Analisi dei sistemi retroazionati

Prestazioni dei sistemi di controllo

Stabilità a ciclo chiuso: criterio di Nyquist, margini di guadagno e di fase, criterio di Bode

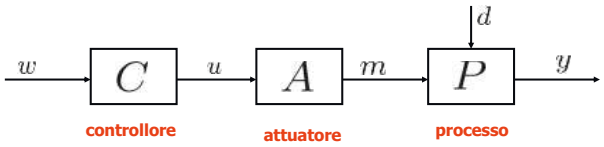
Il luogo delle radici

Introduzione

- In questa parte del corso affronteremo lo **studio dei sistemi LTI retroazionati**, introducendo definizioni, proprietà e strumenti che saranno poi utili (ed utilizzati) nella fase di progetto del controllore.
- L'analisi non può essere svolta considerando assieme sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto:
  - Gli **strumenti** che abbiamo a disposizione (ad es. i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza [cfr. Parte 8]) e che vedremo nel seguito sono per la maggior parte **adoperabili con profitto solo** nel caso di **sistemi a tempo continuo**.
- Per questo motivo in ciò che segue consideriamo **solamente sistemi LTI a tempo continuo**.

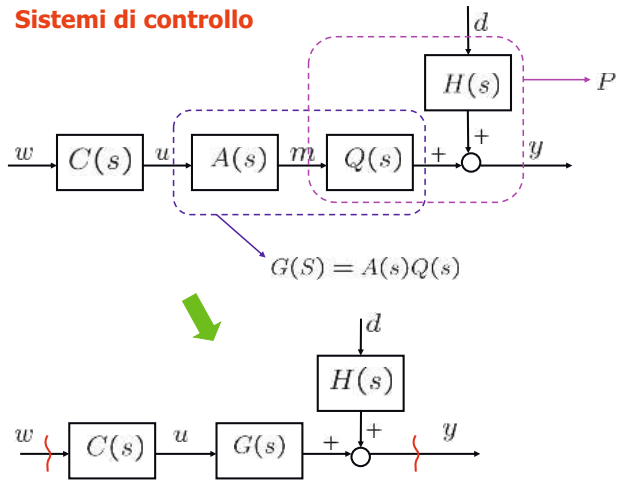
Sistemi di controllo

- Anello aperto



Ipotesi: C, A, P sistemi dinamici lineari

Sistemi di controllo



• Prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 1 \quad \Rightarrow \quad C(s)G(s) = 1$$

$$C(s) = G(s)^{-1}$$

Passa-tutto con $\mu = 1$

Quindi il controllore "perfetto" in a.a. deve invertire la dinamica del sistema

• Limitazioni

- cancellazioni polo-zero nel semipiano destro (Re>=0)
- non si può stabilizzare in a.a. un sistema instabile
- C(s) potrebbe avere più zeri che poli (=>non realizzabile)
- scarsa robustezza nei confronti di incertezze su G(s)

• Esempi

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

$$C_0(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{1+s} \quad \rightarrow \text{Non realizzabile}$$

$$C_1(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.01s)} \quad \rightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\Rightarrow \quad F_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_1(s)G(s) = \frac{1}{1+0.01s}$$

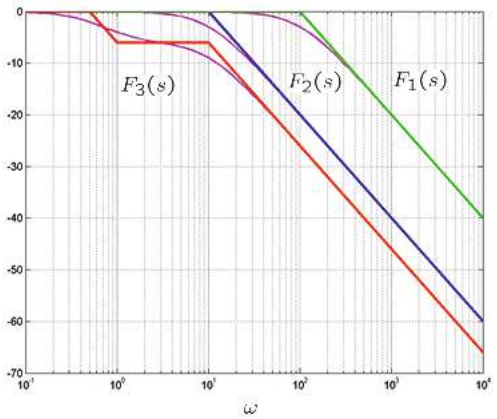
Filtro P.B. con $B \simeq [0,\ 100]$

$$C_2(s) = \frac{0.1(1+2s)}{1+s} \quad \rightarrow \text{Realizzabile}$$

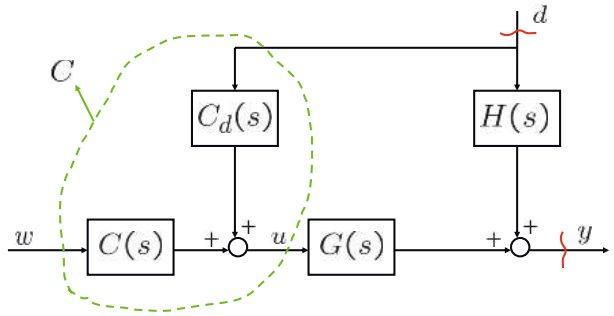
$$\Rightarrow \quad F_2(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$ Filtro P.B. con $B \simeq [0,\ 10]$

$$C_3(s) = 0.1 \quad \rightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\Rightarrow \quad F_3(s) = \frac{1+s}{(1+2s)(1+0.1s)}$$ Filtro P.B. con $B \simeq [0, 0.5]$



- **Compensazione del disturbo in a.a.**



Si presuppone quindi la misurabilità del disturbo $d(t)$

- **Prestazione ideale**

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0 = H(s) + C_d(s) \cdot G(s)$$

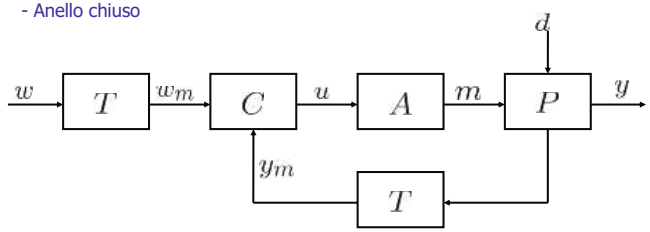
Si impone la perfetta compensazione del disturbo

$$C_d(s) = -G(s)^{-1} H(s)$$

Limitazioni: analoghe alle precedenti

- **Sistemi di controllo**

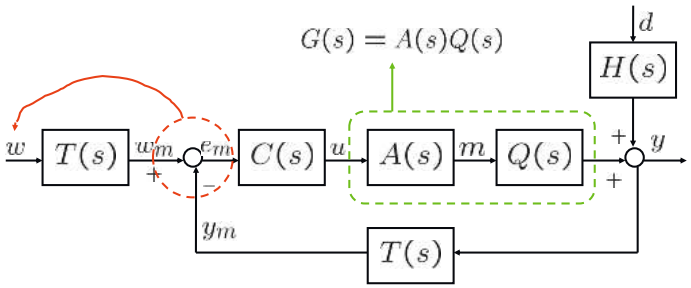
- Anello chiuso



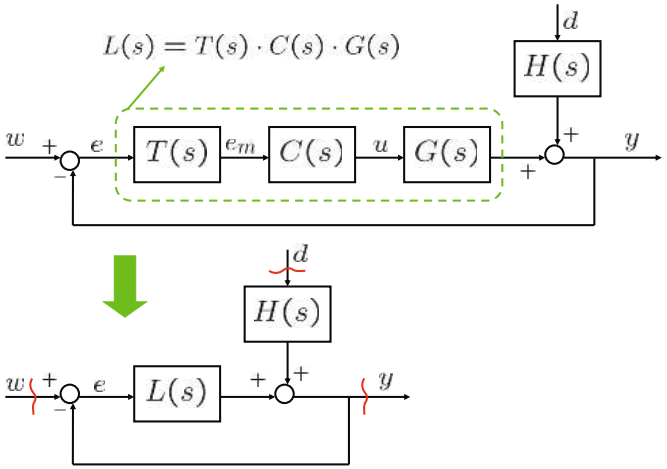
Trasduttore

Ipotesi: - T, A, C, P sistemi lineari

- azione di controllo basata su $w_m - y_m = e_m$



$$E_m(s) = W_m(s) - Y_m(s) =$$
$$= T(s)[W(s) - Y(s)] = T(s) \cdot E(s)$$



- **Prestazioni ideali**

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$

In realtà:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \neq 1$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \neq 0$$

- **Soluzione realistica**

- $F(s)$: Filtro passa-basso con banda passante suff. ampia e guadagno $\mu_F = 1$

- $M(s)$: $|M(j\omega)| \simeq 0$

  nella banda di ω in cui lo spettro di $d(t)$ è significativo

• Analisi di sistemi retroazionati

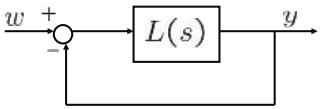
- Asintotica stabilità in anello chiuso

- Prestazioni in anello chiuso

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$

• Stabilità di sistemi retroazioati



$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

Asintotica stabilità ⟺ Le radici di $\varphi(s) + N(s)$ hanno Re<0

• Diagramma di Nyquist

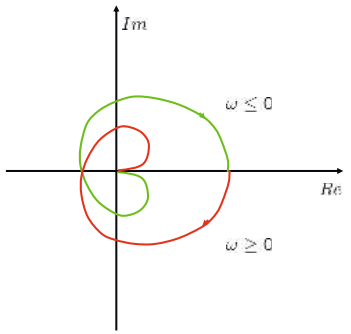
Γ = D.D.N = grafico di $L(j\omega)$ per $-\infty < \omega < +\infty$

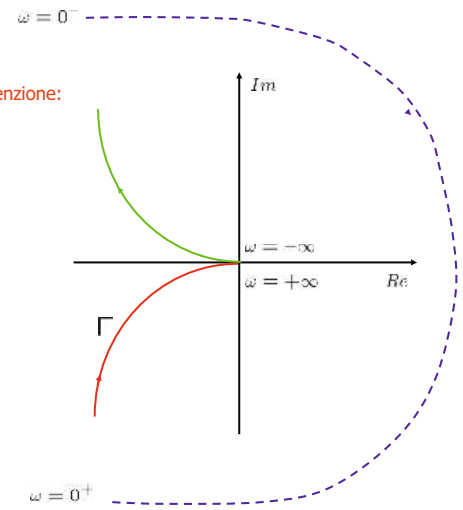
= diagramma polare ($\omega \geq 0$)

+

simmetrico rispetto all' asse reale

Osservazione: $L(-j\omega) = L^*(j\omega)$



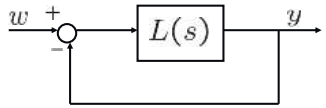


Attenzione:

