Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

Segnali a tempo discreto

Definizione: segnale a tempo discreto

- Consideriamo una sequenza di istanti di tempo

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$$

- Si definisce segnale a tempo discreto una successione di valori associati alla sequenza temporale considerata

$$w_k \stackrel{\triangle}{=} w(t_k)$$

- Se vale che $t_k - t_{k-1} = T_s, \forall k$ allora

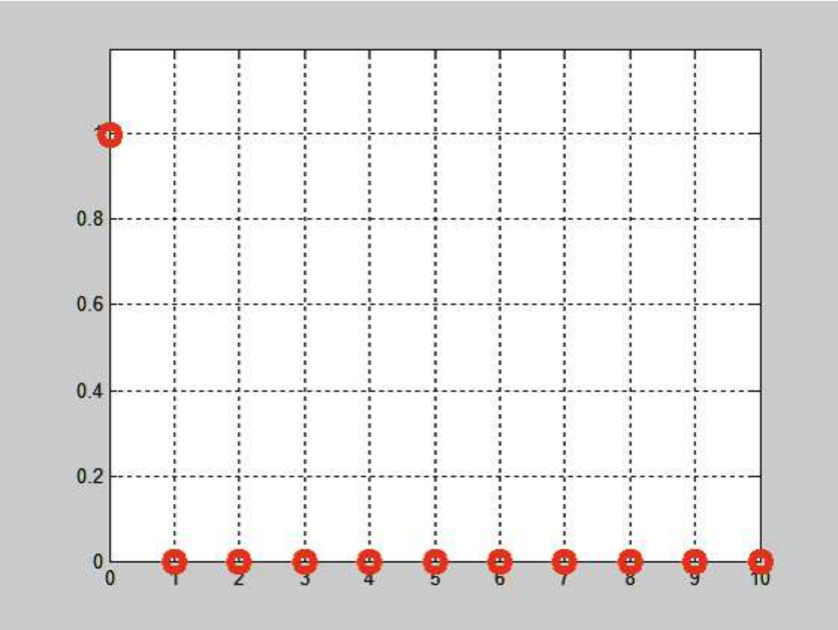
$$w_k = w(k\,T_s)$$

Alcuni segnali canonici a tempo discreto

Per semplicità in ciò che segue trascuriamo di indicare esplicitamente l'intervallo T_s

Impulso unitario

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 \quad \text{per} \quad k = 0 \\ 0 \quad \text{per} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

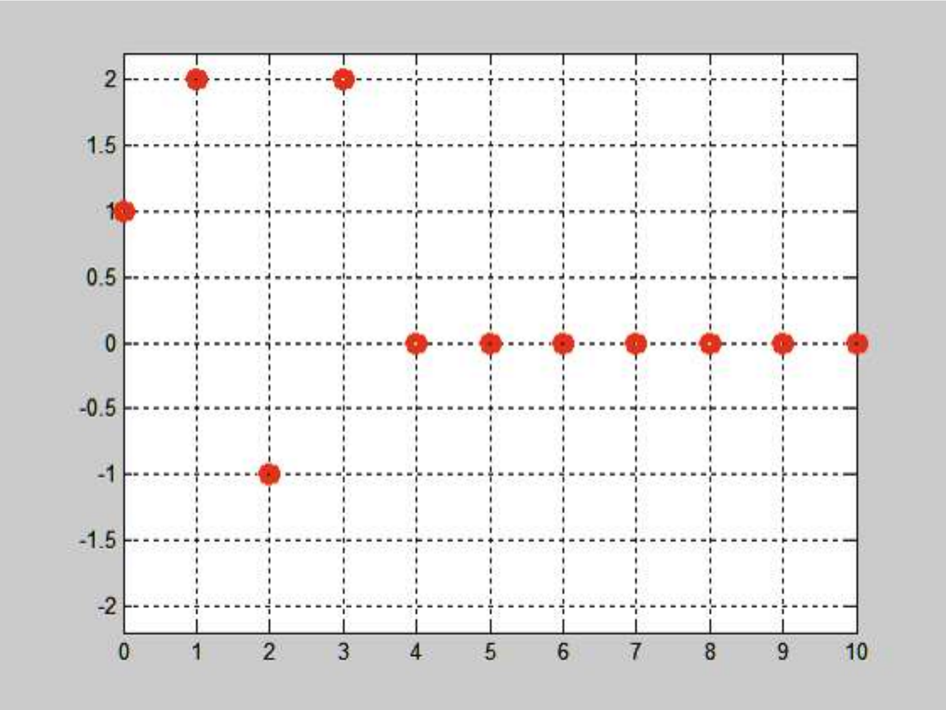


Impulso traslato

$$\delta(k-h) = \begin{cases} 1 \quad \text{per} \quad k = h \\ 0 \quad \text{per} \quad k \neq h \end{cases}$$

