \qquad v_C(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Come al solito, prendiamo come variabili di stato le correnti nelle induttanze e le tensioni sui condensatori:

$$\begin{cases} x_1(t) := i_L(t) \\ x_2(t) := v_C(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} v_L(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} i_C(t) = \frac{1}{C} i(t) \end{cases}$$

Ricaviamo dunque $v_L(t)$ e $i(t)$ in funzione delle sole variabili di stato:

$$i(t) = i_L(t) = x_1(t)$$

$$v_L(t) = v(t) - 3 i_L^2(t) - v_C(t) = u(t) - 3 x_1^2(t) - x_2(t)$$

Percio' le equazioni di stato del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C} i_C(t) = \dfrac{1}{C}\left\{u(t) - 3x_1^2(t) - x_2(t)\right\} \\[2ex] \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{L} x_1(t) \end{cases}$$

E sono non lineari in x_1 . Ponendo per semplicita' : $\begin{cases} L = 2 \\ C = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{2}\left\{u(t) - 3x_1^2(t) - x_2(t)\right\} \\[2ex] \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{2} x_1(t) \end{cases}$$

Dunque linearizziamo il sistema intorno ad un punto di equilibrio, scegliendo come ingresso un valore costante di tensione.

Prendiamo ad esempio $u(t) = 3$ e calcoliamo i valori di $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ quando le derivate si annullano.

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = 0 \Longrightarrow \bar{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_1(t) = 0 \Longrightarrow \bar{x}_2 = \frac{u}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dunque calcoliamo le matrici del sistema linearizzato intorno a questo punto:

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\bar{x},\bar{u}} = \left[\begin{array}{cc} -3\,x_1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]_{\bar{x},\bar{u}}$$

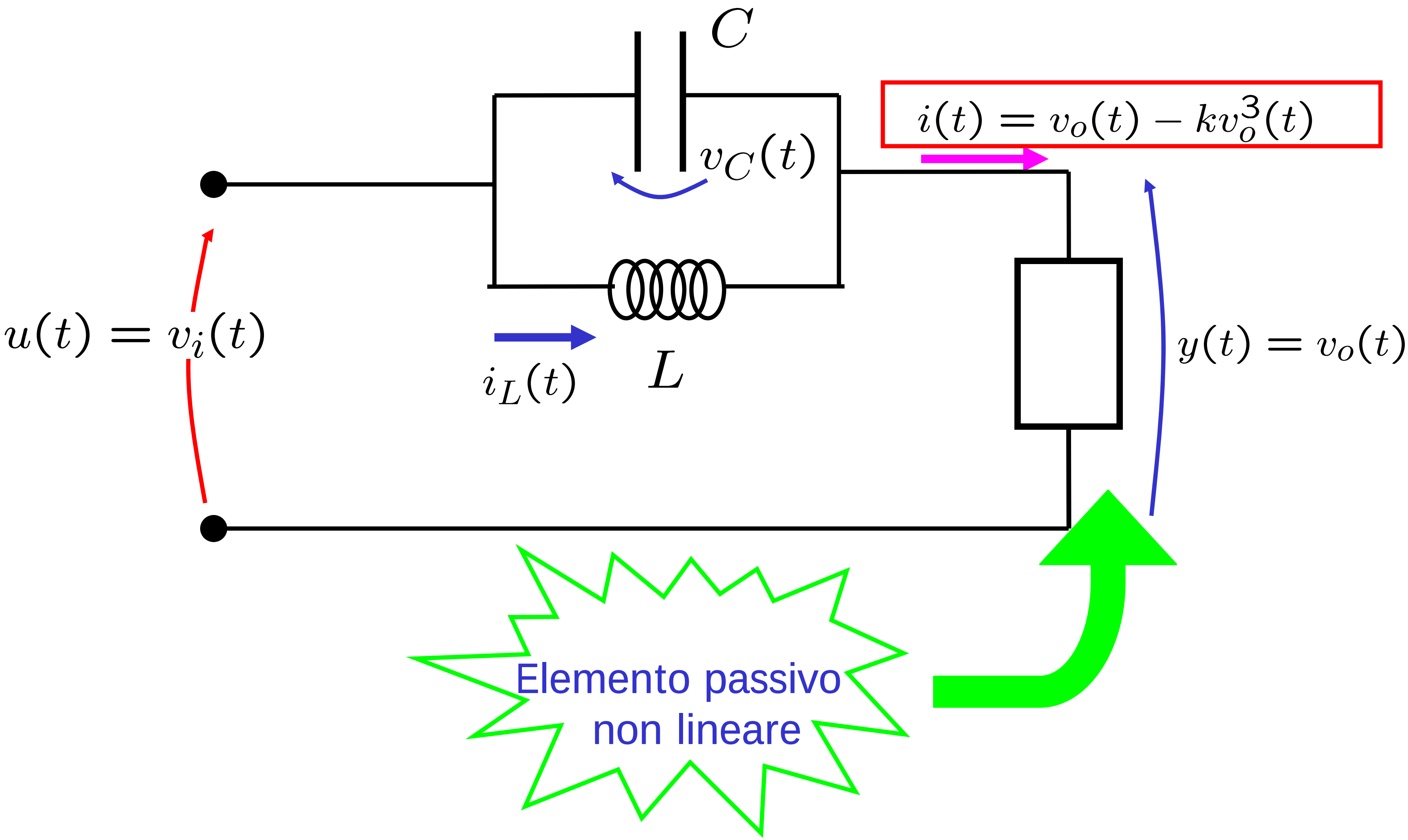
$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{array} \right]_{\bar{x},\bar{u}} = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right] = \bar{B}$$

Da cui si ricava, sempre sostituendo, il seguente sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \delta u$$

Che, ancora una volta, vale per piccole perturbazioni intorno al punto di equilibrio trovato.

Esercizio per casa...



Linearizzare il sistema a partire dalle equazioni di stato che verranno di seguito ricavate. NB: stavolta non serve scrivere le equazioni ai nodi o alle maglie...

$$\begin{cases} x_1(t) := i_L(t) \\ x_2(t) := v_C(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{L} v_L(t) = \dfrac{1}{L} v_C(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{C} i_C(t) \end{cases}$$

Possiamo ricavare immediatamente delle equazioni di stato in funzione delle sole x_1 e x_2 . Infatti:

$$\begin{cases} i_C(t) = i(t) - i_L(t) = (v_o(t) - k v_o^3(t)) - x_1(t) \\ v_o(t) = v_i(t) - v_C(t) = u(t) - x_2(t) \end{cases}$$

Dunque sostituendo si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} \left[u(t) - x_1(t) - k(u(t) - x_2(t))^3 \right] \end{cases}$$

Non lineare! Cosa resta da fare?
Cerchiamo una soluzione particolare, ad esempio cortocircuitiamo l'ingresso: $u(t) = \bar{u} = 0$
In corrispondenza a questo ingresso azzeriamo le derivate $\dot{x}_1$ ed $\dot{x}_2$ e troviamo $\bar{x}_1$ ed $\bar{x}_2$.

