Trasformata di Laplace

Di un segnale $y(t)$ si conosce la trasformata di Laplace

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s-3)}$$

(a) determinare se possibile

$$y(0),\quad \dot{y}(0),\quad \ddot{y}(0)$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t)$$

(b) determinare l'espressione analitica di $y(t)$

a)

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

$$y(0) = ? \quad y(0) = \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{\cancel{s}(s+1)}{\cancel{s}(s-1)(s+3)} = 0$$

$Y(s)$ è strettamente propria

posso applicare il teo. val in.

$$\dot{y}(0) = ? \quad \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s\,Y(s) - \cancel{y(0)}$$

0

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s\left[s\,Y(s)\right] = \lim_{s \to \infty} s\left[\frac{\cancel{s}(s+1)}{\cancel{s}(s-1)(s+3)}\right] = +1$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)^2(s+2)}{s(s-1)(s+3)} = N_0 + \frac{N_1(s)}{s(s-1)(s-3)}$$

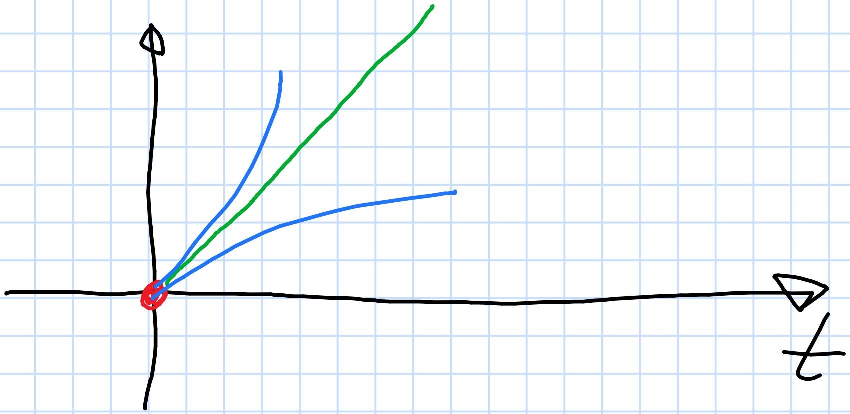
con $\# N_1(s) \leq 2$

$$N(s) = (s+1)^2(s+2) = (s^2+2s+1)(s+2) \dots$$

$$D(s) = s(s^2+2s-3) \dots$$

$$\begin{array}{l|l} (s^2+2s+1)(s+2) & s^3+2s^2-3s \\ \hline N_1(s) & N_0 \end{array}$$

$N_0 \, \mathcal{L}(k)$



$$\ddot{y}(0) = ?$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s\,\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} - \dot{y}(0)$$

