Realizzazione in equazioni di stato ed analisi di stati d'equilibrio

Si consideri il sistema dinamico non lineare, privo di ingressi, descritto dalla seguente equazione differenziale (si tratta dell'oscillatore di Van der Pol)

$$a\ddot{y} + b\left(y^2-1\right)\dot{y} + \frac{1}{c}y = 0$$

$$a, b, c > 0 \ (\in \mathbb{R})$$

(a) determinare una rappresentazione in equazioni di stato per il sistema

(b) determinare tutti gli stati d'equilibrio del sistema, per $a, b, c > 0$

(c) studiare la stabilità degli stati d'equilibrio, per $a, b, c > 0$

Sol. (2) → equazioni di stato ⟸ eq. differenziale di ordine 2 ⟹ 2 variabili di stato!

$x_1(t) = y(t) \Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t)$

$x_1(t) = y(t)$

$\Downarrow \; d/dt$

$\dot{x}_1 = \dot{y}$

Riscrivo l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{a}\left[-b\left(x_1^2(t)-1\right)\cdot x_2(t) + \frac{1}{c}x_1(t)\right] \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Sistema dinamico a tempo continuo non lineare ordine 2}}$

Sol. (b) stati di equilibrio

Il sistema in forma compatta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{a}\left[-b\left(x_1^2-1\right)x_2 + \frac{1}{c}x_1\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

per trovare gli stati di equilibrio impongo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x_2 \longrightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ 0 = \frac{1}{a}\left[-b\left(x_1^2-1\right)x_2 + \frac{1}{c}x_1\right] \end{cases}$$

sostituisco nella 2ª equazione

$$\bar{y} = 0 \Longleftarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \frac{1}{ac}x_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

uscita di equilibrio

stato d'equilibrio

Sol (e) $\rightarrow$ sistema linearizzato e stabilità degli stati di equilibrio

Esiste un solo stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Determino l'espressione del sistema linearizzato

in generale
$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A\,\delta x + \cancel{B\,\delta u} \\ \delta y = C\,\delta x + \cancel{D\,\delta u} \end{cases}$$

il sistema NON ha ingressi!

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{c} - 2b\,\bar{x}_1 \bar{x}_2\right] & -\dfrac{b}{a}\left(\bar{x}_1^2 - 1\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{ac} & \dfrac{b}{a} \end{bmatrix}$$

Matrice C:

$$C = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} \right]_{\substack{x_1 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2}}$$

$$= \left[1 \quad 0 \right]$$

Studio di stabilità $\Longrightarrow$ autovalori della matrice A

$$\det\left[\lambda I - A\right] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{1}{ac} & \left(\lambda - \frac{b}{a}\right) \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{b}{a}\right) - \frac{1}{ac}$$

$$= \lambda^2 - \frac{b}{a}\lambda - \frac{1}{ac}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \frac{b}{a}\lambda - \frac{1}{ac}$$

con $a, b, c > 0$ per la regola di Cartesio posso concludere che

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{b}{a}\lambda - \frac{1}{ac}$$

1 v 1 p

- $p(\lambda)$ ha certamente una radice a parte reale positiva

$$\lambda_1 : p(\lambda_1) = 0, \ \mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$$

- l'altra radice ha certamente parte reale negativa

$$\lambda_2 : p(\lambda_2) = 0, \ \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$$

Il sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio ha un autovalore $\bar{\lambda}$ della matrice A con $Re(\bar{\lambda}) > 0$ $\Longrightarrow$ lo stato di equilibrio è stato di equilibrio INSTABILE

$\boxed{\text{Z-trasformata}}$ determinare l'espressione del segnale $\{x(k)\}_{k\geq 0}$ che ha come Z-trasformata la seguente

$$X(z) = \frac{z\,(20z^2 - 22z + 7)}{(z-1)^2\,(2z-1)}$$

Rielaboro per mettere in evidenza tutti i poli

$$X(z) = \frac{z\,(20z^2 - 22z + 7)}{2\,(z-1)^2\,\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

ed ora passo a valutare $X(z)/z$

$$\left[\frac{X(z)}{z}\right] = \frac{(20z^2 - 22z + 7)}{2\,(z-1)^2\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{C_{1,1}}{(z-1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

sviluppo in fratti semplici

$$C_2 = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left[\frac{X(z)}{z}\right]\left(z-\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{(20z^2-22z+7)}{2(z-1)^2\cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)}}\cdot\cancel{\left(z-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\cdot\frac{(20z^2-22z+7)}{(z-1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{20}{4}-\frac{22}{2}+7\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2}(12-11) = 2$$

$$C_{12} = \lim_{z\to 1}\left[\frac{X(z)}{z}\right]\cdot(z-1)^2 = \lim_{z\to 1}\frac{(20z^2-22z+7)}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{20-22+7}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = 5$$

$$C_{11} = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left\{\left[\frac{X(z)}{z}\right](z-1)^2\right\} = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(20z^2-22z+7)}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\left[2(40z-22)\left(z-\frac{1}{2}\right)-(20z^2-22z+7)\cdot 2\right]}{4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$C_{11} = \frac{1\cdot\cancel{2}(40-22)\cdot\frac{1}{\cancel{2}} - (20-22+7)\cdot 2}{1\cdot\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} = \frac{(18-10)}{1} = 8$$

