

Controllo Digitale

**Campionamento ed informazione:
teorema del campionamento e filtraggio
anti-aliasing**

**Progetto di regolatori a segnali campionati:
tecniche approssimate: formula di
“Eulero implicito” e formula di Tustin**

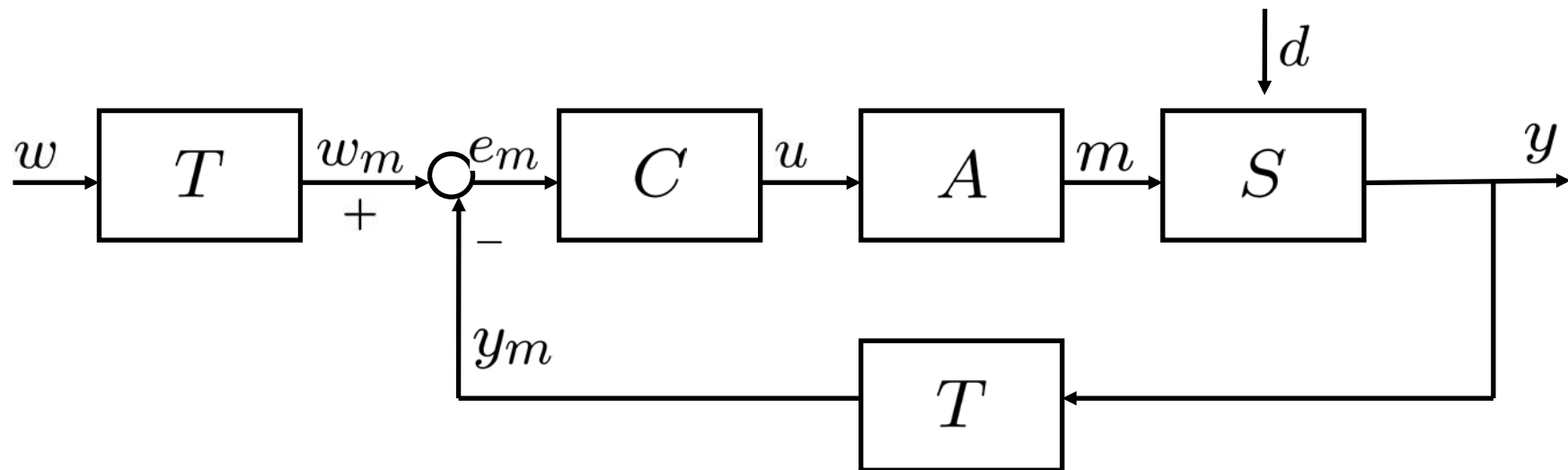
Motivazioni

I sistemi di controllo digitale hanno alcuni vantaggi rispetto ai sistemi di controllo a tempo continuo:

- Flessibilità del SW rispetto all' HW
- Compatibilità rispetto alla strumentazione
- Integrazione di funzioni
- Costi

Controllo a tempo continuo (analogico)

In evidenza i vari componenti del sistema:
trasduttori di misura T , attuatore A , sistema controllato S , controllore C



Tutti i segnali sono segnali a tempo continuo.

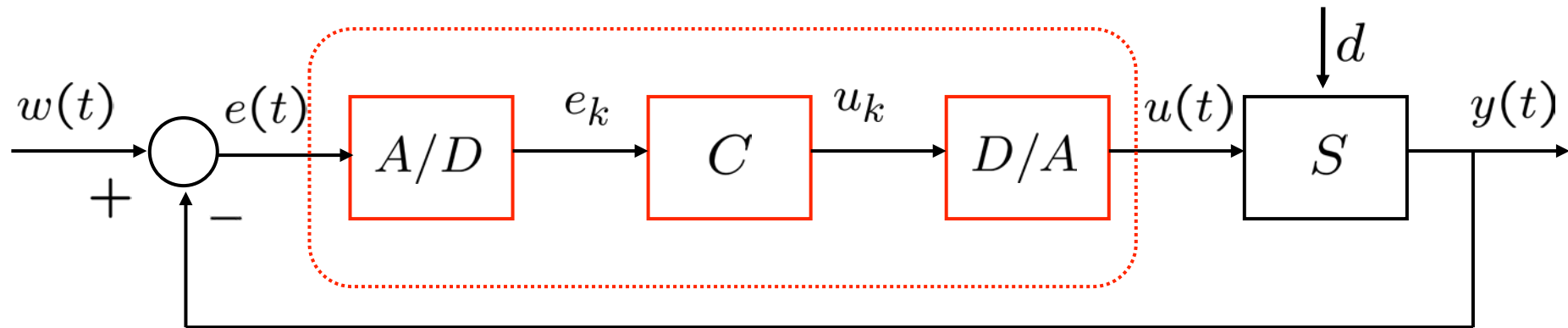
Controllo digitale

- Il controllore analogico (es. rete correttrice) viene sostituito con un' **apparecchiatura digitale** (un μ C, una scheda DSP, un elaboratore elettronico ecc.).
- Tale dispositivo può elaborare soltanto segnali digitali, quindi ha bisogno di interfacce opportune da e verso il processo da controllare:
 - **Convertitori analogico—digitali** (A/D)
 - **Convertitori digitale—analogici** (D/A)

- Il necessario **sincronismo** tra i convertitori e l'unità di controllo digitale viene garantito da un opportuno **segnale di clock** di periodo T_s (chiamato **periodo di campionamento**).
- L'unità di controllo acquisisce i segnali d'ingresso dagli A/D e fornisce i segnali d'uscita ai D/A soltanto in corrispondenza degli istanti di clock.
- Questi segnali allora sono definiti soltanto in istanti in istanti di tempo discreti, multipli del periodo di clock T_s .
- Segnali con questa caratteristica vengono detti **segnali a tempo discreto**.

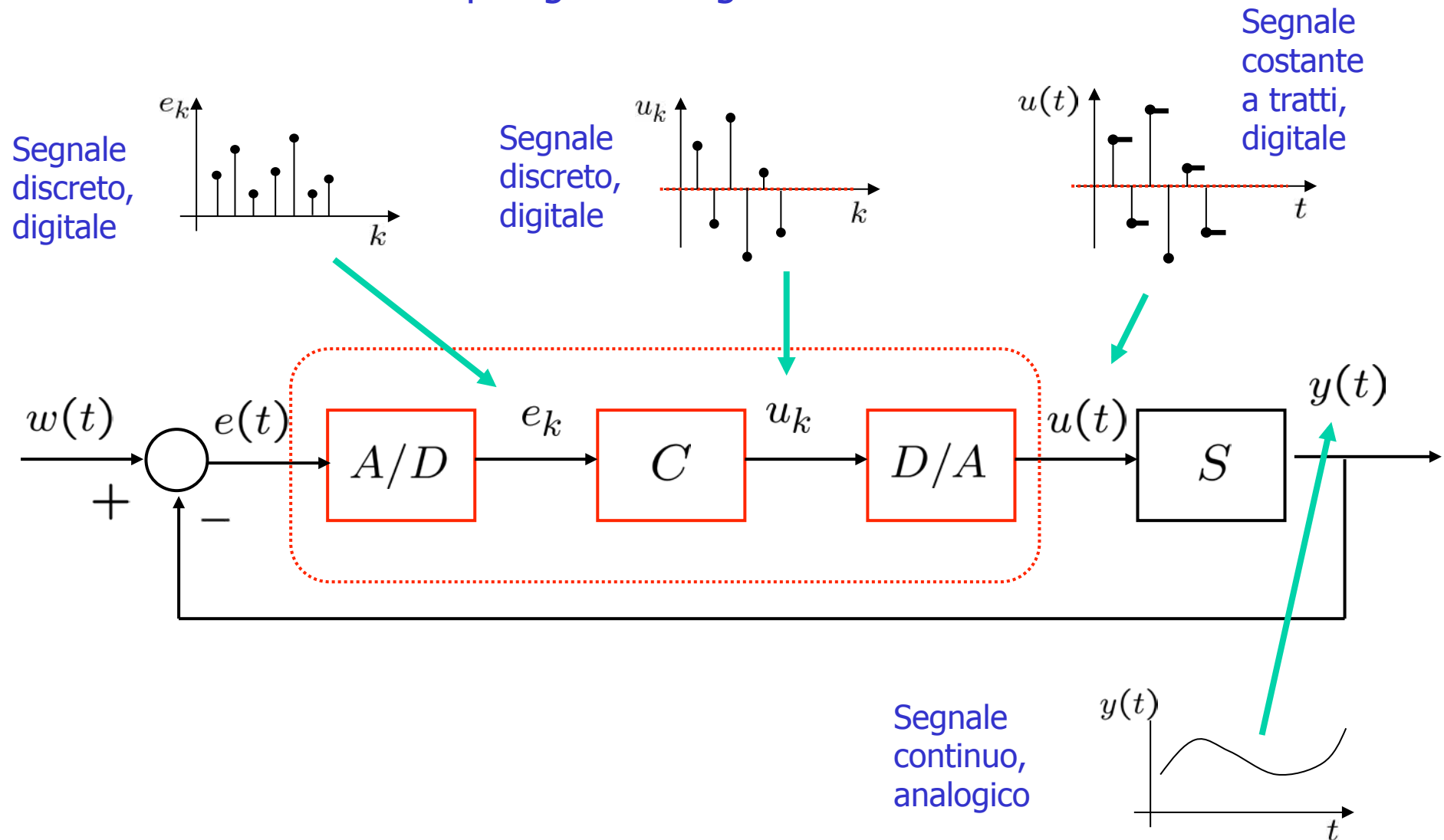
Riassumendo

I sistemi di controllo digitale sono tipicamente strutturati così:

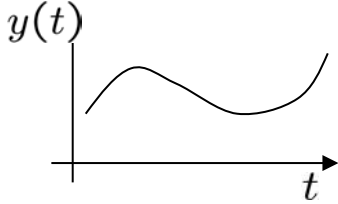
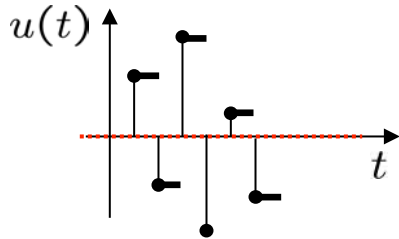
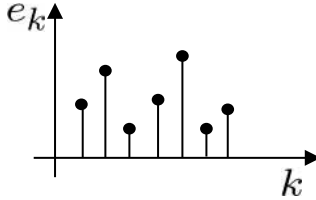


Si tratta di **sistemi ibridi** in cui convivono dinamiche a tempo continuo ed a tempo discreto.

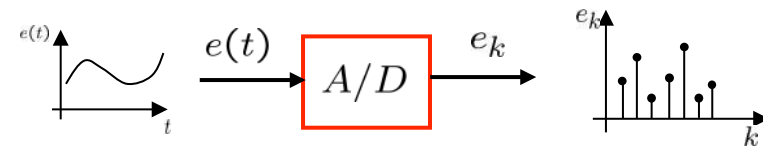
- Evidenziamo le tipologie dei segnali coinvolti



Definizioni

- segnali continui nel tempo  
- segnali costanti a tratti, cioè costanti in ogni intervallo $[i \Delta, (i+1) \Delta]$
con Δ periodo di campionamento  
- segnali discreti nel tempo  
- segnali analogici: le loro ampiezze possono variare con continuità
- segnali digitali: le loro ampiezze sono quantizzate

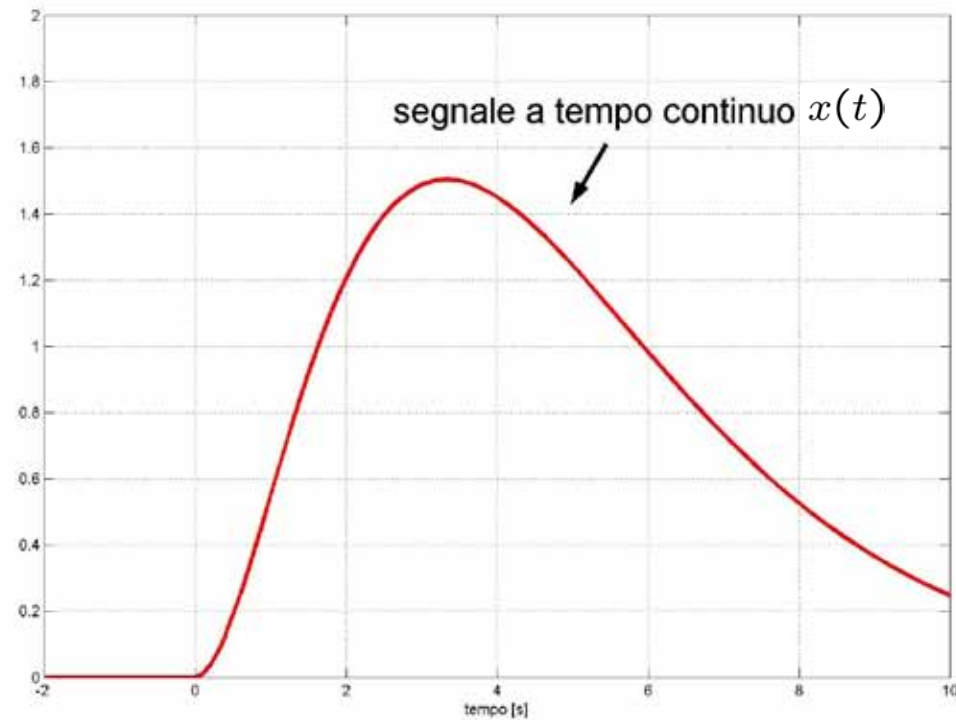
Conversione A/D



Consideriamo un segnale $x(t)$ a tempo continuo, continuo a tratti, limitato e identicamente nullo per tempi negativi.

Al segnale applichiamo un campionamento periodico.

Che cosa significa?

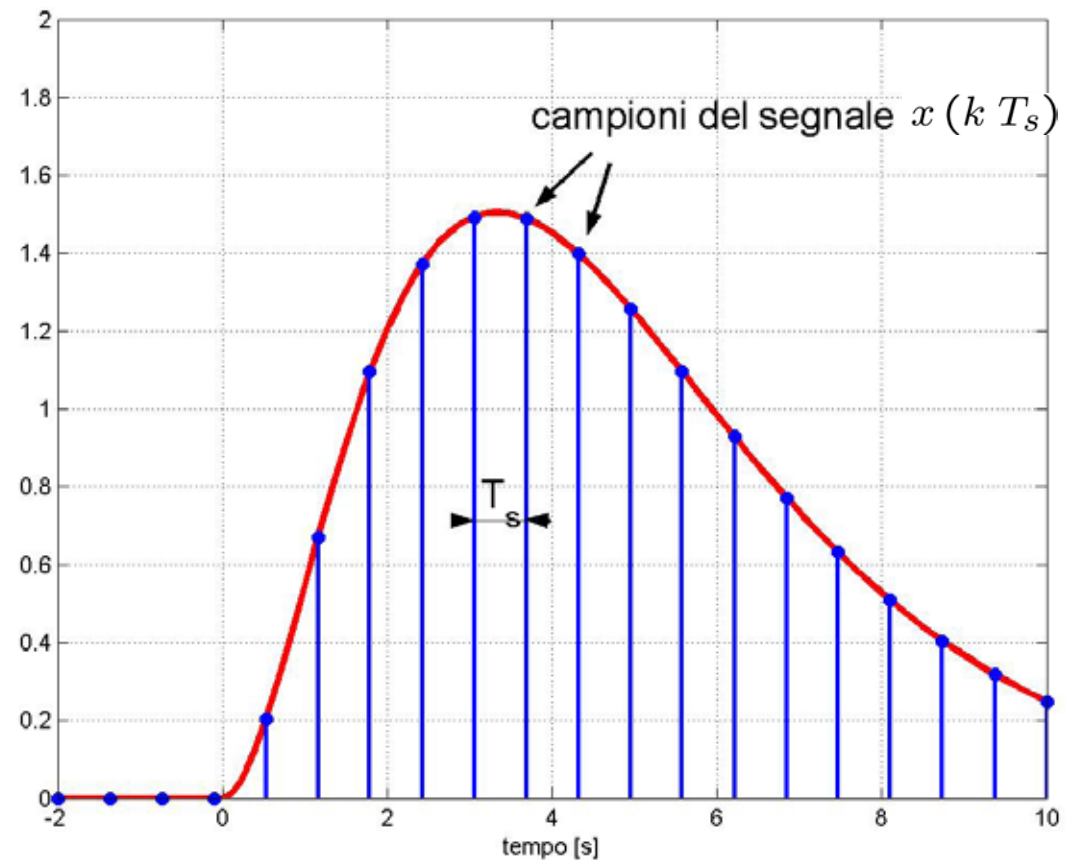
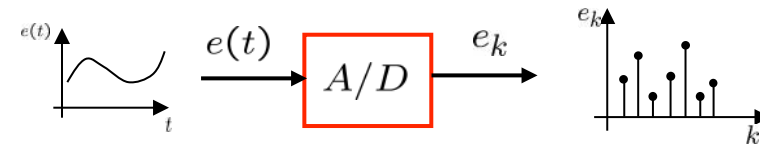


Si estraggono dal segnale i valori assunti in corrispondenza di una successione di **istanti di tempo** multipli interi di un intervallo di tempo fissato, chiamato **periodo di campionamento**. T_s

Di conseguenza si definiscono:

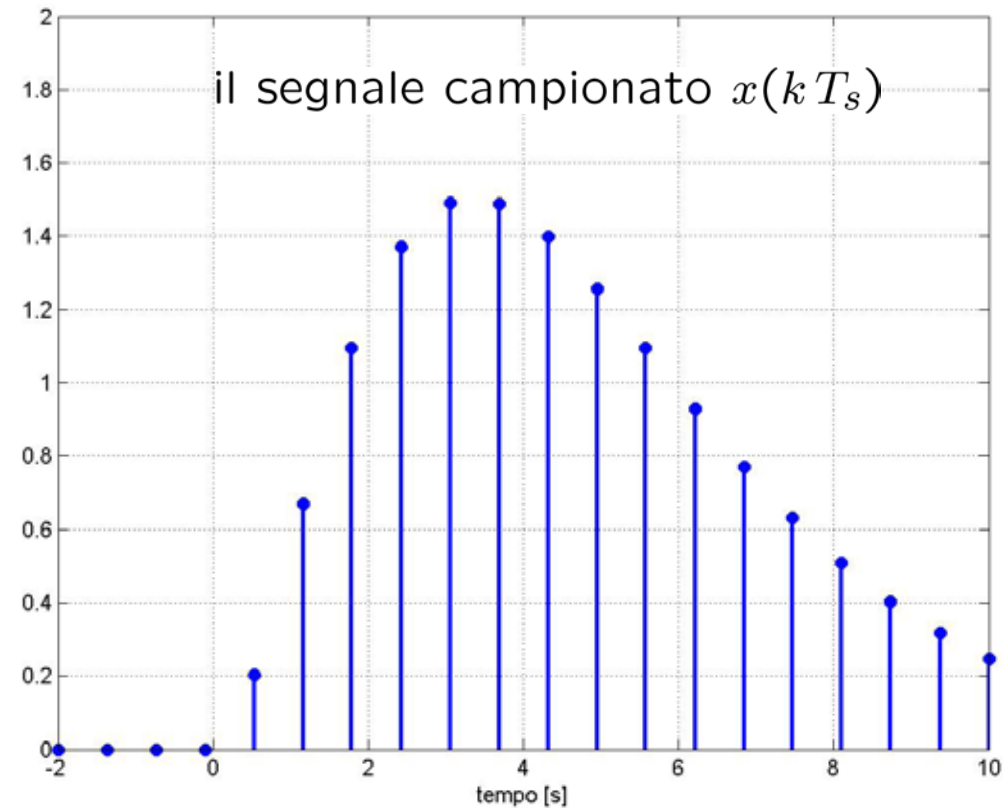
$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ pulsazione di campionamento

$f_s = \frac{1}{T_s}$ frequenza di campionamento



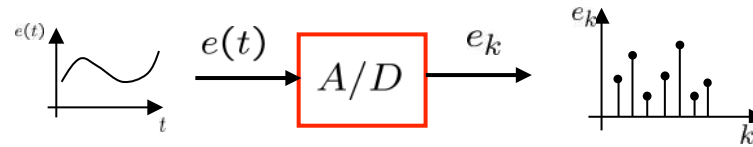
$$\{t = kT_s \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

- Si ottiene una **sequenza di valori numerici** (valori assunti dal segnale a tempo continuo $x(t)$ in corrispondenza della successione di istanti di tempo $\{kT_s\}_{k=0,1,2,\dots}$)
- Si ottiene ancora un **segnale, definito soltanto negli istanti discreti di tempo** considerati.



$$x_k \longrightarrow \{x(t), \quad t = kT_s \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Osservazioni



Nell'operazione A/D ovviamente si perde qualcosa:

- **Perdita di informazione** (ne parliamo più avanti)
- **Codifica digitale** (quantizzazione, distorsioni non lineari)

$$e(t) \rightsquigarrow e_k = e(kT_s) \rightsquigarrow 011010\dots$$

Non affrontiamo questa problematica!