Si deve trovare $\bar{x}_1 = 0$ ed $\bar{x}_2 = 0$ ... poi si calcolano le matrici del sistema linearizzato come gia' fatto!

Esercizi – sistemi dinamici a tempo discreto

Modelli in equazioni di stato

Realizzazione in equazioni di stato

Un **sistema dinamico lineare a tempo discreto** in evoluzione libera è descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(n+2) \;=\; y(n+1) + k\,[3y(n+1) - y(n)]\,, \quad n \geq 0,\; k \in \mathbb{R}$$

Determinare una realizzazione in equazioni di stato per il sistema assumendo come uscita il valore di $y(n)$.

variabili di stato

$$\begin{cases} x_1(n) = y(n) \\ x_2(n) = y(n+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_2(n) + k\,[3x_2(n) - x_1(n)] \\ y(n) = x_1(n) \end{cases}$$

equazione alle differenze in forma di equazioni di stato

$$\begin{cases} x(n+1) = A\,x(n) + B\,u(n) \\ y(n) = C\,x(n) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & (1+3k) \end{bmatrix} \qquad B = 0 \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Formule d'integrazione numerica: dall'equazione alle differenze alla FdT

- Vogliamo risolvere il problema seguente
  - assegnato un segnale $u(t)$ determinare l'integrale del segnale nel tempo

$$u(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) \;=\; \int_0^t u(\tau)\, d\,\tau$$

- In realtà il segnale $u(t)$ sarà noto soltanto in istanti discreti di tempo (perché per es. è sottoposto a campionamento) e quindi possiamo risolvere il problema solo in forma approssimata, ricorrendo alle **formule d'integrazione numerica**.

- Per iniziare, supponiamo di valutare il segnale integrato $y(t)$ soltanto in istanti multipli del periodo di campionamento T_s

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

$$t = k\,T_s, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$y(k\,T_s) = \int_0^{k\,T_s} u(\tau)\, d\tau$$

$$y(k\,T_s) = \int_0^{(k-1)\,T_s} u(\tau)\, d\tau + \int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\, d\tau$$

$$y(k\,T_s) = y\,[(k-1)\,T_s] + \int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\, d\tau$$

- Abbiamo ottenuto una prima relazione ricorsiva

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k\,-\,1)\;T_s] \;+\; \int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\,\tau$$

- In realtà anche il segnale x(t) è noto soltanto in istanti discreti di tempo (perché è sottoposto a campionamento) e quindi possiamo risolvere il problema solo in forma approssimata, ricorrendo alle **formule d'integrazione numerica**:

$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\,\tau \;\approx\; ?$$

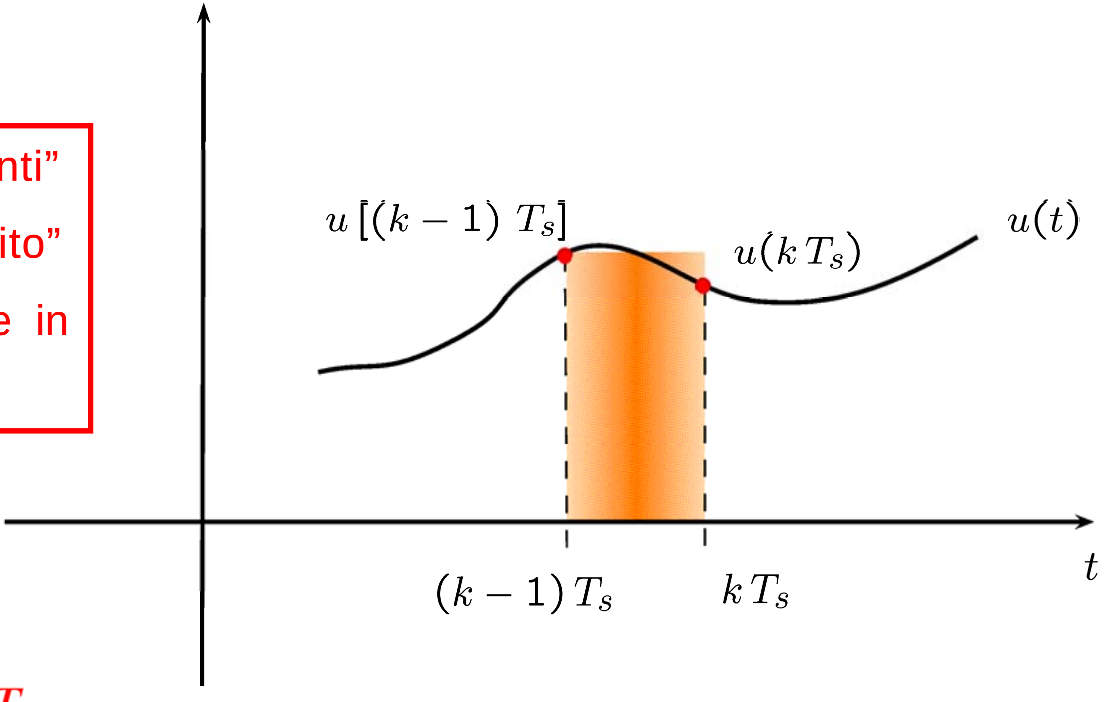
$\Longleftrightarrow$

Abbiamo bisogno di una formula approssimata, che faccia uso possibilmente soltanto dei valori del segnale agli istanti di tempo corrispondenti agli estremi dell'integrale.

Differenze "in avanti"o *Forward Euler* (FE)

- Facendo riferimento alla figura seguente, l'integrale (area sottesa dal grafico del segnale $u(t)$) può essere approssimato come segue

- tecnica di Eulero "in avanti"
- metodo di Eulero "esplicito"
- tecnica delle "differenze in avanti"



$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau \approx T_s \cdot u\left[(k-1)\,T_s\right]$$

L'integratore a tempo discreto con la formula *Forward Euler* (FE)

- Sostituendo quanto appena trovato nell'espressione precedente

$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau \;\approx\; T_s \cdot u\,[(k-1)\;T_s]$$

$$\Downarrow$$

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k-1)\;T_s] \;+\; \int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau$$

si ottiene l'**equazione alle differenze**

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k-1)\;T_s] \;+\; T_s \cdot u\,[(k-1)\,T_s]$$

- Cerchiamo allora la **FdT dell'integratore a tempo discreto** con la formula "**Forward Euler**", applicando la Z—trasformata all'equazione alle differenze appena trovata, con **condizioni iniziali nulle**:

$$\left.\begin{aligned} y(k\,T_s) &= y\,[(k-1)\,T_s] + T_s \cdot u\,[(k-1)\,T_s] \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$Y(z) = \frac{T_s}{z-1}\,U(z)$$

