

Elementi di Teoria dei Sistemi

Sistemi dinamici a tempo discreto

Analisi e proprietà

Variabili di stato

Variabili da conoscere in k_0 per determinare $\{y(k)\}, k \geq k_0$

a partire da $\{u(k)\}, k \geq k_0$

$$x_i(k), i = 1, 2, \dots, n$$

Ordine del sistema

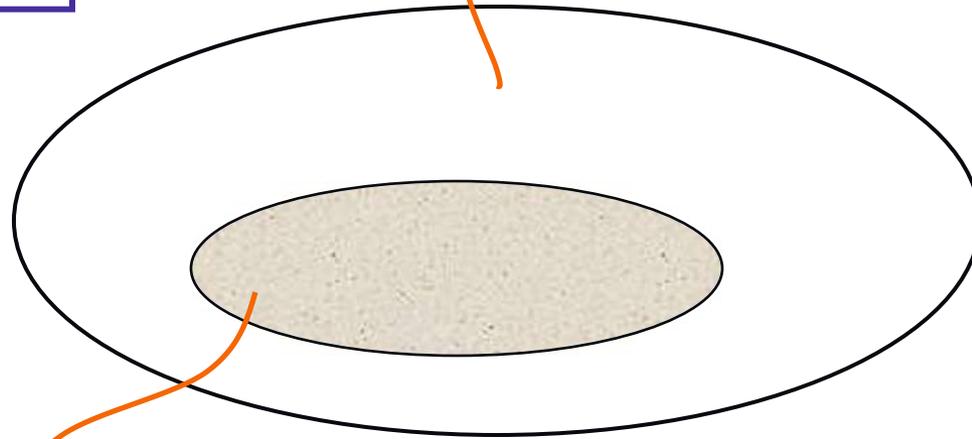
(variabili di stato)

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(vettore di stato)

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Sistemi dinamici a tempo discreto



Equazioni di stato

$$\begin{cases} x_i(k+1) = f_i[x(k), u(k), k], & i = 1, \dots, n \\ y(k) = g[x(k), u(k), k] \end{cases}$$

Trasformazione d'uscita

Usando la notazione vettoriale:

$$f[x(k), u(k), k] := \begin{bmatrix} f_1[x(k), u(k), k] \\ \vdots \\ f_n[x(k), u(k), k] \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \\ y(k) = g[x(k), u(k), k] \end{cases}$$

evolutione dello stato

evolutione dell'uscita

e per brevità di notazione scriveremo a volte

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) \\ y_k = g(x_k, u_k, k) \end{cases}$$

Definizioni:

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

- Sistema strettamente proprio

se $g(\cdot)$ non dipende da $u(k)$

- Sistema tempo-invariante (o stazionario)

se $f(\cdot), g(\cdot)$ non dipendono da k

- Sistema lineare

se $f(\cdot), g(\cdot)$ sono funzioni lineari in $x(k), u(k)$

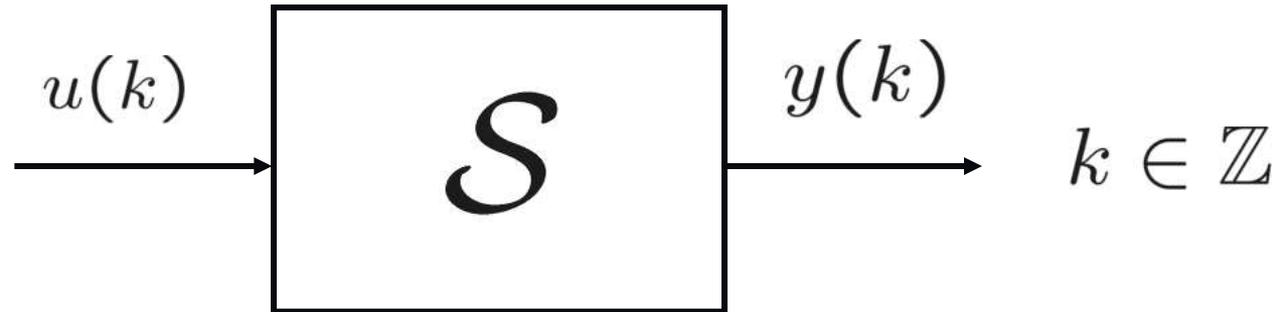
- Sistema monovariabile (SISO)

se $m = p = 1$ (1 ingresso, 1 uscita)