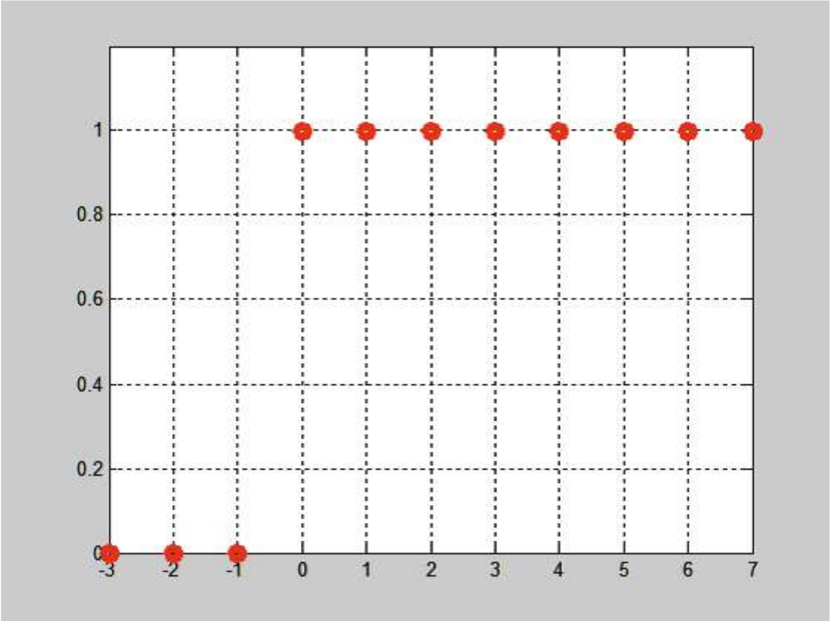
- Una sequenza qualsiasi a tempo discreto può venir sempre espressa come sommatoria di segnali δ opportunamente traslati

$$w(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1) + \\ -\delta(k-2) + 2\,\delta(k-3)$$



Gradino unitario

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$



- La sequenza 1(k) è utile per evidenziare che una sequenza w(k) è identicamente nulla per istanti di tempo negativi

$$w(k) = \hat{w}(k) \cdot 1(k) \iff w(k) = \begin{cases} \hat{w}(k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Segnale esponenziale

$$w(k) = \begin{cases} a^k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = a^k \cdot 1(k) \qquad a \in C$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = a^{kT_s} \cdot 1(kT_s)$$

Rampa unitaria

$$w(k) = \begin{cases} k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = k \cdot 1(k)$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = k \cdot T_s \cdot 1(kT_s)$$

Polinomio fattoriale di ordine h

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

- Si definisce **ricorsivamente**

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(h)}}{h!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-h+1)}{h!} & \text{per} \quad h > 0,\ k \geq h \\ 0 & \text{per} \quad h > 0,\ k < h \end{cases}$$

- Si ottiene

$$\frac{k^{(1)}}{1!} = k \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(2)}}{2!} = \frac{k(k-1)}{2!} \cdot 1(k)$$
$$= \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(3)}}{3!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$
$$= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(4)}}{4!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \cdot 1(k)$$
$$= \left(\frac{1}{24}k^4 - \frac{1}{3}k^3 + \frac{11}{24}k^2 - \frac{1}{4}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\cdots$$

- la sequenza $$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

sarà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto!

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k) \quad \Longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t^h}{h!} \cdot 1(t)$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$\frac{k^{(h)}}{h!} = \binom{k}{h} \cdot 1(k)$$

