

Trasformate di Laplace

Importanza dei modelli dinamici

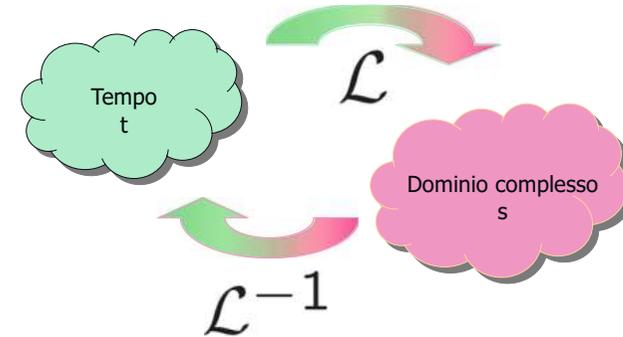


Risolvere equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti)



Metodi per risolverle ???

La trasformata di Laplace e' un OPERATORE funzionale



Definizione :

si considerano funzioni non nulle solo per $t \geq 0$ continue a tratti, senza comportamento impulsivo per $t = 0$ (ed altre ipotesi sempre verificate dalle funzioni considerate in questo corso)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Funzioni del tempo



Funzioni complesse

Perche' queste trasformate sono utili?



1. Hanno molte proprieta' che aiutano a risolvere le equazioni differenziali

2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate "notevoli"

Proprieta'

1. Linearita' :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale: $f(t) \rightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

Proprieta'

3. Trasformata della derivata: $f(t), f'(t)$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0)$$



Derivate di ordine "n"

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0)$$

Proprieta'

4. Traslazione in frequenza: se $k \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{L}[e^{kt} f(t)] = F(s - k)$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

Proprieta'

6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a \in \mathcal{R}^+$$

7. Moltiplicazione per t^n :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Proprietà'

Def: integrale di convoluzione – f, g non nulle per $t \geq 0$

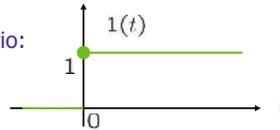
$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

Trasformate notevoli

1. Trasformata del gradino unitario:



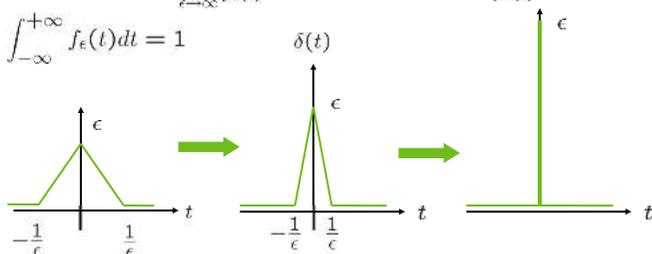
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1(t)] &= \int_0^{+\infty} 1(t)e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Definizione: $\delta(t)$ di Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Si può vedere come il $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} f_{\epsilon}(t)$ di una successione di funzioni $f_{\epsilon}(t)$ tali che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\epsilon}(t) dt = 1$$



Proprietà ed utilizzo

- integrale unitario (per definizione) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

- proprietà di "estrazione" (**sifting property**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-T) dt = f(T)$$

- Utilizzo nello studio dei sistemi dinamici a tempo continuo:
 - condizioni iniziali;
 - comportamento ingresso/uscita del sistema (risposta all'impulso)

Trasformata di Laplace: espressione generale

- Ammettendo che la funzione abbia **comportamento impulsivo** a $t = 0$ (le altre condizioni su $f(t)$ sono verificate)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

Trasformata della derivata: espressione generale

- Ammettendo che la funzione abbia comportamento impulsivo a $t = 0$ (le altre condizioni su $f(t)$ sono verificate)

Trasformata della derivata: $f(t), f'(t)$ \mathcal{L} -trasformabili

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0^-)$$

Derivate di ordine n

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0^-)$$

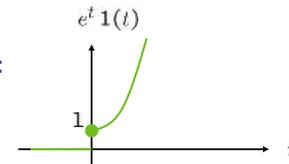
Trasformate notevoli

2. Trasformata della $\delta(t)$ di Dirach

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Trasformate notevoli

3. Trasformata
dell'esponenziale $e^t 1(t)$:

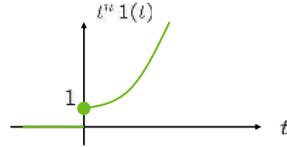


$$\mathcal{L}[e^{kt} 1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(k-s)t} dt = \frac{1}{k-s} [e^{(k-s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