- Sistema multivariabile (MIMO)

se $m \neq 1$ e/o $p \neq 1$ (più ingressi e/o più uscite)

Sistemi dinamici a tempo discreto



$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \\ y(k) = g[x(k), u(k), k] \end{cases}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ stato
 $u(k) \in \mathbb{R}^m$ ingresso
 $y(k) \in \mathbb{R}^p$ uscita

Esempio 5)

“Le spese nell’anno k sono proporzionali al reddito nell’anno k ”

$$y(k) = \alpha \cdot u(k)$$

Non dinamico

Non è necessaria l’introduzione di variabili di stato



Esempio 6)

scorte \leftrightarrow accumulo di materiale

“Le scorte di magazzino del prossimo mese sono proporzionali alle scorte attuali, alla quantità prodotta e venduta nel mese attuale”

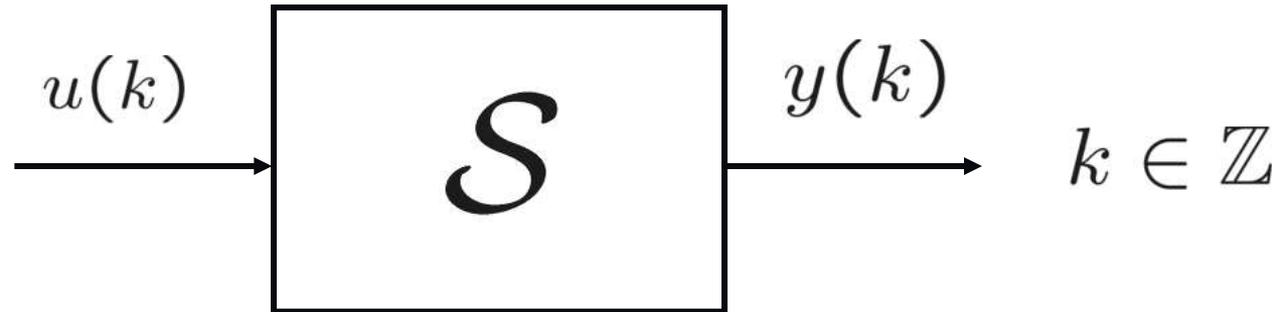
$$s(k+1) = s(k) + q(k) - v(k)$$

$$\begin{cases} x(k) = s(k) \\ u_1(k) = q(k) \quad u_2(k) = v(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

- Primo ordine
- MIMO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k) - u_2(k) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = x(k) = g(x(k)) \end{cases}$$

Rappresentazione di stato



$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ stato
 $u \in \mathbb{R}^m$ ingresso
 $y \in \mathbb{R}^p$ uscita

Scelta delle variabili di stato

- Criteri?
- La scelta è univoca?
- L'ordine è fissato?

Cfr. le considerazioni fatte per le variabili di stato dei sistemi dinamici a tempo continuo

Un criterio "ingegneristico"

Variabili di stato



Grandezze associate
ad accumuli di ...

es. scorte nel magazzino

Cfr. le considerazioni fatte per le variabili di stato dei sistemi dinamici a tempo continuo

Un criterio "matematico"

Supponiamo di aver ricavato un'eq. alle differenze di ordine n

$$y(k) = f(u(k), y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n))$$

Associamo ai **valori passati** della successione incognita $\{y(k)\}$ le variabili di stato (n per la precisione) nel modo seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k) = y(k-n) \\ x_2(k) = y(k-n+1) \\ x_3(k) = y(k-n+2) \\ \dots \\ x_n(k) = y(k-1) \end{array} \right.$$