- **Non ci interessa come siano realizzati i dispositivi di conversione A/D.**

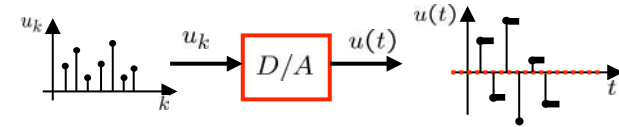
- Il convertitore A/D “semplificato” si rappresenta come un **“campionatore impulsivo”** o **“campionatore istantaneo”**



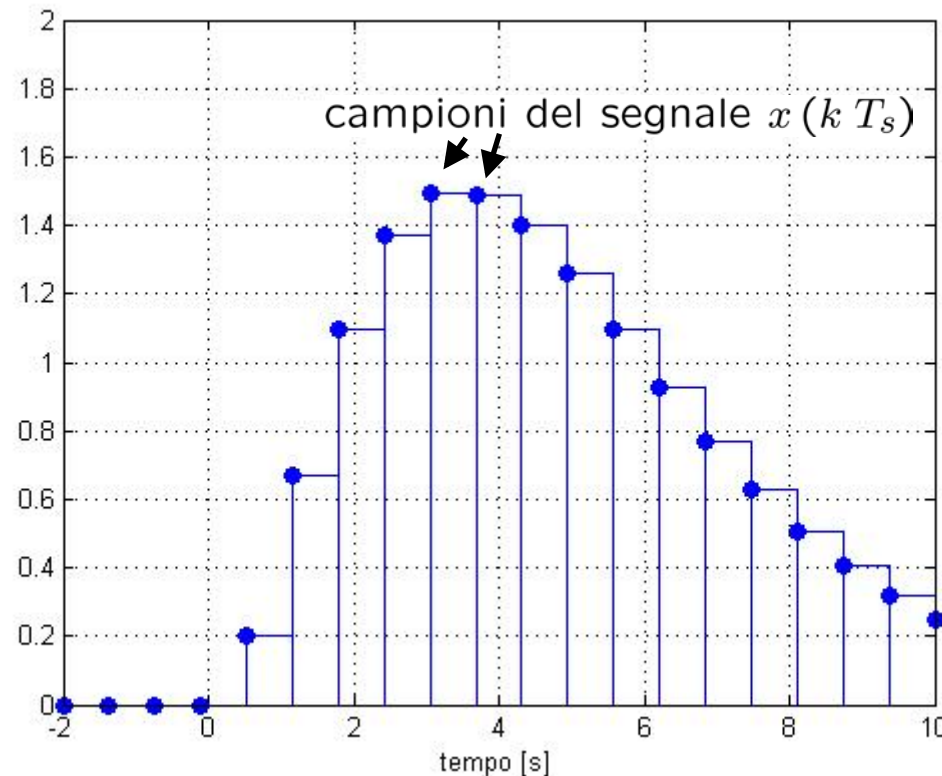
$$e(t) \rightsquigarrow e_k = e(k T_s)$$

Conversione D/A (ZOH tenuta di ordine 0)

$$x(t) = x_k, \quad kT_H \leq t < (k+1)T_H$$

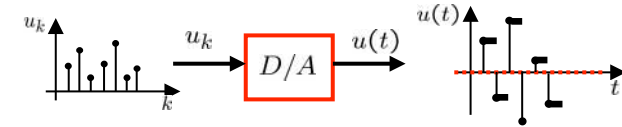


Tra l'istante kT_H ed il successivo $(k+1)T_H$ il **segnale** $x(t)$ in uscita viene mantenuto **costante**, di valore pari a quello del campione della sequenza a tempo discreto in ingresso al convertitore.



T_H : periodo di mantenimento

Osservazioni



- Se con T_H indichiamo il periodo di mantenimento, si definiscono allora

- **Frequenza di mantenimento**

$$f_m = \frac{1}{T_H}$$

- **Pulsazione di mantenimento**

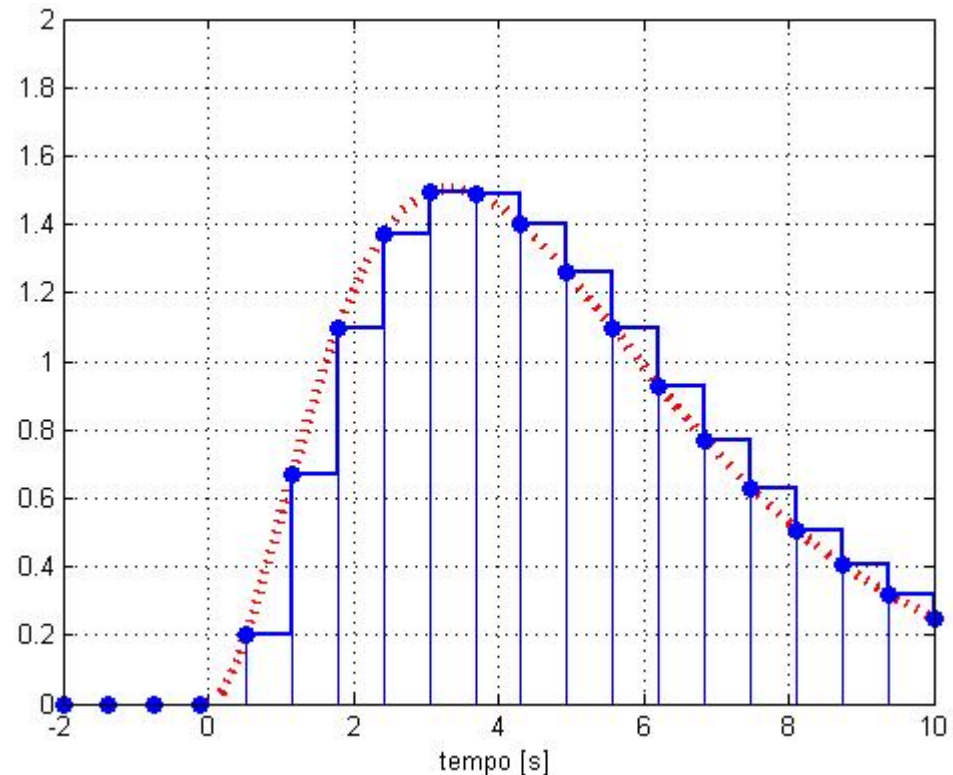
$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_H}$$

- Anche stavolta trascuriamo i problemi dovuti alla codifica digitale (il segnale reale in ingresso al DAC è digitale, quindi quantizzato).
- Di solito il periodo di campionamento T_s e quello di mantenimento T_H hanno la stessa durata.

Osservazioni finali su A/D e D/A

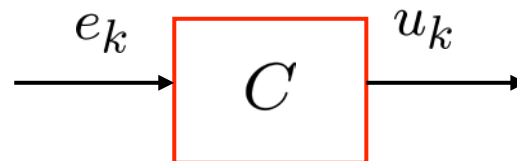
- Anche considerando assente la distorsione da quantizzazione, le operazioni di conversione A/D e D/A non sono una l'inversa dell'altra!
- Applicando l'uscita di un "campionatore impulsivo" all'ingresso di uno ZOH, all'uscita dello ZOH non si ottiene il segnale a tempo continuo di partenza!

L'uscita dello ZOH è una "gradinata" che approssima il segnale, in ritardo.



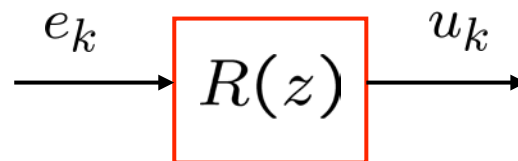
Controllore

Il controllore è un sistema a tempo discreto ovvero è di fatto **un algoritmo di calcolo** (in ciò risiede in effetti la potenzialità del controllo digitale).

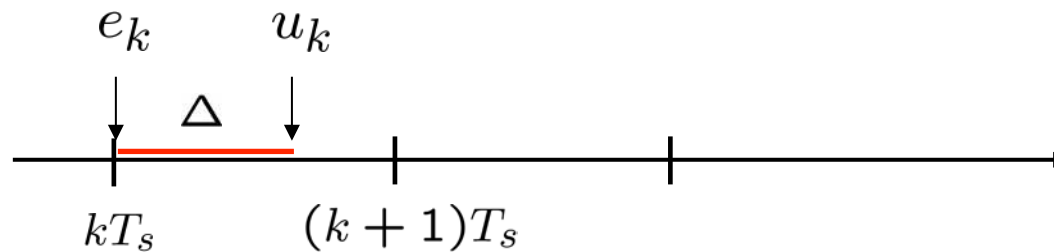


$$u_k = f(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, e_k, e_{k-1}, \dots)$$

La **Z—trasformata** permette di utilizzare un formalismo algebrico analogo a quello a tempo continuo:



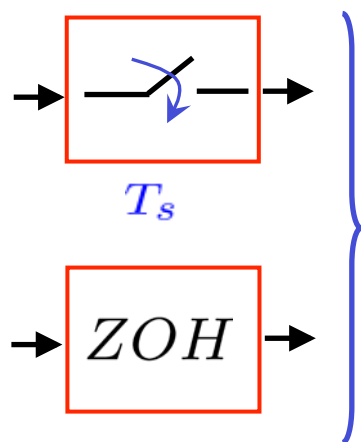
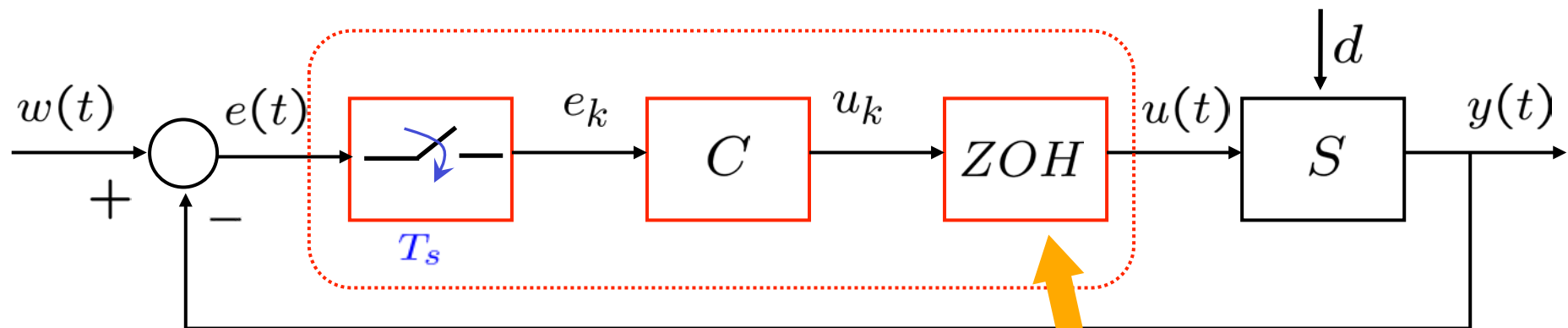
Temporizzazione



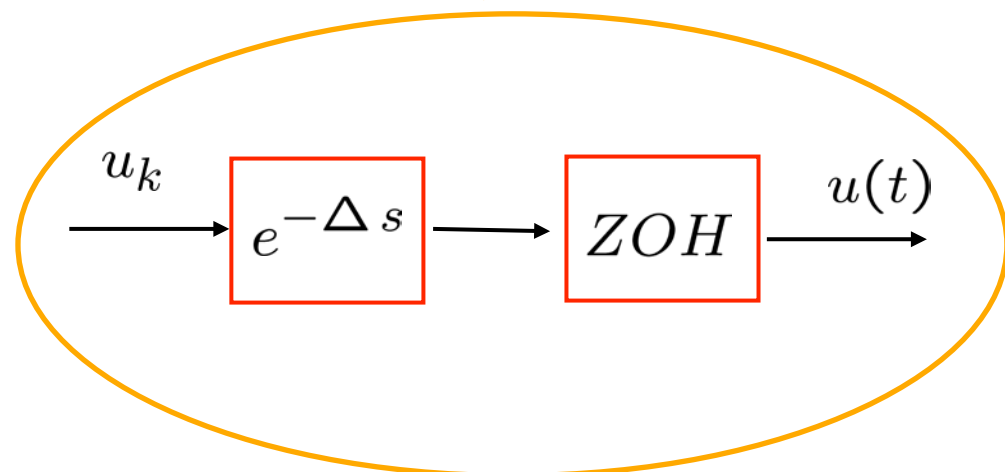
Evidentemente il tempo di elaborazione necessario per calcolare il campione della sequenza di controllo deve essere inferiore al periodo di campionamento:

$$\Delta < T_s$$

Riassumendo: schema equivalente



Elementi
base



- In tutto ciò che segue assumeremo nullo l'intervallo di tempo Δ necessario all'elaborazione della legge di controllo (in pratica lo assumiamo trascurabile rispetto alla durata del periodo di campionamento).

$$\Delta = 0$$

Idealmente

$$\Delta \ll T_s$$

Praticamente

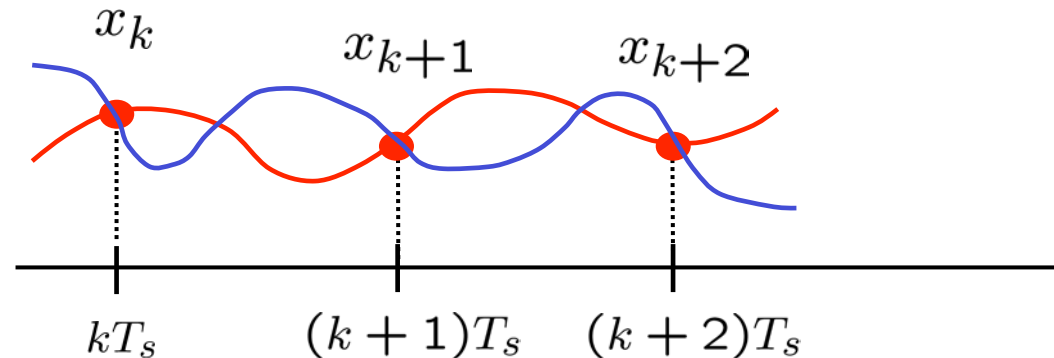
Campionamento ed informazione

Il problema dell' aliasing: cenni

Il teorema fondamentale del campionamento

Scelta del periodo di campionamento

Campionamento e informazione



In generale il **problema** di **ricostruire** la funzione continua a partire dai campioni è **mal posto** nel senso che tale ricostruzione non è univoca.

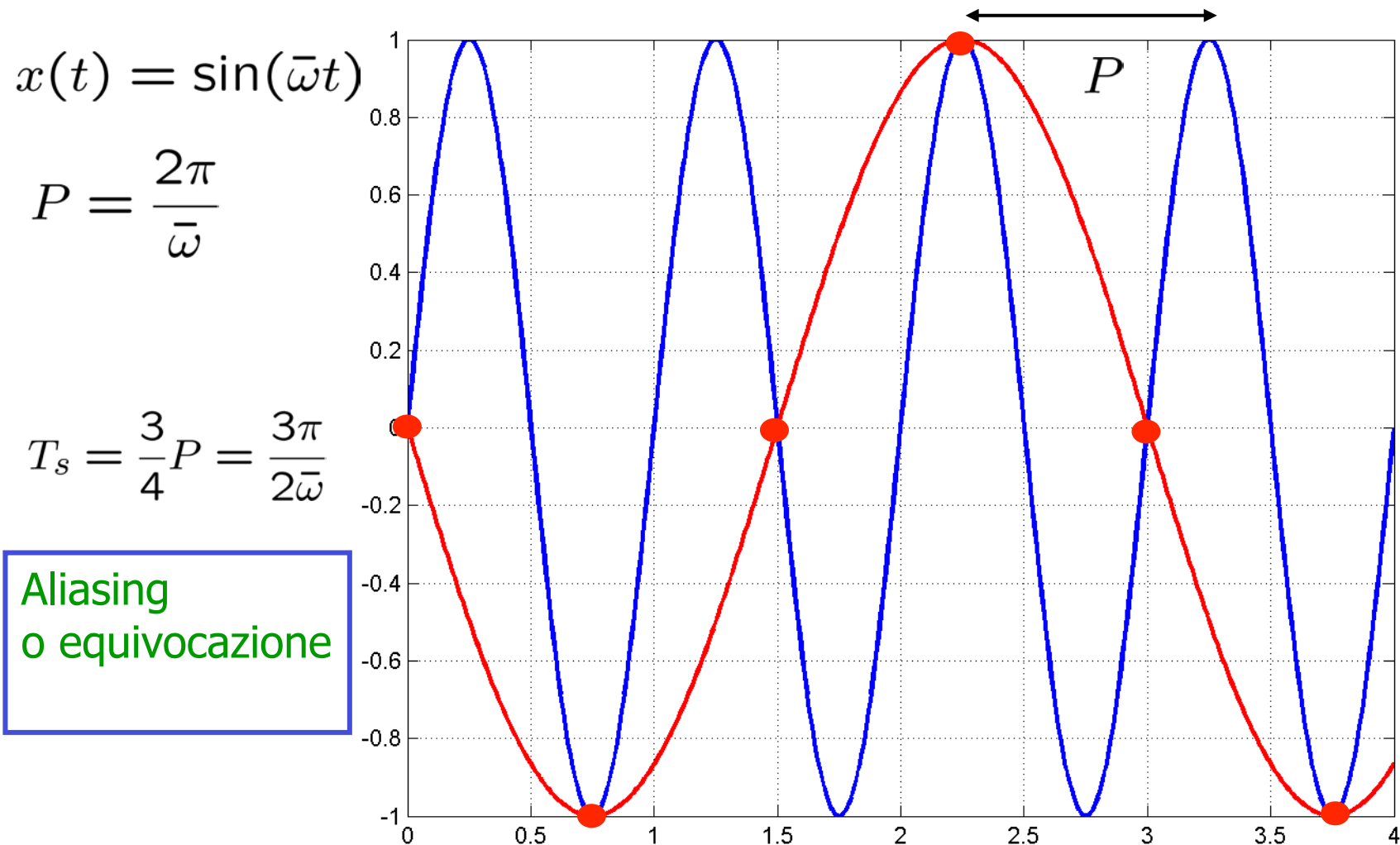
$$\left. \begin{array}{l} x_k, k = 0, 1, 2, \dots \\ + \\ \text{Informazione a priori su } x(t) \end{array} \right\} \xrightarrow{?} x(t)$$

Effetti di distorsione per campionamento non corretto



Campionamento di un segnale sinusoidale

Parte 11, 24

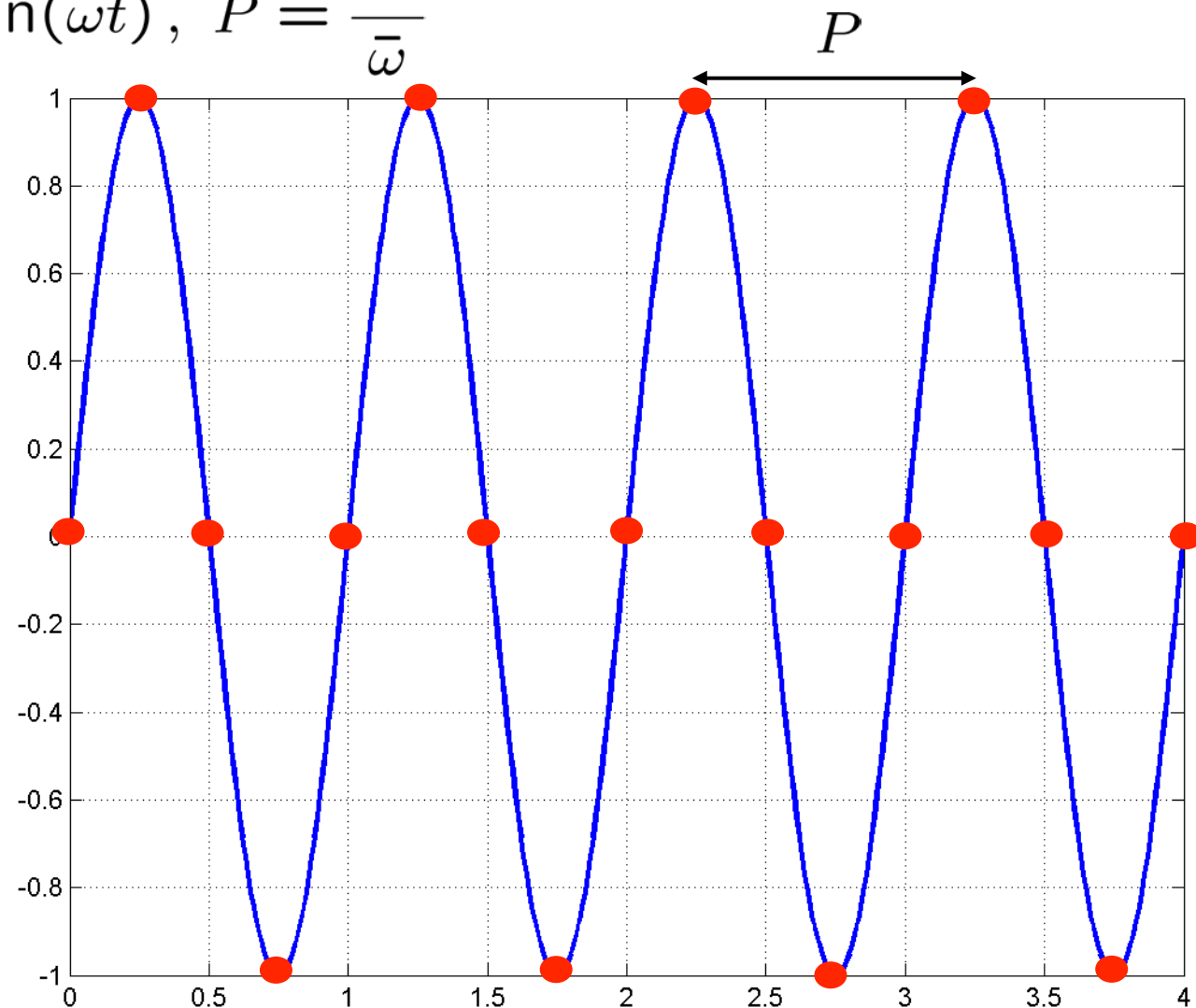


Esistono sinusoidi con periodo $\bar{P} > P$ che producono gli stessi campioni

$$x(t) = \sin(\bar{\omega}t), \quad P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$$

$$T_s = \frac{1}{4}P = \frac{\pi}{2\bar{\omega}}$$

no aliasing



Non esistono sinusoidi con periodo $\bar{P} > P$ che producono gli stessi campioni