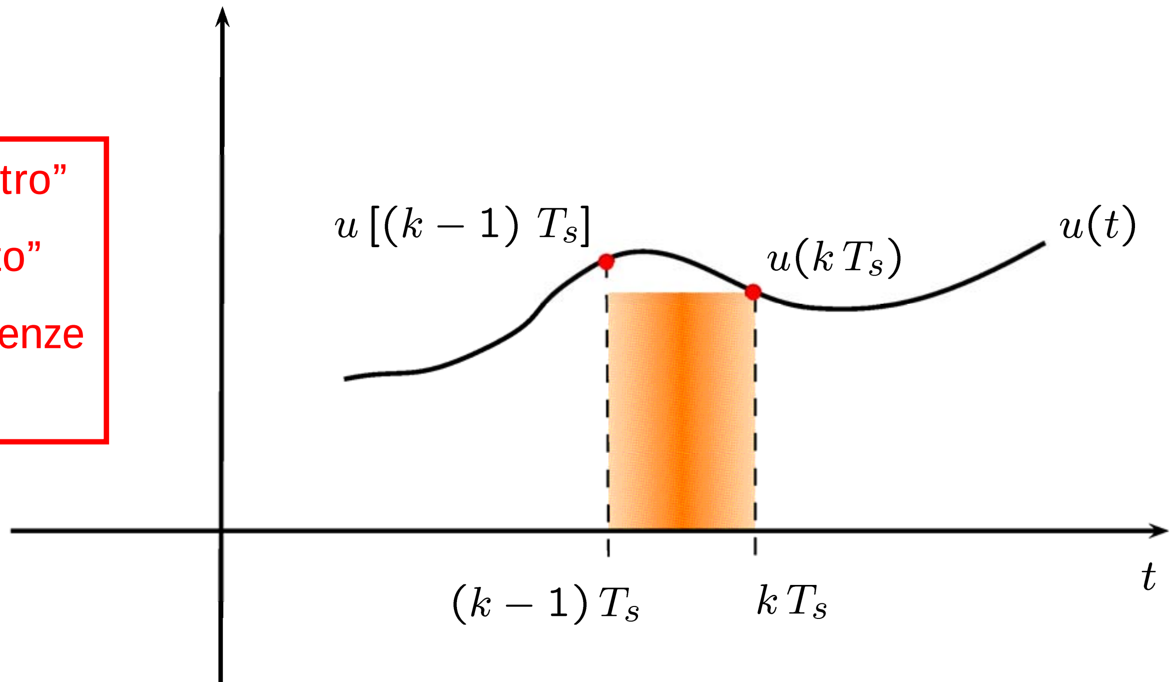
Approssimazione a tempo discreto dell'integratore con la formula di Eulero "in avanti" o "Forward Euler".

$$\Longleftrightarrow \qquad G_{FE}(z) = \frac{T_s}{z-1}$$

Differenze "all'indietro" o *Backward Euler* (BE)

- Facendo riferimento alla figura seguente, l'integrale (area sottesa dal grafico del segnale $u(t)$) può essere approssimato come segue

- tecnica di Eulero "all'indietro"
- metodo di Eulero "implicito"
- tecnica delle "differenze all'indietro"



$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau \;\approx\; T_s \cdot u\,(k\,T_s)$$

L'integratore a tempo discreto con la formula *Backward Euler* (BE)

- Sostituendo quanto appena trovato nell'espressione precedente

$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau \;\approx\; T_s \cdot u\,(k\,T_s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k\,-\,1)\;T_s] \;+\; \int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau$$

si ottiene l'**equazione alle differenze**

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k\,-\,1)\;T_s] \;+\; T_s \cdot u\,(k\,T_s)$$

- Cerchiamo allora la **FdT dell'integratore a tempo discreto** con la formula "**Backward Euler**", applicando la Z—trasformata all'equazione alle differenze appena trovata, con **condizioni iniziali nulle**:

$$\left.\begin{aligned} y(kT_s) &= y[(k-1)\,T_s] + T_s \cdot u(kT_s) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

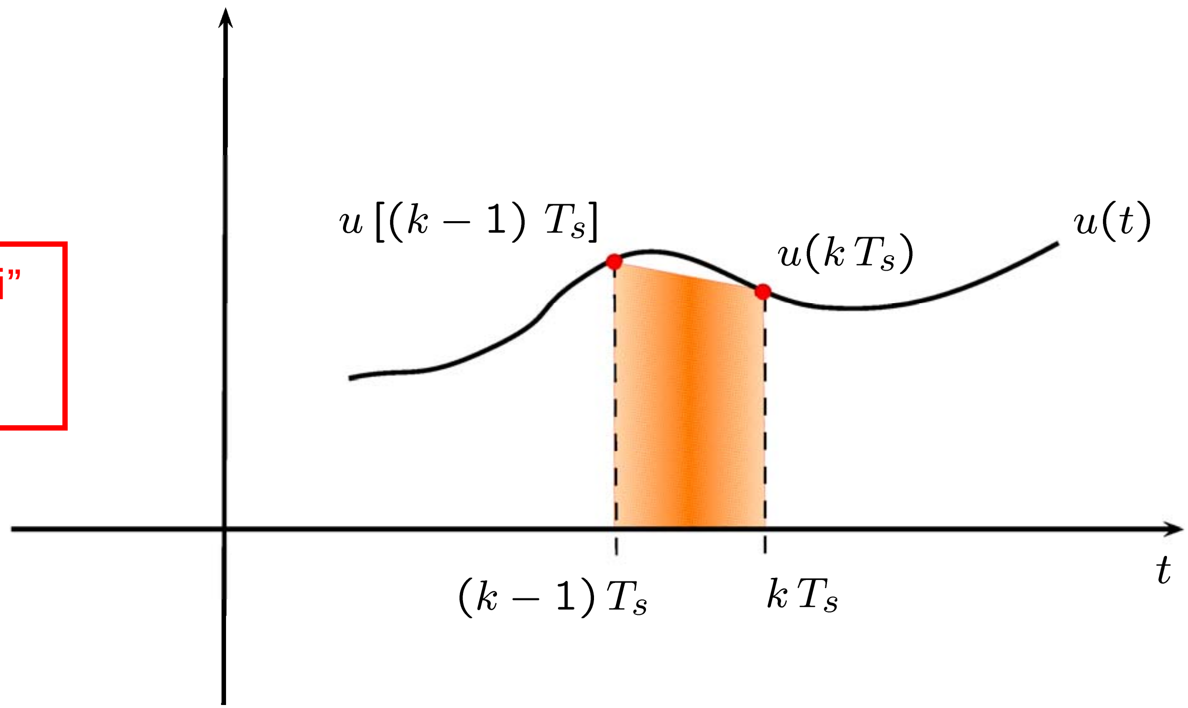
$$Y(z) = \frac{z\,T_s}{z-1}\,U(z)$$

Approssimazione a tempo discreto dell'integratore con la formula di Eulero "all'indietro" o "Backward Euler".

$$\Longleftrightarrow \qquad G_{BE}(z) = \frac{z\,T_s}{z-1}$$

Regola "dei trapezi" o *formula di Tustin* (TU)

- Facendo riferimento alla figura seguente, l'integrale (area sottesa dal grafico del segnale $u(t)$) può essere approssimato come segue