Utilizzando le variabili di stato appena definite è possibile scrivere

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = x_4(k) \\ \dots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = f(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k)) \\ y(k) = f(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u(k)) \end{array} \right.$$

Esempio

Si abbia l'eq. alle differenze di ordine 3

$$w(k) - 3w(k-1) + 2w(k-2) - w(k-3) = 6u(k)$$

se fosse stato
 $y(k) = w(k-3)$

Ponendo

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{cases} x_1(k) := w(k-3) \\ x_2(k) := w(k-2) \\ x_3(k) := w(k-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \\ y(k) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Proviamo a risolvere l'eq. alle differenze a partire dall'istante $k=0$, con condizioni iniziali

$$w(-1) = w(-2) = w(-3) = 0$$

e come segnale $\{u(k)\}$ utilizziamo un gradino unitario (sempre applicato a partire dall'istante $k=0$).

La sequenza $\{w(k)\}$ allora è

$$\{w(k)\} = \{6, 24, 66, 162, \dots\}$$

Proviamo a risolvere in modo ricorsivo l'eq. alle differenze utilizzando le equazioni di stato con condizioni iniziali

$$x(0) := \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per come abbiamo definito le variabili di stato, i valori all'istante $k=0$ di x_1 , x_2 e x_3 coincidono con i valori $w(-1)$, $w(-2)$, $w(-3)$ della sequenza $\{w(k)\}$.

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \\ y(k) = 3x_3(k) - 2x_2(k) + x_1(k) + 6u(k) \end{cases}$$

$$\text{per } k = 0 \quad \begin{cases} x_1(1) = x_2(0) = 0 \\ x_2(1) = x_3(0) = 0 \\ x_3(1) = 3x_3(0) - 2x_2(0) + x_1(0) + 6u(0) = 6 \\ y(0) = 3x_3(0) - 2x_2(0) + x_1(0) + 6u(0) = 6 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 1 \quad \begin{cases} x_1(2) = x_2(1) = 0 \\ x_2(2) = x_3(1) = 6 \\ x_3(2) = 3x_3(1) - 2x_2(1) + x_1(1) + 6u(1) = 24 \\ y(1) = 3x_3(1) - 2x_2(1) + x_1(1) + 6u(1) = 24 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 2 \quad \begin{cases} x_1(3) = x_2(2) = 6 \\ x_2(3) = x_3(2) = 24 \\ x_3(3) = 3x_3(2) - 2x_2(2) + x_1(2) + 6u(2) = 66 \\ y(2) = 3x_3(2) - 2x_2(2) + x_1(2) + 6u(2) = 66 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 3 \quad \begin{cases} x_1(4) = x_2(3) = 24 \\ x_2(4) = x_3(3) = 66 \\ x_3(4) = 3x_3(3) - 2x_2(3) + x_1(3) + 6u(3) = 162 \\ y(3) = 3x_3(3) - 2x_2(3) + x_1(3) + 6u(3) = 162 \end{cases}$$

$$\text{per } k = 4 \quad \begin{cases} x_1(5) = x_2(4) = 66 \\ x_2(5) = x_3(4) = 162 \\ x_3(5) = 3x_3(4) - 2x_2(4) + x_1(4) + 6u(4) = 414 \\ y(4) = 3x_3(4) - 2x_2(4) + x_1(4) + 6u(4) = 414 \end{cases}$$

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) & x \in \mathbb{R}^n \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) & u \in \mathbb{R}^m \\ & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

$$\hat{x} = Tx, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$



$$\hat{x}(k+1) = T x(k+1) = T f(T^{-1} \hat{x}(k), u(k), k)$$

$$\hat{x}(k+1) =: \hat{f}(\hat{x}(k), u(k), k)$$

$$y(k) = g(T^{-1} \hat{x}(k), u(k), k) =: \hat{g}(\hat{x}(k), u(k), k)$$

Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} k_0 \\ u(k), k \geq k_0 \\ x(k_0) \end{array} \right\}$$