Riassumendo: segnali sinusoidali

- Supponiamo di voler sottoporre a campionamento un segnale sinusoidale

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

- Informazione **a priori** sulla pulsazione del segnale

$$\omega < \bar{\omega} \iff P > \bar{P} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$$

- Scelta del campionamento

$$T_s < \frac{\bar{P}}{2} \iff \omega_s > 2\bar{\omega}$$

- Risultato: **ricostruzione univoca** del segnale $x(t)$ a partire dai campioni $x_k = x(k T_s)$

Segnali a banda limitata

- Esiste un risultato valido in generale? Ricordiamo che si definiscono **segnali a banda limitata**

$$- \quad x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \boxed{\omega_i \leq \bar{\omega} \quad \forall i}$$

$$- \quad x(t) = \int_0^{\bar{\omega}} \alpha(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

banda del segnale $\boxed{\omega \in [0, \bar{\omega}]}$

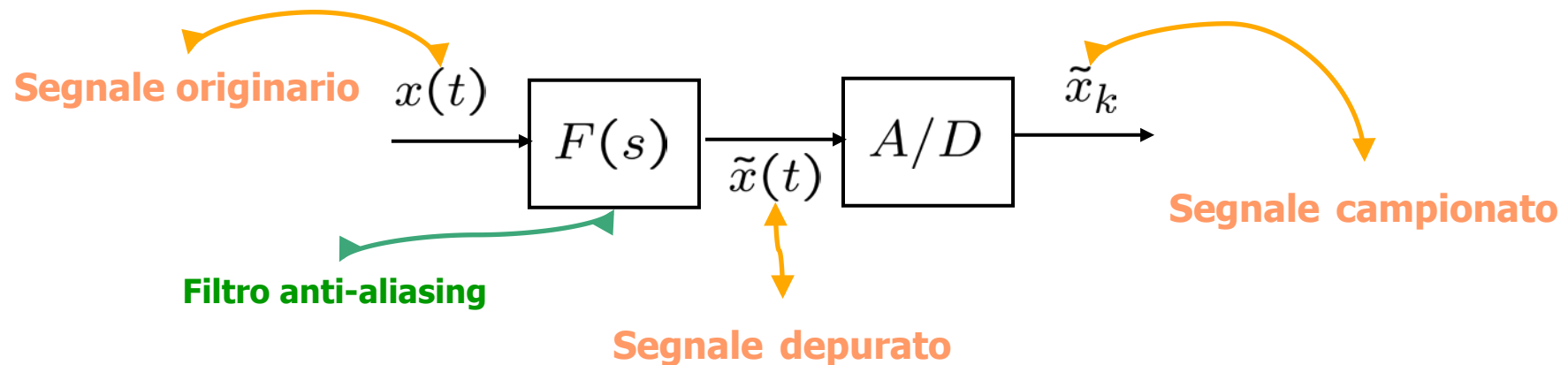
Teorema del campionamento

In generale, se il segnale a tempo continuo $x(t)$ è a banda limitata $B = [0, \bar{\omega}]$ e

se $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\omega}$  $x(t)$ è ricostruibile univocamente a partire dai campioni $x_k, k = 0, 1, 2, \dots$

Teorema fondamentale del campionamento

Come si campiona un segnale? Filtraggio antialiasing

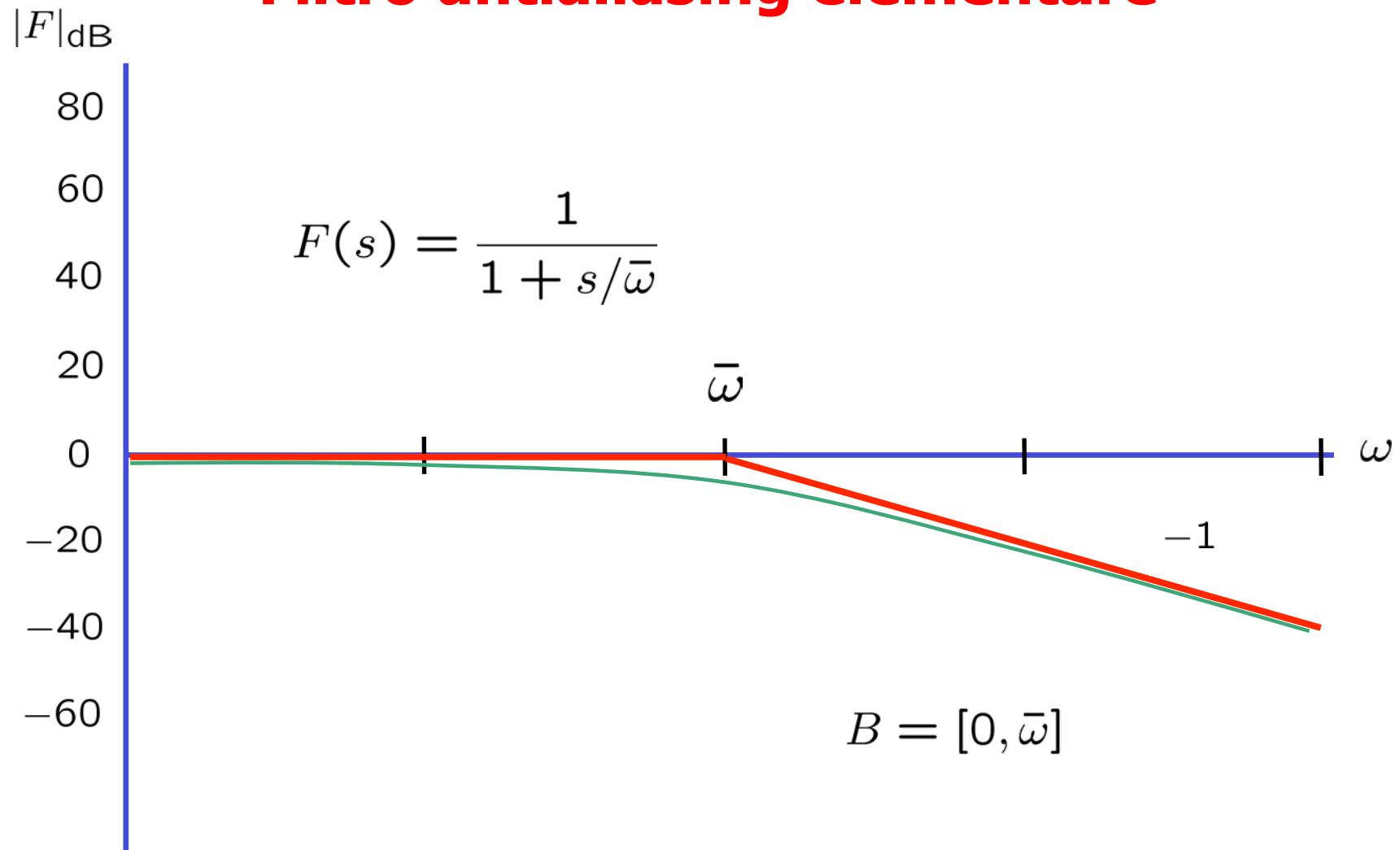


- L'informazione utile di $x(t)$ è confinata in $B = [0, \bar{\omega}]$
- $F(s)$ filtro passa-basso con banda passante $B = [0, \bar{\omega}]$

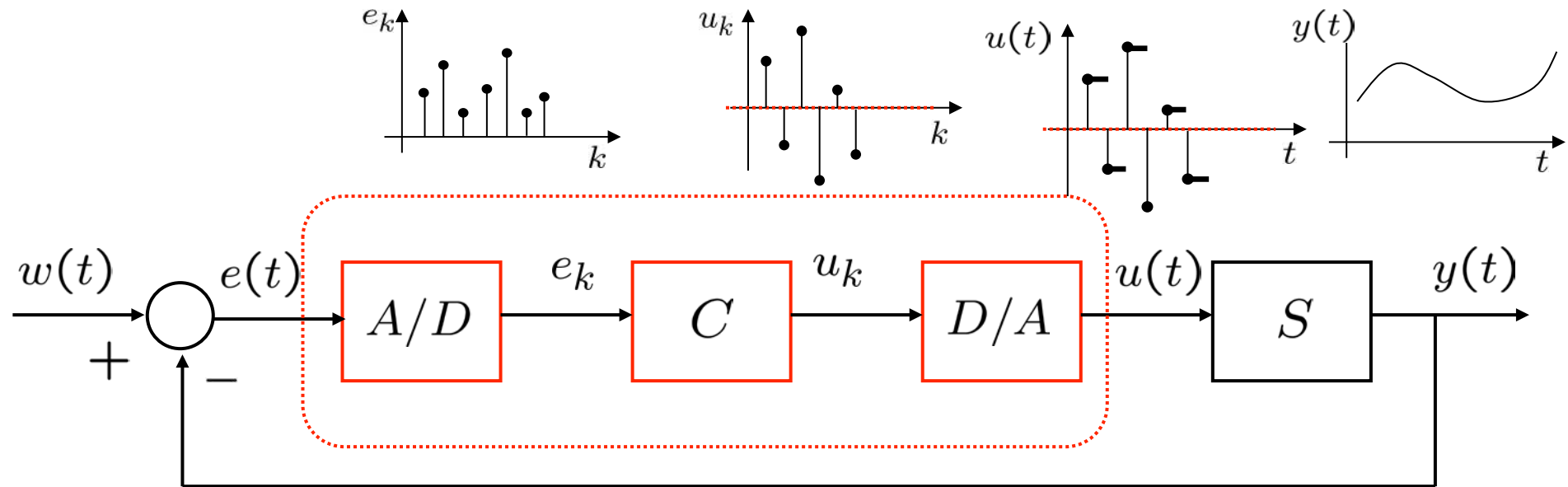
Per esempio:
$$F(s) = \frac{1}{1 + s/\bar{\omega}}$$

- Pulsazione di campionamento $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\omega}$

Filtro antialiasing elementare



Progetto di un controllore digitale



- Scelta di T_s
- Progetto di $R(z)$ (algoritmo di calcolo)

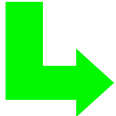


Trasformate Z

Scelta di T_s basata sulla banda

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\omega}$$

- Costi  ω_s bassa
- Informazione: l'informazione utile nel segnale $e(t)$ è confinata in $B_c = [0, \bar{\omega}_c]$

 $\omega_s > 2\bar{\omega}_c$

Regola empirica:

$$\alpha\bar{\omega}_c < \omega_s < 10\alpha\bar{\omega}_c$$

$$\frac{2\pi}{10\alpha\bar{\omega}_c} < T_s < \frac{2\pi}{\alpha\bar{\omega}_c}$$

$$5 \leq \alpha \leq 10$$

Scelta di T_s basata sul numero di campioni nel transitorio

- Caso (tipico): sistema di controllo con 2 poli dominanti, con coefficiente di smorzamento pari a $\bar{\xi}$ e pulsazione naturale $\bar{\omega}_n$
- L'intervallo di **tempo d'assestamento al 1%** è pari a

$$T_{a \ 1\%} = \frac{5}{\bar{\xi} \bar{\omega}_n}$$

- Scegliere di avere **tra α e 10α campioni** nell'intervallo di tempo dato dal **tempo di assestamento al 1%** significa che

$$\frac{T_{a \ 1\%}}{10\alpha} \leq T_s \leq \frac{T_{a \ 1\%}}{\alpha} \qquad 5 \leq \alpha \leq 10$$

Scelta del controllore $R(z)$

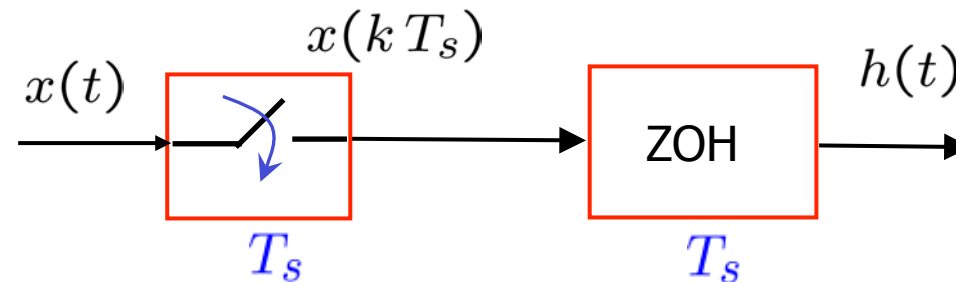
- Discretizzazione di un controllore progettato a tempo continuo
- Tecniche dirette di progetto a tempo discreto
- Daremo soltanto alcuni **brevi cenni** al **primo approccio** ...

Considerazioni

- Le **prestazioni** del sistema **dipendono** anche dalla **scelta** del periodo di **campionamento**! [cfr. FA Parte 1 – slide #63-69, FA Parte 11 – slide #65 e segg.]
- La **stabilità** del sistema deve venire analizzata con **criteri diversi** da quelli utilizzati nel caso di sistemi di controllo a tempo continuo [cfr. FA Parte 3 – slide #72-144].
- Il passaggio da controllore a tempo continuo a controllore digitale non è per nulla indolore, anzi va fatto con accortezza! [cfr. FA Parte 11 – slide #70 e segg.]

Analisi del campionatore + tenuta

- Consideriamo un segnale a tempo continuo $x(t)$ e lo schema



- Obiettivo: modello matematico per il “campionatore impulsivo” e per lo ZOH.
- Possiamo scrivere

$$h(k T_s + \tau) = x(k T_s), \quad 0 \leq \tau < T_s, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

$$\begin{aligned} h(t) = & x(0) [1(t) - 1(t - T_s)] + \\ & + x(T_s) [1(t - T_s) - 1(t - 2T_s)] + \dots \end{aligned}$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) [1(t - k T_s) - 1(t - (k + 1) T_s)]$$



$$\leftarrow \mathcal{L}\{1(t - k T_s)\} = \frac{e^{-T_s k s}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) \frac{e^{-k T_s s} - e^{-(k+1) T_s s}}{s}$$



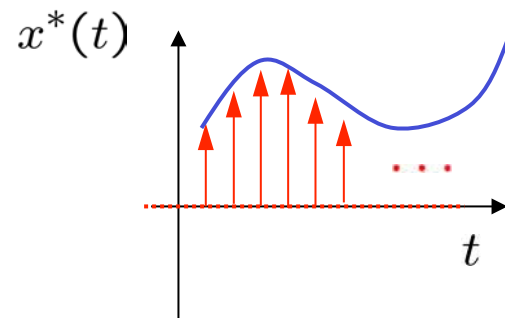
$$H(s) = G_{H0}(s) X^*(s)$$

$$G_{H0}(s) \triangleq \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}$$

$$X^*(s) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) e^{-k T_s s}$$

$$X^*(s) = \mathcal{L} \{x^*(t)\}$$

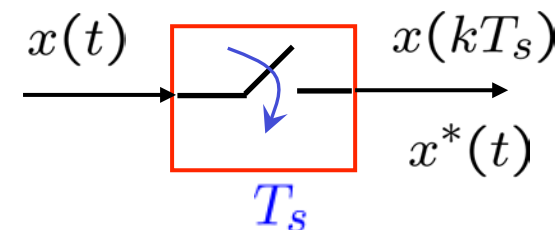
$$X^*(s) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) e^{-k T_s s}$$



$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) \delta(t - k T_s)$$

$$x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k T_s)$$

- Il segnale $x^*(t)$ è il **prodotto** di $x(t)$ con un **treno di impulsi** di Dirac di area unitaria.
- Abbiamo trovato una descrizione matematica del **“campionatore impulsivo”**

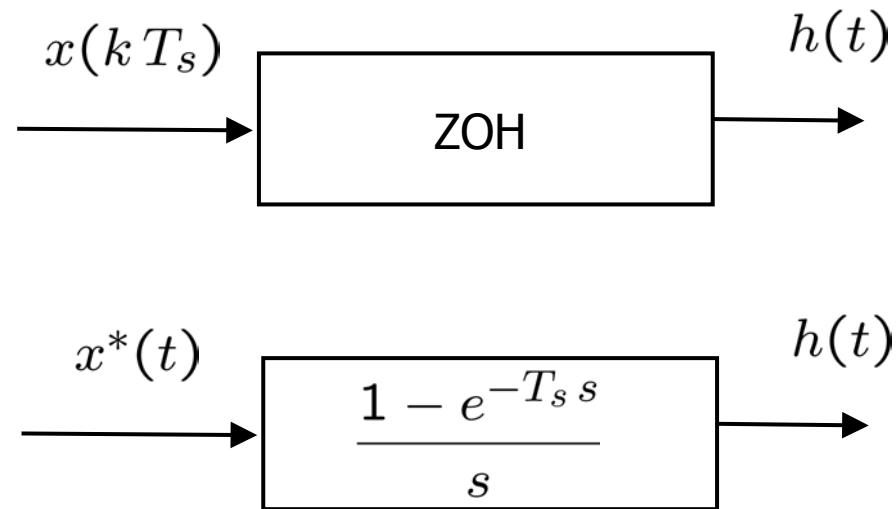


- Si può mostrare che vale anche la relazione seguente

$$X^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s - j k \omega_s), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \quad X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

- Abbiamo determinato anche una descrizione tramite FdT anche per lo ZOH



- I due schemi sono equivalenti, nel senso che danno la medesima relazione I/O.

Campionamento: legame tra $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ e $\mathcal{L}\{\cdot\}$

- Dal confronto

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) e^{-k T_s s}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k T_s) z^{-k} = \mathcal{Z}\{x(k T_s)\} = X(z)$$

$$z = e^{s T_s} \longleftrightarrow s = \frac{1}{T_s} \ln z$$

$$X^*(s)|_{s=\frac{1}{T_s} \ln z} = X(z)$$

Importante!

- La relazione

$$z = e^{sT_s} \longleftrightarrow s = \frac{1}{T_s} \ln z$$

NON PUÒ E NON DEVE essere usata per ottenere per sostituzione di variabile direttamente dalla FdT di un sistema LTI a tempo continuo la corrispondente FdT del sistema a segnali campionati: la sostituzione diretta porta infatti ad una funzione trascendente in “z”!

- NON affrontiamo il problema della discretizzazione di sistemi dinamici lineari in generale: vedremo solo alcuni risultati approssimati.