Trasformate notevoli

4. Trasformata di $t^n 1(t)$:

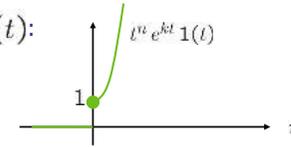


$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n 1(t)] &= (-1)^n \left\{ (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

...basta applicare la proprietà di moltiplicazione per t^n ...

Trasformate notevoli

5. Trasformata di $t^n e^{kt} 1(t)$:



$$\mathcal{L}[t^n e^{kt} 1(t)] = \frac{n!}{(s - k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprietà di moltiplicazione per t^n e di traslazione in frequenza...

Trasformate notevoli

Trasformata di $\sin(\omega t)$ e di $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos \phi - j \sin \phi$$

Trasformate notevoli

6. Trasformata di $\sin(\omega t) 1(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot 1(t)\right] &= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Trasformate notevoli

7. Trasformata di $\cos(\omega t) 1(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)\right] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Applicazione:

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1 + 3t)u(t)$$

Con condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Se $u(t)$ e' un gradino unitario ed applichiamo le proprieta' viste:

$$\begin{aligned}\{s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)\} + \{3[s Y(s) - y(0)]\} + \dots \\ \dots + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}\end{aligned}$$

$$\{s^2 Y(s) - s\} + \{3[s Y(s) - 1]\} + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Si e' ottenuta un'equazione algebrica da cui esplicitare $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

Da questa equazione si puo' tornare nel dominio del tempo,

ANTITRASFORMANDO

FA-es Parte 1L 25

Applicazione:

sistema massa-molla (parte1, 32)

$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$

$$x(0) = r_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

↓

$$M\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \dots$$

$$\dots + h\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s)$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1L 26

↓

$$X(s)\{Ms^2 + hs + k\} - \{Msr_0 + hr_0 + Mv_0\} = F(s)$$

$$X(s) = \frac{Msr_0 + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

"Risposta" libera
 ?
 "Risposta" forzata

dipende dalle condizioni iniziali
 ↓
 dipende dall'ingresso

$x(t)$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1L 27

Applicazione:

controllo di livello (parte 2, 1)

Ipotesi:
-serbatoio infinito
-no disturbo
-controllore proporzionale

$$\begin{cases} \dot{h} = -\frac{1}{A}(k + \mu)h + \frac{\mu}{A}h^o \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

FA-es Parte 1L 28

controllo di livello

Trasformiamo con Laplace, con C.I. nulle (h_0 e' il RIFERIMENTO !):

$$sH(s) = -\frac{1}{A}(k + \mu)H(s) + \frac{\mu}{A}\mathcal{L}\{h^o(t)\}$$

↓

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L}\{h^o(t)\}$$

? → $h(t)$

Prof. Thomas Parisini Fondamenti di Automatica

Antitrasformate

A partire da $F(s)$ si risale - sotto opportune ipotesi - ad $f(t)$ calcolando :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Che vale per $f(t)$ CAUSALE, cioè non nulla solo per $t \geq 0$

$\bar{\sigma} > \alpha$, l'ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di $F(s)$ sono a sinistra della retta individuata da $\bar{\sigma}$ non ne faremo uso ...

Antitrasformate

Ci interessa antitrasformare funzioni razionali fratte



$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\deg(D) = n, \deg(N) = m$$

$$n > m$$

Non applicheremo mai la definizione di antitrasformata!



Antitrasformate

Deve essere $n > m$



Se $F(s)$ e' causale, questa condizione e' sempre verificata.