Movimento dello stato

$$x(k), k \geq k_0$$

$$y(k), k \geq k_0$$

Movimento dell'uscita

Calcolo del Movimento

Due passi:

a) soluzione eq. di stato



$$x(k), k \geq k_0$$

b) Sostituzione di x, u
nella trasformazione d'uscita



$$y(k), k \geq k_0$$

Osservazione importante:

Per sistemi stazionari è lecito assumere

$$k_0 = 0$$

senza ledere la generalità

Esempio

Vogliamo determinare il movimento dello stato per il sistema

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k) - u_2(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

supponendo che

$$u_1(k) = 5 \cdot 1(k)$$

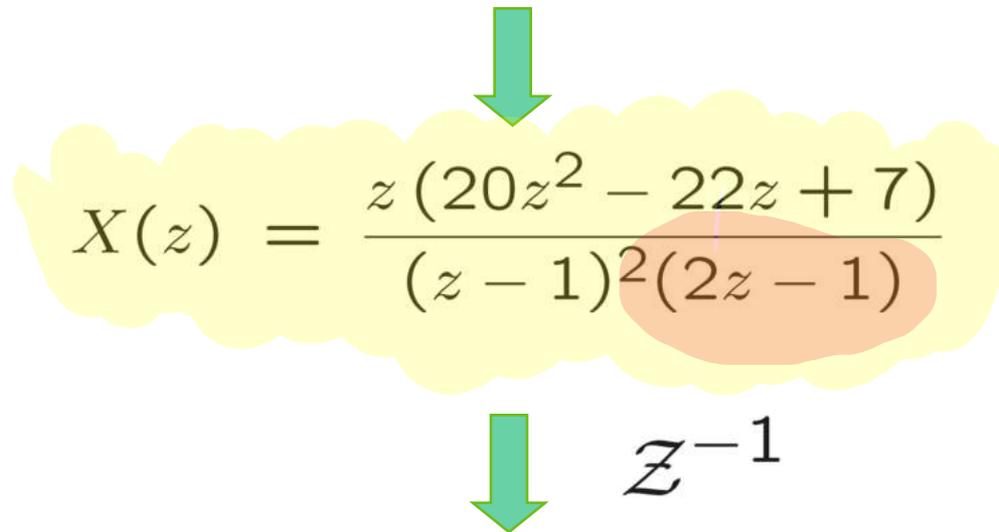
$$x_0 = 10$$

$$u_2(k) = 0.5^k 1(k)$$

Utilizzo la Z-Trasformata!

$$z [X(z) - x(0)] = X(z) + U_1(z) - U_2(z)$$

$$X(z) = \frac{10z(z-1)(z-0.5) + 5z(z-0.5) - z(z-1)}{(z-1)^2(z-0.5)}$$



$$X(z) = \frac{z(20z^2 - 22z + 7)}{(z-1)^2(2z-1)}$$

$$\downarrow z^{-1}$$

$$x(k) = \left[8 + 5k + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^k \right] 1(k)$$

Il movimento dell' uscita coincide con quello dello stato.

Equilibrio (sistemi stazionari)

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \quad u(k) = \bar{u}, k \geq 0$$

- Stato di equilibrio \bar{x}



movimento costante di $x(k)$ con $u(k) = \bar{u}$

- Gli stati di equilibrio si trovano tutti al variare di $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

- Uscita di equilibrio \bar{y}



movimento costante di $y(k)$ con $u(k) = \bar{u}$

Calcolo dell' equilibrio

- Risolvere l' equazione algebrica

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \longrightarrow \bar{x}$$

- Sostituire \bar{x}, \bar{u} nella trasformazione d' uscita

$$\searrow \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

Esempio 6)

Consideriamo ancora il sistema lineare MIMO

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k) - u_2(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$



$$\bar{x} = \bar{x} + \cancel{\bar{u}} - \cancel{\bar{u}}$$

Se succede che:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2$$



allora

$$\exists \infty \bar{x} \quad \exists \infty \bar{y}$$

In particolare

$$\bar{x} = x(0)$$

Esempio 7)