Osservazione

- I risultati espressi dalle formule trovate in #39 e #41 permettono di affermare che
 - la **risposta in frequenza** di un sistema LTI soggetto a **campionamento** (con periodo di campionamento T_s) è **periodica con periodo ω_s**
 - di solito quando si valuta la risposta in frequenza di un sistema a segnali campionati, si riportano gli andamenti del modulo e della fase per pulsazioni comprese nell'intervallo

$$\omega \in \left[0, \frac{\omega_s}{2} \right]$$

Progetto del controllore

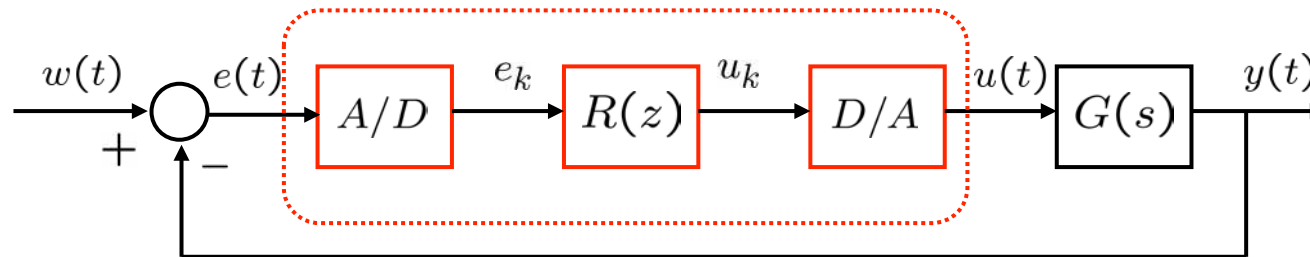
Sistemi a segnali campionati

**Progetto per approssimazione
Regolatori standard**

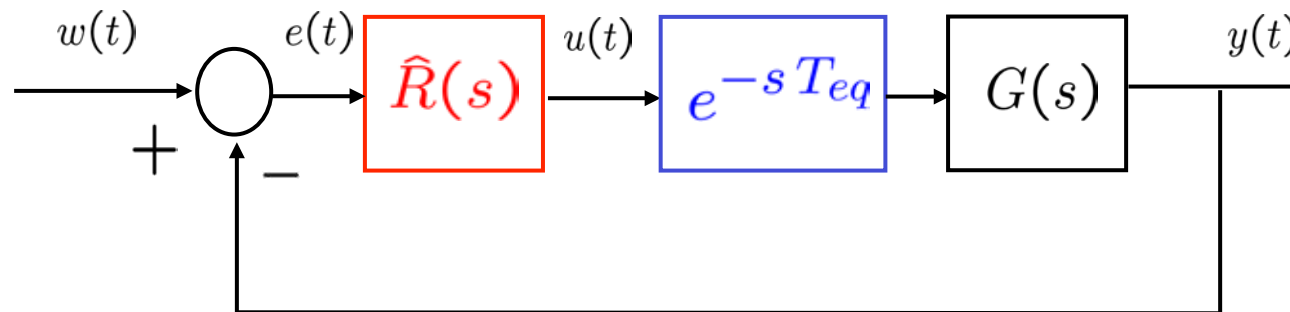
Progetto di un controllore a segnali campionati

- **Sintesi a tempo continuo** ed **implementazione a tempo discreto**: si dimensiona il regolatore basandosi su modelli a tempo continuo del sistema usando le tecniche classiche e poi si realizza in modo “approssimato” il regolatore nella forma a segnali campionati.
- Quale **strategia** si segue per il progetto preliminare a tempo continuo?
- Quali sono le **condizioni di applicabilità** di questa metodologia?

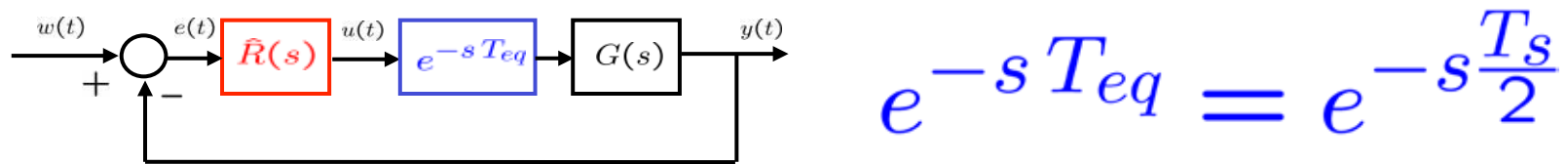
- Vogliamo **progettare** il sistema di controllo seguente, a **segnali campionati**



- Trasformiamo** il problema in un altro problema di **progetto totalmente a tempo continuo**, equivalente, almeno in prima approssimazione, al problema originario



- Si può mostrare che per le tecniche che studieremo vale che



- Risolto il problema a tempo continuo, il controllore a segnali campionati viene determinato applicando una opportuna sostituzione di variabile

$$\hat{R}(s) \xrightarrow{\quad} R(z)$$

$$\uparrow$$

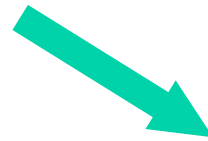
$$s = \frac{n(z)}{d(z)}$$

Giustificazione all'introduzione del termine $e^{-s T_{eq}}$

Risposta in frequenza dell'organo di tenuta

$$G_{H0}(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}$$

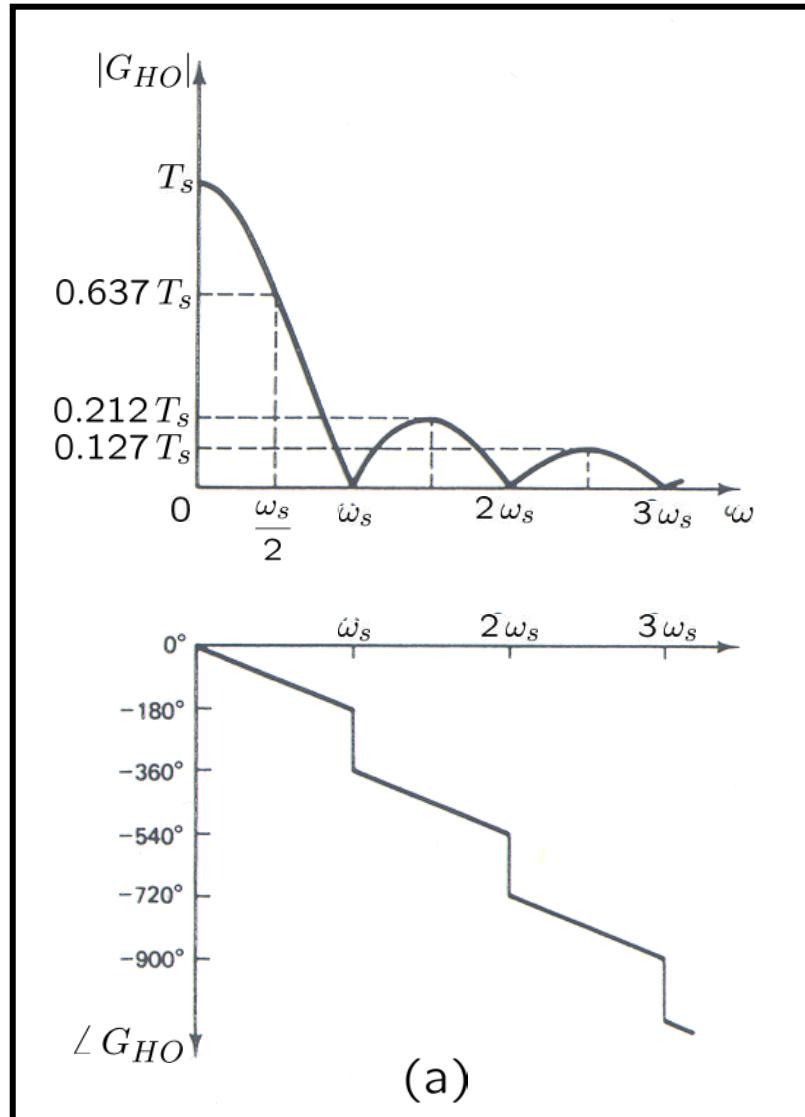
$$s = j\omega$$



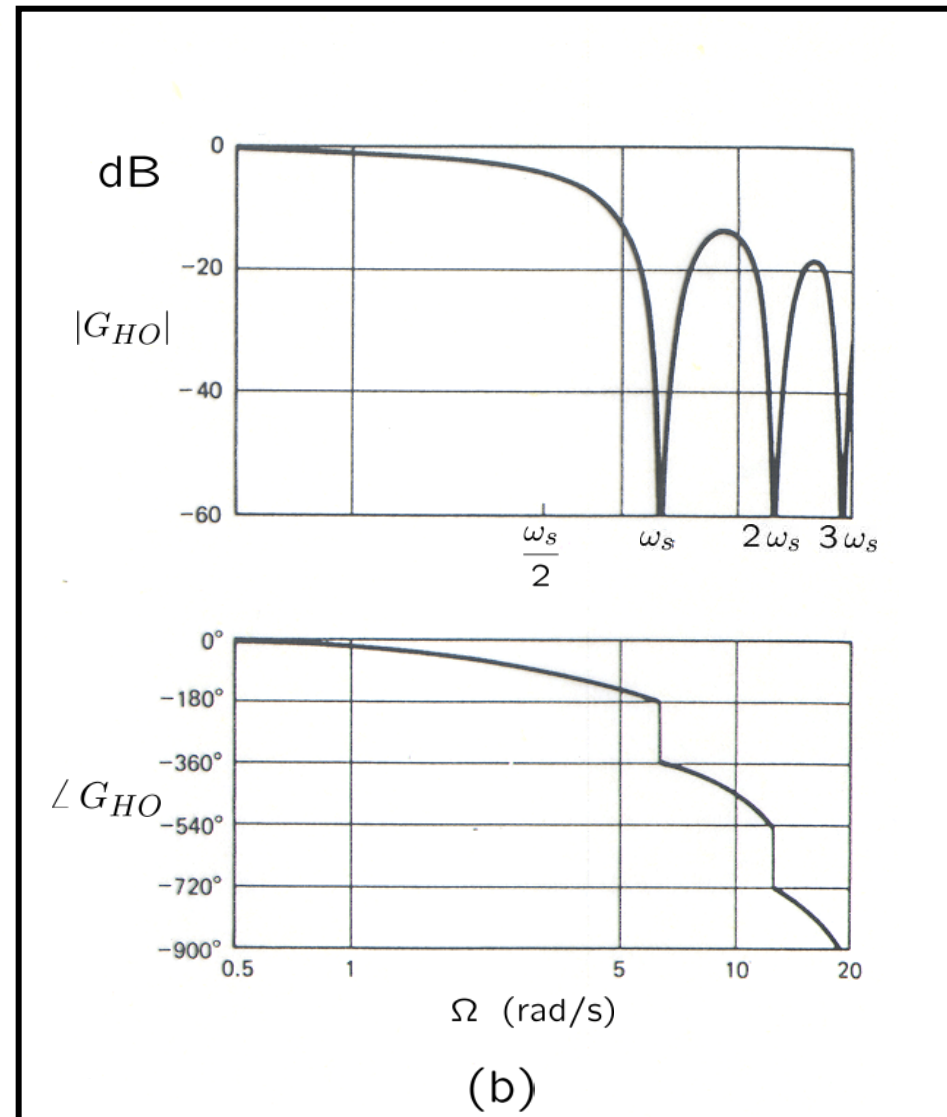
$$G_{H0}(j\omega) = T_s \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}{\frac{\omega T_s}{2}} e^{-\frac{T_s}{2} j\omega}$$

$$G_{H0}(j\omega) = T_s G_H(j\omega)$$

$$G_H(j\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}{\frac{\omega T_s}{2}} e^{-\frac{T_s}{2} j\omega}$$



(a) Grafici della risposta in frequenza del dispositivo di tenuta di ordine 0 (ZOH)

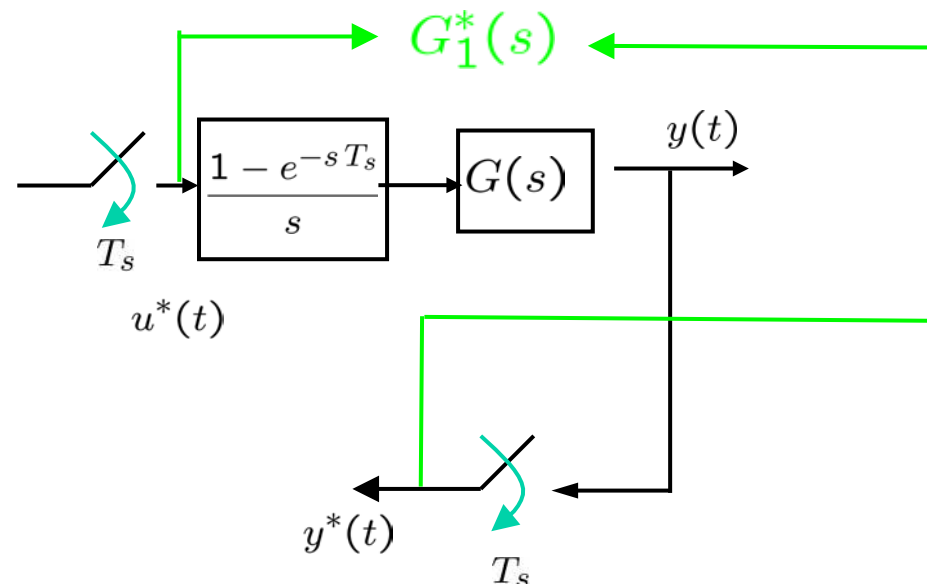


(b) Diagrammi di Bode della risposta in frequenza del dispositivo di tenuta di ordine 0 (ZOH) per $T_s = 1$ s

- Espressione **approssimata per lo ZOH**

$$G_{HO}(j\omega) \approx T_s e^{-\frac{T_s}{2} j\omega}, \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

- Consideriamo ora il campionatore impulsivo applicato allo schema (è lecito pensare di farlo):



$$G_1(s) \triangleq G_{HO}(s) \cdot G(s)$$

- Vale che

$$Y^*(s) = G_1^*(s) U^*(s)$$

$$G_1^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_1(s - j\omega_s k)$$

- nel rispetto del teorema del campionamento, con un adeguato filtro anti-aliasing e sotto opportune ipotesi vale che

$$G_1^*(j\omega) \approx \frac{1}{T_s} G_1(j\omega) = \frac{1}{T_s} G_{HO}(j\omega) \cdot G(j\omega)$$

$$G_{HO}(j\omega) \approx T_s e^{-\frac{T_s}{2} j\omega}$$

$$G_1^*(j\omega) \approx e^{-\frac{T_s}{2} j\omega} \cdot G(j\omega)$$

Tecniche di progetto per discretizzazione

Metodi di Eulero “all’ indietro”, di Tustin

Formule di discretizzazione ispirate all'integrazione numerica: linee guida

- Vedremo soltanto alcune **tecniche** elementari, con **periodo di campionamento fisso**.
- Anche se quelle che descriveremo non saranno tecniche complesse (o anche per questo motivo), le **tecniche più utilizzate** tra quelle di progetto per discretizzazione approssimata sono proprio quelle che descriveremo.

Giustificazione delle trasformazioni

- I metodi di discretizzazione possono essere introdotti come **approssimazioni** della **legge del campionamento** (cfr. FA Parte 11, #38)

$$z = e^{sT_s}$$

- In particolare, si consideri lo sviluppo in serie della relazione del campionamento in un intorno di $s=0$:

$$e^{sT_s} \Big|_{s=0} \approx \dots$$

- Metodo “**Backward Euler**” **BE** o “Eulero implicito”

$$z = e^{sT_s} = \frac{1}{e^{-sT_s}} \approx \frac{1}{1 - sT_s} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{z - 1}{T_s z} \quad (BE)$$

$$z = \frac{1}{1 - sT_s} \quad (BE)^{-1}$$

- Trasformata di **Tustin TU**

$$z = e^{sT_s} \approx 1 + sT_s + \frac{1}{2}s^2 T_s^2$$

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (TU)$$

$$(TU)^{-1} \quad z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}s}{1 - \frac{T_s}{2}s}$$

$$z = \frac{1 + \frac{T_s}{2}s}{1 - \frac{T_s}{2}s} \approx 1 + sT_s + \frac{1}{2}s^2 T_s^2$$



Importante proprietà

- Le trasformazioni presentate garantiscono che se la FdT originaria del **regolatore a tempo continuo $R(s)$** è razionale a coefficienti costanti [$R(s)$ è **sistema LTI**] allora
 - la FdT del regolatore a segnali campionati **$R(z)$** è anch'essa **razionale** (a coefficienti costanti);
 - il regolatore **$R(z)$** è quindi anch'esso un **sistema dinamico lineare e stazionario**.

Proprietà delle trasformazioni: conservazione della stabilità

- Come sono collocati zeri e poli del regolatore a segnali campionati $R(z)$ ottenuto applicando la formula BE o TU, rispetto alla collocazione di zeri e poli del regolatore originario a tempo continuo $R(s)$?
- Partendo da un regolatore a tempo continuo $R(s)$ ed applicando le formule viste si ottengono regolatori a segnali campionati differenti, con configurazioni di zeri/poli differenti.
- **Le formule BE, TU trasformano regolatori $R(s)$ stabili in regolatori $R(z)$ anch'essi stabili?**

Corrispondenza tra piano “s” e piano “z”

- formula BE  $s = \frac{z - 1}{T_s z}$
- formula TU  $s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$
- In quale modo ciascuna delle formule mette in corrispondenza punti nel piano della variabile complessa “s” con punti del piano della variabile complessa “z”?

Corrispondenza “s” $\longleftrightarrow$ “z”: formula BE

- Si vuole risolvere il problema

$$\{s : s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0\} \longleftrightarrow \{z : z \in \mathbb{C}, ?\}$$
$$s = \frac{z - 1}{T_s z}$$

- Si tratta allora di analizzare la regione

$$\left\{ z : z \in \mathbb{C}, \Re\left(\frac{z - 1}{T_s z}\right) < 0 \right\}$$

- Per trovare la regione del piano “z” descritta dalla relazione appena trovata, conviene porre

$$z = \sigma + j\omega$$

- Si ottiene così

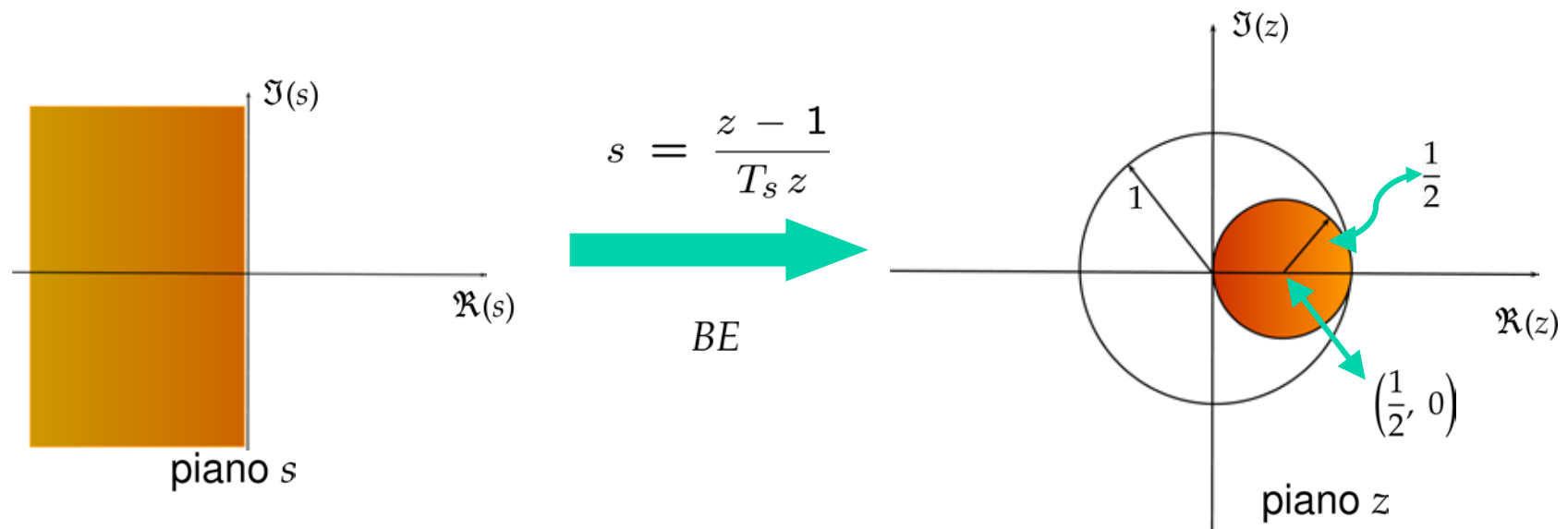
$$\Re \left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{T_s (\sigma + j\omega)} \right) < 0$$

$$\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2} \right) + \omega^2 < \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- La regione che abbiamo determinato è delimitata da una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centro in $(+\frac{1}{2}, 0)$ nel piano “z”.



- La **trasformazione BE** allora **garantisce la stabilità**: passando da “s” a “z” sicuramente si ottengono “poli stabili” se la FdT di partenza possiede “poli stabili”.