$$= s\left[sY(s) - \cancel{y(0)}^{\,0}\right] - 1$$

$$= s^2 Y(s) - 1$$

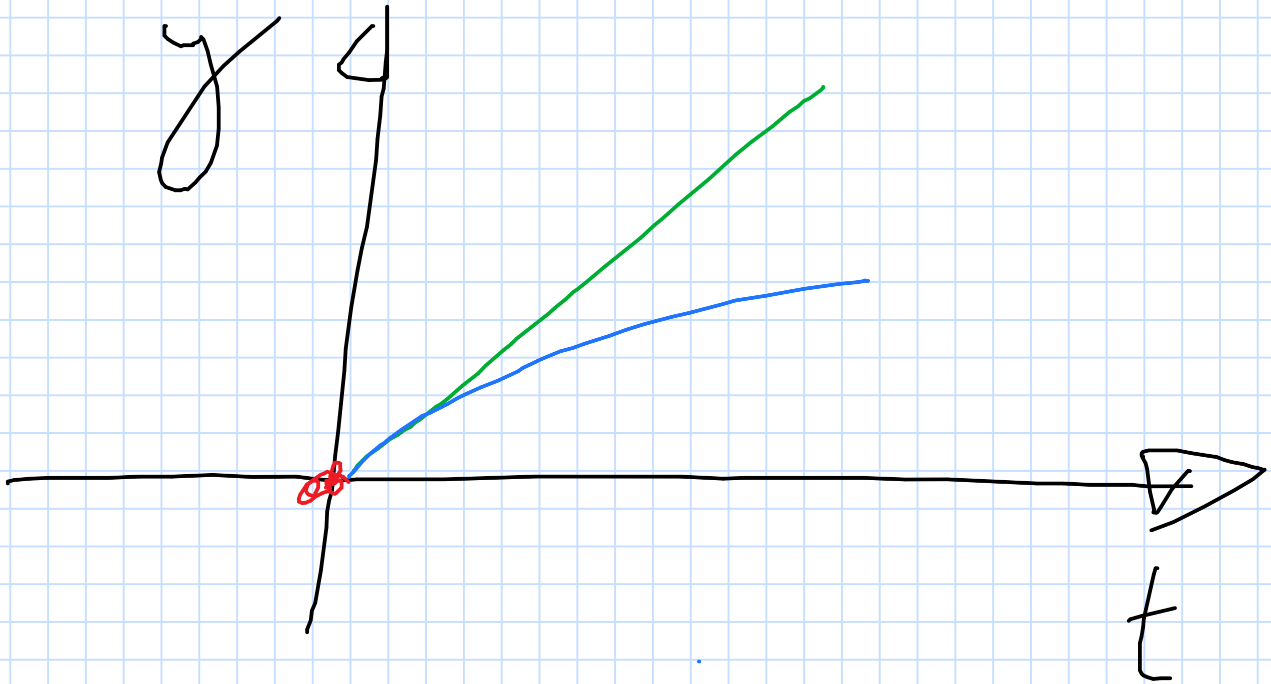
$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s) - 1 = \frac{s^{\cancel{2}\,1}(s+1)}{\cancel{s}_{\,1}(s-1)(s+3)} - 1 = \frac{s(s+1)}{(s-1)(s+3)} - 1$$

$$= \frac{s^2 + s - [s^2 + 2s - 3]}{(s-1)(s+3)} = \frac{s - 2s + 3}{(s-1)(s+3)} = \frac{-s+3}{(s-1)(s+3)}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = \frac{-s+3}{(s+3)(s-1)}$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{s(-s+3)}{(s-1)(s+3)} = -1$$

strettamente propria
Teorema val. in.
applicabile



$$\lim_{t \to \infty} y(t) = ?$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

NON si può applicare
il teorema del valor finale!

ⓑ sviluppo in fratti semplici

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)} = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s-1} + \frac{C_2}{s+3}$$

$$C_1 e^{+t} \cdot 1(t)$$

$$C_0 = \lim_{s \to 0} Y(s) \cdot s = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s}(s+1)}{\cancel{s}(s-1)(s+3)} = -\frac{1}{3}$$

$$C_1 = \lim_{s \to 1} (s-1)Y(s) = \lim_{s \to 1} \frac{\cancel{(s-1)}(s+1)}{s\cancel{(s-1)}(s+3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = \lim_{s \to -3} (s+3)Y(s) = \lim_{s \to -3} \frac{s+1}{s(s-1)} = -\frac{1}{6}$$

$$Y(s) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \left(-\frac{1}{6}\right) \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = \boxed{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{6} e^{-3t}} \cdot 1(t)$$

Realizzazione in equazioni di stato ed analisi di stati d'equilibrio

Si consideri il sistema dinamico non lineare, privo di ingresso, descritto dalla seguente equazione differenziale (si tratta dell'oscillatore di Van der Pol)

$$a\ddot{y} + b(y^2-1)\dot{y} + \frac{1}{c}y = 0$$

$$a, b, c > 0 \; (\in \mathbb{R})$$

(a) determinare una rappresentazione in equazioni di stato per il sistema

(b) determinare tutti gli stati d'equilibrio del sistema, per $a, b, c > 0$

(c) studiare la stabilità degli stati d'equilibrio, per $a, b, c > 0$