- tecnica "dei trapezi"
- formula di Tustin

$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau \;\approx\; T_s \cdot \frac{u\,[(k-1)\,T_s] + u\,(k\,T_s)}{2}$$

L'integratore a tempo discreto con la formula *Tustin* (TU)

- Sostituendo quanto appena trovato nell'espressione precedente

$$\int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau \;\approx\; T_s \cdot \frac{u\,[(k-1)\;T_s] \,+\, u\,(k\,T_s)}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k\,-\,1)\;T_s] \;+\; \int_{(k-1)\,T_s}^{k\,T_s} u(\tau)\,d\tau$$

si ottiene l'**equazione alle differenze**

$$y(k\,T_s) \;=\; y\,[(k\,-\,1)\;T_s] \;+\; T_s \cdot \frac{u\,[(k-1)\;T_s] \,+\, u\,(k\,T_s)}{2}$$

- Cerchiamo allora la **FdT dell'integratore a tempo discreto** con la formula "**di Tustin**", applicando la Z—trasformata all'equazione alle differenze appena trovata, con **condizioni iniziali nulle**:

$$\begin{cases} y(kT_s) = y[(k-1)\,T_s] + T_s \cdot \dfrac{u[(k-1)\,T_s] + u(kT_s)}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$Y(z) = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} U(z)$$

Approssimazione a tempo discreto dell'integratore con la formula di Tustin.

$$\Longleftrightarrow \quad G_{TU}(z) = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

Formule d'integrazione numerica come sistemi dinamici a tempo discreto: riassumendo

- Partendo dal problema (con condizioni iniziali nulle)

$$y(t) \;=\; \int_0^t u(\tau)\,d\tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{y}(t) \;=\; u(t)$$

abbiamo ottenuto 3 approssimazioni a tempo discreto

$$G(s) \;=\; \frac{1}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} G_{FE}(z) \;=\; \dfrac{T_s}{z-1} \\[2ex] G_{BE}(z) \;=\; \dfrac{z\,T_s}{z-1} \\[2ex] G_{TU}(z) \;=\; \dfrac{T_s}{2} \cdot \dfrac{z+1}{z-1} \end{cases}$$

Formule d’integrazione numerica: prestazioni

- Come si comportano questi “integratori” a tempo discreto?
- Proviamo ad applicare al sistema originale a tempo continuo (il “vero” integratore) ed ai tre sistemi a tempo discreto, con i quali vogliamo approssimarlo, alcuni segnali e determiniamo la risposta nei vari casi:

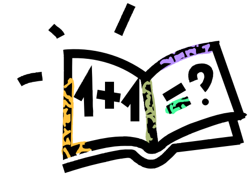
$$\begin{cases} u_1(t) & = & 2 \cdot 1(t) \\ u_2(t) & = & 2\,t \cdot 1(t) \\ u_3(t) & = & 10 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot 1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(k\,T_s) & = & 2 \cdot 1(k\,T_s) \\ u_2(k\,T_s) & = & 2\,k\,T_s \cdot 1(k\,T_s) \\ u_3(k\,T_s) & = & 10 \cdot e^{-\frac{k\,T_s}{10}} \cdot 1(k\,T_s) \end{cases}$$

A tempo continuo

A tempo discreto

Esercizio "per casa"



- Trovare le espressioni analitiche delle risposte del sistema a tempo continuo (l'integratore puro) e dei tre sistemi a tempo discreto determinati in precedenza (descritti dalle FdT $G_{FE}(z)$, $G_{BE}(z)$, $G_{TU}(z)$), quando si applicano in ingresso gli ingressi

$$\begin{cases} u_1(t) &= 2 \cdot 1(t) \\ u_2(t) &= 2t \cdot 1(t) \\ u_3(t) &= 10 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot 1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(kT_s) &= 2 \cdot 1(kT_s) \\ u_2(kT_s) &= 2kT_s \cdot 1(kT_s) \\ u_3(kT_s) &= 10 \cdot e^{-\frac{kT_s}{10}} \cdot 1(kT_s) \end{cases}$$

A tempo continuo

A tempo discreto

Analisi in Matlab

- Proviamo a simulare il comportamento dei sistemi in Matlab, al variare del periodo di campionamento:

$$T_s = \begin{cases} \dfrac{1}{10}\ \text{s} \\ 1\ \text{s} \\ \dfrac{1}{100}\ \text{s} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_1(kT_s) = 2 \cdot 1(kT_s) \\ u_2(kT_s) = 2kT_s \cdot 1(kT_s) \\ u_3(kT_s) = 10 \cdot e^{-\frac{kT_s}{10}} \cdot 1(kT_s) \end{cases}$$

- Che cosa ci si aspetta? Vedremo che le prestazioni dei 3 sistemi a tempo discreto variano al variare del periodo di campionamento. Daremo una motivazione a ciò soltanto più avanti nel corso (si vedano le slide di Parte7).

- Lo script Matlab che permette di analizzare le prestazioni dei sistemi $G_{FE}(z)$, $G_{BE}(z)$, $G_{TU}(z)$ è "**FA_9cfu_esercizi02_integra_discreto.m**".
- Nel seguito sono riportati soltanto gli andamenti delle risposte dei sistemi continuo e discreti all'ingresso di tipo esponenziale, al variare del periodo di campionamento e le porzioni di codice corrispondenti