Corrispondenza “s” $\longleftrightarrow$ “z”: formula TU

- In maniera analoga a quanto fatto finora, si vuole risolvere il problema

$$\{s : s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0\} \longleftrightarrow \{z : z \in \mathbb{C}, ?\}$$

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Si tratta allora di analizzare la regione

$$\left\{ z : z \in \mathbb{C}, \Re\left(\frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}\right) < 0 \right\}$$

- Per trovare la regione del piano “z” descritta dalla relazione appena trovata, conviene ancora porre

$$z = \sigma + j \omega$$

- Si ottiene così

$$\Re \left(\frac{2}{T_s} \frac{\sigma - 1 + j \omega}{\sigma + 1 + j \omega} \right) < 0$$

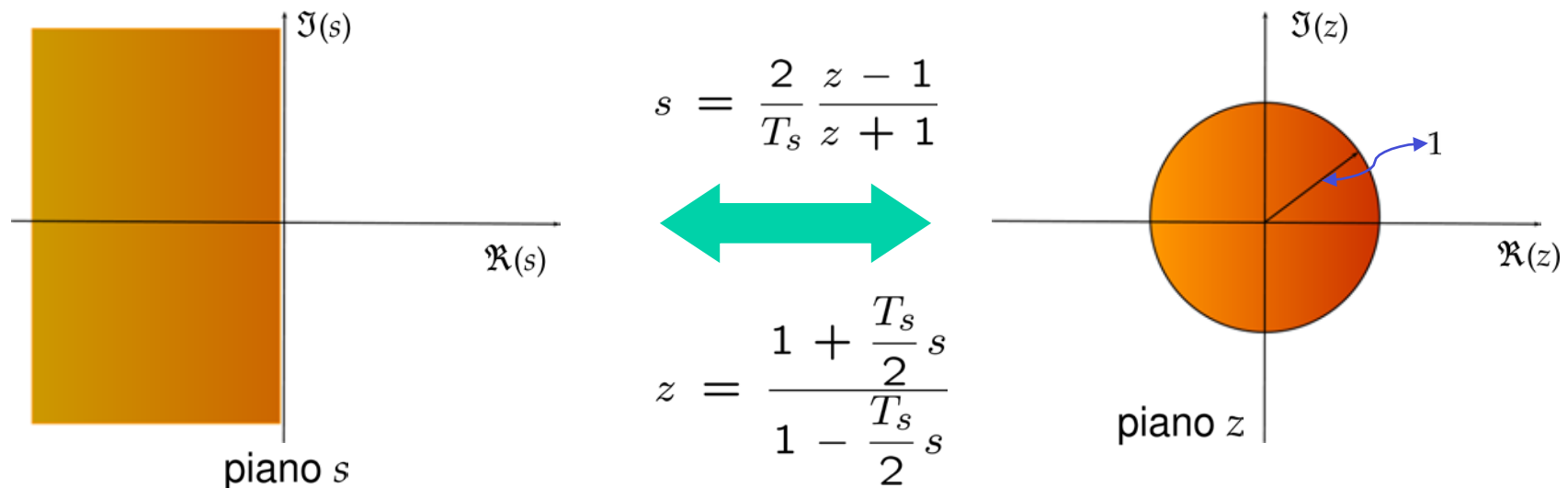
$$\Re \left[\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + 2 j \omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \right] < 0$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1 \quad \longrightarrow$$

- Ma questa è la regione di “stabilità asintotica” per il piano “z”!

- Si vede facilmente che la corrispondenza è biunivoca: l’immagine della “regione di asintotica stabilità” nel piano “s” coincide con la “regione di asintotica stabilità” nel piano “z” e viceversa.



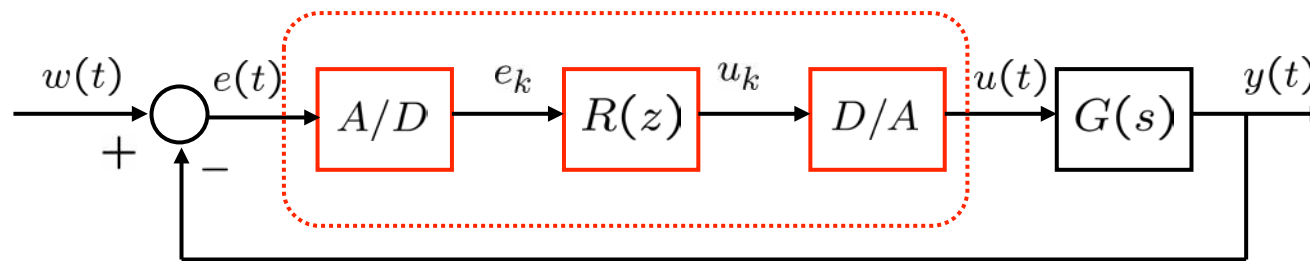
- La **trasformata di Tustin conserva la stabilità.**

Proprietà delle trasformazioni: risposta in frequenza

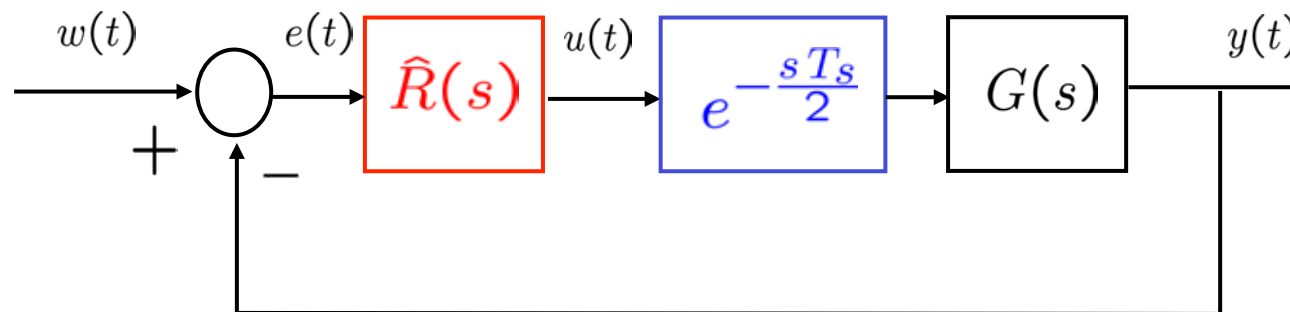
- È possibile garantire in qualche modo prestazioni espresse tramite la risposta in frequenza (es. pulsazione a -3 dB, attenuazione in una banda assegnata, picchi di risonanza ecc.) utilizzando queste tecniche di progetto approssimate?
- In generale **NON si possono soddisfare specifiche sulla risposta in frequenza** (ad es. posizione di picchi di risonanza o di anti-risonanza, estremi della banda passante, di transizione o bloccata) utilizzando le tecniche di progetto approssimate che stiamo analizzando.
- L'errore che si commette sul margine di fase e sulla pulsazione ω_c del sistema è tanto più piccolo quanto maggiore è la pulsazione di campionamento ω_s rispetto alla pulsazione ω_c del sistema.

Ricapitolando: progetto approssimato a segnali campionati

- Per progettare un controllore a segnali campionati



si risolve un problema di progetto “equivalente” totalmente a tempo continuo



- Supponendo assegnate le specifiche di progetto per il controllore originario a segnali campionati, come si assegnano le **specifiche** per il **nuovo problema**?

- Le **specifiche** sulla **banda passante** e sul **margin** di **guadagno** rimangono le stesse del problema originario anche se
 - la tecnica di progetto non riesce a rispettare queste specifiche: la perdita di prestazioni è tanto minore quanto minore è il periodo di campionamento (cfr. Parte 11 #65).
 - non c'è modo di quantificare (anche solo in maniera approssimata) di quanto degradano le prestazioni.

- Le **specifiche** su **margin** di fase e/o **sovraelongazione** nella risposta allo scalino e/o **smorzamento** dei **poli dominanti** vanno “maggiorate” tenendo conto del termine

$$e^{-\frac{sT_s}{2}}$$

- Infatti, assegnata la specifica sul margine di fase $\bar{\varphi}_m$ e la banda passante $\bar{\omega}_c$
 - per garantire il margine di fase desiderato va più che compensato (cfr. FA Parte 11 #46 e #65) il fattore

$$\angle \left[e^{-\frac{sT_s}{2}} \right]_{s=j\bar{\omega}_c} \rightarrow \delta\varphi = -\frac{\bar{\omega}_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

- Il progetto a tempo continuo procede allora come al solito, con l'accortezza di **garantire per il sistema margini di stabilità maggiori di quelli richiesti** [il termine di “ritardo equivalente” è soltanto una approssimazione ...]

Esempi di progetto di regolatori per discretizzazione

**Alcuni esempi di progetto
con le formule BE, TU**

Un primo esempio

- Consideriamo il processo descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{0.1 (1 - 2 s)}{s (1 + 10 s) (1 + 0.1 s)}$$

- Il regolatore a tempo continuo

$$R(s) = \frac{2 (1 + 10 s)}{(1 + 0.1 s)}$$

consente di ottenere un margine di fase $\varphi_m \approx 64^\circ$ alla pulsazione $\omega_c \approx 0.218$ rad/s.

Lo si verifichi!

- Scelta del **periodo di campionamento**
 - in base alla pulsazione critica d'anello aperto per il sistema a tempo continuo

$$\omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

ed utilizzando la regola empirica (già vista nella slide #32-33)

$$\alpha \omega_c \leq \omega_s \leq 10 \alpha \omega_c \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

il periodo di campionamento potrebbe essere scelto nell'intervallo

$$\frac{\pi}{5 \alpha \omega_c} \leq T_s \leq \frac{2 \pi}{\alpha \omega_c} \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

cioè

$$\frac{2.88}{\alpha} \leq T_s \leq \frac{28.82}{\alpha} \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

- Una scelta plausibile sembra $T_s = 1 \text{ s}$
- Proviamo a discretizzare il regolatore originario a tempo continuo $R(s)$ con le tecniche BE e TU.
- Otterremo 2 regolatori differenti, dei quali andremo a confrontare le prestazioni.
- Perdita stimata di margine di fase:

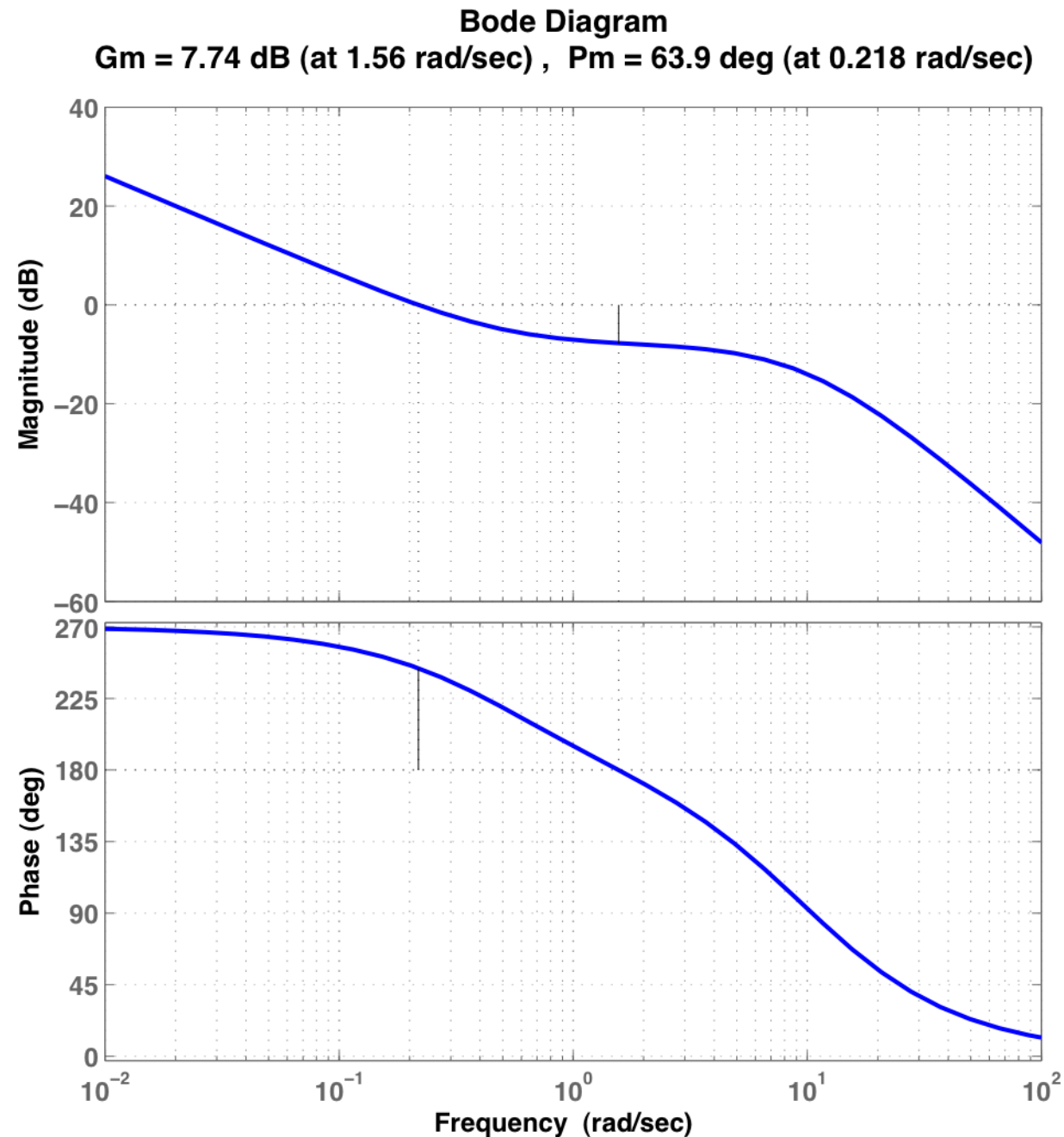
$$\delta_\varphi = -\frac{\bar{\omega}_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad \rightarrow \quad \delta_\varphi \approx -6^\circ$$

- Esempio in Matlab: **progettoBE_TU.m**

- Progetto BE $R_{BE}(z) = 20 \frac{\left(z - \frac{10}{11}\right)}{\left(z - \frac{1}{11}\right)} \quad T_s = 1$

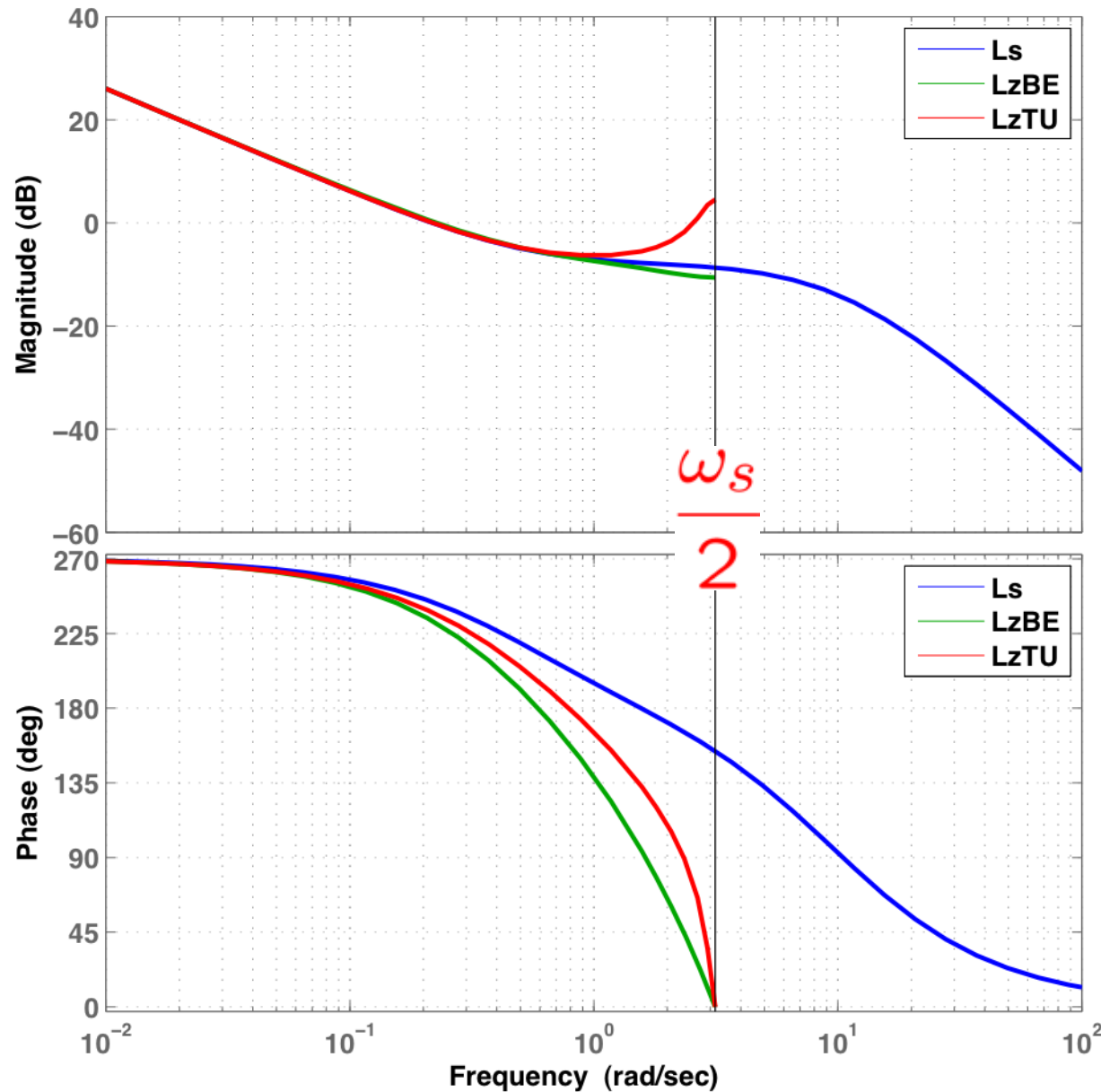
- Progetto TU $R_{TU}(z) = 35 \frac{\left(z - \frac{19}{21}\right)}{\left(z + \frac{2}{3}\right)} \quad T_s = 1$

- Le loro prestazioni sono descritte dalle figure seguenti. Si noti il degrado di prestazioni per il margine di fase (calcolato) ed anche per il margine di guadagno e banda passante (cfr. FA parte 11, #65).



Prestazioni del
sistema a tempo
continuo

Bode Diagram

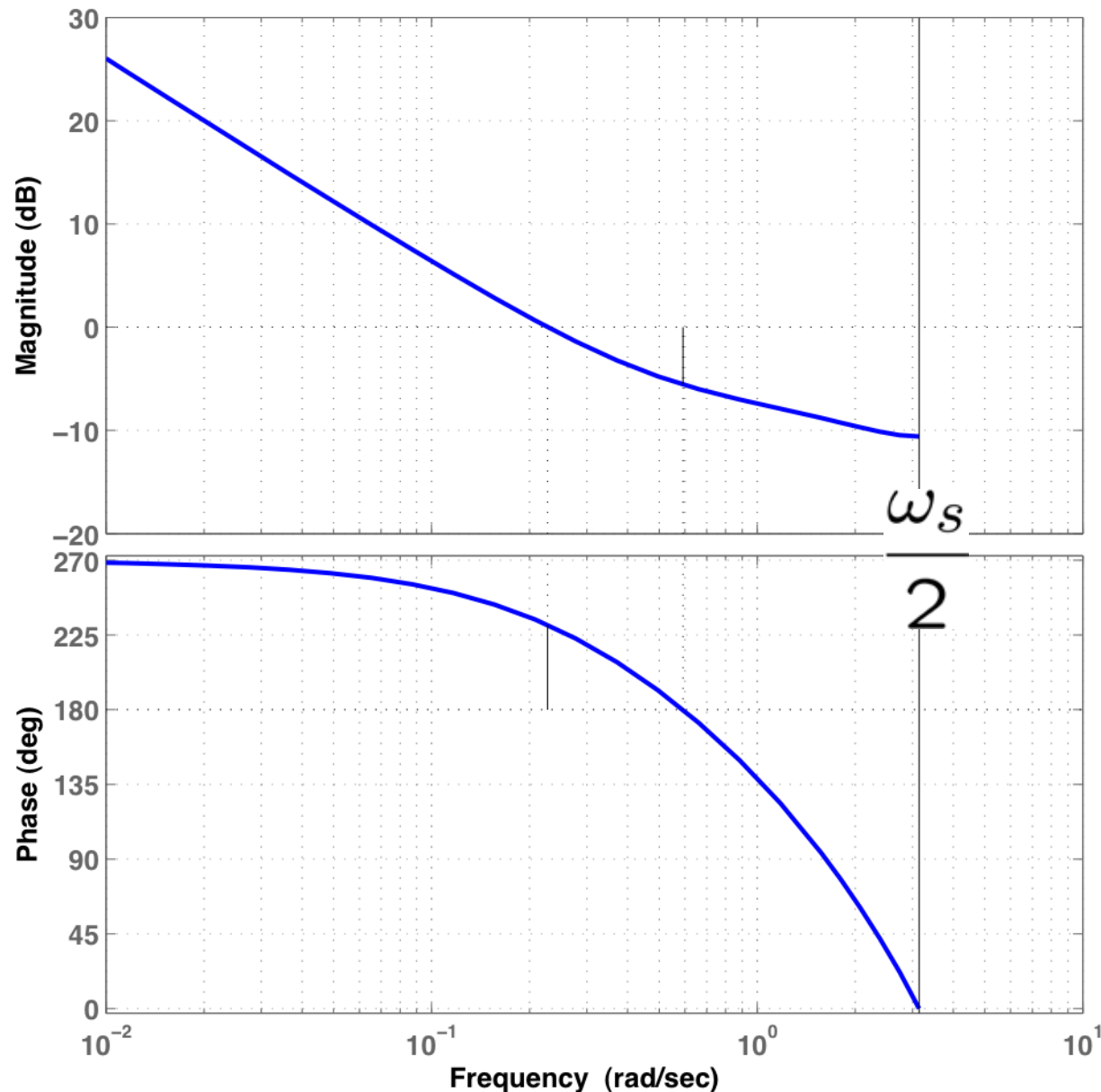


Confronto:
risposte in
frequenza dei tre
progetti: a tempo
continuo, con BE,
con TU.

$$T_s = 1$$

Bode Diagram

Gm = 5.56 dB (at 0.592 rad/sec) , Pm = 51 deg (at 0.227 rad/sec)