Convenzione:

chiusura all' infinito in senso orario

• Criterio di Nyquist



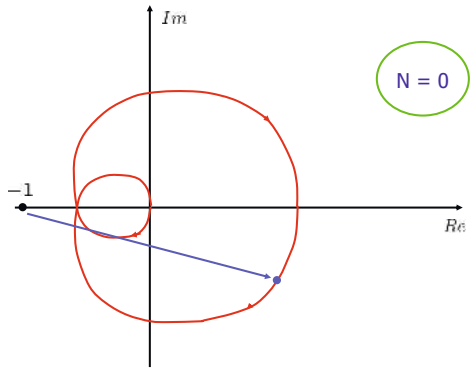
$$1 + L(s) = 0$$

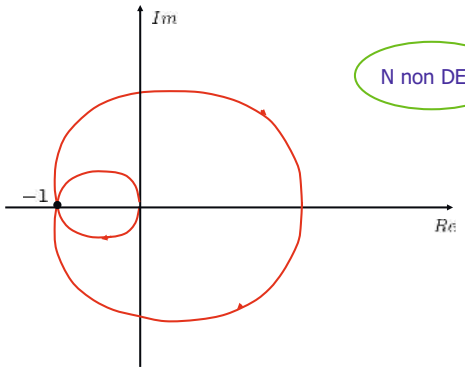
- Γ D.D.N. di $L(s)$
- N num. di giri antiorari di Γ intorno al punto -1
- P num. di poli di $L(s)$ con Re>0

Asintotica stabilità ⇔ { N ben definito ; N = P }

• Osservazioni

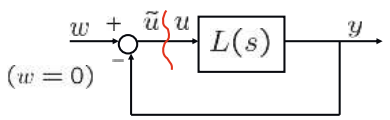
- conteggio di N ?
- N non definito ⇒ non as. stabilità
- N<0 ⇒ non as. stabilità





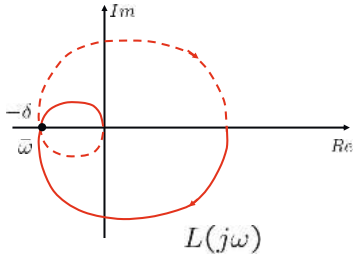
N non DEF.

- **Giustificazione intuitiva**



$L(s)$ As. stabilità

P = 0



$L(j\bar{\omega}) = -\delta$

$|L(j\bar{\omega})| = \delta$

$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$

$$u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \simeq |L(j\bar{\omega})| \sin[\bar{\omega}t + \arg(L(j\bar{\omega}))]$$

$$= \delta \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

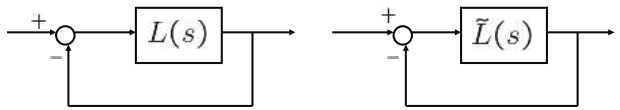
$$= -\delta \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}(t) = \delta \sin(\bar{\omega}t)$$

Quindi:

- $\delta > 1$ ⇒ instabilità — N ≠ 0 (= P)
- $\delta < 1$ ⇒ as. Stabilità — N = 0 (= P)
- $\delta = 1$ ⇒ non as. Stabilità — N non definito

- **Stabilità di sistemi retroazionati <u>incerti</u>**



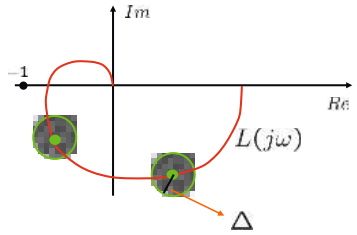
Modello nominale — Modello "vero"

- In generale: $\tilde{L}(s) \neq L(s)$
- Stabilità robusta:

garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza

Tipici modelli dell' incertezza

- $\bar{L}(s) = L(s) + \delta L(s) \quad , \quad |\delta L(j\omega)| \leq \Delta$



- $\bar{L}(s) = K \cdot L(s) \quad , \quad 0 < K < \bar{K}$

Indicatori di stabilità robusta

Sono parametri che misurano:

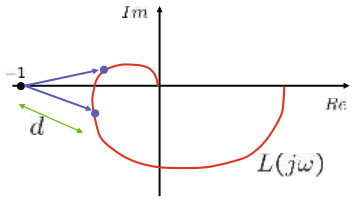
- l' ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la "distanza" del modello nominale dall' instabilità

Ipotesi

- asintotica stabilità in condizioni nominali
- P=0 Asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ N = 0

Un indicatore di robustezza

Distanza di Γ dal punto -1

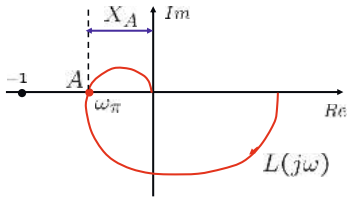


Margine di stabilità vettoriale

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$

Difetto: non è ricavabile direttamente dai diagrammi di Bode di $L(j\omega)$

• Margine di guadagno



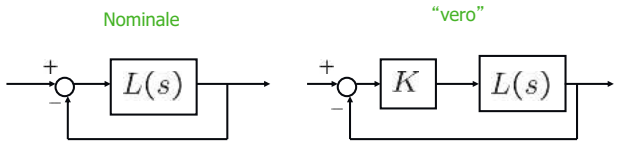
$$K_m = \frac{1}{X_A}$$

Margine di guadagno

$$\arg L(j\omega) = -180^\circ$$

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \qquad K_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

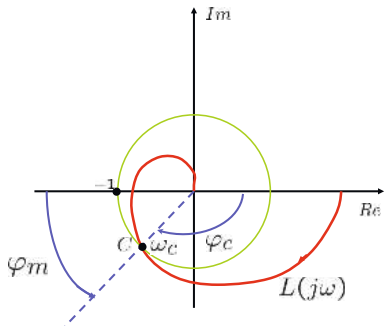
• Interpretazione



$K_m > 1$ As.stabilità: $0 < K < K_m$

K_m è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul guadagno d'anello

• Margine di fase



$$|L(j\omega_c)| = 1 = 0dB$$

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

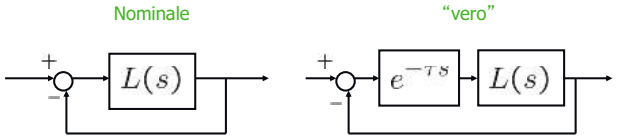
$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

Margine di fase

ω_c : pulsazione critica

φ_c : fase critica

• Interpretazione



$\varphi_m > 0^\circ$ As. stabilità

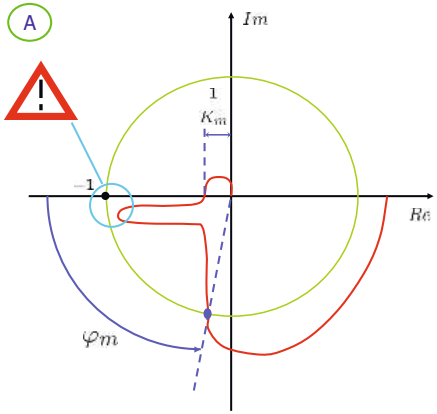
$$\omega_c \tau = \varphi_m \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$0 < \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180}$$

φ_m è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul ritardo d'anello

- **Situazioni anomale**

A

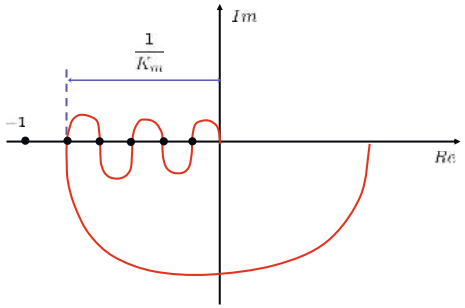


$K_m >> 1$

$\varphi_m >> 0^\circ$

Però il sistema è poco robusto

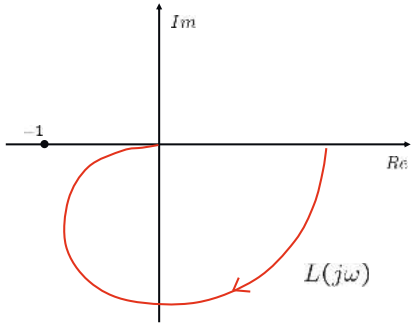
B



Affinchè K_m sia affidabile è necessario costruirlo nel caso peggiore

- **Casi particolari**

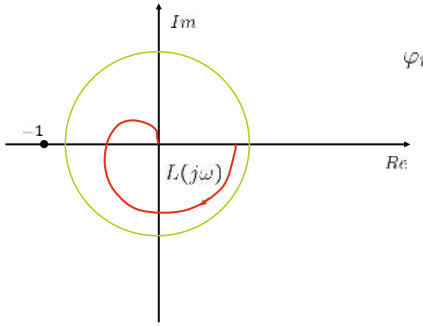
A



$K_m = \infty$

$|\arg L(j\omega)| < 180^\circ \quad , \quad \forall\omega \Rightarrow \varphi_m > 0^\circ$

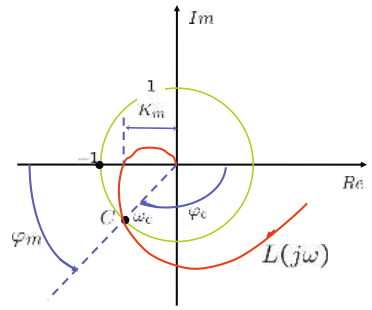
B



$\varphi_m = \infty$

$|L(j\omega)| < 1 \quad , \quad \forall\omega \Rightarrow K_m > 1$

- **Margine di guadagno e di fase**



- **Margine di guadagno**

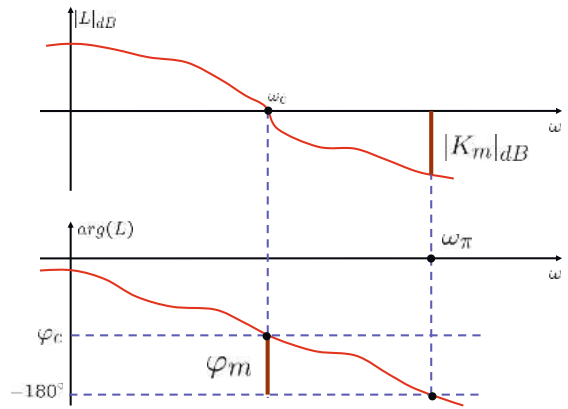
$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad ; \quad \arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

- **Margine di fase**

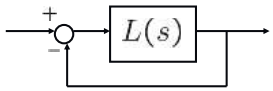
$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \quad ; \quad \varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

- **Calcolo di K_m e φ_m dai diagrammi di Bode**



- **Criterio di Bode**



Condizioni di applicabilità:

1) P = 0
2) $|L(j\omega)|_{dB}$ attraversa una volta l' asse a 0 dB (dall' alto verso il basso)

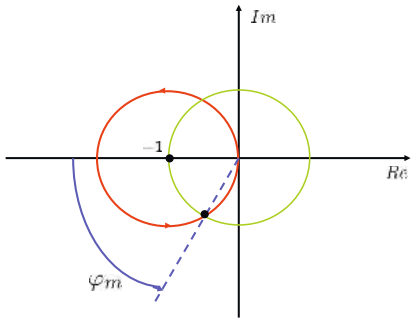
μ guadagno d' anello

φm margine di fase

Asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ $\mu > 0$, $\varphi_m > 0$

Perché è necessario $\mu > 0$?