Altrimenti la teoria delle trasformate ricorre alle funzioni generalizzate...che non vedremo

Antitrasformate (bis)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\deg(D) = n, \deg(N) = m$$

Come si opera nel caso in cui fosse $m = n$?



$$F(s) = a_n + \frac{\hat{N}(s)}{D(s)}$$

$$\deg(D) = n, \deg(\hat{N}) < n$$

Nel caso in cui $m = n$, (funzioni razionali **non strettamente proprie**) nel segnale ottenuto come antitrasformata comparirà un impulso di Dirac.

Espansione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)^{m_1} (s - z_2)^{m_2} \dots (s - z_r)^{m_r}}{(s - p_1)^{n_1} (s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = m \quad n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$$

- avremo r zeri: $z_1, z_2, \dots, z_r \in \mathcal{C}$
di molteplicità' $m_j \quad j = 1, \dots, r$
- avremo q poli: $p_1, p_2, \dots, p_q \in \mathcal{C}$
di molteplicità' $n_i \quad i = 1, \dots, q$

Espansione in fratti semplici

Vogliamo scrivere $F(s)$ come:

$$F(s) = \frac{C_{1,1}}{(s - p_1)} + \dots + \frac{C_{1,n_1}}{(s - p_1)^{n_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_{2,1}}{(s - p_2)} + \dots + \frac{C_{2,n_2}}{(s - p_2)^{n_2}} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_{q,1}}{(s - p_q)} + \dots + \frac{C_{q,n_q}}{(s - p_q)^{n_q}}$$

Espansione in fratti semplici

Per la proprietà' di linearità' la sua antitrasformata si potrà' calcolare così':

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right]$$

Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

Espansione in fratti semplici

Infatti si ha che:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right] = \frac{C_{i,j}}{(j - 1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

Ancora per le proprietà' di linearità', traslazione in frequenza e moltiplicazione per t^n .



$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j - 1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

Espansione in fratti semplici



Se sappiamo **calcolare** i coefficienti $C_{i,j}$ abbiamo automaticamente la $f(t)$

- Metodo 1: basato sul principio di **identita'** dei polinomi \rightarrow va bene per poli a molteplicita' unitaria
- Metodo 2: basato sul **calcolo dei residui** \rightarrow va bene per poli multipli

Espansione in fratti semplici

Risolviamo l'esercizio (parte2, 23) lasciato in sospeso, con entrambi i metodi

a. "Risposta" libera $Y_l(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

Per analogia col caso massa-molla!

b. "Risposta" forzata $Y_f(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$

a. Metodo 1 - qui conviene perche' ci sono poli a molteplicita' unitaria

$$\begin{matrix} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{matrix} \Rightarrow Y_l(s) = \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+2)}$$

Espansione in fratti semplici

$$Y_l = \frac{s(C_1 + C_2) + 2C_1 + C_2}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$Y_l(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y_l(s)\} = y_l(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$

Espansione in fratti semplici

b. Metodo 2

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right) \begin{cases} p_1 = -1, n_1 = 1 \\ p_2 = -2, n_2 = 1 \\ p_3 = 0, n_3 = 2 \end{cases}$$



$$Y_f = \frac{C_{1,1}}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s^2} + \frac{C_{3,2}}{s}$$

Espansione in fratti semplici

Per calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ si applica questa formula:

$$C_{i,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i-j)}}{d s^{(n_i-j)}} F(s) (s - p_i)^{n_i} \right\}$$

Per poli di molteplicità unitaria:

$$C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

Detta formula di Heaviside

Derivata prima del denominatore!

Espansione in fratti semplici

Dunque finiamo l'esercizio:

$$C_{1,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2 \rightarrow p_1$$

$$C_{2,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \rightarrow p_2$$

$$C_{3,1} = \frac{d}{ds} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4} \left. \begin{array}{l} \rightarrow (s) \\ \rightarrow p_3 \end{array} \right\}$$

$$C_{3,2} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2} \left. \begin{array}{l} \rightarrow (s) \\ \rightarrow p_3 \end{array} \right\}$$

Espansione in fratti semplici

Espressione finale di $Y_f(s)$:

$$Y_f = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \left[\frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \right] \cdot 1(t) \quad t \geq 0$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Applicazione:

sistema massa-molla

$$\begin{cases} X(s) = \frac{Mr_0s + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k} \\ r_0 = 0, \quad v_0 = 0 \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k} \quad \text{Se } F(t) \text{ e' un gradino}$$

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

Espandendo in fratti semplici:

$$\Delta = h^2 - 4kM$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s + \frac{h}{2M} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_2}{s + \frac{h}{2M} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_3}{s}$$

$$x(t) = \left[C_1 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_2 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_3 \right] \cdot 1(t)$$

$t \geq 0$

Vedi (parte 1,34) $\rightarrow x(t) = [C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + C_3] \cdot 1(t)$

Si e' gia' visto l'andamento della $x(t)$ a seconda che le radici siano reali o complesse.