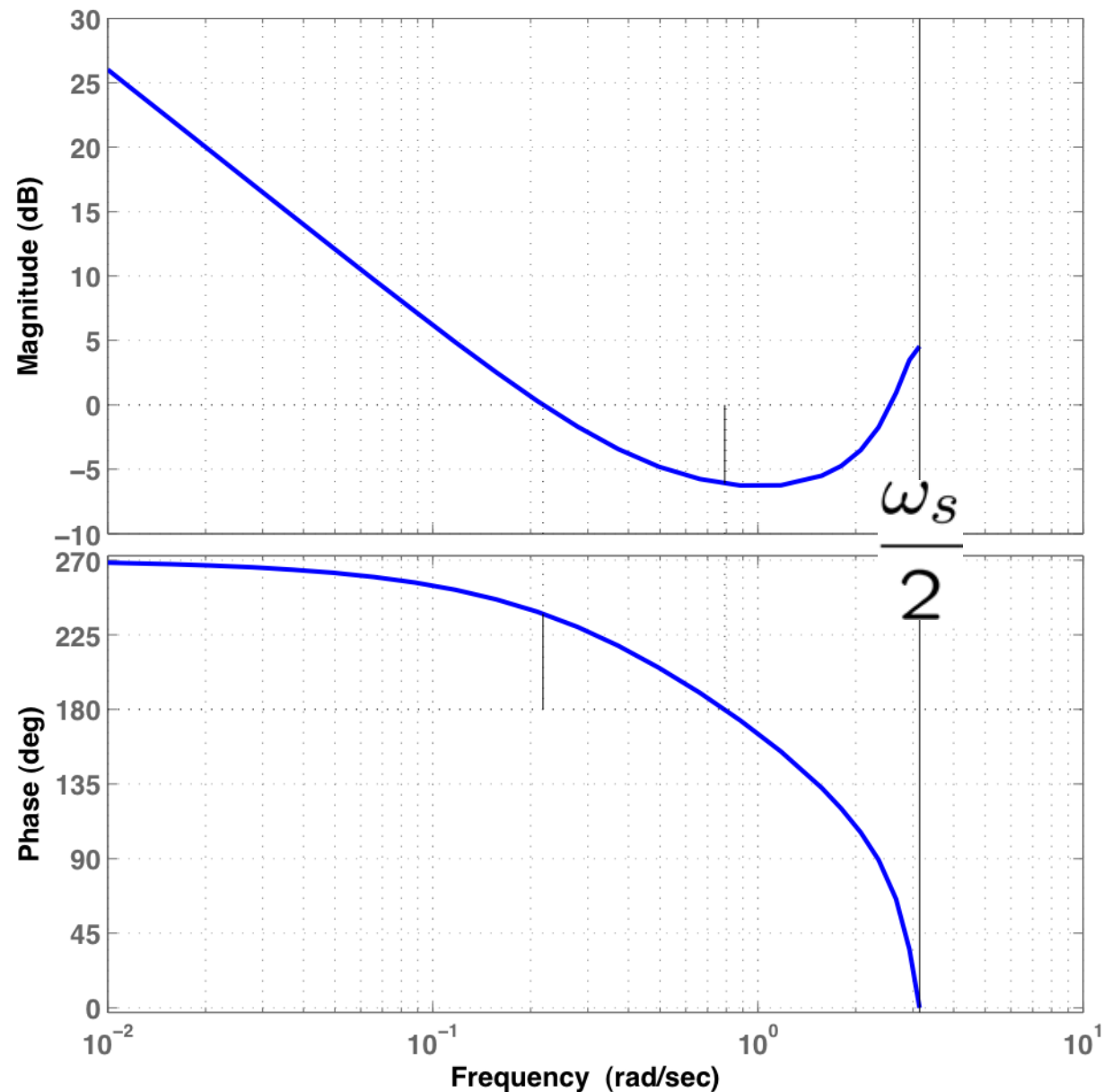
Prestazioni del progetto con la tecnica BE:

cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = 1$$

Bode Diagram

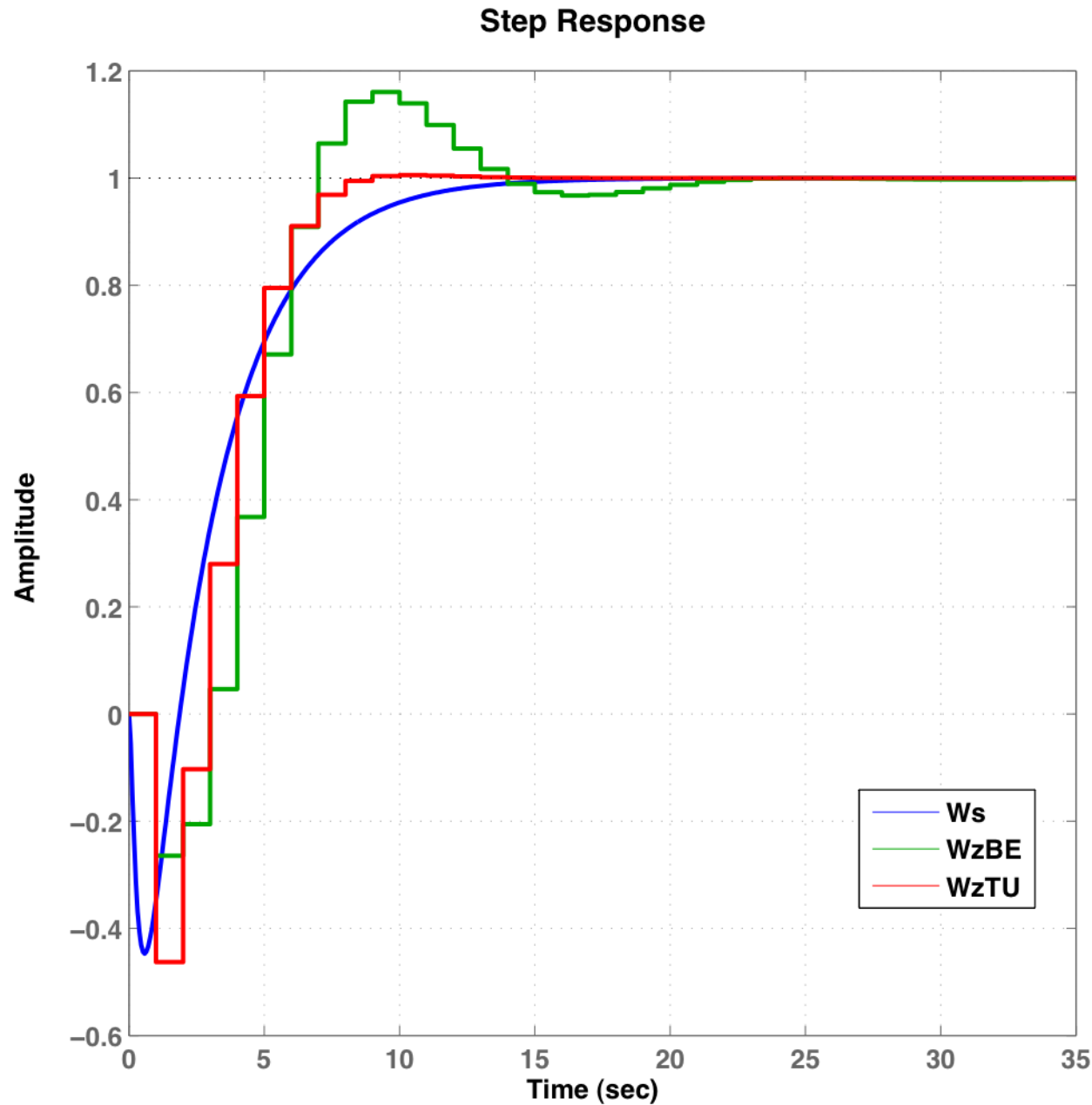
Gm = 6.13 dB (at 0.791 rad/sec) , Pm = 57.7 deg (at 0.218 rad/sec)



Prestazioni del progetto con la tecnica TU:

cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = 1$$



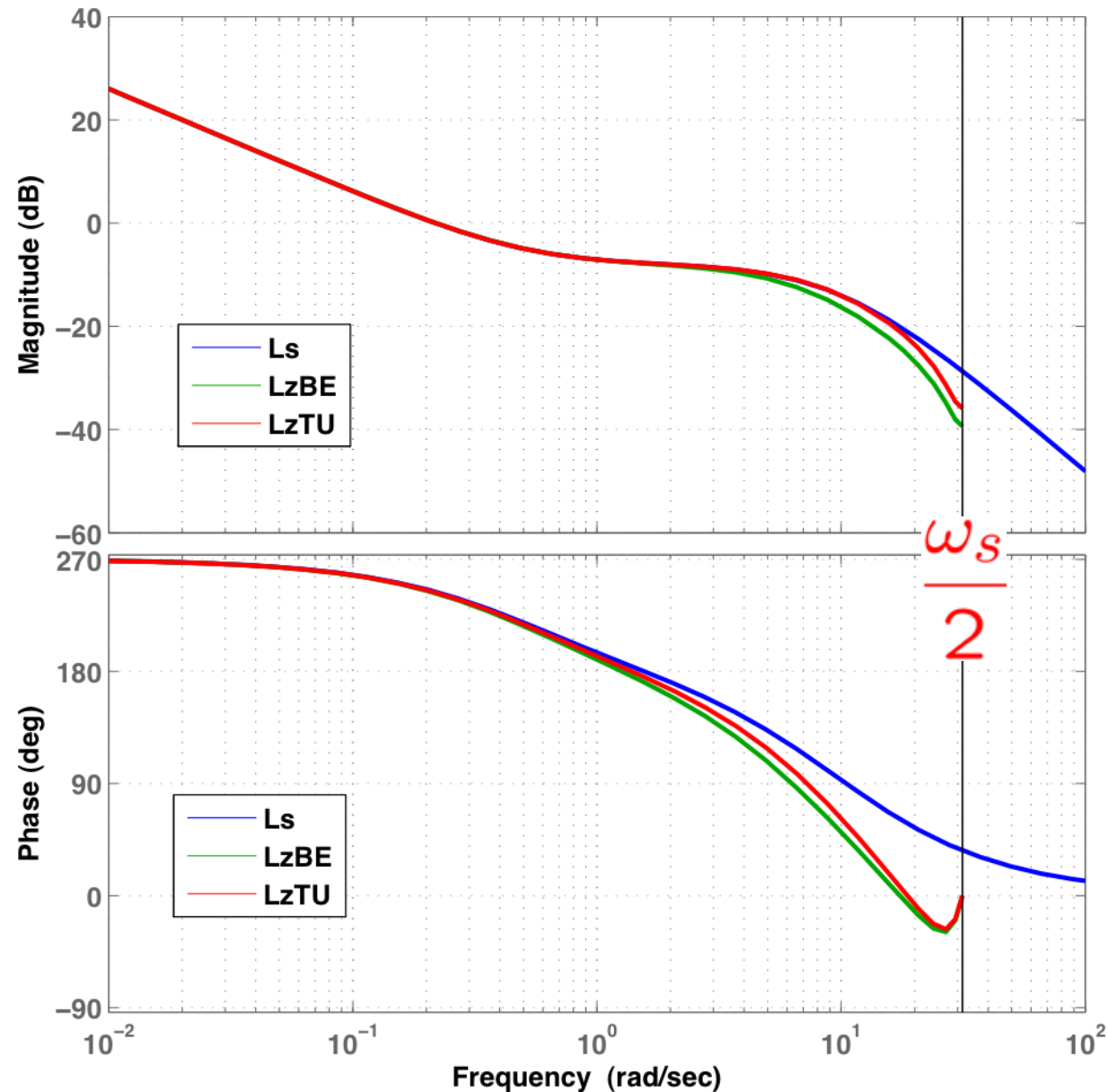
Confronto: risposte
allo scalino dei tre
progetti: a tempo
continuo, con BE,
con TU.

$$T_s = 1$$

- Con periodo di campionamento pari invece a $T_s = 0.1$
- Progetto BE
$$R_{BE}(z) = 101 \frac{\left(z - \frac{100}{101}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$
- Progetto TU
$$R_{TU}(z) = 134 \frac{\left(z - \frac{199}{201}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$
- $$\delta_\varphi = -\frac{\bar{\omega}_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad \longrightarrow \quad \delta_\varphi \approx -1^\circ$$
- Le prestazioni dei 2 regolatori ottenuti sono descritte nelle figure successive

progetto_BE_TU.m

Bode Diagram

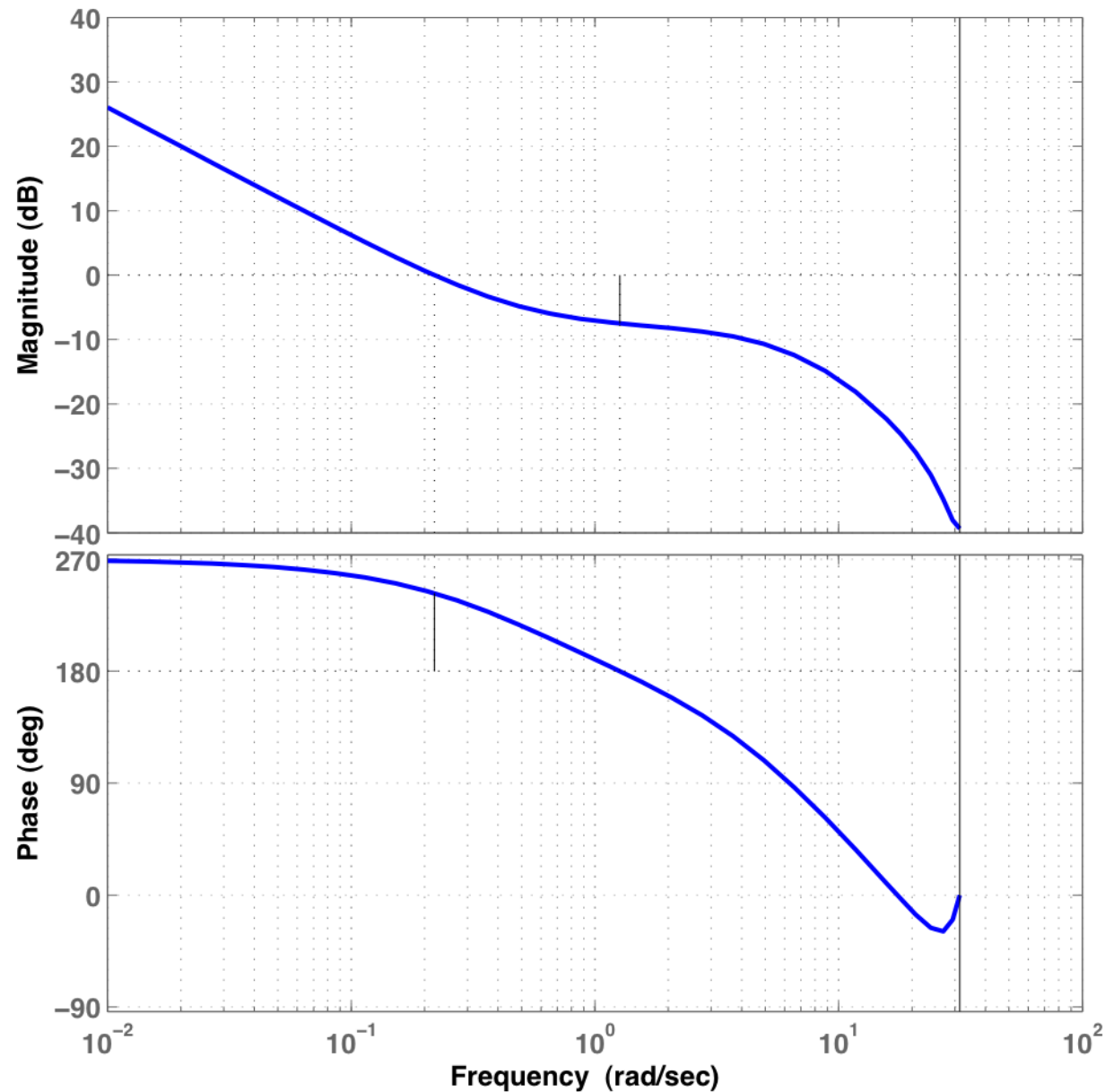


Confronto:
risposte in
frequenza dei tre
progetti: a tempo
continuo, con BE,
con TU.

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Bode Diagram

Gm = 7.5 dB (at 1.27 rad/sec) , Pm = 62.7 deg (at 0.219 rad/sec)



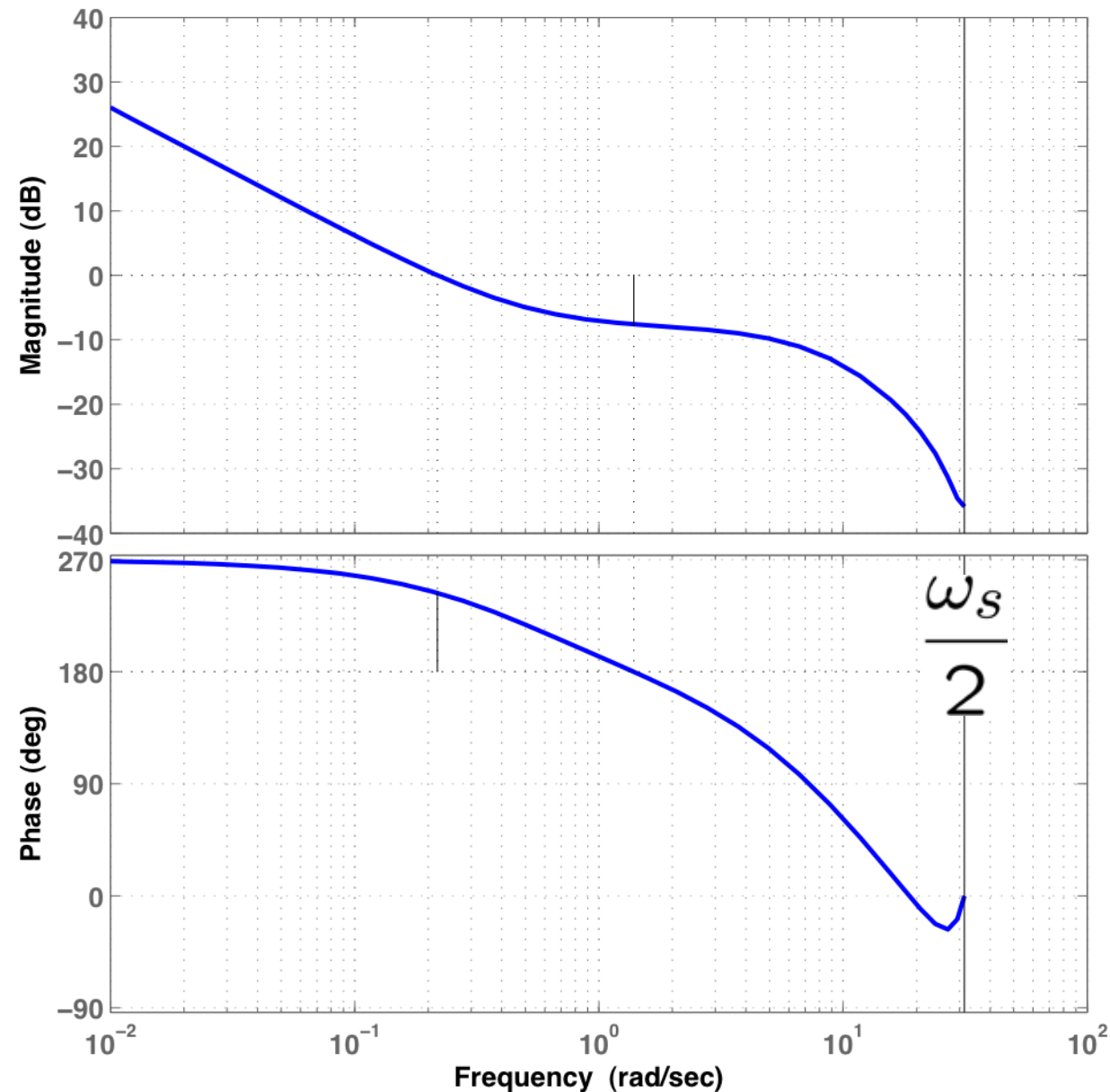
Prestazioni del progetto con la tecnica BE:

cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Bode Diagram

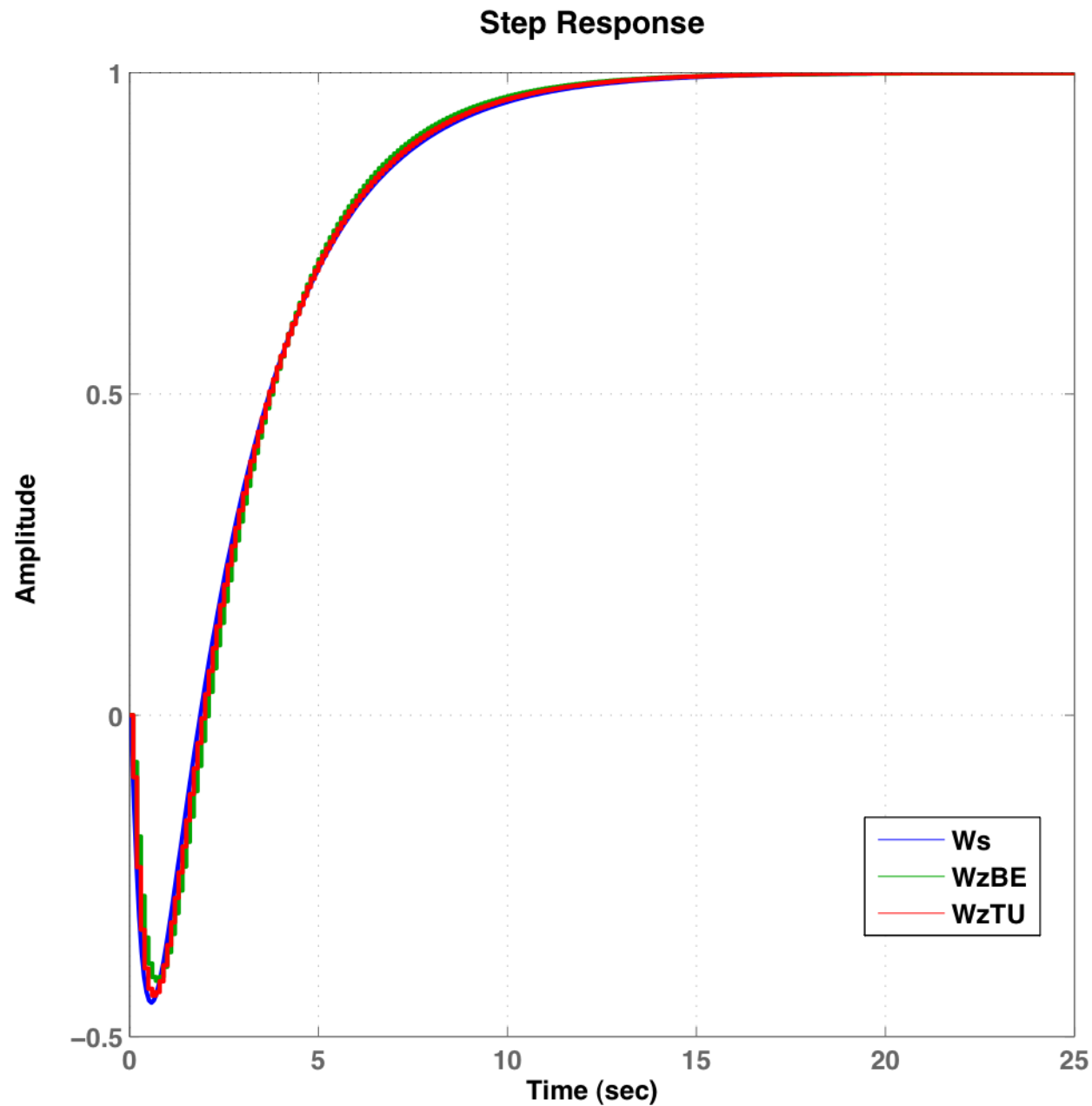
Gm = 7.59 dB (at 1.39 rad/sec) , Pm = 63.3 deg (at 0.218 rad/sec)



Prestazioni del progetto con la tecnica TU:

cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = \frac{1}{10}$$



Confronto: risposte
allo scalino dei tre
progetti: a tempo
continuo, con BE,
con TU.