In definitiva

$$\left[\frac{X(z)}{z}\right] = \frac{8}{(z-1)} + \frac{5}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1/2}$$

Ora riportiamo $X(z)$:

$$X(z) = 8\,\frac{z}{z-1} + 5\,\frac{z}{(z-1)^2} + 2\,\frac{z}{z-1/2}$$

$$\frac{z}{z-1} \to 1(k) \qquad \frac{z}{(z-1)^2} \to k\cdot 1(k) \qquad \frac{z}{z-1/2} \to \left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1(k)$$

$$X(z) = 8 \cdot \frac{z}{z-1} + 5\,\frac{z}{(z-1)^2} + 2\,\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(k) = 8 \cdot 1(k) + 5k \cdot 1(k) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1(k)$$

$$= \left[8 + 5k + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \cdot 1(k)$$

per $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\{x(k)\} = \{10,\ 14,\ 37/2,\ \ldots\}$$

ritrovare questo valore utilizzando il teorema del valore iniziale

Consideriamo una Z-trasformata diversa

$$\tilde{X}(z) = \frac{(20z^2 - 22z + 7)}{(z-1)^2(2z-1)}$$

manca il termine 'z' a numeratore

Determinare l'antitrasformata $\{\tilde{x}(k)\}$.

Che relazione c'è tra il segnale $\{\tilde{x}(k)\}$ e quello $\{x(k)\}$ trovato in precedenza?

$$\frac{\tilde{X}(z)}{z} = \frac{(20z^2-22z+7)}{2(z-1)^2(z-\frac{1}{2})\,z}$$

un polo in più rispetto a quelli presenti in $\tilde{X}(z)$

Lo sviluppo in fratti semplici standard è

$$\left[\frac{\tilde{X}(z)}{z}\right] = \frac{C_0}{z} + \frac{C_{11}}{z-1} + \frac{C_{12}}{(z-1)^2} + \frac{C_2}{z-\frac{1}{2}}$$

un termine in più nello sviluppo in fratti semplici

$$C_0 = \lim_{z\to 0} z\left[\frac{\tilde{X}(z)}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}\,(20z^2-22z+7)}{2\cancel{z}(z-1)^2(z-\frac{1}{2})} = \frac{7}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = -7$$

$$C_{12} = \lim_{z\to 1} (z-1)^2\left[\frac{\tilde{X}(z)}{z}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{\cancel{(z-1)^2}\,(20z^2-22z+7)}{2z\,\cancel{(z-1)^2}\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{(20-22+7)}{\cancel{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \boxed{5}$$

$$C_{11} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2\left[\frac{\tilde{X}(z)}{z}\right]\right\} = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(20z^2-22z+7)}{2z\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(40z-22)\left[2z\left(z-\frac{1}{2}\right)\right]-(20z^2-22z+7)\left[4z-1\right]}{4z^2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{(40-22)\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)-(20-22+7)\left[4-1\right]}{\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} = \frac{(18-15)}{1} = \boxed{3}$$

$$c_2 = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{\tilde{X}(z)}{z}\right] = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{(20z^2 - 22z + 7)}{2z(z-1)^2 \cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}} \cdot \cancel{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{(20z^2 - 22z + 7)}{2z(z-1)^2} = \frac{\left(\frac{\cancel{20}\,5}{\cancel{4}\,1} - \frac{\cancel{22}\,11}{\cancel{2}\,1} + 7\right)}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{4}} = 4 \cdot (5 - 11 + 7)$$

$$= 4$$

In definitiva

$$\tilde{X}(z) = -7 \cdot 1 + 3\frac{z}{z-1} + 5\frac{z}{(z-1)^2} + 4\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$\delta(k)$ $\quad 1(k)$ $\quad k \cdot 1(k)$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 1(k)$

$$\tilde{X}(z) = -7\cdot 1 + 3\,\frac{z}{z-1} + 5\,\frac{z}{(z-1)^2} + 4\,\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{x}(k) = -7\cdot\delta(k) + 3\cdot 1(k) + 5k\cdot 1(k) + 4\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1(k)$$

$$\{\tilde{x}(k)\} = \left\{0,\ 10,\ 14,\ \frac{37}{2},\ \ldots\right\}$$

ritrovare questi 2 valori usando il teorema del valore iniziale

La relazione esistente tra $X(z)$ e $\tilde{X}(z)$ si può scrivere così

$$\tilde{X}(z) = z^{-1} X(z)$$

$$\Updownarrow$$

Ma allora vale anche che $\tilde{x}(k) = x(k-1)$

cioè che la nuova sequenza è pari a quella

originaria ritardata di 1 passo

Allora sfruttando questa relazione (1 passo di ritardo) il segnale $\{\tilde{x}(k)\}_{k\geq 0}$

si può esprimere così:

$$\tilde{x}(k) = x(k-1) = \left[8 + 5(k-1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)}\right] \cdot 1(k-1)$$