\rightarrow segno di $\sqrt{\Delta}$!

Applicazione:

controllo di livello

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L}\{h^0(t)\}$$

$$h^0(t) = h^0_1(t)$$

$$H(s) = \left[\frac{C_1}{s + \frac{(k + \mu)}{A}} + \frac{C_2}{s} \right]$$

$$h^0(s) = h^0_1 \frac{1}{s}$$

dopo qualche passaggio ...

$$h(t) = \frac{\mu h^0}{k + \mu} \left(1 - e^{-\frac{(k + \mu)}{A}t} \right) \cdot 1(t)$$

vedi (parte 2, 4)

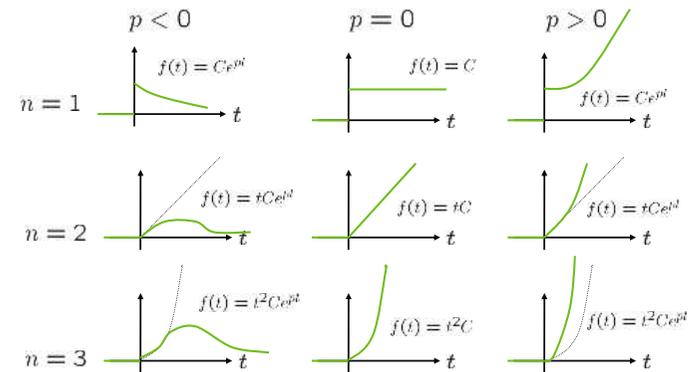
Studio qualitativo delle soluzioni

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-p)^n}\right] \Rightarrow f(t) = \frac{C}{(n-1)!} t^{n-1} e^{pt} 1(t)$$

CASI :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in \mathcal{R} \begin{cases} p < 0 \\ p = 0 \\ p > 0 \end{cases} \\ p \in \mathcal{C} \begin{cases} \text{Re}\{p\} < 0 \\ \text{Re}\{p\} = 0 \\ \text{Re}\{p\} > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad n = 1, 2, 3$$

$$p \in \mathcal{R}$$



Studio qualitativo delle soluzioni

Osservazioni:

- Per $p < 0$ l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero
- Per $p = 0$ l'andamento e' divergente, con velocita' crescente con la molteplicita' del polo; e' limitata sse la molteplicita' del polo e' unitaria
- Per $p > 0$ l'andamento e' SEMPRE divergente

$$p \in \mathbb{C}$$

se $p = \sigma + j\omega$ e' una radice del denominatore di $F(s)$, allora lo sara' anche il suo complesso e coniugato

$$p^* = \sigma - j\omega$$



Nella scomposizione troveremo come coefficienti legati a (p, p^*) i coefficienti (C, C^*) : dunque dovremo antitrasformare

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{(s-p)^n} + \frac{C^*}{(s-p^*)^n} \right] \rightarrow$$

$$p \in \mathbb{C}$$



Sviluppando si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \{ C e^{(\sigma+j\omega)t} + C^* e^{(\sigma-j\omega)t} \} 1(t) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \{ C e^{j\omega t} + C^* e^{-j\omega t} \} 1(t) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \{ (C + C^*) \cos(\omega t) + (C - C^*) \sin(\omega t) \} 1(t) \\ &= \frac{2}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\sigma t} \{ \operatorname{Re}(C) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(C) \sin(\omega t) \} 1(t) \\ &= K t^{n-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) 1(t) \quad K = 2 \frac{|C|}{(n-1)!}, \quad \phi = \operatorname{arctan} \frac{\operatorname{Im}(C)}{\operatorname{Re}(C)} \end{aligned}$$