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Un progetto completo

- Dato il sistema a tempo continuo descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

progettare un regolatore a segnali campionati tale che

- max sovraelongazione nella risposta al gradino $S_{\%} \leq 20\%$

- tempo d'assestamento nella risposta allo scalino unitario

$$T_{a1\%} \leq 2 \text{ [s]}$$

- Errore a regime nella risposta alla rampa $e_{\infty} \leq \frac{1}{2}$

- Scegliere opportunamente il periodo di campionamento

script MATLAB: **FA_progettocompletoBETU.m**

- Come procede il **progetto del regolatore**?

- Dalle specifiche si stabilisce il periodo di campionamento appropriato:

$$T_{a1\%} = 1$$

$$\frac{T_{a1\%}}{10\alpha} \leq T_s \leq \frac{T_{a1\%}}{\alpha}$$

$$5 \leq \alpha \leq 10$$

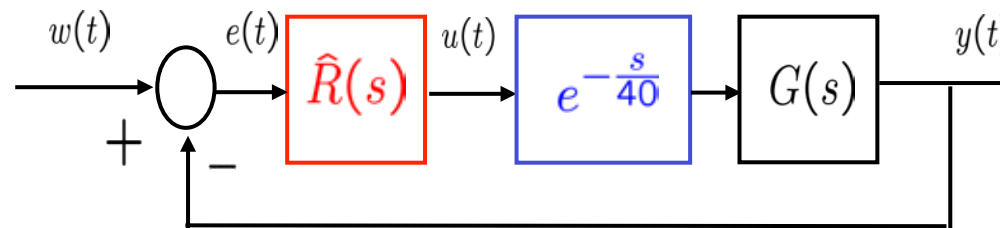


$$\frac{1}{100} \leq T_s \leq \frac{1}{5}$$



$$T_s = \frac{1}{20}$$

- Si modifica il sistema aggiungendo il termine di “ritardo finito equivalente”



- A questo punto il progetto si porta avanti con le modalità note (cfr. FA Parte 10).

Progetto statico “a tempo continuo”

- Errore a regime nella risposta alla rampa:

$$e_{\infty} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s L(s)} \leq \frac{1}{2} \quad \leftarrow \quad L(s) = \hat{R}(s) \cdot e^{-\frac{s}{40}} \cdot G(s)$$



$$\leftarrow \hat{R}(0) = \mu_R \neq 0$$

$$\hat{R}(s) = \mu_R \cdot R_1(s) \quad \mu_R \geq 2$$

guadagno statico unitario

Progetto dinamico “a tempo continuo”

- Dalla specifica sulla sovraelongazione nella risposta allo scalino unitario si ottiene

$$F(s) = \mu_F \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad O_{\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- Nel caso dell' esempio si impone allora:

$$20 = 100 \cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 [\pi^2 + \ln^2 5] = \ln^2 5$$

$$\xi^2 = \frac{\ln^2 5}{\pi^2 + \ln^2 5} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0.4559 & \approx 0.50 \\ \xi_2 < 0 & \text{non accettabile!} \end{cases}$$

- Dal valore del tempo d'assestamento e dello smorzamento ora si ricava la banda:

$$\begin{aligned} T_{a\,1\%} &= 1 \\ \xi &= 0.50 \end{aligned} \quad T_{a\,1\%} = \frac{5}{\xi \omega_n} \quad \xrightarrow{\text{green arrow}} \quad \omega_n = 10.00 \text{ [rad/s]} \quad \downarrow \text{green arrow}$$

$$\omega_c = 10.00 \text{ [rad/s]}$$

- Ora utilizzando la relazione approssimata

$$\xi \approx \frac{\varphi_m}{100}$$

margin di fase
espresso in gradi

si ottiene

$$\varphi_m \approx 50^\circ$$

- Per garantire il margine di fase desiderato ora va introdotto il termine

$$\delta_\varphi = -\frac{\omega_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \delta_\varphi \approx -14^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi_m > 64^\circ$$



$$\varphi_m = 70^\circ$$

- Stabilite tutte le specifiche, ora si può progettare il controllore:
 - valutiamo per ora la fase della risposta in frequenza del solo processo alla pulsazione desiderata

$$\angle G(j10) = -90^\circ - \angle(1 + j10) - \angle(10 + j10) \approx -220^\circ$$

- una sola rete anticipatrice non basta: ne usiamo 2 in cascata per recuperare 110°

- Prima rete anticipatrice: anticipo di 60° alla pulsazione ω_c

– valore di α , T

$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0.0718$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 0.3732$$

– la rete

$$R_1(s) = \frac{1 + 0.3732 s}{1 + 0.0268 s}$$

- Seconda rete anticipatrice: anticipo di 50° alla pulsazione ω_c

– valore di α , T

$$\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha}) \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 0.1325$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad \rightarrow \quad T_2 = 0.2747$$

– la rete

$$R_2(s) = \frac{1 + 0.2747 s}{1 + 0.0364 s}$$

- Rimane da determinare ora il guadagno statico del controllore:

$$R(s) = \mu_R \cdot \frac{(1 + 0.3732 s)(1 + 0.2747 s)}{(1 + 0.0268 s)(1 + 0.0364 s)}$$

- Basta imporre che $|L(j10)| = |R(j10)| \cdot |G(j10)| = 1$

$$\mu_R \left| \frac{(1 + j3.732)(1 + j2.747)}{(1 + j0.268)(1 + j0.364)} \right| \cdot |G(j10)| = 1$$

$$\mu_R = 13.861$$

$$\left[\mu_R \geq 2 \right]$$

- In definitiva il controllore trovato è

$$R(s) = 13.861 \cdot \frac{(1 + 0.3732 s)(1 + 0.2747 s)}{(1 + 0.0268 s)(1 + 0.0364 s)}$$

- Discretizzazione con BE:

$$s = 20 \frac{z - 1}{z}$$

$$R_{BE}(z) = 287.1176 \frac{(z - 0.8819)(z - 0.8460)}{(z - 0.4213)(z - 0.3489)}$$

- Discretizzazione con TU

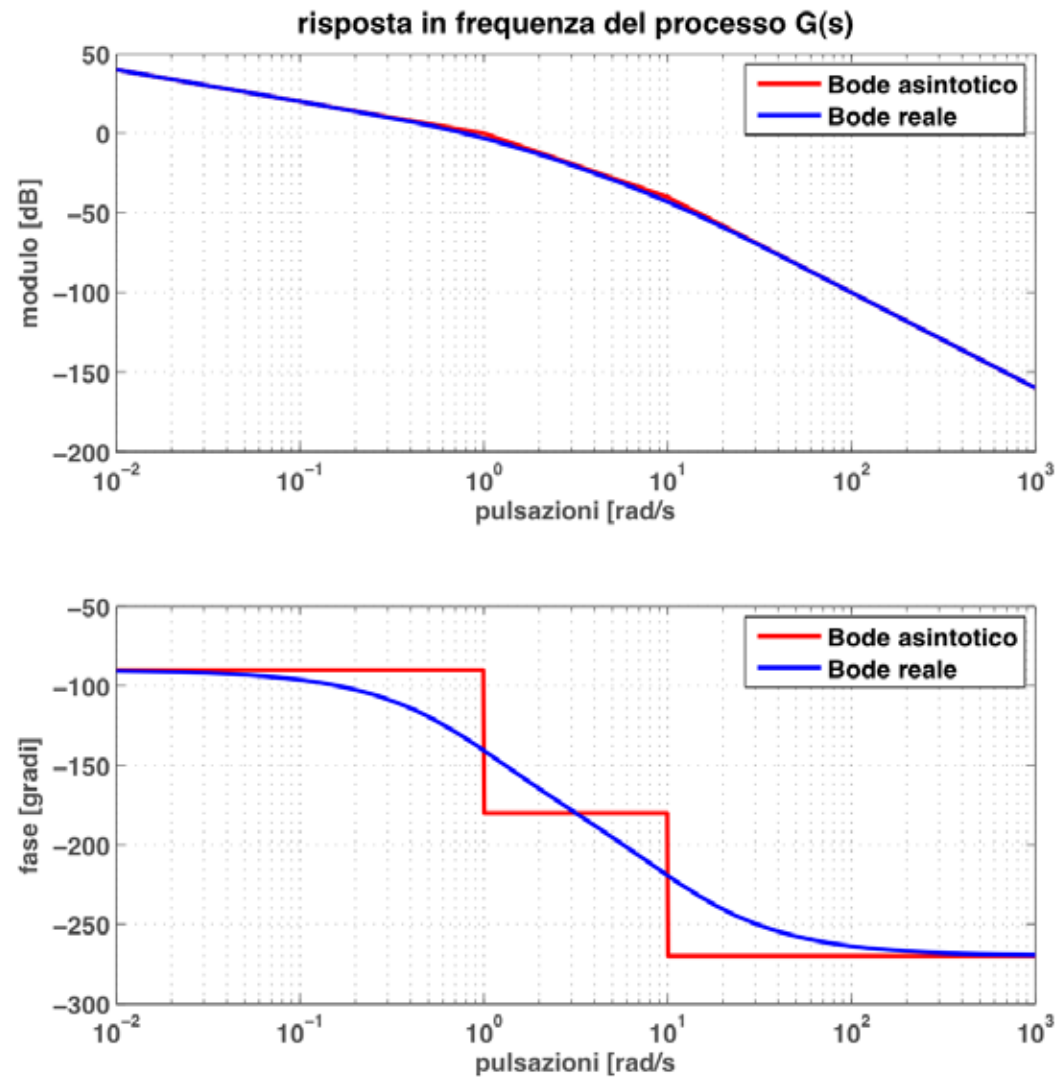
$$R(s) = 13.861 \cdot \frac{(1 + 0.3732 s)(1 + 0.2747 s)}{(1 + 0.0268 s)(1 + 0.0364 s)}$$

$$s = 40 \frac{z - 1}{z + 1}$$

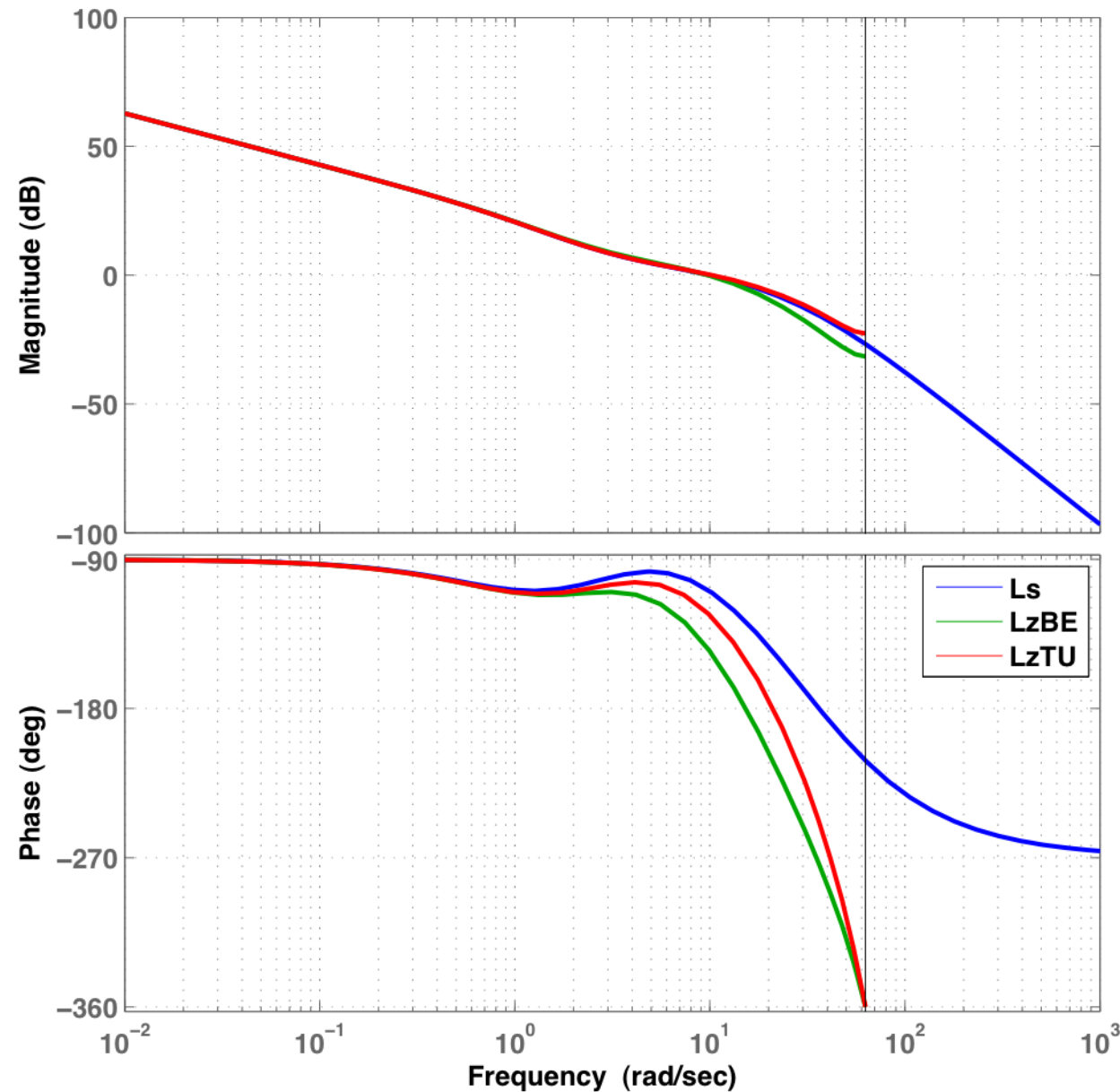
$$R_{TU}(z) = 520.2622 \frac{(z - 0.8744)(z - 0.8332)}{(z - 0.1856)(z - 0.0347)}$$