Per escludere casi del tipo:



Instabile in a.c.

- **Osservazione**

Se

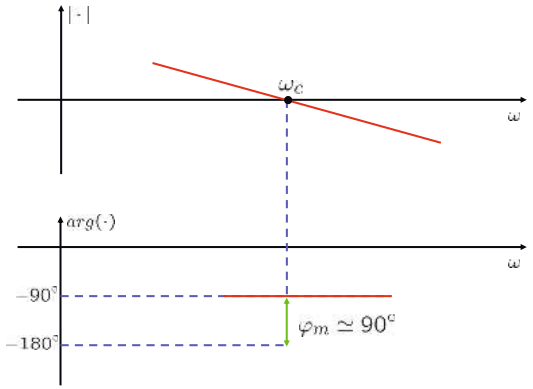
- $L(s)$ è a fase minima ($\mu > 0$, poli, zeri con $Re < 0$)
- $|L|_{dB}$ attraversa l' asse a 0dB una volta sola

Allora

- P = 0
- Bode applicabile
- $\mu > 0$
- diagrammi asintotici $\begin{cases} |L|_{dB} & \text{pendenza } -K \\ arg(L) & \text{valore } -K \cdot 90^\circ \end{cases}$

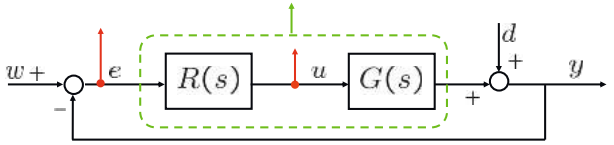
- **Criterio "empirico"**

* nelle ipotesi di validità *



- **Analisi di sistemi retroazionati**

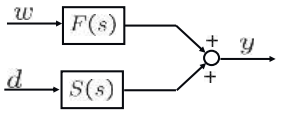
$$L(s) = R(s) \cdot G(s)$$



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s) \qquad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s) \qquad \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1+L(s)} = -S(s)$$

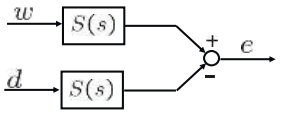
$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1+L(s)} = Q(s) \qquad \frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1+L(s)} = -Q(s)$$



F. di sensitività complementare

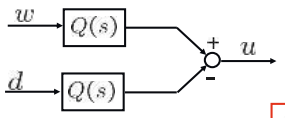
Caso "ideale"

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \simeq 1$$



F. di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \simeq 0$$



F. di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} \simeq 0$$

$$F(s) + S(s) = 1$$

- **Caso ideale**

$F(s) \simeq 1$ — F. di sensitività complementare

$S(s) \simeq 0$ — F. di sensitività

$Q(s) \simeq 0$ — F. di sensitività del controllo

- **Analisi di $F(s)$ - analisi statica**

Valore di regime risp. allo scalino

$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)} \xrightarrow{s \to 0} 1$$

$$w(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s) \cdot \frac{A}{s} = A \lim_{s\to 0} F(s)$$

$$= A \lim_{s\to 0} \frac{L(s)}{1+L(s)} = A \lim_{s\to 0} \frac{\frac{\mu}{s^g}}{1+\frac{\mu}{s^g}}$$

$$= \boxed{A \lim_{s\to 0} \frac{\mu}{s^g + \mu}}$$

$\mu_F \simeq 1$ se $\mu >> 1$

$$y(\infty) = \begin{cases} A \cdot \frac{\mu}{1+\mu} & \text{se } g = 0 \\ A \ (\mu_F = 1) & \text{se } g > 0 \\ 0 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

(caso pessimo)

• Analisi di $F(s)$ - poli & zeri

$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)+N(s)}$$

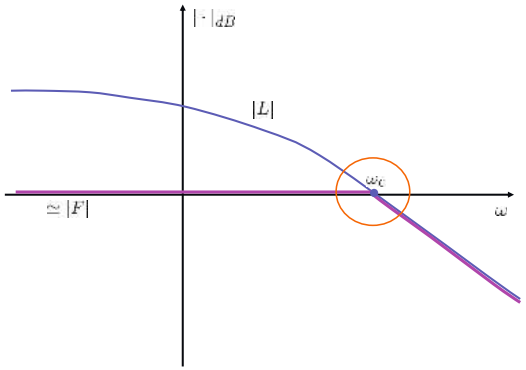
- zeri di $F(s)$ $\equiv$ zeri di $L(s)$

- poli di $F(s)$ $\equiv$ radici di $\varphi(s)+N(s)$

• Analisi di $F(s)$ - risposta in frequenza

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |L(j\omega)| >> 1 \\ |L(j\omega)| & \text{se} \quad |L(j\omega)| << 1 \end{cases}$$

• Situazione tipica



Quindi:

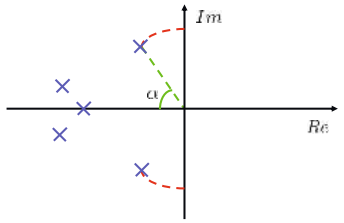
- $F(s)$ è un filtro passa-basso
- Banda passante: $B \simeq [0, \omega_c]$
- Guadagno $\mu_F \simeq 1$

$$\mu_F = 1 \quad \text{se} \quad g > 0$$
$$\mu_F = \frac{\mu}{1+\mu} \quad \text{se} \quad g = 0$$

- Poli dominanti di $F(s)$ cadono in corrispondenza di ω_c

- se reale $\Rightarrow$ $\tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$
- se complessi $\Rightarrow$ $\omega_n \simeq \omega_c$, $\xi = ?$

• Smorzamento e margine di fase



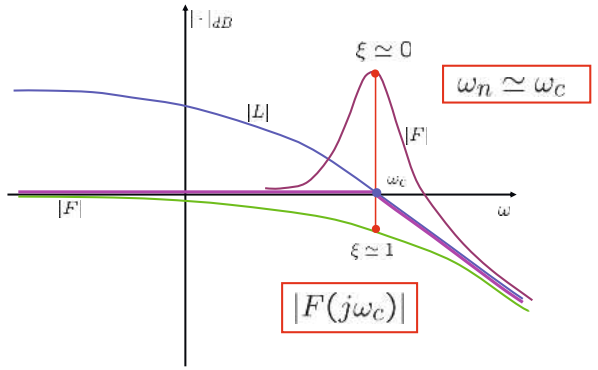
Poli di $F(s)$

Basso smorzamento → Scarsa robustezza → $\varphi_m \simeq 0^\circ$

$\xi \simeq 0$

?

• Legame tra ξ e φ_m



• Calcolo di $|F(j\omega_c)|$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad L(j\omega_c) = 1 \cdot e^{j\varphi_c}$$

con $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$

$$\Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|\underbrace{1 + \cos\varphi_c}_{\text{Re}} + j\underbrace{\sin\varphi_c}_{\text{Im}}|}$$

$$\Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos\varphi_c)^2 + \sin^2\varphi_c}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2\varphi_c + 2\cos\varphi_c + \sin^2\varphi_c}}$$

$\cos^2\varphi_c + \sin^2\varphi_c = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos\varphi_c)}}$$

$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos\varphi_m)}}$$

- **Consideriamo un <u>generico</u> sist. del secondo ordine:**

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \xi > 0$$

$$|F(j\omega_n)| = \left| \frac{\omega_n^2}{-\omega_n^2 + 2j\xi\omega_n^2 s + \omega_n^2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{j2\xi} \right| = \frac{1}{2\xi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_n \simeq \omega_c \\ \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}} = \sin\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\sin(\frac{\varphi_m}{2})}$$

$$\xi \simeq \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \simeq \frac{\varphi_m}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

Regola empirica

- $\varphi_m < 75^\circ$ ⇒ Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- $\varphi_m > 75^\circ$ ⇒ Polo dominante reale con

$$\tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$$

- **<u>Riassumendo</u>:**

In un sistema di controllo in a.c.

- la precisione statica dipende da:

g, μ $\qquad \mu_F = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu} & g > 0 \\ \dfrac{\mu}{1+\mu} & g = 0 \end{cases}$

- la precisione dinamica dipende da

ω_c, φ_m $\qquad B_F \simeq [0, \omega_c]$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- **Analisi di $S(s)$ - analisi statica**

- valore di regime, risposta allo scalino:

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot S(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} A \cdot S(s)$$

$$= A \cdot \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{s^g}} =$$

$$= A \cdot \lim_{s\to 0} \frac{s^g}{s^g + \mu}$$

$$y(\infty) = \begin{cases} A \cdot \dfrac{1}{1+\mu} \quad (\mu_s) & g = 0 \\ 0 & g > 0 \\ A \quad (\mu_s = 1) & g < 0 \end{cases}$$

(caso pessimo)

- valore di regime, risposta alla rampa:

$$d(t) = A \cdot t, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$y(\infty) = \ldots\ldots = A \cdot \lim_{s\to 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu}$$

$$= \begin{cases} \infty & g = 0 \\ \dfrac{A}{\mu} & g = 1 \\ 0 & g > 1 \end{cases}$$

Tabella riassuntiva:

Valori di regime $y(\infty)$ in risposta a $d(t)$

$e(\infty)$ in risposta a $w(t)$

	$1/s$ $A \cdot 1(t)$	$1/s^2$ $A \cdot t \cdot 1(t)$	$1/s^3$ $A \cdot t^2/2 \cdot 1(t)$
$g = 0$	$\dfrac{A}{1+\mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\dfrac{A}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\dfrac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

• Analisi di $S(s)$ - poli & zeri

$$S(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s) + N(s)} \qquad \left(L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \right)$$

- zeri di $S(s)$ $\equiv$ poli di $L(s)$

- poli di $S(s)$ $\equiv$ radici di $\varphi(s) + N(s)$

$\equiv$

poli di $F(s)$

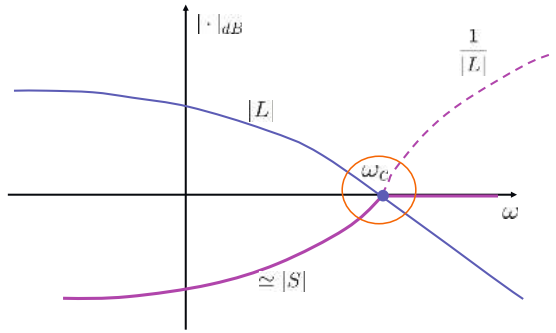
• Analisi di $S(s)$ - risposta in frequenza

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{|L(j\omega)|} \end{cases}$$