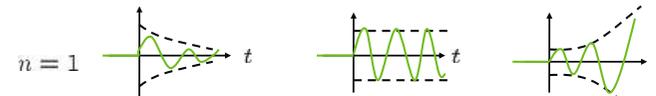
$$p \in \mathbb{C}$$

$$\sigma = \operatorname{Re}\{p\} < 0$$

$$\sigma = 0$$

$$\sigma > 0$$

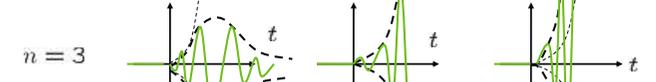
$$f(t) = K e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$



$$f(t) = K t e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$



$$f(t) = K t^2 e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$



Studio qualitativo delle soluzioni

Osservazioni:

- Per $\text{Re}\{p\} < 0$ l'andamento della funzione converge SEMPRE a zero
- Per $\text{Re}\{p\} = 0$ la funzione e' limitata sse la molteplicita' di p e' unitaria
- Per $\text{Re}\{p\} > 0$ l'andamento e' SEMPRE divergente

Proprieta'

Vediamo ancora due proprieta' molto importanti:

Teorema del valore iniziale

IPOTESI: F(s) strettamente propria, cioe' $n > m$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

solo per chi e' curioso:

se $f(t)$ ha impulsi - $\delta(t)$ - nell'origine il teorema non vale in questa forma ...
riflettere sul perche'!

Proprieta'

Teorema del valor finale

IPOTESI: Tutti poli sono nel semipiano sinistro, con al piu' un polo di molteplicita' unitaria nell'origine.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

E' un teorema molto utile: si trova subito il valore regime della $f(t)$ senza fare troppi calcoli!

Teorema del valor finale: esempi

Applicazione corretta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+1}$$

C'e' un solo polo a parte reale negativa 😊

Applicazione scorretta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t) \quad ? \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega} = 1$$

$$\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t)$$

Ci sono due poli immaginari puri! 😞

Esercizi

FA-es Parte 1L 57

1. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)^2} \rightarrow \frac{C_1}{(s + 1)} + \frac{C_{2,1}}{(s + 2)} + \frac{C_{2,2}}{(s + 2)^2}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)^2} \cancel{(s + 1)} = -2 \right\}$$

$$C_{2,1} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)\cancel{(s + 2)^2}} \right\} = 2$$

$$C_{2,2} = \lim_{s \rightarrow -2} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)\cancel{(s + 2)^2}} \right\} = 7$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

Antitrasformiamo :

$$F(s) = \frac{-2}{(s + 1)} + \frac{2}{(s + 2)} + \frac{7}{(s + 2)^2}$$

$$f(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 7te^{-2t}$$



fine!

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

2. Carica e scarica di un circuito RC parallelo:

Equazioni di stato

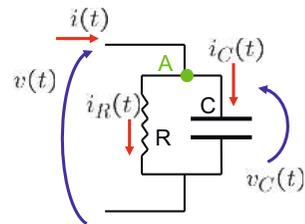
Per il secondo principio di Kirchhoff (al nodo A):

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} + C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

$$v_R(t) = v_C(t) = v(t)$$

$$\frac{y(t)}{R} + C \frac{d}{dt} y(t) = u(t)$$



$$\begin{cases} i(t) = u(t) \\ v_C(t) = y(t) \end{cases}$$

Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

a) Ingresso nullo, ma con condizioni iniziali diverse da zero : il circuito si scarica.

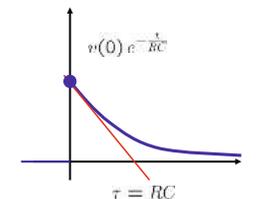
$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt} y(t) = 0$$

Applichiamo Laplace:

$$\frac{Y(s)}{RC} + sY(s) - y(0) = 0$$

$$Y(s) = y(0) \frac{RC}{sRC + 1} = y(0) \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\rightarrow v(t) = v(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$



Prof. Thomas Parisini

Fondamenti di Automatica

b) Soluzione ad ingresso diverso da zero, ma condizioni iniziali nulle : il circuito si carica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = \frac{u(t)}{C}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{sRC + 1} = \frac{U(s)}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Se l'ingresso e' un gradino in corrente:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \frac{1}{sC}$$

Allora espandiamo in fratti semplici...