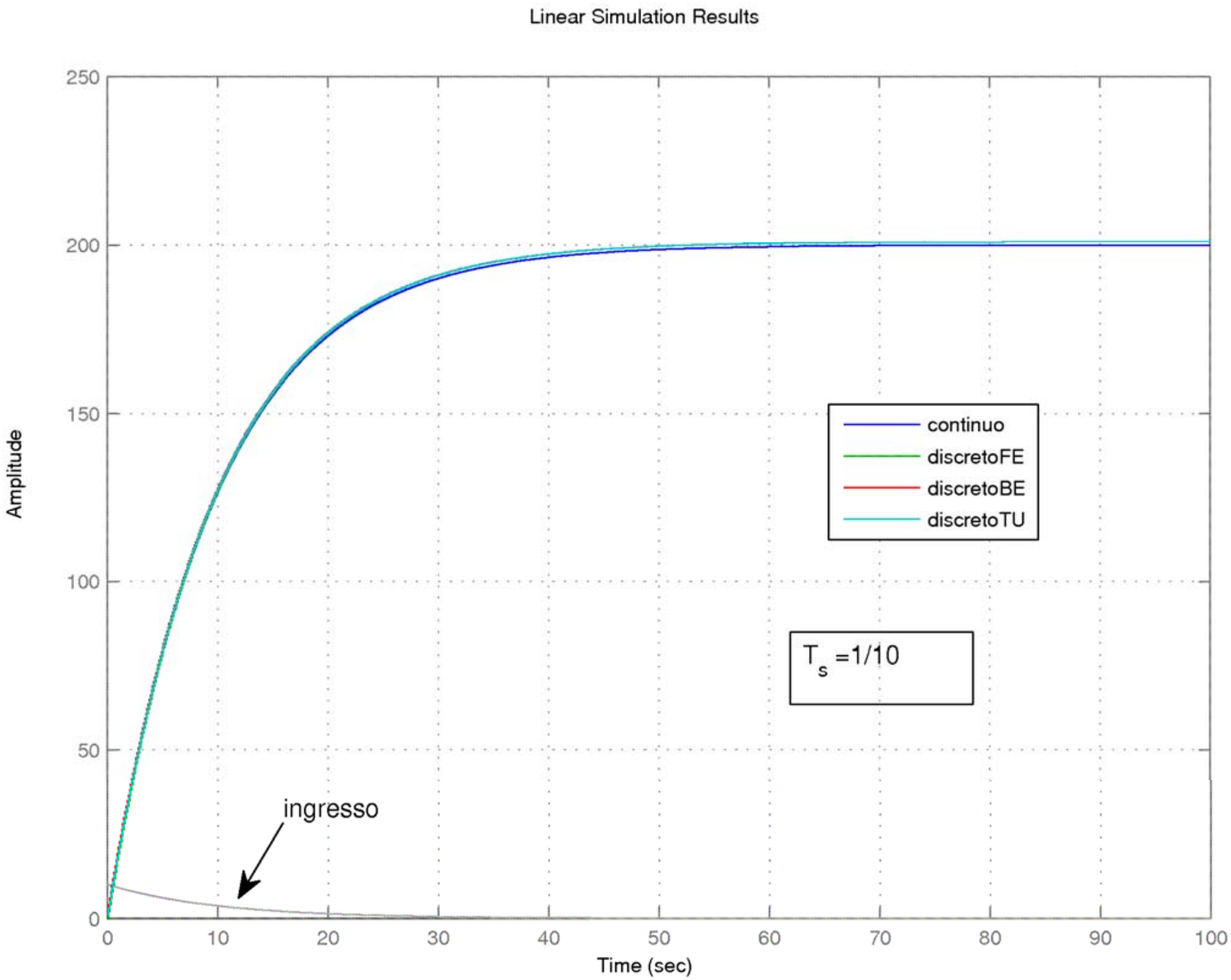
```
% integratore a tempo continuo
 Gs = tf([1],[1 0]);
% approssimazioni a tempo discreto
 G_FEz = tf( [Ts], [1 -1], Ts);
 G_BEz = tf( [Ts 0], [1 -1], Ts);
 G_TUz = (Ts/2) * tf( [1 1], [1 -1], Ts);
```

```
% ingresso esponenziale
 T_fine = 100;
 base_tempi2 = (0:Ts:T_fine);
 ingresso = 10 * exp(-0.1 * base_tempi2);
 figure; lsim(continuo, discretoFE, discretoBE,
discretoTU, ingresso, base_tempi2);
```

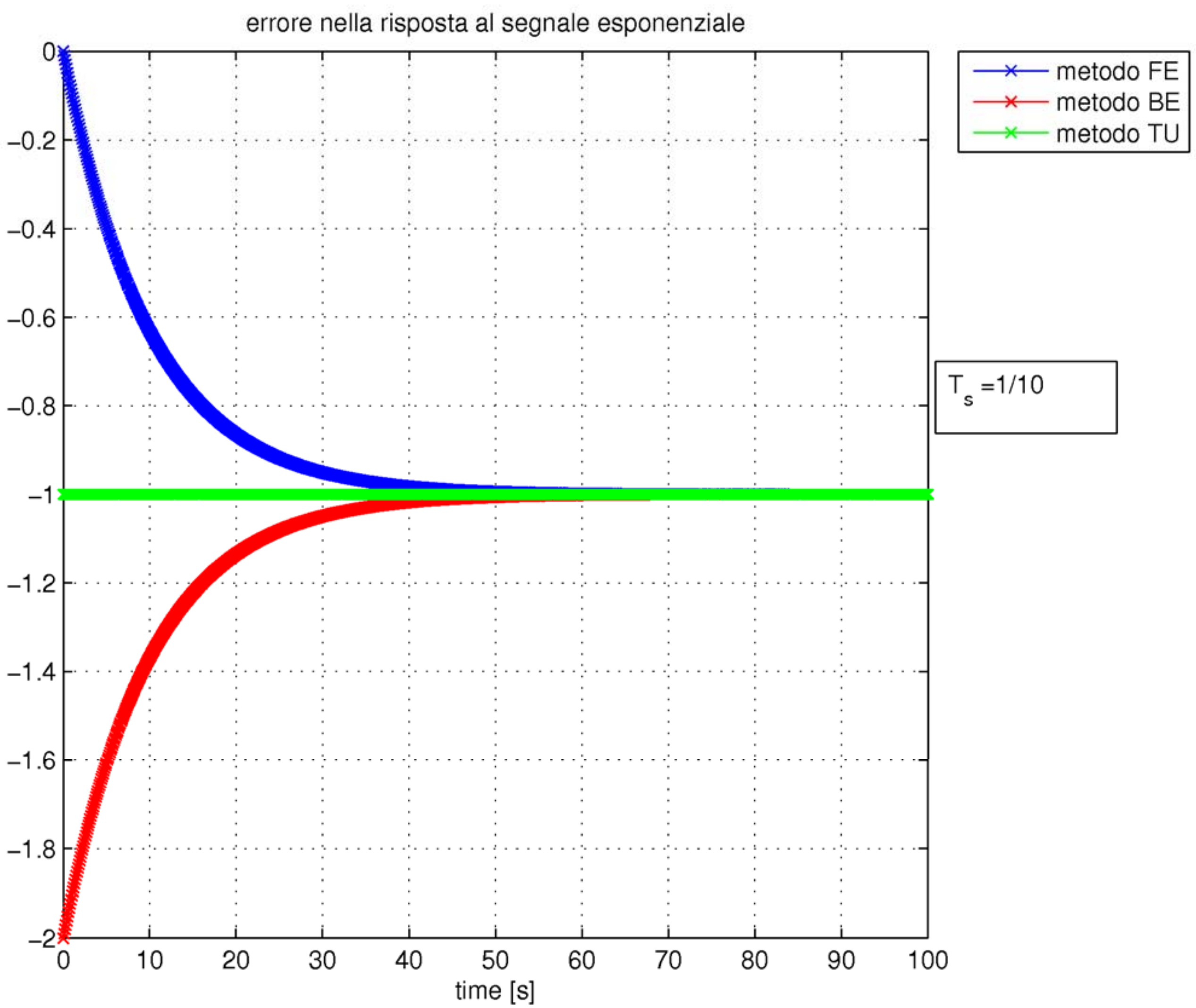
```
y_expGs = lsim(continuo, ingresso, base_tempi2);
y_expFE = lsim(discretoFE, ingresso, base_tempi2);
y_expBE = lsim(discretoBE, ingresso, base_tempi2);
y_expTU = lsim(discretoTU, ingresso, base_tempi2);
```

```
% analisi della risposta al segnale esponenziale
 figure;
 plot(base_tempi2, (y_expGs - y_expFE),'b-x');
 hold on;
 plot(base_tempi2, (y_expGs - y_expBE),'r-x');
 plot(base_tempi2, (y_expGs - y_expTU),'g-x');
 hold off; grid on;
 title('errore nella risposta al segnale esponenziale');
 xlabel('time [s]');
 legend('metodo FE','metodo BE','metodo TU',-1);
```