Consideriamo il sistema SISO non lineare

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha(1 - \beta x_1(k))x_1(k) + \\ \quad - \gamma x_1(k)x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \delta x_2(k) + \eta x_1(k)x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

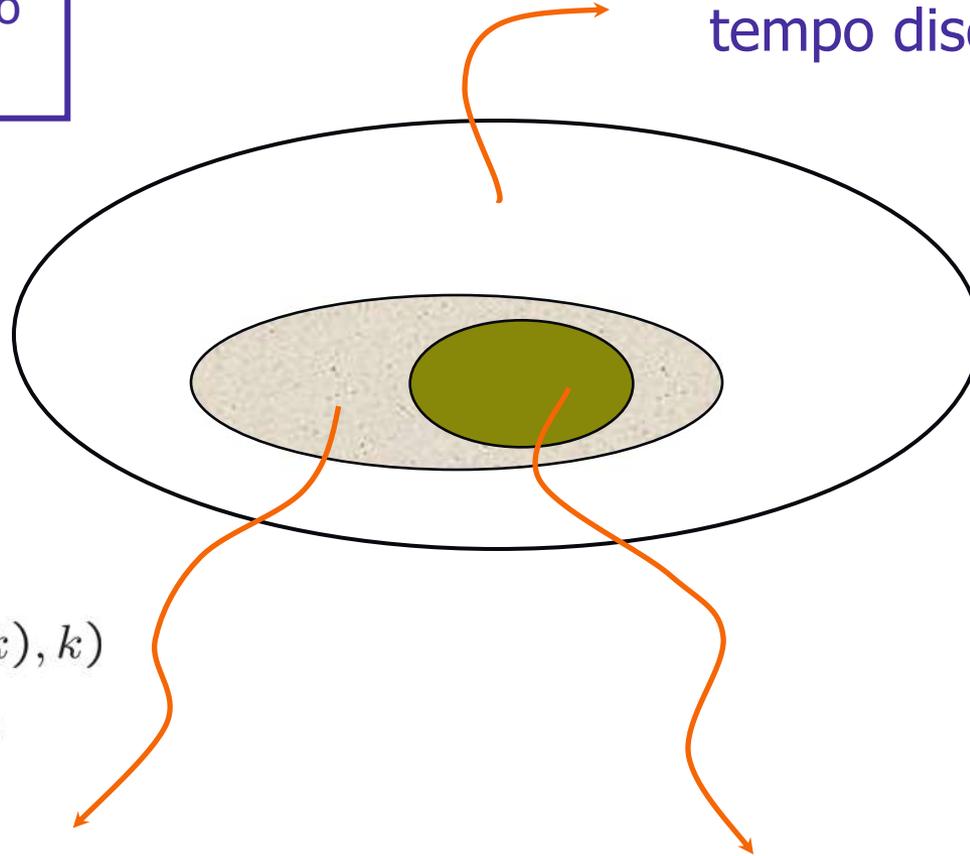
$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta\delta}{\eta} \right) \end{bmatrix}$$

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Sistemi dinamici a tempo discreto



$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases}$$

Sistemi dinamici a tempo discreto che ammettono equazioni di stato

Sistemi dinamici
- lineari
- stazionari

Sistemi lineari stazionari SISO

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \cdots + a_{1n}x_n(k) + b_1u(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \cdots + a_{nn}x_n(k) + b_nu(k) \\ y(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + \cdots + c_nx_n(k) + du(k) \end{array} \right.$$