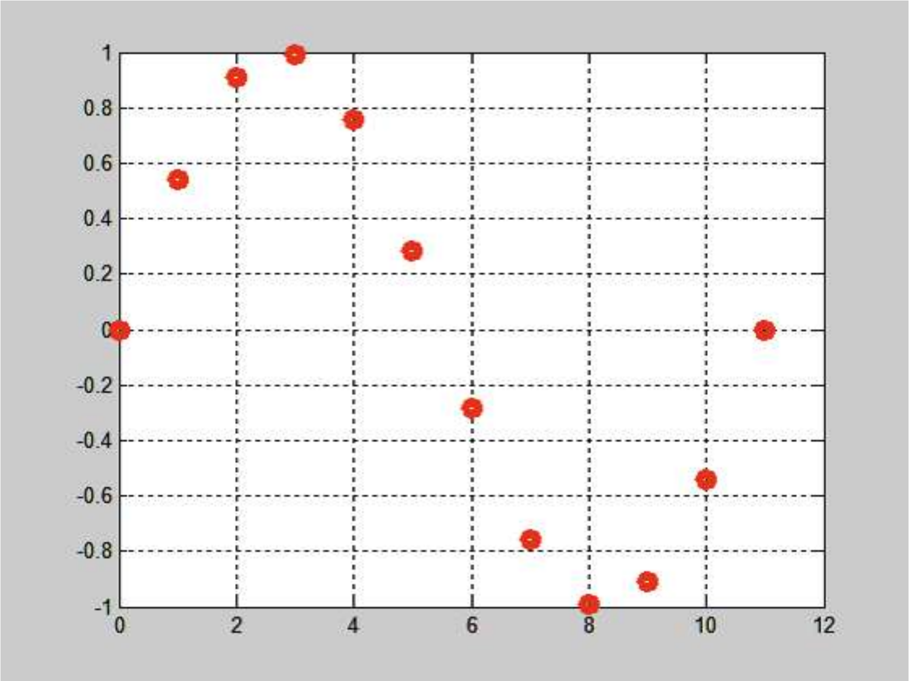
con

$$\binom{k}{h} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-h+1)}{h!} & \left[\begin{array}{l}\text{per } h > 0 \\ k \geq h\end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } h = 0] \end{cases}$$

Segnale sinusoidale

$$w(k) = \begin{cases} \sin(\omega k) & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = \sin(\omega k) \cdot 1(k)$$



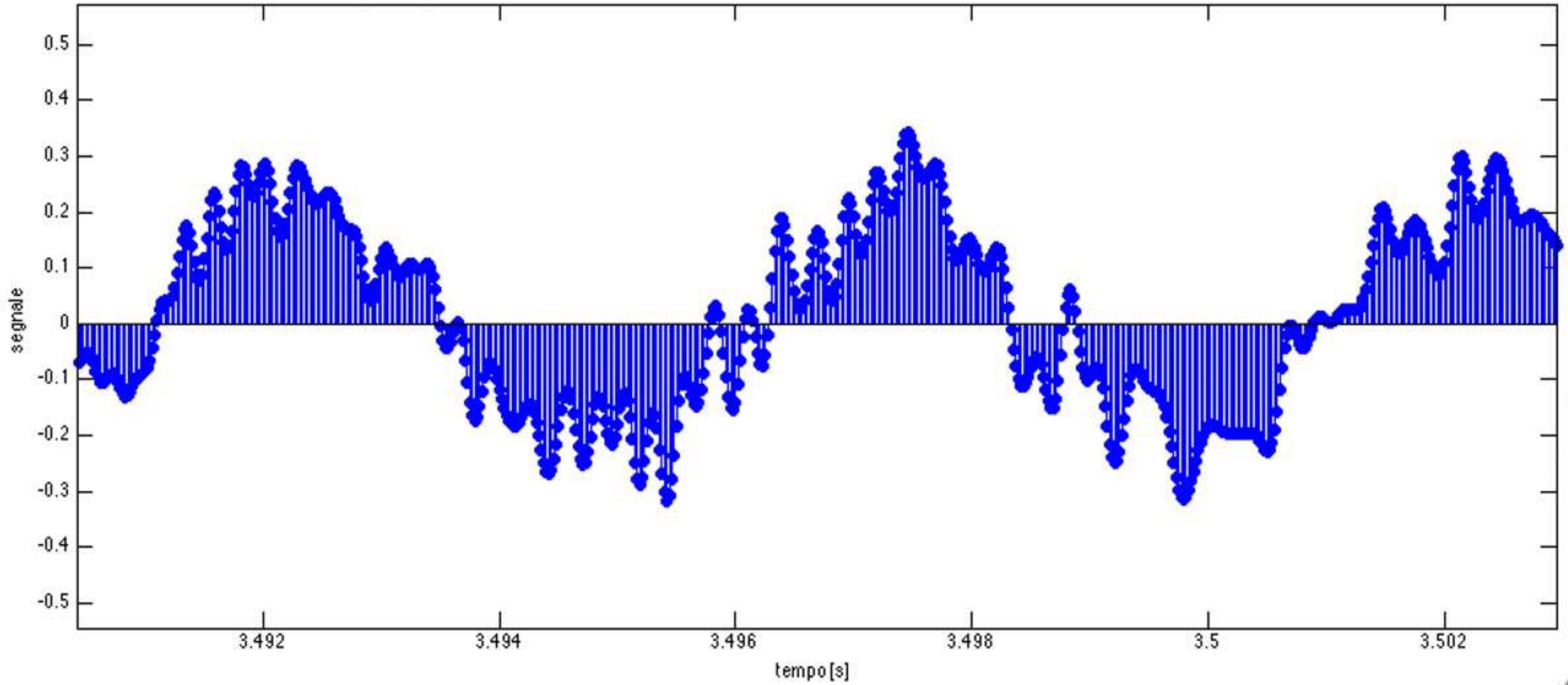
Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = \sin(\Omega k T_s) \cdot 1(kT_s)$$

$$\Omega T_s = \hat{\omega}$$

Esempi

- segnali elettrici generati da suoni catturati attraverso un microfono (es. persona al telefono), sottoposti a campionamento e digitalizzazione