Risposta al segnale esponenziale



$$T_s = \frac{1}{10}$$

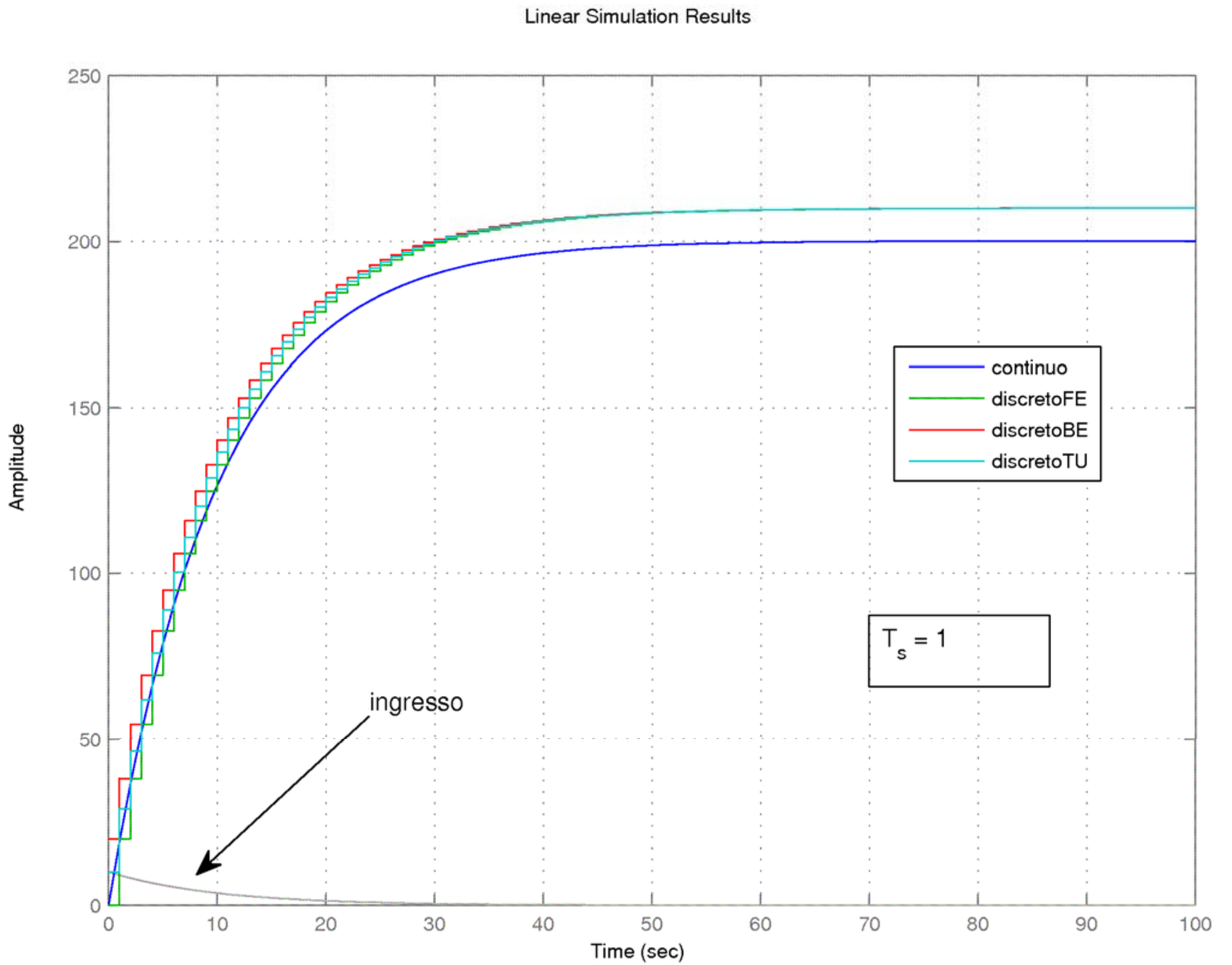


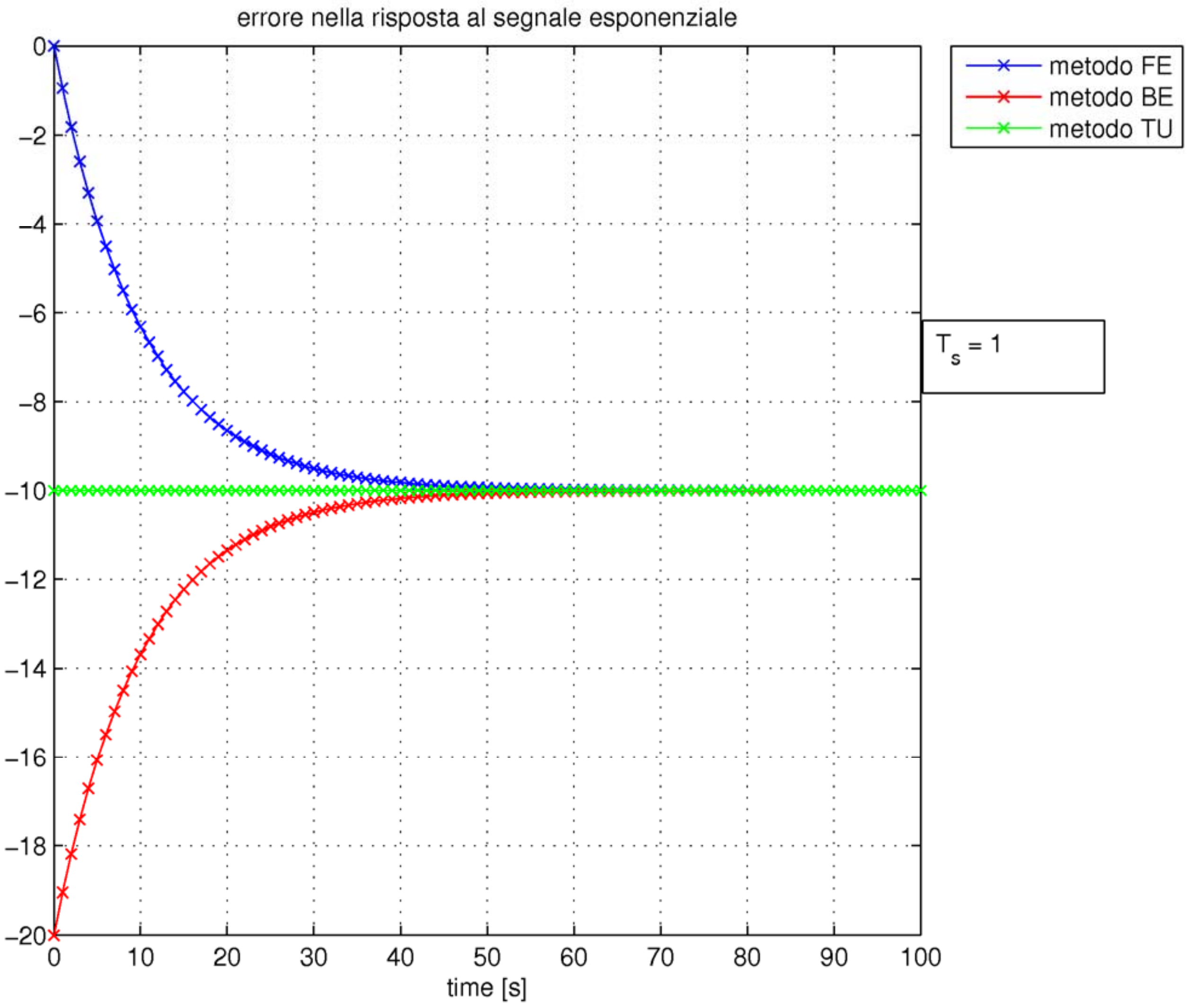
Risposta al segnale esponenziale: differenze tra risposta a tempo continuo e risposte a tempo discreto