$1 \rightarrow 0dB$ se $|L(j\omega)| << 1$

$\dfrac{1}{|L(j\omega)|} \rightarrow -|L(j\omega)|_{dB}$ se $|L(j\omega)| >> 1$

• Situazione tipica



➡ Filtro passa-alto con $B \simeq [\omega_c, \infty)$

• Attenuazione del disturbo $d(t)$

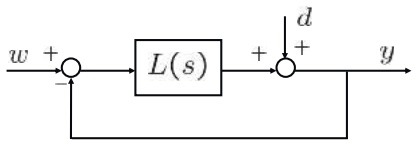
- solo in $[0, \omega_c]$

  Banda del sistema di controllo

- tanto migliore

  - quanto maggiore è ω_c
  - quanto più $|L(j\omega)| >> 1$ in $[0, \omega_c]$

• Effetto di un ritardo



$$L(s) = L'(s) \cdot e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} |L(j\omega)| = |L'(j\omega)| \\ \arg L(j\omega) = \arg L'(j\omega) - \omega\tau \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} \end{cases}$$

- può modificare la stabilità in anello chiuso
- analisi statica invariata

$$\lim_{s\to 0} e^{-\tau s} = 1$$

- analisi dinamica

ω_c non cambia (diagramma del modulo invariato)

φ_c diminuisce

φ_m diminuisce ➡ ξ diminuisce

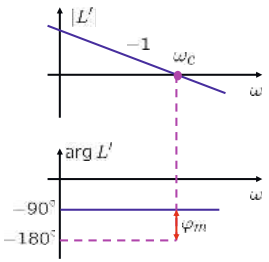
(ritardi ➡ oscillazioni)

• Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\tau s} \qquad w(t) = 1(t)$$

• $\tau = 0$ (no ritardo)

$y(\infty) = 1$



$\omega_c = 1$
$\varphi_m = 90^\circ$ $(\varphi_c = -90^\circ)$

Polo dominante reale con

$$T \simeq \frac{1}{\omega_c} = 1$$

• $\tau > 0$

(taglio invariato)

$y(\infty) = 1$

$\omega_c = 1$

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c\tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= -90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\varphi_m = 90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Asintotica stabilità ⟺ $\tau < \dfrac{\pi}{2} \simeq 1.57\ sec$

$\tau = 1$

$\varphi_m = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$

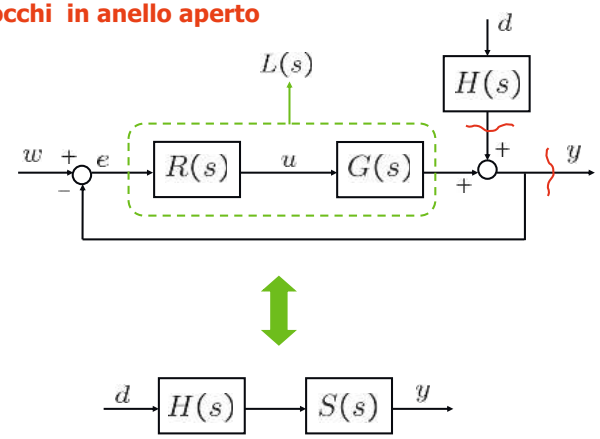
Poli dominanti complessi con

$\omega_n \simeq \omega_c = 1$

$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0.33$

$t_a \simeq \frac{5}{\xi \omega_n} \simeq 15\, sec$!!!

- **Blocchi in anello aperto**



- **Stabilità**

Asintotica stabilità ⟺

$H(s)$ Asintoticamente stabile

$\mathrm{Re}\,(p_i) < 0, \forall i$

$S(s)$ Asintoticamente stabile

(Nyquist, bode)

- **Effetto di d su y**

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

- Analisi statica: (supp. $g_H = 0,\ g_L = 0$)

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot M(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \cdot \lim_{s \to 0} M(s)$$

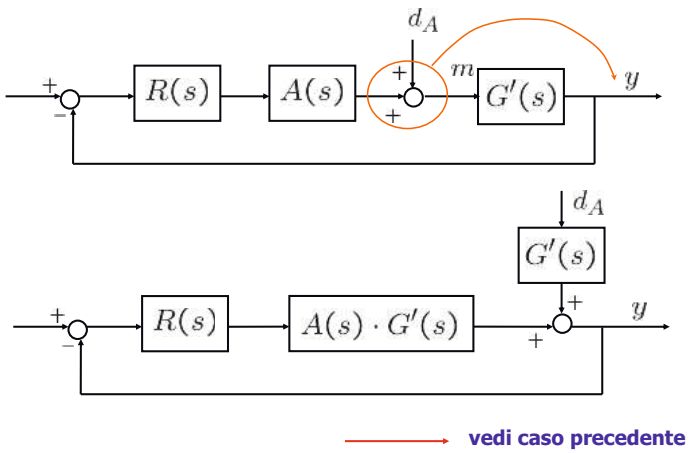
$$= A \cdot \frac{\mu_H}{1 + \mu_L} = A \cdot \mu_H \cdot \mu_S$$

- Analisi dinamica:

$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |S(j\omega)|$$

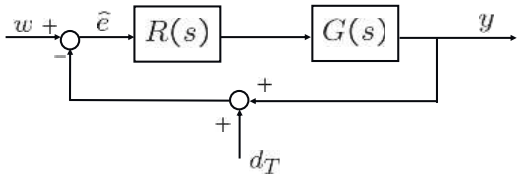
$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} + |S(j\omega)|_{dB}$$

- **Disturbi sull' attuatore**

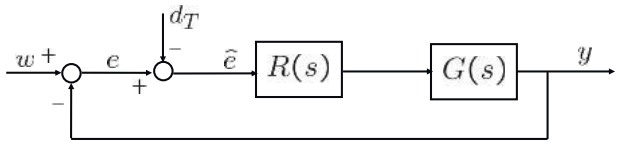


vedi caso precedente

- **Disturbi sul trasduttore (in retroazione)**



$$\hat{e} = w - (y + d_T) = \underbrace{w - y}_{e} - d_T$$



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$ Passa-basso con $B_F \simeq [0, \omega_c]$

Disturbi a bassa frequenza vanno a influire su $e(t)$

- **Valore a regime risposta allo scalino**

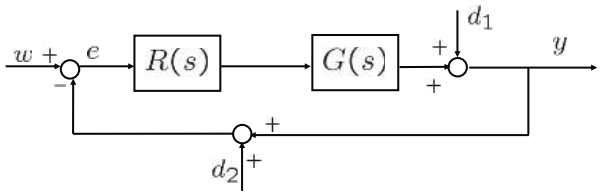
$$d_I(t) = A \cdot 1(t) \qquad \text{(Hp: sistema as. stabile)}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot F(s) \frac{1}{\cancel{s}}$$

$$= \ldots\ldots = \begin{cases} A \cdot \dfrac{1}{1+\mu} & g = 0 \\ A & g > 0 \end{cases}$$

➡ Compensazione del disturbo in catena diretta è in contrasto con la compensazione del disturbo in retroazione

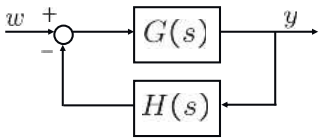
- **Riassunto: attenuazione dei disturbi**



➡ Il sistema in anello chiuso è in grado di attenuare:

- d_1 a bassa frequenza $\omega \ll \omega_c$
- d_2 ad alta frequenza $\omega \gg \omega_c$

- **Estensione**



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)|}$$

$$\simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|H(j\omega)|} \;, & |G(j\omega)| \gg \dfrac{1}{|H(j\omega)|} \\ |G(j\omega)| \;, & |G(j\omega)| \ll \dfrac{1}{|H(j\omega)|} \end{cases}$$

- **Esempio**

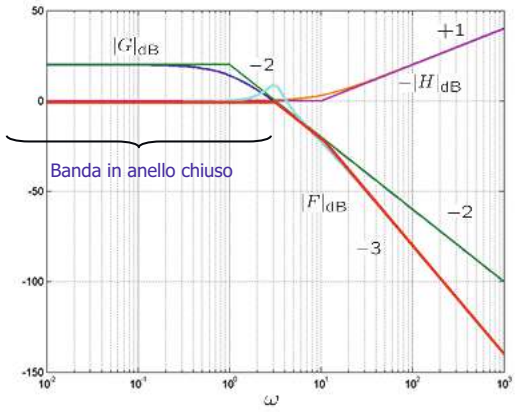
$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \qquad H(s) = \frac{1}{(1+0.1s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = ... = \frac{10(1+0.1s)}{11+2.1s+1.2s^2+0.1s^3} \qquad \mu_F = \frac{10}{11}$$

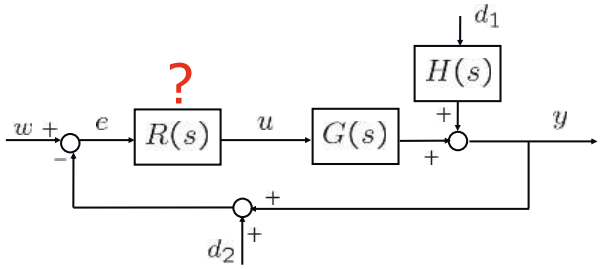
Poli:

-11 $\qquad$ $\omega_n \simeq 3.16$

$-0.5 \pm j3.12$ $\qquad$ $\xi \simeq 0.16$



- **Problema di progetto del controllore**



Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi alcuni requisiti (specifiche)

- **Principali requisiti**

- Asintotica Stabilità ⇒ $\mu > 0$, $\varphi_m > 0$ (Bode)

- Precisione statica ⇒ $g > 0$ e/o μ elevato

- Precisione dinamica

  - velocità di risposta ⇒ ω_c elevata
  - smorzamento ⇒ φ_m elevato

- Attenuazione del disturbo in andata → ω_c elevata; $|L(j\omega)|$ elevato per $\omega \ll \omega_c$

- Attenuazione del disturbo in retroazione → ω_c non troppo elevata; $|L(j\omega)|$ piccolo per $\omega \gg \omega_c$

- Stabilità robusta → φ_m, K_m elevati

- Moderazione controllo → $|R(j\omega)|$ piccolo per $\omega \gg \omega_c$

Il luogo delle radici

Definizioni e proprietà

Introduzione

- Un po' di storia: è una metodologia proposta inizialmente da Evans (negli anni '50)
- A che cosa serve?
  - Tecnica **grafica** di **analisi e sintesi di sistemi di controllo** per **sistemi SISO**
  - Può essere estesa al caso di sistemi MIMO (**ma non lo vedremo !**)

Introduzione (2)

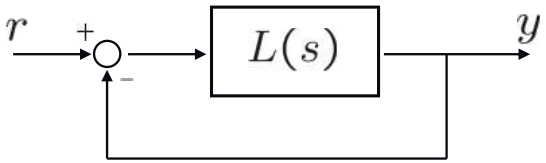
- La tecnica del luogo delle radici permette di **indagare** sull'**influenza dei parametri** di un sistema dinamico lineare sul **comportamento dinamico** del sistema stesso.
- Si studia la dipendenza delle radici dell'equazione caratteristica dai parametri del sistema.