Combinazioni **lineari** di variabili di stato e del controllo

Sistemi lineari stazionari SISO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}} \right\} n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} \right\} n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_1$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}} \right\} 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

$$D = d \in \mathbb{R}$$



$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

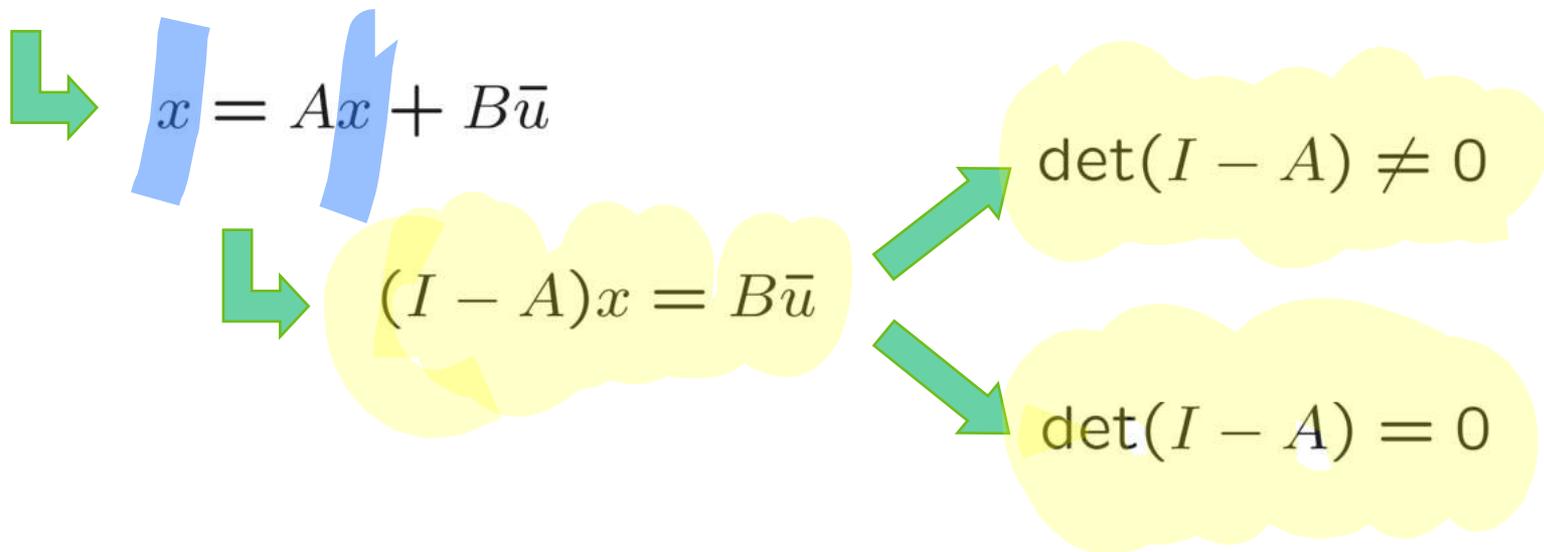
$$u \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$(A, B, C, D)$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad u(k) = \bar{u}, k \geq 0$$

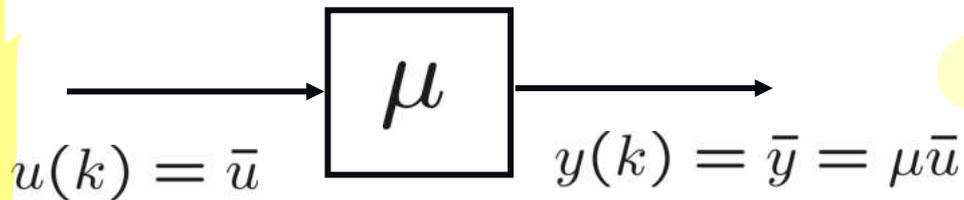


Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\det(I - A) \neq 0 \longrightarrow \bar{x} = (I - A)^{-1} B \bar{u} \longrightarrow \exists \bar{x} \text{ unico}$$

$$\bar{y} = C \bar{x} + D \bar{u} = C(I - A)^{-1} B \bar{u} + D \bar{u}$$

$$= \underbrace{[C(I - A)^{-1} B + D]}_{\mu} \bar{u}$$



Guadagno statico

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\det(I - A) = 0 \begin{cases} \exists \infty \bar{x} \quad \exists \infty \bar{y} \\ \nexists \bar{x} \quad \nexists \bar{y} \end{cases}$$