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Risposta al segnale esponenziale

$$T_s = 1$$



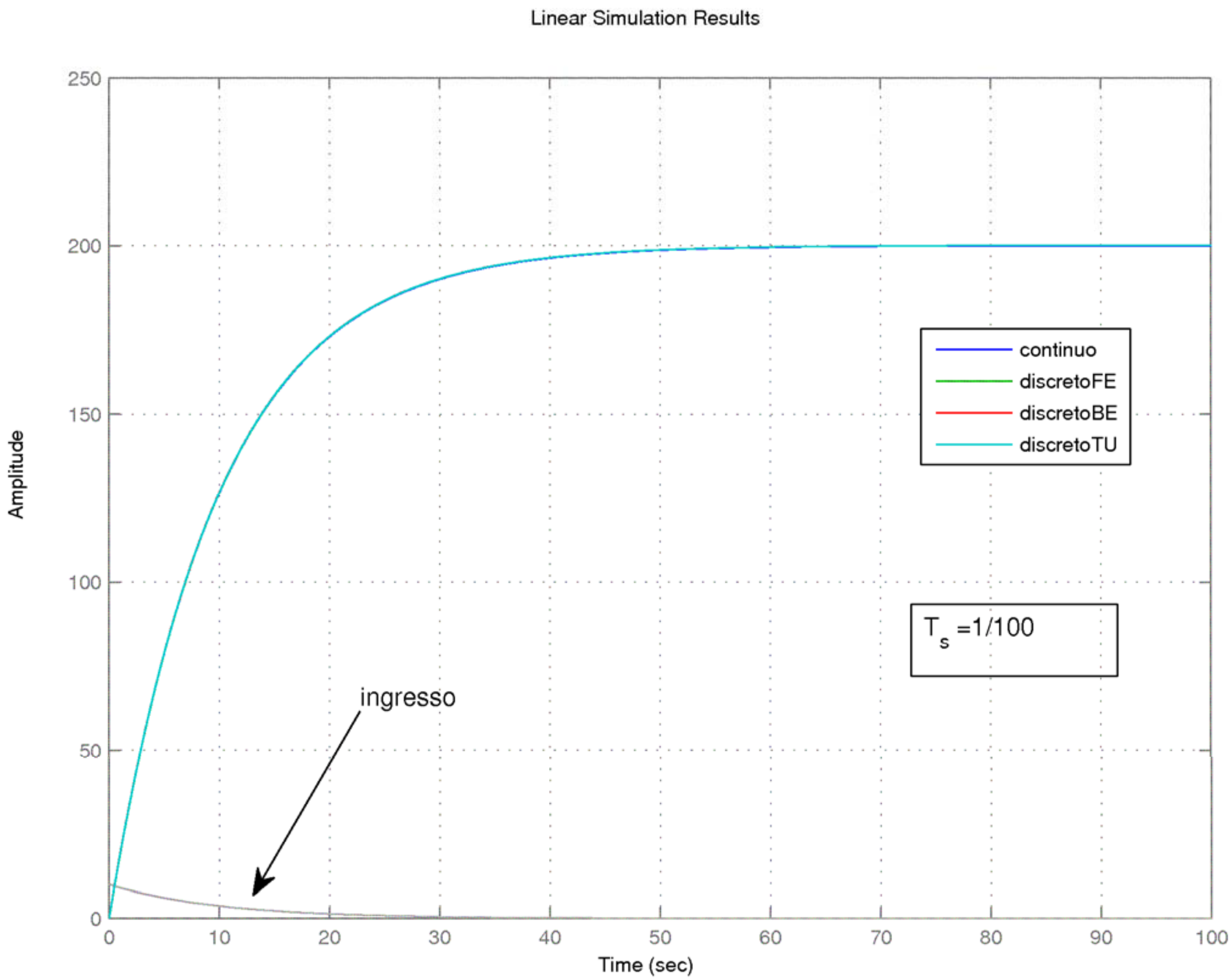


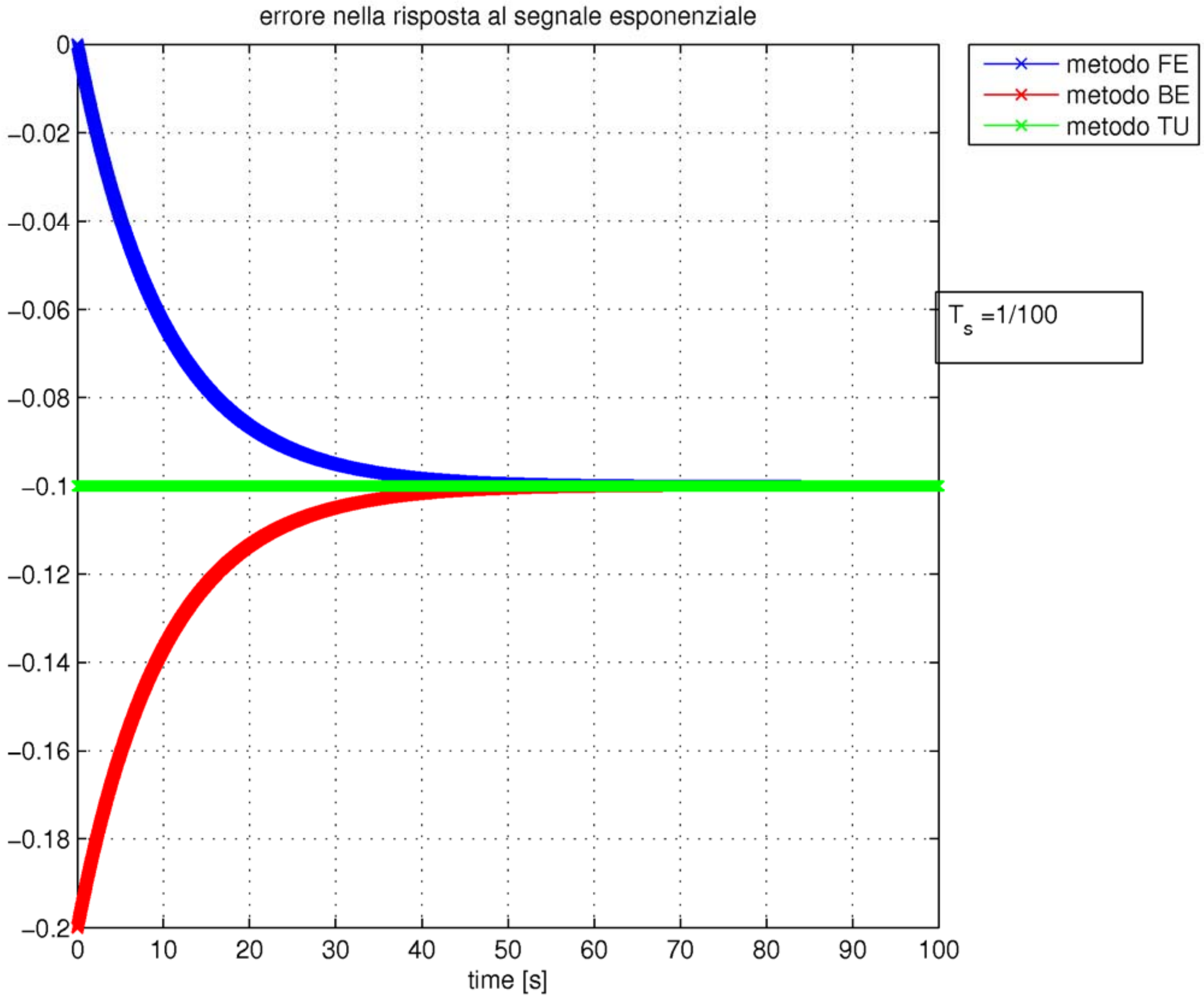
Risposta al segnale esponenziale: differenze tra risposta a tempo continuo e risposte a tempo discreto

$$T_s = 1$$

Risposta al segnale esponenziale

$$T_s = \frac{1}{100}$$

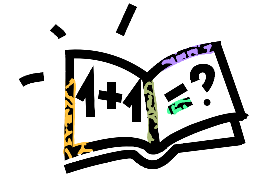




Risposta al segnale esponenziale: differenze tra risposta a tempo continuo e risposte a tempo discreto

$$T_s = \frac{1}{100}$$

Da “integratori” a “differenziatori”: approssimazioni a tempo discreto dell’operatore derivata



- E se volessi risolvere, sempre a tempo discreto, il problema inverso?

$$y(t) \;=\; \dot{u}(t) \qquad\qquad u(t) \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{d\,t}} \Longrightarrow y(t)$$

- Provare a determinare le equazioni alle differenze associate alle FdT:

$$G'_{FE}(z) \;=\; \frac{z-1}{T_s} \qquad G'_{BE}(z) \;=\; \frac{z-1}{z\,T_s} \qquad G'_{TU}(z) \;=\; \frac{2}{T_s}\cdot\frac{z-1}{z+1}$$

Movimento dell'uscita di un sistema dinamico lineare a tempo discreto

Un sistema lineare del secondo ordine a tempo discreto viene descritto mediante l'equazione alle differenze

$$y(k+2) + 4y(k+1) + 4y(k) = 4u(k)$$

in cui $u(k)$ ed $y(k)$ sono rispettivamente ingresso ed uscita del sistema.
Determinare l'espressione analitica della risposta del sistema, a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0) = -12, \quad y(1) = 0$$

nel caso in cui il segnale d'ingresso sia

$$u(k) = 2 \cdot 1(k), \; \forall k \geq 0$$

Applicando la Z-Trasformata all'equazione alle differenze assegnata, si ottiene l'espressione seguente:

$$Y(z) = \frac{-12z(z+4)}{(z+2)^2} + \frac{4}{(z+2)^2}\,U(z)$$

nella quale sono già state inserite le condizioni iniziali assegnate $y(0)$ ed $y(1)$.