Sistemi a tempo continuo vs sistemi a tempo discreto

- Le regole di tracciamento dei luoghi sono le medesime sia che si stia analizzando un sistema lineare a tempo continuo che a tempo discreto.
- Le proprietà dei luoghi e le tecniche di utilizzo sono analoghe nei due casi (tempo continuo – tempo discreto).
- Per semplicità allora le **regole di tracciamento** e le **proprietà** dei luoghi verranno descritte ed analizzate **soltanto per sistemi dinamici lineari a tempo continuo**.
- Dell'utilizzo del luogo delle radici per sistemi a tempo discreto daremo solamente alcuni brevi cenni.

Definizione di luogo delle radici

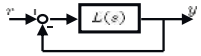
- Facciamo riferimento ad un sistema LTI di tipo SISO, a tempo continuo, retroazionato secondo lo schema



cioè un sistema di controllo a semplice ciclo di reazione.

Definizione (2)

- Vogliamo avere informazioni sulle caratteristiche della dinamica del sistema a ciclo chiuso, a partire da caratteristiche di ciclo aperto del sistema stesso.
- L'evoluzione dinamica di un sistema lineare è governata dalle radici dell'equazione caratteristica.



Definizione (3)

- Il **luogo delle radici** mette allora in relazione **i poli di ciclo chiuso** del sistema con **poli e zeri di ciclo aperto** del sistema stesso.
- Il **parametro** rispetto al quale si studiano le variazioni dei poli di ciclo chiuso è il **guadagno della catena di ciclo aperto**.

Vantaggi del metodo

- Fornisce una rappresentazione grafica sintetica che permette di ricavare la posizione di tutti i poli di ciclo chiuso del sistema (non solo la posizione approssimata dei poli dominanti [cfr. metodi basati su risposta in frequenza – Parte 8 e Parte 10])
- È applicabile anche a sistemi instabili ad anello aperto.
- Più in generale è applicabile in situazioni in cui il criterio di Bode non è utilizzabile.

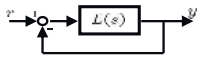
Svantaggi del metodo

- È applicabile solamente ai casi in cui la funzione di trasferimento d'anello sia razionale.
- Di conseguenza non è utilizzabile nei casi in cui ci sia la presenza di ritardi di tempo finiti nella funzione di trasferimento d'anello.

Definizione (4)

- Per il tracciamento del luogo si fa riferimento alla forma fattorizzata della funzione di trasferimento d'anello che mette in evidenza zeri e poli

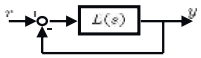
$$L(s) = \rho \frac{\prod_{j=1}^{m} (s + z_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)} \quad \text{con } m \leq n$$



Definizione (5)

- Nell'espressione di $L(s)$
  - z_j, p_i sono zeri e poli (eventualmente complessi o nulli), cambiati di segno
  - ρ è la costante di trasferimento, legata al guadagno μ dalla relazione

$$\rho = \mu \frac{\prod_{i:\, p_i \neq 0} p_i}{\prod_{j:\, z_j \neq 0} z_j}$$



Definizione (6)

- I poli di ciclo chiuso sono le radici dell'equazione caratteristica

$$1 + L(s) = 0$$

ovvero

$$1 + \rho \frac{\prod_j (s + z_j)}{\prod_i (s + p_i)} = 1 + \rho \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{\frac{N(s)}{D(s)} = T(s)} = 0$$

Il luogo delle radici: definizione

- Luogo delle radici: è il luogo del piano complesso descritto dalle radici dell'equazione $1 + \rho \frac{N(s)}{D(s)} = 0$ al variare di ρ, con $\rho \neq 0$
- In particolare
  - per $\rho > 0$ il luogo si dice **luogo diretto LD**
  - per $\rho < 0$ il luogo si dice **luogo inverso LI**

Esempio

$$L(s) = \rho \frac{s+2}{s(s+1)}, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + (1+\rho)s + 2\rho = 0$$

- Al variare di ρ i poli di ciclo chiuso possono essere reali coincidenti, reali distinti oppure complessi coniugati, a parte reale negativa oppure positiva.
- Al variare di ρ cambiano allora le proprietà di stabilità e dei transitori di risposta del sistema di ciclo chiuso

Caratterizzazione del luogo

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho}$$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{N(s)}{D(s)}\right| = \dfrac{1}{|\rho|} \\ \angle N(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k+1)\,180^\circ \quad , \quad \rho > 0 \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{LD} \\ 2k\,180^\circ \quad , \quad \rho < 0 \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{LI} \end{cases} \end{cases}$$

Caratterizzazione del luogo (2)

- La **seconda equazione** caratterizza completamente il luogo:

  la utilizzeremo per **tracciare geometricamente** il **luogo**

$$\angle N(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k+1)\,180^\circ \quad , \quad \rho > 0 \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{LD} \\ 2k\,180^\circ \quad , \quad \rho < 0 \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \quad \textbf{LI} \end{cases}$$

- La prima equazione risulta utile invece per "tarare" il luogo al variare del valore di ρ.

$$\left|\frac{N(s)}{D(s)}\right| = \frac{1}{|\rho|}$$

Semplice interpretazione geometrica

- Dalle espressioni di N(s) e D(s) definite in precedenza si ottiene che

$$\angle N(s) = \angle \prod_j (s + z_j) = \sum_j \angle (s + z_j) = \sum_j \theta_j$$

$$\angle D(s) = \angle \prod_i (s + p_i) = \sum_i \angle (s + p_i) = \sum_i \varphi_i$$

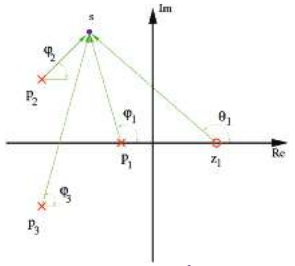
quindi in definitiva

$$\angle N(s) - \angle D(s) = \sum_j \theta_j - \sum_i \varphi_i$$

Semplice interpretazione geometrica (2)

- Graficamente

$$L(s) = \rho \frac{(s-2)}{(s+1)(s^2+6s+13)}$$



- Il punto s appartiene al luogo diretto se e solo se la quantità

$$\sum_j \theta_j - \sum_i \varphi_i$$

risulta multiplo dispari di 180°, appartiene invece al luogo inverso se e solo se essa risulta multiplo pari di 180°

Taratura del luogo

- Dalle espressioni di N(s) e D(s) definite in precedenza si ottiene che

$$|N(s)| = \prod_j |s + z_j| = \prod_j \nu_j$$

$$|D(s)| = \prod_i |s + p_i| = \prod_i \eta_i$$

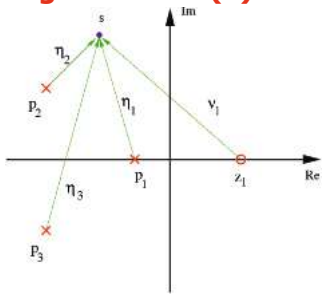
quindi in definitiva

$$\left|\frac{N(s)}{D(s)}\right| = \frac{1}{|\rho|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\prod_j \nu_j}{\prod_i \eta_i} = \frac{1}{|\rho|}$$

Taratura del luogo: ancora un' interpretazione geometrica (2)

- Graficamente

$$L(s) = \rho \frac{(s-2)}{(s+1)(s^2+6s+13)}$$

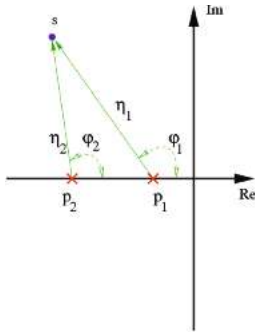


- Determinato un punto del luogo e calcolate le sue distanze da zeri e poli, è possibile determinare il valore di $|\rho|$ utilizzando la relazione

$$|\rho| = \frac{\prod_i |s + p_i|}{\prod_j |s + z_j|} = \frac{\prod_i \eta_i}{\prod_j \nu_j}$$

Un semplice esempio

- Si tracci il luogo delle radici di $L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+3)}$



- Dovrà valere la relazione

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\,180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

per il luogo diretto e la relazione

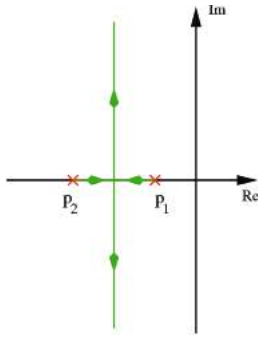
$$-\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\,180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

per il luogo inverso.

Un semplice esempio (2): luogo diretto

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\,180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

- La relazione è soddisfatta per tutti i punti del segmento dell' asse reale compreso tra i due poli e per tutti i punti dell' asse di simmetria di tale segmento (geometricamente lo si verifica in modo agevole).

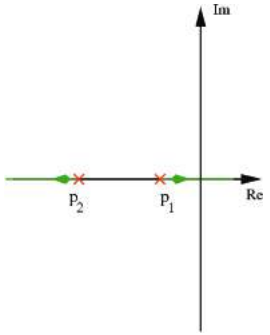


- Le frecce indicano la taratura del luogo al crescere di |ρ|.

Un semplice esempio (3): luogo inverso

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\,180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Gli unici punti del piano appartenenti al luogo inverso sono quelli delle due semirette uscenti dai poli, sull'asse reale (anche in questo caso esiste una facile verifica geometrica).
- Le frecce indicano la taratura del luogo al crescere di |ρ|.



Un semplice esempio (4): verifica

- Partendo dalla $1 + L(s) = 0$

  si ottiene $s^2 + 4s + (3 + \rho) = 0$

  che ha per soluzioni $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{1 - \rho}$
- Al variare di ρ in $\mathbb{R}$ si ottengono i comportamenti descritti.

Il tracciamento di un luogo delle radici in generale non segue questa modalità.

Delle semplici regole permettono di tracciare il luogo in maniera qualitativa.

Il luogo delle radici

Regole di tracciamento

Regole di tracciamento

- **Regola 1**: il luogo è costituito da 2*n* rami: *n* rami costituiscono il luogo diretto, *n* il luogo inverso [dove *n* è il grado del polinomio a denominatore in L(s)].

$$L(s) = \rho \frac{N(s)}{D(s)}$$

grado *m*

grado n

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(s) + \rho N(s) = 0$$

Equazione polinomiale di grado *n*: ammette *n* radici, che variano con continuità al variare di ρ.

- **Regola 2**: Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale

$$D(s) + \rho N(s) = 0$$

L'equazione del luogo ha coefficienti reali: le sue radici sono reali oppure complesse coniugate.

- **Regola 3**: i rami "partono" dai poli di L(s)

$$D(s) + \rho N(s) = 0 \underset{|\rho| \to 0}{\Longrightarrow} D(s) = 0$$

- **Regola 4**: per $|\rho| \to \infty$ *m* rami "tendono" agli zeri di L(s), gli altri (*n-m*) rami tendono all'infinito

$$D(s) + \rho N(s) = 0 \underset{|\rho| \to \infty}{\Longrightarrow} N(s) = 0$$

grado *m*

L'equazione degenera: possiede soltanto m radici al finito, coincidenti con gli zeri di L(s).