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = cx(k) + du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$



$$x(k) = a^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i)$$

$$y(k) = ca^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} [ca^{k-i-1} bu(i)] + du(k)$$

Cenno di dimostrazione:

Per semplice sostituzione, partendo da $x(0) = x_0$

Ricordiamo: $x(k + 1) = ax(k) + bu(k)$

Quindi:

$$x(1) = ax(0) + bu(0)$$

$$x(2) = ax(1) + bu(1) = a^2x(0) + ab u(0) + bu(1)$$

$$x(3) = \dots = a^3x(0) + a^2bu(0) + ab u(1) + bu(2)$$

...

$$x(k) = a^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i)$$

... con le Z-trasformate:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \mathcal{Z}\{ax(k) + bu(k)\}$$

$$zX(z) - zx(0) = aX(z) + bU(z)$$

$$(z - a)X(z) = zx(0) + bU(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}x(0) + \frac{b}{z-a}U(z) = z(z-a)^{-1}x(0) + b(z-a)^{-1}U(z)$$

usando la proprietà $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$

e la trasformata notevole $\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \frac{z}{z-a}$

$$\mathcal{Z}^{-1} \downarrow x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = a^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i), k \geq 0$$

Movimento (caso generale - $n > 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & u(k), k \geq 0 \end{cases}$$



$$x(k) = \underbrace{A^k}_{n \times n} \underbrace{x_0}_{n \times 1} + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{A^{k-i-1}}_{n \times n} \underbrace{B}_{n \times 1} \underbrace{u(i)}_{1 \times 1}$$

Lo si confronti con l' analogo risultato per i sistemi dinamici lineari tempo-invarianti a tempo continuo

Movimento dello stato

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{x_l(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i)}_{x_f(k)}$$



$$x(k) = x_l(k) + x_f(k)$$

Movimento **libero**: dipende da x_0
linearmente

Movimento **forzato**: dipende
da $u(k)$ linearmente

Movimento dell'uscita

$$y(k) = \underbrace{C A^k x_0}_{y_l(k)} + \underbrace{C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) + D u(k)}_{y_f(k)}$$

↳ $y(k) = y_l(k) + y_f(k)$

Movimento **libero**: dipende da x_0
linearmente

Movimento **forzato**: dipende
da $u(k)$ linearmente

Principio di sovrapp. degli effetti

$$\left. \begin{array}{l} x'_0 \\ u'(k), k \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow x'(k), y'(k), k \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x''_0 \\ u''(k), k \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow x''(k), y''(k), k \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \\ u(k) = \alpha u'(k) + \beta u''(k), k \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x(k) = \alpha x'(k) + \beta x''(k) \\ y(k) = \alpha y'(k) + \beta y''(k) \end{array}$$

Nota: la proprietà vale anche per sistemi non stazionari purché lineari.

Sistemi lineari stazionari MIMO

$$\begin{aligned}
 A &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_n \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \right\} n \\
 B &= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_m \left. \vphantom{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}} \right\} n \\
 C &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_n \left. \vphantom{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}} \right\} p \\
 D &= \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}_n \left. \vphantom{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}} \right\} p
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array} \quad (A, B, C, D)$$

Le formule valide nel caso SISO si applicano con ovvi cambiamenti.

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\hat{x} = Tx, \quad x = T^{-1}\hat{x}$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = T(Ax(k) + Bu(k)) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\hat{A}}\hat{x}(k) + \underbrace{TB}_{\hat{B}}u(k) \\ y(k) = \underbrace{CT^{-1}}_{\hat{C}}\hat{x}(k) + \underbrace{D}_{\hat{D}}u(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \end{cases}$$

Notazione: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$

Esercizio "per casa"



Considerare due descrizioni in equazioni di stato equivalenti per un sistema dinamico lineare a tempo discreto

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

Mostrare che:

- se $\det(I - A) \neq 0$ il guadagno statico μ non cambia
- se $\hat{x}_0 = T x_0$ il movimento $y(k)$ non cambia

Linearizzazione

Idea di base: vogliamo studiare il comportamento di un sistema dinamico a tempo discreto, non lineare, nell'intorno di una condizione d'equilibrio, descritta da