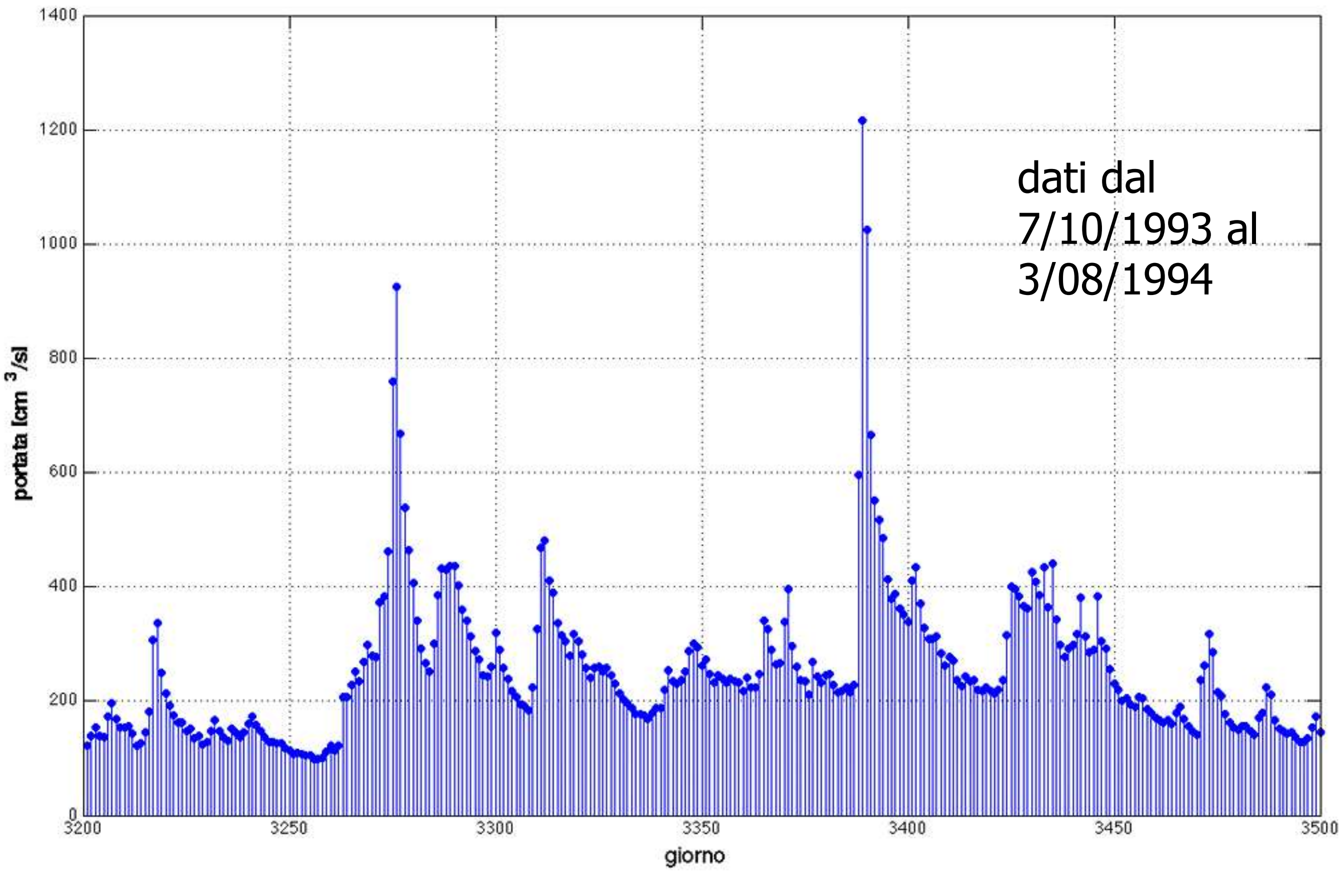


Dave Bowman: “Open the pod bay doors, HAL. “
HAL: “I'm sorry, Dave. I'm afraid I can't do that. “

[2001: A Space Odyssey (1968)]

durata: 7 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV (16 bit)

- segnali intrinsecamente a tempo discreto, come ad esempio quelli delle cosiddette *serie temporali* (dati metereologici, geofisici, economici ecc.)



portata media giornaliera del Danubio a Donauwörth, dal 1/1/1985 al 31/12/2004 – fonte: Università di Würzburg – 7300 campioni (1 campione al giorno)