Verifiche in MATLAB

- Risposta in frequenza del processo



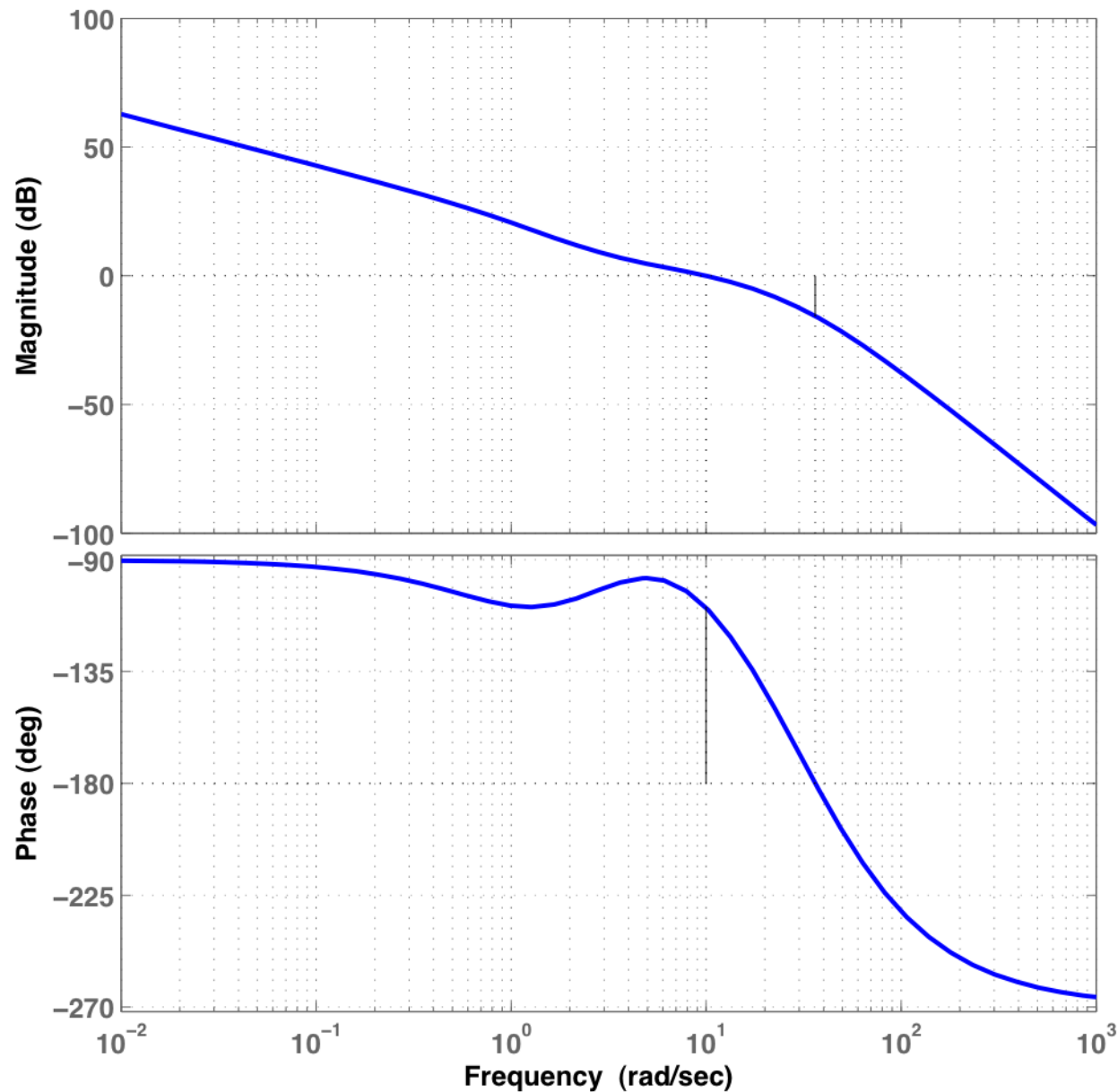
Bode Diagram



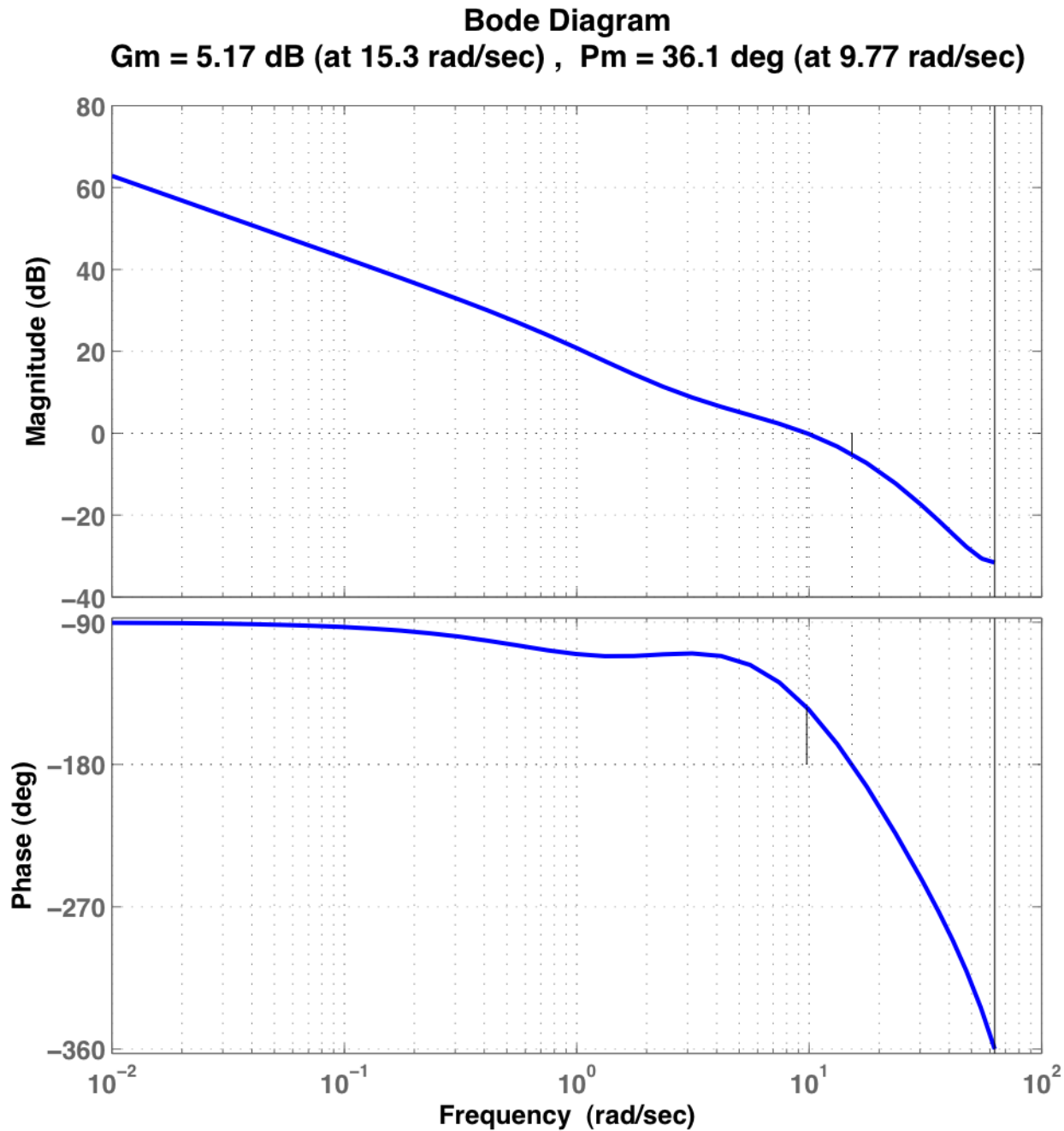
- Confronto tra le risposte in frequenza del progetto a tempo continuo e dei sistemi con controllore discretizzato con BE oppure con TU.

Bode Diagram

$G_m = 15.7 \text{ dB}$ (at 36.3 rad/sec) , $P_m = 70.7 \text{ deg}$ (at 10 rad/sec)



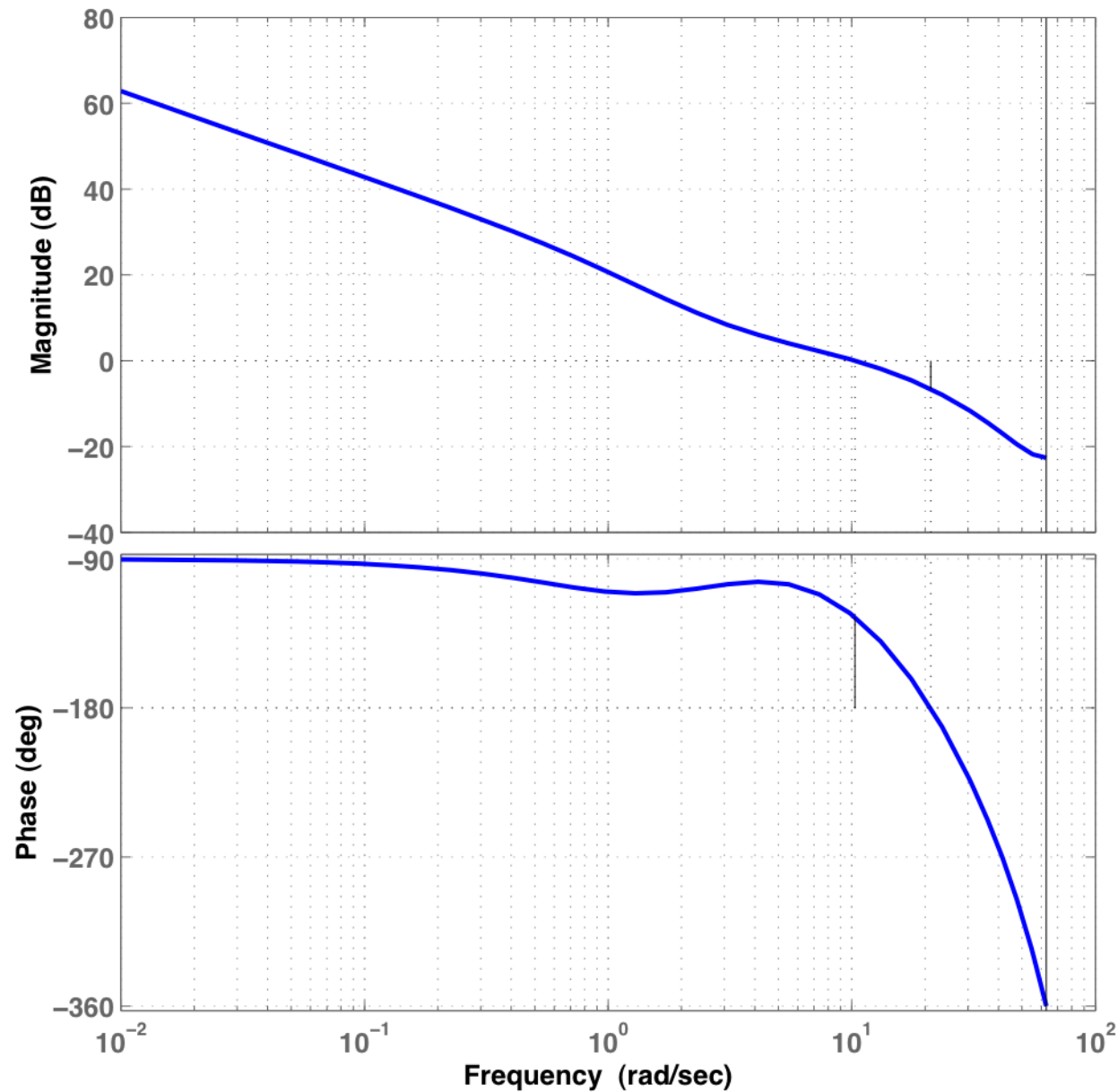
- Prestazioni col progetto a tempo continuo “rafforzato”



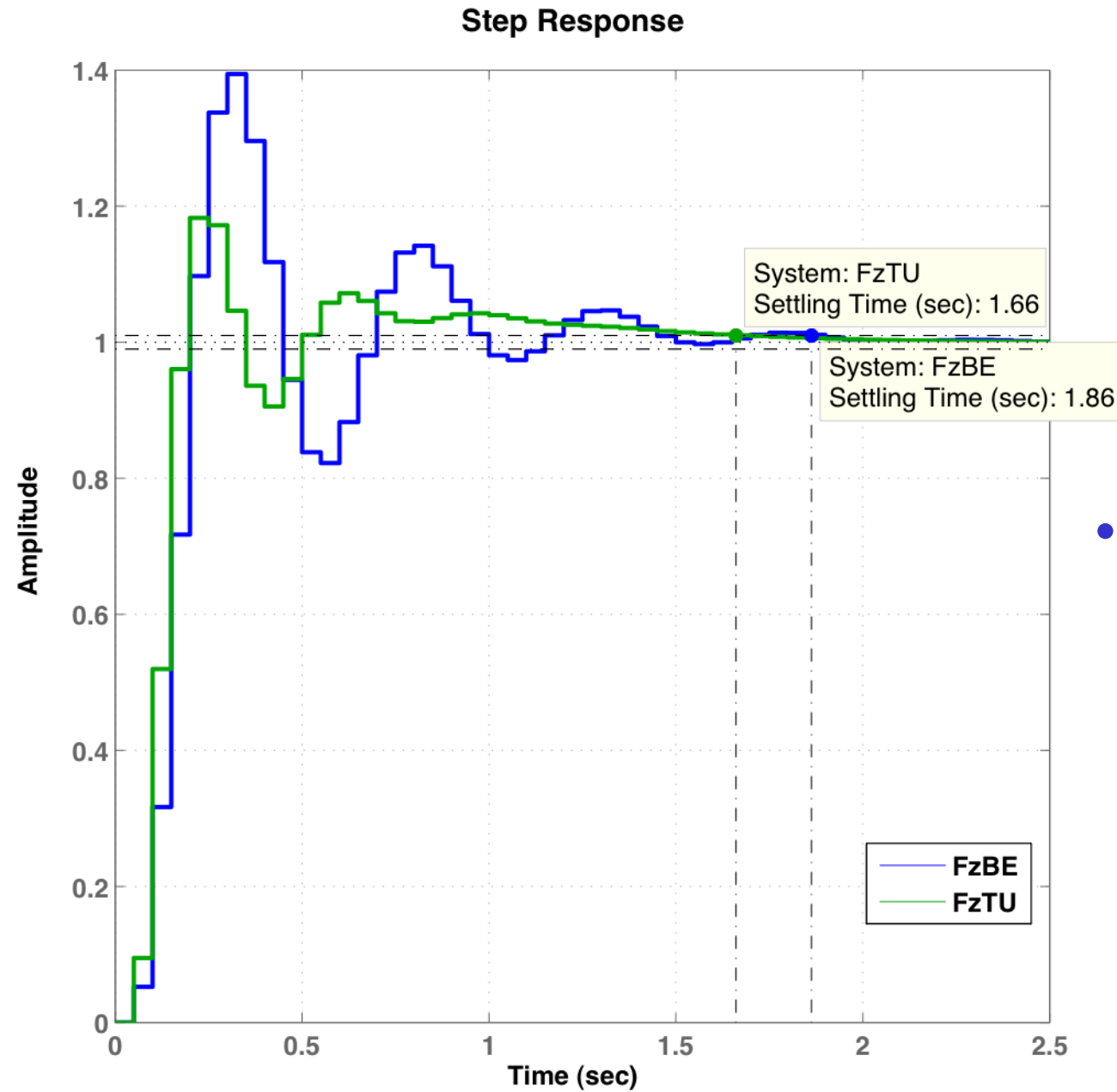
- Prestazioni col progetto BE

Bode Diagram

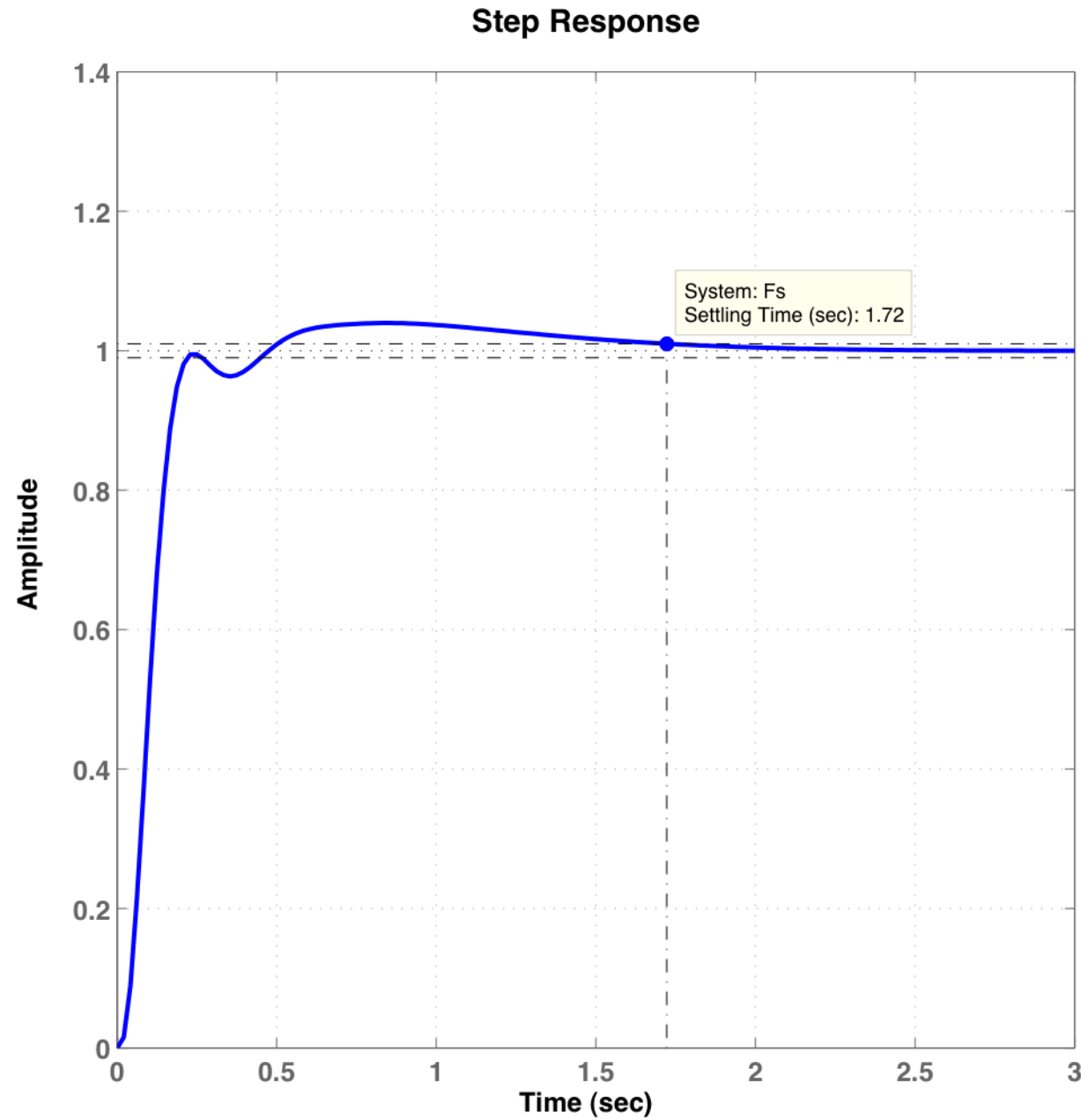
$G_m = 6.61$ dB (at 21.1 rad/sec) , $P_m = 54.9$ deg (at 10.3 rad/sec)



- Prestazioni col progetto TU

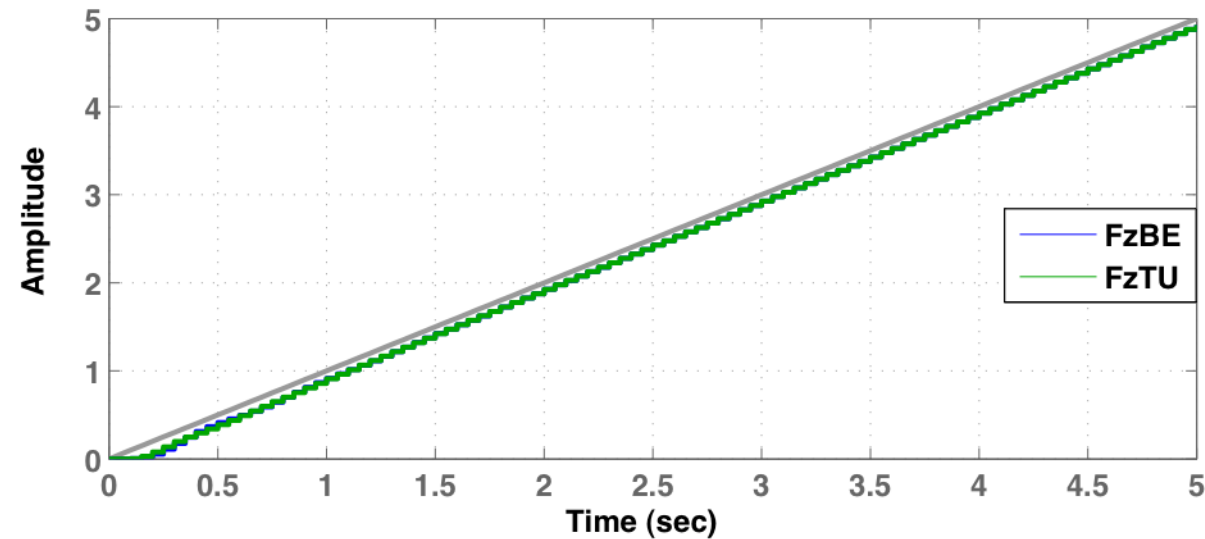


- Risposta allo scalino dei progetti BE e TU

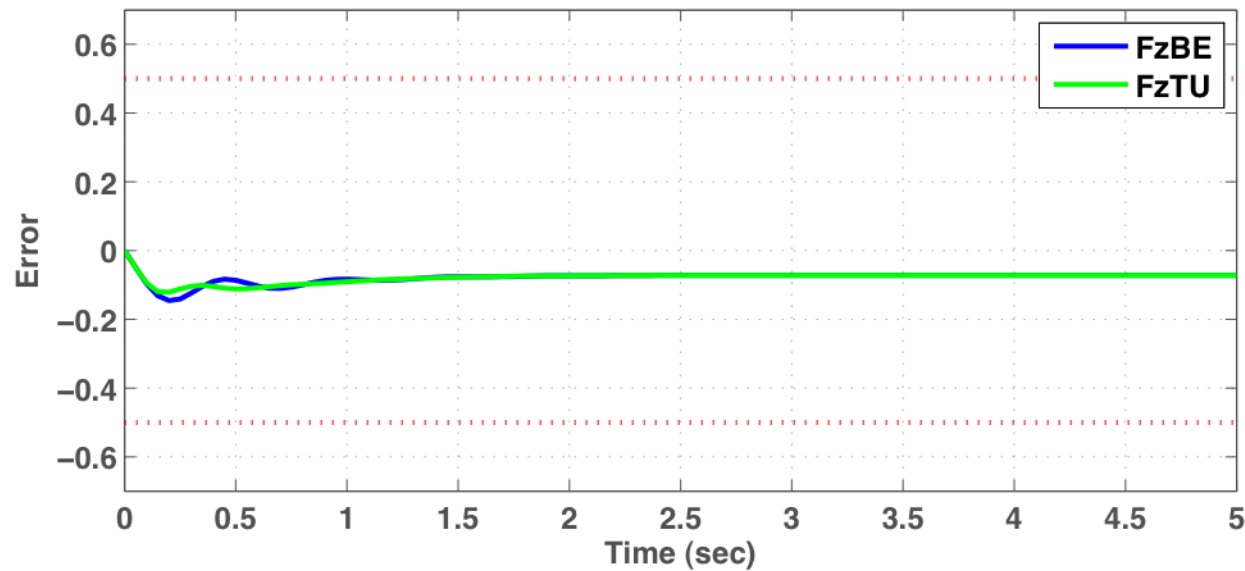


- Risposta allo scalino del progetto a tempo continuo “rafforzato”

Linear Simulation Results



- Risposta alla rampa dei progetti BE e TU



Conclusioni

Sintesi di regolatori per discretizzazione
Tecniche approssimate BE, TU

Riassumendo ...

- Progetto per conversione da continuo a discreto con formule approssimate “**Eulero all’ indietro**”, “**di Tustin**”:
 - progetto **preliminare a tempo continuo**, in “s”
 - si tiene conto del campionamento e ricostruzione inserendo nella FdT di ciclo aperto in “s” un termine di **ritardo finito equivalente** pari a $e^{-\frac{T_s s}{2}}$
 - ottenuto un regolatore $R(s)$ che soddisfa le specifiche “irrobustite”, **si applica la formula (BE, TU)** e si ottiene $R(z)$.

Osservazioni ...

- Il **progetto** si completa **totalmente** “a tempo continuo”.
- L'effetto del **dispositivo di tenuta (ZOH)** è soltanto **approssimato**.
- Le **formule di discretizzazione** sono **approssimazioni** della formula esatta del campionamento.
- C'è **scarso controllo sulle prestazioni finali** in frequenza (imprecisioni nell'imporre una larghezza di banda desiderata e/o margini di stabilità ecc.) e nel tempo (es. richieste sulla durata del transitorio ...)
- Esistono tecniche di progetto che danno risultati migliori: saranno approfondite in altri corsi!