- **Regola 5**: i rami che tendono all'infinito lo fanno lungo asintoti che intersecano l'asse reale in punti (**centroidi**) di ascissa

$$x_\infty = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{j=1}^{m} z_j - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$

e formano con l'asse reale angoli dati da

$$\vartheta_\infty = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\,180^\circ}{n-m}, & k = 1, 2, \ldots n-m-1, \quad \rho > 0 \\ \dfrac{2k\,180^\circ}{n-m}, & k = 1, 2, \ldots n-m-1, \quad \rho < 0 \end{cases}$$

Giustificazione della regola (5)

- Nel caso in cui sia |ρ| che |s| siano molto grandi è lecito scrivere

$$1 + \rho \frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \rho \frac{s^m + s^{m-1}\sum_{j=1}^{m} z_j + \ldots}{s^n + s^{n-1}\sum_{i=1}^{n} p_i + \ldots} = 0$$

Dividendo il polinomio a denominatore per il numeratore e rielaborando …

$$\frac{1}{s^{n-m} + s^{n-m-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j\right) + \ldots} = -\frac{1}{\rho}$$

- Per |ρ| ed |s| molto grandi [muovendosi lungo uno degli asintoti] è lecito affermare che i termini di grado inferiore ad (*n-m-1*) nell'espressione appena trovata non influiscano sugli asintoti. L'andamento asintotico del luogo sarà allora equivalente a quello descritto dalla

$$\frac{1}{\left[s+\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j\right)\right]^{n-m}}=-\frac{1}{\rho}$$

che possiede i medesimi coefficienti per i termini s^{n-m} e s^{n-m-1}

$$\frac{1}{\left[s+\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j\right)\right]^{n-m}}=-\frac{1}{\rho}$$

$$(s-x_\infty)^{n-m}=-\rho$$

Ascissa del centroide degli asintoti

$$x_\infty=\frac{1}{n-m}\left(\sum_{j=1}^{m}z_j-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$$

$$(s-x_\infty)^{n-m}=-\rho$$

$$s-x_\infty \triangleq \eta\, e^{j\,\vartheta_\infty}$$

$$\eta^{n-m}\,e^{j(n-m)\vartheta_\infty}=-\rho$$

$$\eta=\sqrt[n-m]{|\rho|}$$

Inclinazione degli asintoti rispetto all'asse reale

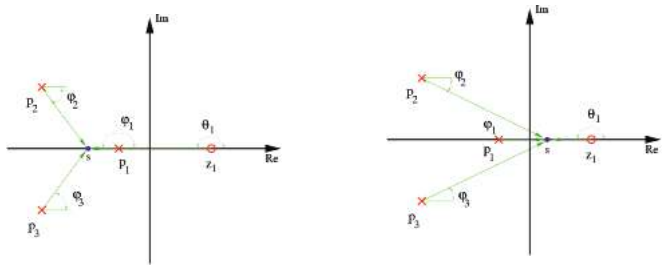
$$\vartheta_\infty=\begin{cases}\dfrac{(2k+1)\,180^\circ}{n-m}, & k=1,2,\ldots n-m-1, \quad \rho>0\\[2ex] \dfrac{2k\,180^\circ}{n-m}, & k=1,2,\ldots n-m-1, \quad \rho<0\end{cases}$$

Regole di tracciamento (continua…)

- **Regola 6**: tutti i punti dell'asse reale, esclusi i punti di singolarità di L(s), appartengono al luogo (dalla Regola 2)
- **Regola 7**: appartengono al luogo diretto tutti i punti dell'asse reale che "lasciano" alla loro destra un numero dispari di singolarità di L(s)
- **Regola 8**: appartengono al luogo inverso tutti i punti dell'asse reale che "lasciano" alla loro destra un numero pari di singolarità di L(s)

Giustificazione delle regole 7 ed 8

- Una coppia di zeri o poli complessi coniugati fornisce sempre un contributo di fase nullo o multiplo di 360° , una singolarità reale dà sempre un contributo di ±180° (zero/polo) se è situata a destra del punto dell'asse reale considerato, un contributo nullo altrimenti.



Regole di tracciamento (continua...)

- **Regola 9**: angoli d'uscita dai poli.
  - Poli tutti distinti

polo in $-p_k$

$$\varphi_k = \begin{cases} \sum_j \vartheta_j - \sum_{i\neq k} \varphi_i + (2\lambda+1)\,180^\circ & \rho > 0,\ \lambda \in \mathbb{Z} \\ \sum_j \vartheta_j - \sum_{i\neq k} \varphi_i + 2\lambda\,180^\circ & \rho < 0,\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-p_k + z_j)$$

$$\varphi_i = \angle(-p_k + p_i), \quad i \neq k$$

- **Regola 9**: angoli d'uscita dai poli.
  - Poli multipli: polo in $-p_k$ con molteplicità h_k

$$\varphi_k = \begin{cases} \frac{1}{h_k}\left[\sum_j \vartheta_j - \sum_{i\neq k} \varphi_i + (2\lambda+1)\,180^\circ\right],\ \lambda = 0,1,\ldots,h_k-1 & \rho > 0 \\ \frac{1}{h_k}\left[\sum_j \vartheta_j - \sum_{i\neq k} \varphi_i + 2\lambda\,180^\circ\right],\ \lambda = 0,1,\ldots,h_k-1 & \rho < 0 \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-p_k + z_j)$$

$$\varphi_i = \angle(-p_k + p_i), \quad i \neq k$$

- **Regola 10**: angoli d'arrivo agli zeri
  - Zeri tutti distinti

zero in $-z_k$

$$\vartheta_k = \begin{cases} -\sum_{j\neq k} \vartheta_j + \sum_i \varphi_i + (2\lambda+1)\,180^\circ & \rho > 0,\ \lambda \in \mathbb{Z} \\ -\sum_{j\neq k} \vartheta_j + \sum_i \varphi_i + 2\lambda\,180^\circ & \rho < 0\ \lambda \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-z_k + z_j), \quad j \neq k$$

$$\varphi_i = \angle(-z_k + p_i)$$

- **Regola 10**: angoli d' arrivo agli zeri
  - Zeri multipli: zero in $-z_k$ con molteplicità h_k

$$\varphi_k = \begin{cases} \frac{1}{h_k}\left[-\sum_{j\neq k}\vartheta_j + \sum_i \varphi_i + (2\lambda+1)\,180^\circ\right], \ \lambda = 0,1,\ldots,h_k-1 & \rho > 0 \\ \frac{1}{h_k}\left[-\sum_{j\neq k}\vartheta_j + \sum_i \varphi_i + 2\lambda\,180^\circ\right], \ \lambda = 0,1,\ldots,h_k-1 & \rho < 0 \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \angle(-z_k + z_j), \quad j \neq k$$

$$\varphi_i = \angle(-z_k + p_i)$$

Giustificazione

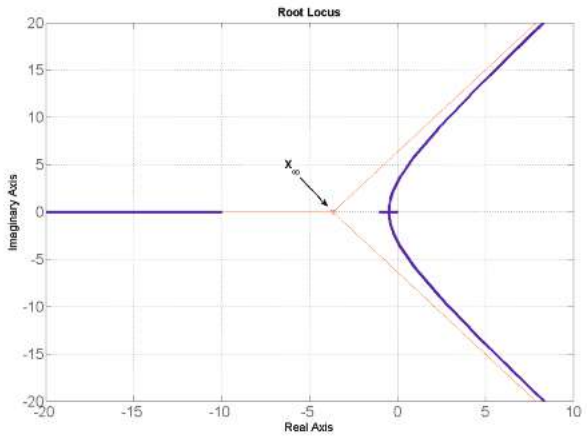
- È sufficiente applicare la relazione che definisce il luogo delle radici in un intorno dello zero o polo considerato

$$\angle N(s) - \angle D(s) = \begin{cases} (2k+1)\,180^\circ, \ \rho > 0, \ k \in \mathbb{Z} & \textbf{LD} \\ 2k\,180^\circ, \ \rho < 0, \ k \in \mathbb{Z} & \textbf{LI} \end{cases}$$

Esempio: tracciamento qualitativo di un luogo delle radici

- $L(s) = \rho \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$
- Asintoti $\vartheta_\infty = (2k+1)\cdot 60^\circ, \quad k = 0,1,2$
- Centroide $x_\infty = \dfrac{-1-10}{3} = -\dfrac{11}{3}$ **LUOGO DIRETTO**
- Angoli d' uscita dai poli $\varphi_0 = 180^\circ, \quad \varphi_{-1} = 0^\circ$

$$\varphi_{-10} = 180^\circ$$



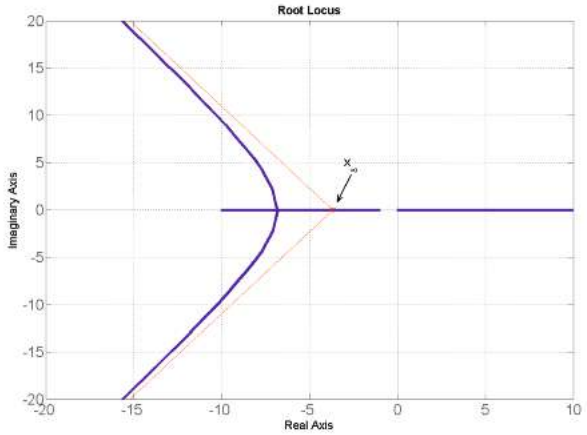
Esempio:
tracciamento qualitativo di un luogo delle radici

- $L(s) = \rho \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$
- Asintoti $\quad \vartheta_\infty = 2k \cdot 60^\circ, \quad k = 0, 1, 2$
- Centroide $\quad x_\infty = \dfrac{-1-10}{3} = -\dfrac{11}{3}$

LUOGO INVERSO

- Angoli d'uscita dai poli $\quad \varphi_0 = 0^\circ, \quad \varphi_{-1} = 180^\circ$

$\varphi_{-10} = 0^\circ$

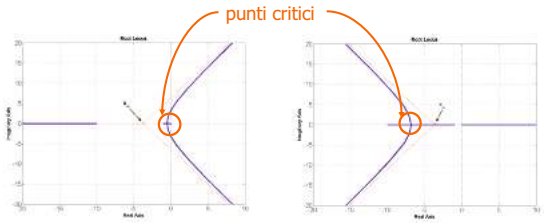


Luogo delle radici

Le proprietà differenziali
La derivata logaritmica

Regole di tracciamento (continua…)

- **Osservazione**: i diversi rami del luogo possono incrociarsi in punti particolari del piano complesso [si veda l'esempio precedente]. I punti d'incrocio hanno proprietà caratteristiche per la fdt L(s) [sono punti di stazionarietà sia per il modulo che per la fase] e vengono detti **punti critici**.