Trasformato anche l'ingresso si ottiene, per la sequenza cercata, la Z-Trasformata

$$Y(z) = \frac{-12z(z+4)}{(z+2)^2} + \frac{8z}{(z-1)\,(z+2)^2}$$

Ora non rimane che antitrasformare l'espressione appena determinata, arrivando così al risultato cercato

$$y(k) \;=\; 12\,(-2)^{k}\;[k-1]\cdot 1(k) + \frac{8}{9}\cdot 1(k) - \frac{8}{9}\,(-2)^{k}\cdot 1(k) + \frac{4}{3}\,k(-2)^{k}\cdot 1(k)$$

Equazioni alle differenze

Si determini **l'espressione analitica** dell'uscita $y(k)$ del sistema dinamico a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) \ = \ 0.3\, y(k-1) + 0.1\, y(k-2) + u(k-1) - 0.4\, u(k-2)$$

a partire da condizioni iniziali tutte nulle e con l'ingresso $u(k) \ = \ (2k-1) \cdot 1(k), \ k \in \mathbb{N}$.

Passiamo alla Z—trasformata dell'equazione alle differenze, tenendo conto delle condizioni iniziali nulle e dell'ingresso assegnato:

$$u(k) = (2k - 1) \cdot 1(k), \; k \in \mathbb{N}.$$

$$U(z) = 2\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} = \frac{z(3-z)}{(z-1)^2}$$

$$y(k) = 0.3\,y(k-1) + 0.1\,y(k-2) + u(k-1) - 0.4\,u(k-2)$$

$$Y(z) = \frac{10z - 4}{10z^2 - 3z - 1} \cdot U(z)$$

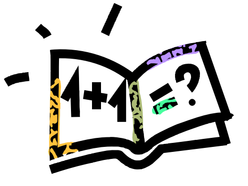
$$Y(z) = \frac{z(10z-4)(3-z)}{(z-1)^2(10z^2 - 3z - 1)}$$

$$Y(z) = \frac{z(10z - 4)(3 - z)}{(z - 1)^2 (10z^2 - 3z - 1)} = \frac{z(10z - 4)(3 - z)}{10(z - 1)^2 (z - 0.5)(z + 0.2)}$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(k) = \left[2k - \frac{10}{3} + \frac{10}{7}\left(+\frac{1}{2}\right)^k + \frac{40}{21}\left(-\frac{1}{5}\right)^k\right] \cdot 1(k)$$

E se le **condizioni iniziali** fossero **non nulle**?



Risolvere il problema nel caso in cui si applichi il medesimo ingresso dell'esercizio appena analizzato, ma con condizioni iniziali pari a

$$y(-1) = 2 \quad y(-2) = -2.$$