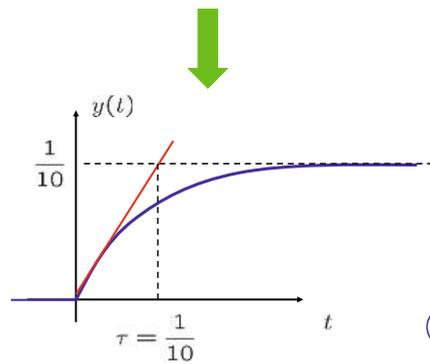


Se R=10, C=1 si ha RC=10 e dunque:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+10)} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s+10} + \frac{B}{s} \right]$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{s(s+10)}(s+10)|_{s=-10} = -\frac{1}{10} \\ B = \frac{1}{s(s+10)}(s)|_{s=0} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$y(t) = \left\{ -\frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10} \right\} 1(t) = \frac{1}{10}(1 - e^{-10t}) 1(t)$$



fine!

3. Antitrasformare la funzione:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Innanzitutto troviamo i poli:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + (1 - j2))(s + (1 + j2))}$$

Poi espandiamo in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s + (1 - j2))} + \frac{C_2^*}{(s + (1 + j2))}$$

Applichiamo la formula dei residui :

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow (-1+j2)} F(s) (s + (1 - j2)) = 3 + j4$$

$$C_2^* = \lim_{s \rightarrow (-1-j2)} F(s) (s + (1 + j2)) = 3 - j4$$



$$f(t) = 1(t) + (3 + j4)e^{-(1-j2)t} + (3 - j4)e^{-(1+j2)t}$$

Che non e' molto agevole perche' presenta coefficienti complessi...

Semplifichiamola sfruttando le formule di Eulero:

$$f(t) = 1(t) + 10e^{-t}(\cos(2t + \phi)) \quad \phi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Ma si poteva anche accoppiare i poli complessi e coniugati:

$$\begin{aligned} \frac{3 + j4}{(s + 1 - j2)} + \frac{3 - j4}{(s + 1 + j2)} &= \dots = \frac{6(s + 1) - 16}{(s + 1)^2 + (2)^2} \\ \dots &= 6 \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + (2)^2} - 8 \frac{2}{(s + 1)^2 + (2)^2} \end{aligned}$$

Antitrasformando -> ricordare la proprieta' di traslazione in frequenza:

$$f(t) = 1(t) + 6e^{-t} \cos 2t - 8e^{-t} \sin 2t$$



fine!

Quello appena visto si dice metodo del **COMPLETAMENTO DEI QUADRATI**:

a. Si accoppiano i poli complessi e coniugati:

$$\frac{C_2}{(s + p)} + \frac{C_2^*}{(s + p^*)} \Rightarrow \frac{as + b}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

$\swarrow \text{Re}\{p\} \quad \searrow \text{Im}\{p\}$

b. Si "aggiustano" le costanti al numeratore per avere:

$$\frac{K_1(s + \sigma) + K_2\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \quad \mathcal{L}^{-1}$$

$$(K_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + K_2 e^{-\sigma t} \sin(\omega t)) 1(t)$$

4. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 6s + 8}{(s - 1)^3(s + 2)^2}$$

Abbiamo gia' i poli...stavolta facciamo attenzione agli zeri!!

Infatti ci sono delle **semplificazioni** fra numeratore e denominatore: un fattore $(s + 2)$ si elimina... Magari non ce ne siamo accorti...
Ma facendo i conti nell'espansione in fratti semplici il coefficiente $C_{2,2}$ legato ad $(s + 2)^2$ risultera' nullo!

$$C_{2,2} = \lim_{s \rightarrow (-2)} F(s)(s + 2)^2 = \dots = 0$$



Se nell'espansione un coefficiente risulta NULLO significa che ci sono delle semplificazioni di cui non ci si e' accorti.



fine!