- **Definizione**: si dice **punto critico** di molteplicità h un punto del piano complesso s_c per il quale oltre a valere la

$$1 + \bar{\rho} T(s_c) = 0$$

per un opportuno valore di ρ (quindi è un punto del luogo delle radici) valgono le seguenti

$$\frac{d\,T(s_c)}{d\,s} = \frac{d^2\,T(s_c)}{d\,s^2} = \ldots = \frac{d^h\,T(s_c)}{d\,s^h} = 0$$

- In base alla definizione, per **determinare i punti critici** è necessario risolvere l'equazione

$$\frac{d\,T(s)}{ds} = 0$$

- **Osservazione**: un punto critico di molteplicità *h* può venire definito anche come punto multiplo (radice multipla) del luogo delle radici oggetto di studio, in particolare come radice multipla di molteplicità *h+1* per il luogo.

- **Regola 11**: un **punto critico di molteplicità *h*** corrisponde ad un punto comune a ***2(h+1)*** **rami del luogo** delle radici.

- **Regola 12**: le tangenti ai rami del luogo che si incrociano nel punto critico formano tra loro angoli di ampiezza

$$\frac{180^\circ}{h+1}$$

Orientando i rami nel verso di $|\rho|$ crescente, essi risultano alternativamente "entranti" nel punto critico ed "uscenti" da esso.

Giustificazione

- Sia s_c un punto critico di molteplicità h per il luogo delle radici per un opportuno valore del parametro ρ

$$1 + \bar{\rho} T(s_c) = 0$$

- Si supponga di far variare di poco il valore del parametro ρ nell'intorno del valore corrispondente al punto critico, in modo da esplorare il luogo delle radici in un intorno opportuno del punto critico stesso.

- Sia allora $\tilde{\rho} = \bar{\rho} + \epsilon, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$
- L' equazione del luogo avrà soluzione in qualche punto non distante dal punto critico

$$1 + \tilde{\rho} T(s_c + \delta) = 0, \quad \delta \in \mathbb{R}$$

con

$$\angle T(s_c+\delta) = \angle T(s_c) = \phi = \begin{cases} (2k+1)\,180^\circ & \text{(LD)} \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2k\,180^\circ & \text{(LI)} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$T(s_c+\delta) \approx T(s_c) + \frac{\delta^{h+1}}{(h+1)!} \left.\frac{d^{h+1}T(s)}{ds^{h+1}}\right|_{s=s_c} + \dots$$

$$\tilde{\rho} = \bar{\rho} + \epsilon \quad \Rightarrow \quad 1 + \tilde{\rho} T(s_c+\delta) = 0$$

$$\underbrace{1 + \bar{\rho} T(s_c)}_{=0} + \epsilon T(s_c) + (\bar{\rho}+\epsilon)\frac{\delta^{h+1}}{(h+1)!} T^{(h+1)}(s_c) = 0$$

$$\delta^{h+1} = -(h+1)!\,\frac{\epsilon}{\bar{\rho}+\epsilon}\,\frac{T(s_c)}{T^{(h+1)}(s_c)}$$

$$\delta = \sqrt[h+1]{-(h+1)!\,\frac{\epsilon}{\bar{\rho}+\epsilon}\,\frac{T(s_c)}{T^{(h+1)}(s_c)}}$$

$$\angle\delta = \frac{1}{h+1}\Big[\overbrace{\underbrace{\angle T(s_c)}_{\phi} - \angle T^{(h+1)}(s_c) + \angle\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\rho}+\epsilon}\right)}^{\alpha_0}\Big]$$

$$\angle\delta = \frac{1}{h+1}\alpha_0 + \begin{cases} (2k+1)\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ 2k\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \quad \text{(LD)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots h \qquad \bar{\rho},\ \tilde{\rho} > 0$$

$$\angle\delta = \frac{1}{h+1}\alpha_0 + \begin{cases} 2k\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ (2k+1)\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \quad \text{(LI)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots h \qquad \bar{\rho},\ \tilde{\rho} < 0$$

- Analizziamo il risultato per il **luogo diretto LD**

$$\angle\delta = \frac{1}{h+1}\alpha_0 + \begin{cases} (2k+1)\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ 2k\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \quad \text{(LD)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots h \qquad \bar{\rho},\ \tilde{\rho} > 0$$

  - I rami del luogo formano tra loro angoli pari a $\frac{180^\circ}{h+1}$
  - Ci sono ***2(h+1)*** rami del luogo che passano per il punto critico

  - I rami alternativamente "entrano" ed "escono" dal punto critico, se li si tara nel verso di |ρ| crescente

$$\angle\delta = \frac{1}{h+1}\alpha_0 + \begin{cases} (2k+1)\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon > 0 \\ 2k\dfrac{180^\circ}{h+1}, & \epsilon < 0 \quad \text{(LD)} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots h \qquad \bar{\rho},\ \tilde{\rho} > 0$$

    infatti per ε > 0 |ρ| cresce, mentre per ε < 0 |ρ| decresce sul luogo LD ed i rami a |ρ| crescente si alternano a quelli con |ρ| decrescente.

- A risultati analoghi si arriva analizzando il risultato ottenuto per il luogo inverso LI.

Regole di tracciamento (continua…)

- **Osservazione**: in corrispondenza di punti critici semplici reali il luogo delle radici presenta il seguente comportamento:
  - Due rami del luogo confluiscono verso il punto critico stando sull'asse reale e da esso divergono altri due rami con direzione ortogonale all'asse reale, interessando quindi punti complessi del piano.

- La conoscenza dei punti critici è importante, in particolare perchè i punti critici reali individuano i punti in cui il luogo "abbandona" l'asse reale e di conseguenza individuano i valori del parametro ρ che fanno diventare complessi coniugati parte dei poli di ciclo chiuso del sistema.

Esempio: tracciamento qualitativo di un luogo delle radici

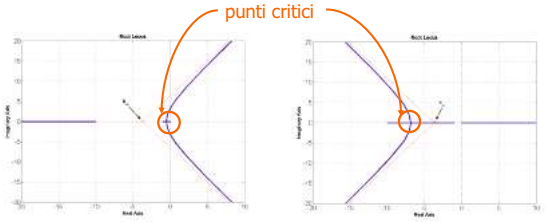
- Determinare i punti critici del luogo delle radici di

$$L(s) = \rho\frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

  - Si tratta di risolvere la $\frac{dT(s)}{ds} = 0$

$$3s^2 + 22s + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-11-\sqrt{91}}{3} \\ \dfrac{-11+\sqrt{91}}{3} \end{cases}$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-11-\sqrt{91}}{3} \\ \dfrac{-11+\sqrt{91}}{3} \end{cases}$$



Proprietà differenziali

- Al momento abbiamo gli strumenti per determinare
  - L'inclinazione delle tangenti al luogo in corrispondenza delle singolarità (zeri e poli);
  - I punti critici del luogo;
  - L'inclinazione dei rami del luogo in corrispondenza dei punti critici.
- Inoltre abbiamo gli strumenti per determinare le proprietà asintotiche del luogo, quali l'inclinazione degli asintoti e la posizione del centroide.

- Ma
  - la determinazione dei punti critici può non essere agevole;
  - la determinazione dell'inclinazione del luogo in corrispondenza di un punto critico almeno doppio (oppure semplice ma non reale) è ancor più disagevole;
- Vedremo **come** poter **determinare i punti critici** in maniera abbastanza agevole facendo uso di una particolare funzione (la cosiddetta *derivata logaritmica*), ma tralasciamo l'analisi del secondo problema esposto (anch'esso potrebbe essere risolto agevolmente facendo uso della derivata logaritmica comunque).

Introduzione alla derivata logaritmica

- Per poter determinare le proprietà differenziali in un punto qualsiasi del luogo dovremmo affidarci allo sviluppo in serie della fdt F(s) nell'intorno del punto scelto.
- Motivi di convenienza formale suggeriscono di analizzare lo sviluppo in serie del logaritmo naturale di F(s), sfruttando il fatto che

$$T(s) = M(s)\, e^{j\phi(s)} \quad \Rightarrow \quad \Im\{\ln T(s)\} = \phi(s)$$

La derivata logaritmica

- **Definizione**: $Q(s) \triangleq \frac{d \ln T(s)}{ds} = \frac{T'(s)}{T(s)}$

- Definizioni operative:

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow Q(s) = \frac{N'(s)}{N(s)} - \frac{D'(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{\prod_j (s+z_j)}{\prod_i (s+p_i)} \Rightarrow Q(s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s+z_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s+p_i}$$

Applicazione: determinazione dei punti critici

$$\frac{dT(s)}{ds} = 0 \Rightarrow Q(s) = \frac{T'(s)}{T(s)} = 0$$

$$T(s) = \frac{\prod_j (s+z_j)}{\prod_i (s+p_i)}$$

$$Q(s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s+z_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s+p_i} = 0$$

Osservazione: l' espressione trovata è molto utile se la T(s) viene espressa in forma fattorizzata, ma se così non è?

$$\frac{dT(s)}{ds} = 0 \Rightarrow Q(s) = \frac{T'(s)}{T(s)} = 0$$

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$Q(s) = \frac{N'(s)}{N(s)} - \frac{D'(s)}{D(s)} = 0$$

Esempio

- Determinare i punti critici del luogo delle radici di

$$L(s) = \rho \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

$$-\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+10} = 0$$

$$3s^2 + 22s + 10 = 0$$

Appendice

Tecniche particolari per il tracciamento di luoghi delle radici

Richiami: sviluppi in serie di una funzione razionale fratta di variabile complessa

- Consideriamo una funzione razionale fratta di variabile complessa

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \quad \text{con } m \leq n \quad s \in \mathbb{C}$$

- Essa risulta infinitamente derivabile e sviluppabile in serie di potenze.
- Ci interessano
  - lo sviluppo nell' intorno di uno zero
  - lo sviluppo nell' intorno di un polo
  - lo sviluppo in serie asintotico (nell' intorno del "punto all' infinito")

Sviluppo in serie di Taylor

- Se $-z_k$ è un punto in cui la $G(s)$ è regolare [quindi anche uno zero di $G(s)$]