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \quad \begin{aligned} u(k) &= \bar{u}, k \geq 0 \\ \bar{x} &= f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} &= g(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$



$$y(x) \simeq y(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Definiamo gli scostamenti rispetto all' equilibrio:

$$\begin{aligned}\delta u(k) &:= u(k) - \bar{u} \\ \delta x(k) &:= x(k) - \bar{x}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}u(k) &= \delta u(k) + \bar{u} \\ x(k) &= \delta x(k) + \bar{x}\end{aligned}$$



$$x(k+1) = \bar{x} + \delta x(k+1) = f(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k))$$

$$\begin{aligned}\bar{x} + \delta x(k+1) &\simeq \cancel{f(\bar{x}, \bar{u})} + f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(k) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(k) \\ &= \bar{x} \text{ (equilibrio)}\end{aligned}$$



$$\delta x(k+1) \simeq f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(k) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(k)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \times n}$$

$$A$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \times m}$$

$$B$$

dove evidentemente:

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array}} \right\} n$$

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{array}} \right\} n$$

m

Vediamo la trasformazione d'uscita:

$$\delta y(k) := y(k) - \bar{y} \quad \longrightarrow \quad y(k) = \delta y(k) + \bar{y}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow y(k) &= \cancel{\bar{y}} + \delta y(k) = g(\bar{x} + \delta x(k), \bar{u} + \delta u(k)) \\ &\simeq \cancel{g(\bar{x}, \bar{u})} + g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(k) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \delta y(k) &\simeq \underbrace{g_x(\bar{x}, \bar{u})}_{p \times n} \delta x(k) + \underbrace{g_u(\bar{x}, \bar{u})}_{p \times m} \delta u(k) \\ &\quad C \qquad \qquad \qquad D \end{aligned}$$

dove:

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{array}} \right\} p$$

$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{array}} \right\} p$$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} \quad x = f(x, \bar{u}) \quad \longrightarrow \quad \bar{x}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \delta x(k+1) = \underbrace{f_x(\bar{x}, \bar{u})}_{A} \delta x(k) + \underbrace{f_u(\bar{x}, \bar{u})}_{B} \delta u(k)$$

$$\delta y(k) = \underbrace{g_x(\bar{x}, \bar{u})}_{C} \delta x(k) + \underbrace{g_u(\bar{x}, \bar{u})}_{D} \delta u(k)$$

$$\begin{cases} \delta x(k+1) = A \delta x(k) + B \delta u(k) & x \in \mathbb{R}^n \\ & u \in \mathbb{R}^m \\ \delta y(k) = C \delta x(k) + D \delta u(k) & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Esempio Consideriamo ancora il sistema SISO non lineare

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha(1 - \beta x_1(k))x_1(k) + \\ \quad - \gamma x_1(k)x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \delta x_2(k) + \eta x_1(k)x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$$

$$\bar{u} = 0$$



$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta\delta}{\eta} \right) \end{bmatrix}$$

Determiniamo le espressioni dei sistemi linearizzati in corrispondenza dell'ingresso e degli stato d'equilibrio considerati.

Quindi:

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1 + \alpha - 2\alpha\beta x_1 - \gamma x_2) & -\gamma x_1 \\ \eta x_2 & 1 - \delta + \eta x_1 \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \bar{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} (1 + \alpha) & 0 \\ 0 & 1 - \delta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \bar{A}_{(2)} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha) & -\frac{\gamma}{\beta} \\ 0 & 1 - \delta + \frac{\eta}{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta\delta}{\eta} \right) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{(3)} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\alpha\beta\delta}{\eta} \right) & -\frac{\gamma\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha\eta}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta\delta}{\eta} \right) & 1 \end{bmatrix}$$

Poi (tutte queste quantità non dipendono dallo stato di eq.):

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] = \bar{B}$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] = \bar{C}$$

$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = 0_{\bar{x}, \bar{u}} = 0 = \bar{D}$$