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (s + z_k)^n$$

$$c_n = \frac{1}{n!} G^{(n)}(s)\Big|_{s=-z_k}$$

Sviluppo in serie di Laurent

- Se $-p_k$ è un polo di $G(s)$, di molteplicità h_k allora lo sviluppo in serie nell' intorno di $-p_k$ è dato da

$$G(s) = \underbrace{\sum_{n \geq 0} c_n \, (s + p_k)^n}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{\frac{\hat{c}_1}{s + p_k} + \frac{\hat{c}_2}{(s + p_k)^2} + \ldots + \frac{\hat{c}_{h_k}}{(s + p_k)^{h_k}}}_{\text{parte principale}}$$

$$\hat{c}_j = \frac{1}{(h_k - j)!} \lim_{s \to -p_k} \frac{d^{(h_k - j)}}{d\, s^{(h_k - j)}} \left[G(s) \, (s + p_k)^{h_k} \right]$$

$$j = 1, 2 \ldots h_k$$

Sviluppo in serie asintotico

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \quad \text{con } m \le n \quad s \in \mathbb{C}$$

$$G(s) = \sum_{j=n-m}^{\infty} \frac{w_j}{s^j} \qquad w_j = 0 \quad j = 0, 1 \ldots n-m-1$$

$$w_{n-m} = \frac{b_m}{a_n}, \quad w_{n-m+1} = \frac{b_{m-1} a_n - b_m a_{n-1}}{a_n^2}$$

$$w_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d s^j} \left[s^{n-m} \frac{b_m + b_{m-1} s + b_{m-2} s^2 + \ldots + b_0 s^m}{a_n + an - 1 s + a_{n-2} s^2 + \ldots + a_0 s^n} \right] \Big|_{s=0}$$

Regole di tracciamento: alcune nuove espressioni

- **Regola 5**: altra espressione per la determinazione del centroide e dell'inclinazione degli asintoti, facendo riferimento alla forma non fattorizzata della L(s)

$$L(s) = \rho \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- Si ottengono

$$x_\infty = \frac{1}{n-m} \left(\frac{b_{m-1}}{b_m} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)$$

$$\vartheta_\infty = \frac{1}{n-m} \left[\angle \left(\frac{b_m}{a_n} \right) - \phi + 2k\,180^\circ \right] \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-m-1$$

$$\phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

Giustificazione

- Si considera lo sviluppo asintotico della T(s)

$$T(s) = \frac{w_0}{s^{n-m}} + \frac{w_1}{s^{n-m+1}} + \ldots$$

$$w_0 = \frac{b_m}{a_n}, \quad w_1 = \frac{b_{m-1} a_n - b_m a_{n-1}}{a_n^2}$$

- Si arresti lo sviluppo asintotico ai primi due termini e si consideri che un punto del luogo lungo l'asintoto possa venire espresso come

$$s = x_\infty + \lambda e^{j\vartheta_\infty}$$

$$\left.\begin{aligned} T(s) &= M(s)\, e^{j\phi(s)} \\ T(s) &\approx \frac{w_0}{s^{n-m}} + \frac{w_1}{s^{n-m+1}} \end{aligned}\right\} \quad M\, e^{j\phi}\, s^{n-m+1} = w_0\, s + w_1$$

$$s = x_\infty + \lambda e^{j\vartheta_\infty}$$

$$x_\infty = \frac{w_1}{(n-m)\, w_0} \qquad \vartheta_\infty = \angle w_0$$

Esempio

$$L(s) = \rho \frac{s^2+2s+2}{s^4+2s^3+3s^2}$$

$$x_\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1} - \frac{2}{1}\right) = 0$$

$$\vartheta_\infty = \frac{1}{2}\left[\angle\left(\frac{1}{1}\right) - \phi + 2k\,180^\circ\right] \qquad k = 0, 1$$

$$\phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

ritrovare gli stessi risultati applicando la regola (5) descritta nella slide #123.

Regole di tracciamento: alcune nuove espressioni (continua...)

- **Regola 9**: angoli d' uscita dai poli.
  - Poli multipli: polo in $-p_k$ con molteplicità h_k

$$T(s) = \frac{c_0}{(s+p_k)^{h_k}} + \frac{c_1}{(s+p_k)^{h_k-1}} + \dots$$

$$c_0 = \lim_{s\to -p_k} T(s)\,(s+p_k)^{h_k}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{h_k}\left[\angle c_0 - \phi + 2k\,180^\circ\right] \qquad \phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

- **Regola 10**: angoli d' arrivo negli zeri.
  - Zeri multipli: zero in $-z_k$ con molteplicità h_k

$$T(s) = c_0\,(s+z_k)^{h_k} + c_1(s+z_k)^{h_k+1} + \dots$$

$$c_0 = \lim_{s\to -z_k} T(s)\frac{1}{(s+z_k)^{h_k}}$$

$$\vartheta_k = \frac{1}{h_k}\left[\phi - \angle c_0 + 2k\,180^\circ\right] \qquad \phi = \begin{cases} 180^\circ & \rho > 0 \\ 0^\circ & \rho < 0 \end{cases}$$

Esempio

$$L(s) = \rho \frac{s^2+2s+2}{s^4+2s^3+3s^2}$$

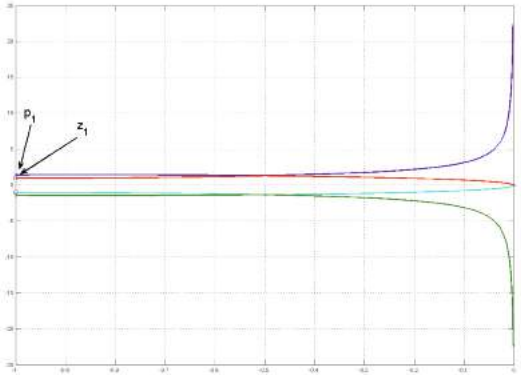
$$z_{1,2} = -1 \pm j \qquad p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}, \qquad p_{3,4} = 0$$

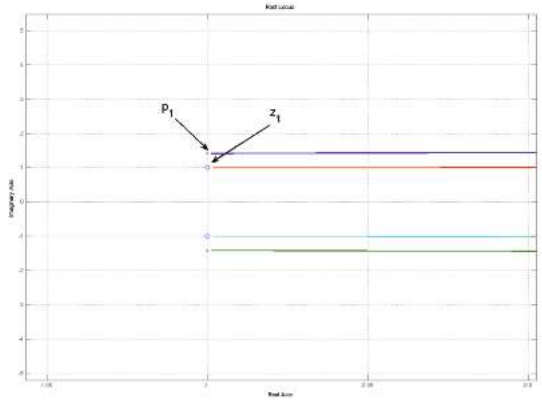
Per il luogo LD

$$z_1 \Longrightarrow c_0 = -1 \Longrightarrow \vartheta_{z_1} = 0^\circ$$

$$p_1 \Longrightarrow c_0 = -1 + j\sqrt{2} \Longrightarrow \vartheta_{p_1} \approx -340^\circ 31'$$

E per il luogo LI?





Utilizzo del luogo delle radici

Analisi di prestazioni di sistemi di controllo

Un esempio completo

- $L(s) = \rho \dfrac{s+3}{s\,(s^2+2s+2)}$
- 3 rami partono dai poli per $|\rho| \to 0$
- Un ramo tende allo zero, per $|\rho| \to \infty$
- Gli altri due rami tendono a 2 "zeri all' infinito", lungo 2 asintoti.

$$x_\infty = \frac{1}{2} \qquad \vartheta_\infty = (2k+1)\,90^\circ, \quad k = 0, 1$$

- Il luogo LD contiene il tratto dell' asse reale $-3 \le s \le 0, \quad s \in \mathbb{R}$
- Punti critici: $\dfrac{1}{s+3} - \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1+j} - \dfrac{1}{s+1-j} = 0$

$$2s^3+11s^2+12s+6 = 0 \implies \text{no } s_c \text{ in LD}$$

- Angoli di uscita dai poli

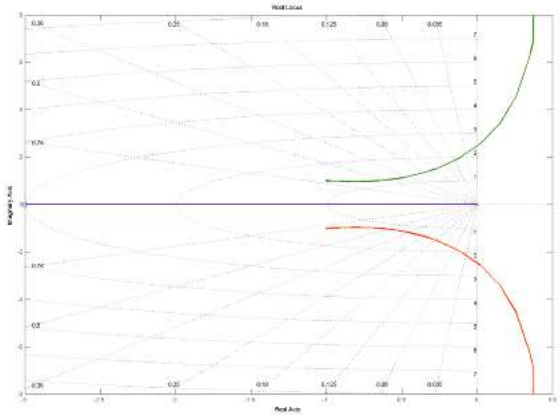
$$\varphi_0 = 180^\circ \qquad \varphi_{-1+j} = \arctan 2 - 90^\circ - 135^\circ \approx -161^\circ$$

$$\varphi_{-1-j} = -\arctan 2 + 90^\circ + 135^\circ \approx 161^\circ$$

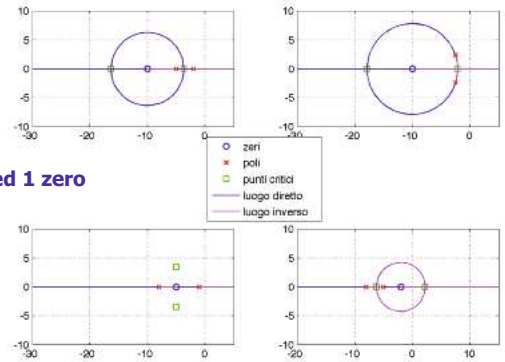
- Angolo d'arrivo allo zero $\vartheta_1 = 0^\circ$

- Stabilità asintotica $0 < \rho < 4$

È sufficiente applicare il criterio di Routh - Hurwitz

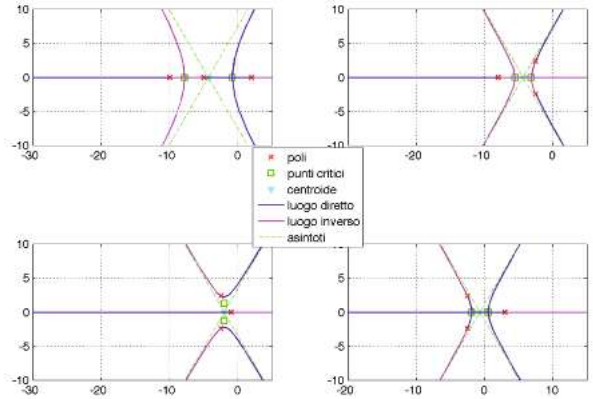
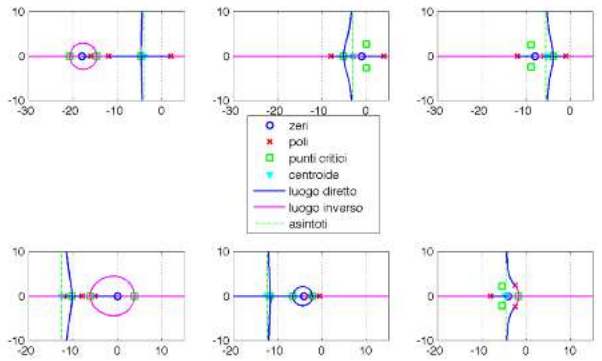


Luoghi delle radici particolari



2 poli ed 1 zero

3 poli



3 poli ed 1 zero